UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL
ÁREA DO CONHECIMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E ENGENHARIAS

MATEUS AFONSO GARBUIO

AVALIAÇÃO DA MELHORIA DA REPRODUCIBILIDADE POLINOMIAL DAS PARTIÇÕES DA UNIDADE DO C^k-GFEM EM PROBLEMAS DINÂMICOS

CAXIAS DO SUL
2021

MATEUS AFONSO GARBUIO

AVALIAÇÃO DA MELHORIA DA REPRODUCIBILIDADE POLINOMIAL DAS PARTIÇÕES DA UNIDADE DO C^k-GFEM EM PROBLEMAS DINÂMICOS

Trabalho de conclusão do curso de Engenharia Mecânica apresentado como requisito parcial para a obtebção do título de Engenheiro Mecânico pela Universidade de Caxias do Sul.

Orientador: Prof. Me. Eng. Paulo Roberto Linzmaier

CAXIAS DO SUL
2021

MATEUS AFONSO GARBUIO

AVALIAÇÃO DA MELHORIA DA REPRODUCIBILIDADE POLINOMIAL DAS PARTIÇÕES DA UNIDADE DO C^k-GFEM EM PROBLEMAS DINÂMICOS

Trabalho de conclusão do curso de Engenharia Mecânica apresentado como requisito parcial para a obtebção do título de Engenheiro Mecânico pela Universidade de Caxias do Sul.

Área de concentração: Mecânica dos Corpos Sólidos, Elásticos e Plásticos.

Aprovado em 08/12/2021

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alexandre Fassini Michels
Universidade de Caxias do Sul

Prof. Dr. Leonardo Dagnino Chiwiacowsky
Universidade de Caxias do Sul

Prof. Me. Paulo Roberto Linzmaier
Universidade de Caxias do Sul

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Me. Paulo Roberto Linzmaier por aceitar a condução deste trabalho, bem como todo o suporte prestado em seu desenvolvimento, e também o conhecimento transmitido nas cadeiras da graduação complementares ao trabalho aqui apresentado.

Ao meu orientador de Iniciação Científica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Professor Dr. Diego Amadeu Furtado Torres, idealizador da metodologia aqui apresentada, por todo o conhecimento transmitido durante a minha graduação e projeto de pesquisa desenvolvido.

Aos meus pais, Claudenir e Giuliana, pelo suporte nos momentos mais difíceis, pela motivação para seguir em frente com as decisões tomadas e por me ensinarem tudo aquilo que considero essencial para a minha formação pessoal e profissional.

À minha irmã Danieli, quem considero o meu braço direito, por estar sempre presente no decorrer da minha graduação, mesmo que à distância, prestando por muitas vezes os votos finais e essenciais em momentos de indecisão.

Aos meus professores e colegas da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, bem como os da Universidade de Caxias do Sul, por todo o conhecimento transmitido e momentos memoráveis compartilhados em minha graduação.

RESUMO

No presente trabalho, foi proposta uma melhoria da reproducibilidade polinomial do Método de Elementos Finitos Generalizados com Continuidade Arbitrária (C^k-GFEM). Para tanto, foi atribuída uma base polinomial linear ao Método de Minímos Quadrados Móveis (MLS) alternativamente à base constante de funções (funções de Shepard) do C^k-GFEM. Para a construção das funções de ponderação, foi utilizada a mesma estrutura já proposta no C^k-GFEM convencional. Como forma de avaliação de desempenho de ambas as funções propostas, realizou-se um estudo de caso de vibração livre com vigas do tipo Euler-Bernoulli, considerando elasticidade linear. Ainda, foi avaliado o desempenho das funções convencionais da base de Hermite de forma comparativa às funções do C^k-GFEM e da melhoria proposta. Enriquecimento extrínseco, como no C^k-GFEM convencional, foi aplicado para ambas as PU's do C^k-GFEM e das funções com reproducibilidade polinomial melhoradas. Resultados numéricos na forma de erros absolutos percentuais foram apresentados para o problema avaliado, bem como uma análise de custos computacionais em termos de sistemas de equações gerados e pontos de integração necessários para cada função. Os resultados sugerem que, para o problema abordado, o enriquecimento intrínseco via MLS melhora a aproximação das PU's do C^k-GFEM original sem a necessidade de enriquecimento extrínseco, enquanto é capaz de melhor aproximar os campos de análise se comparadas às PU's originais, e mantendo ainda os parâmetros h, p e k arbitrários como no C^k-GFEM original. Na condição de reproducibilidade polinomial linear, as funções melhoradas apresentaram melhor integrabilidade e um sistema de equações menor do que o obtido via C^k-GFEM para uma mesma condição de malha. Com o enriquecimento extrínseco das funções melhoradas via MLS, obteve-se custos computacionais similares ao C^k-GFEM convencional para um mesmo nível de reproducibilidade polinomial (quadrático), enquanto os níveis de erro se mostraram superiores ao C^k-GFEM na respectiva condição.

Palavras-chave: Método de Mínimos Quadrados Móveis. Enriquecimento Intrínseco. Enriquecimento Extrínseco. Suavidade. Método de Elementos Finitos Generalizados.

ABSTRACT

In this work, an improvement on the polynomial reproducibility of the C^k-Generalized Finite Element Method (C^k-GFEM) was proposed. This was achieved by assigning a linear polynomial basis to the Moving Least Squares (MLS) procedure, alternatively to the constant basis function (Shepard functions) used in the conventional C^k-GFEM. The weighting functions were defined as in the procedure proposed by the conventional C^k-GFEM. In order to evaluate the improvement proposed, a free vibration problem of an Euler-Bernoulli beam model, with linear elasticity, was considered. Still, the Hermite functions were also considered for the performance analysis, in comparison to both the C^k-GFEM and the proposed improvement. Extrinsic enrichment, as in the conventional GFEM, was also applied to both the original C^k-GFEM and its improved version. Numerical results in the form of absolute and percent errors are presented for the studied problem, as well as a computational cost analysis regarding the system of equations generated by each method and the number of integration points of the Gaussian quadrature needed for the integration procedures. The results suggest that, for the presented problem, the intrinsic enrichment via MLS improves the approximation in the context of C^k-GFEM without the need of an extrinsic enrichment, while being able to better approximate regular fields if compared to the original PoU, and keeping the arbitrariness of the parameters h, p and k as in original C^k-GFEM. Considering the linear polynomial reproducibility, the improved functions presented better integrability and a reduced system of equations compared to the C^k-GFEM for a given mesh condition. Considering extrinsic enrichment of the improved functions, similar computational costs to the C^k-GFEM were obtained for the same polynomial reproducibility (quadratic), while the error levels obtained were superior than the obtained by the conventional $C^k - GFEM$.

Keywords: Moving Least Squares. Intrinsic Enrichment. Extrinsic Enrichment. Smoothness. Generalized Finite Element Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação da equação $y(x) = x$, bem como sua primeira diferencial, utilizando as Partições da Unidade do C^k-GFEM convencional. 19
Figura 2 – Representação da equação $y(x) = x$, bem como sua primeira diferencial, utilizando as Partições da Unidade melhoradas via MLS. 19
Figura 3 – Representação do problema de vibração lateral forçada. 21
Figura 4 – Montagem da matriz de rigidez global $\mathbf{K}$. 26
Figura 5 – Discretização do domínio: métodos com malha (a) e sem malha (b). 27
Figura 6 – Funções distância para malhas com suporte compacto (a) e para malhas com suporte duplo (b) 28
Figura 7 – Funções de aresta C^{P-1}, considerando $P = 2$ para malhas com suporte compacto (a) e para malhas com suporte duplo (b) 29
Figura 8 – Funções de aresta C^{∞} para malhas com suporte compacto (a) e para malhas com suporte duplo (b) 30
Figura 9 – Funções Ponderação, considerando funções de aresta C^{P-1} com $P = 2$, para malhas com suporte compacto (a) e para malhas com suporte duplo (b) . . . 30
Figura 10 – Partições da Unidade, considerando funções de aresta C^{P-1} com $P = 2$, para malhas com suporte compacto (a) e para malhas com suporte duplo (b) . . . 32
Figura 11 – Representação das funções da base Hermitiana no domínio local do primeiro elemento: Partição da Unidade (a) e respectivas primeiras derivadas (b) . . . 34
Figura 12 – Representação das funções da base Hermitiana: Partição da Unidade (a) e respectivas primeiras derivadas (b) 34
Figura 13 – Cronograma de Atividades 36
Figura 14 – Exemplos de largura de banda de matriz: largura 3 (a) e largura 7 (b). 37
Figura 15 – Ilustração da estrutura avaliada. 41
Figura 16 – Convergência de integração quadrática da segunda derivada da PU utilizando as funções melhoradas com função de aresta polinomial $P = 3$. 42
Figura 17 – Convergência de integração quadrática da segunda derivada da PU utilizando as funções originais do C^k-GFEM, com função de aresta polinomial $P = 3$. . 42
Figura 18 – Termos não nulos da matriz de rigidez para as funções originais do C^k-GFEM: enriquecimento extrínseco $p = 1$ (a) e enriquecimento extrínseco $p = 2$ (b) . 44
Figura 19 – Termos não nulos da matriz de rigidez para as funções melhoradas via MLS: enriquecimento intrínseco $p = 1$ (a) e enriquecimento intrínseco $p = 1$ com enriquecimento extrínseco $p = 1$ (b) 44
Figura 20 – Termos não nulos da matriz de rigidez para as funções da base de Hermite. . 45
Figura 21 – Quantidade de termos não nulos da matriz de rigidez $\mathbf{K}$. 45

Figura 22 – Análise de convergência da primeira frequência natural do sistema para o refino h de malha e diferentes funções de aresta. Funções do C^k-GFEM (extrínseco $p = 1$) e funções melhoradas (intrínseco $p = 1$). 47
Figura 23 – Análise de convergência da segunda frequência natural do sistema para o refino h de malha e diferentes funções de aresta. Funções do C^k-GFEM (extrínseco $p = 1$) e funções melhoradas (intrínseco $p = 1$). 47
Figura 24 – Segunda derivada das Partições da Unidade para diferentes graus de função de aresta C^{P-1}. Gráficos para $P = 3$, $P = 7$ e $P = 20$. Utilizados 10 elementos de malha. 48
Figura 25 – Análise de convergência da primeira frequência natural do sistema para o refino h de malha e diferentes funções de aresta. Funções do C^k-GFEM (extrínseco $p = 2$) e funções melhoradas (intrínseco $p = 1$, extrínseco $p = 1$). 50
Figura 26 – Análise de convergência da segunda frequência natural do sistema para o refino h de malha e diferentes funções de aresta. Funções do C^k-GFEM (extrínseco $p = 2$) e funções melhoradas (intrínseco $p = 1$, extrínseco $p = 1$). 50
Figura 27 – Erro no espaço-tempo em deslocamento, considerando enriquecimento com $p = 1$. Linhas pontilhadas representam as funções do C^k-GFEM, e linhas cheias as funções melhoradas via MLS. 51
Figura 28 – Erro no espaço-tempo em velocidade, considerando enriquecimento com $p = 1$. Linhas pontilhadas representam as funções do C^k-GFEM, e linhas cheias as funções melhoradas via MLS. 52
Figura 29 – Erro no espaço-tempo em aceleração, considerando enriquecimento com $p = 1$. Linhas pontilhadas representam as funções do C^k-GFEM, e linhas cheias as funções melhoradas via MLS. 52
Figura 30 – Erro no espaço-tempo em deslocamento, considerando enriquecimento com $p = 2$. Linhas pontilhadas representam as funções do C^k-GFEM, e linhas cheias as funções melhoradas via MLS. 53
Figura 31 – Erro no espaço-tempo em velocidade, considerando enriquecimento com $p = 2$. Linhas pontilhadas representam as funções do C^k-GFEM, e linhas cheias as funções melhoradas via MLS. 54
Figura 32 – Erro no espaço-tempo em aceleração, considerando enriquecimento com $p = 2$. Linhas pontilhadas representam as funções do C^k-GFEM, e linhas cheias as funções melhoradas via MLS. 54
Figura 33 – Funções Ponderação, considerando funções de aresta C^{P-1} com $P = 2$, para malhas com suporte compacto (a) e para malhas com suporte duplo (b) . . . 60
Figura 34 – Análise de convergência da terceira frequência natural do sistema para o refino h de malha e diferentes funções de aresta. Funções do C^k-GFEM (extrínseco $p = 1$) e funções melhoradas (intrínseco $p = 1$). 62

Figura 35 – Análise de convergência da terceira frequência natural do sistema para o refino h de malha e diferentes funções de aresta. Funções do C^k-GFEM (extrínseco $p = 1$) e funções melhoradas (intrínseco $p = 1$). 62
Figura 36 – Análise de convergência da terceira frequência natural do sistema para o refino h de malha e diferentes funções de aresta. Funções do C^k-GFEM (extrínseco $p = 2$) e funções melhoradas (intrínseco $p = 1$, extrínseco $p = 1$). 63
Figura 37 – Análise de convergência da terceira frequência natural do sistema para o refino h de malha e diferentes funções de aresta. Funções do C^k-GFEM (extrínseco $p = 2$) e funções melhoradas (intrínseco $p = 1$, extrínseco $p = 1$). 63

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Frequências naturais exatas do problema proposto 46

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FEM	Método de Elementos Finitos
EDP	Equação Diferencial Parcial
EFGM	Método de Galerkin Livre de Elementos
C^k-GFEM	Método de Elementos Finitos Generalizados com Continuidade Arbitrária
DOF	Graus de Liberdade
GFEM / XFEM	Método de Elementos Finitos Generalizados e Extendido
MLS	Método de Mínimos Quadrados Móveis
PU	Partições da Unidade

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{a}(x)$	Coeficientes da Base de Funções do MLS
A_{C^∞}	Constante da Função de Aresta C^∞
$\mathbf{A}(x)$	Matriz de Momento Ponderado
$A, A(x)$	Área da Seção Transversal da Viga
α_n	Constante da Função de Forma dos Modos de Vibração
B_{C^∞}	Constante da Função de Aresta C^∞
$\mathbf{B}(x)$	Matriz de Ponderação da Base de Funções
$\mathscr{B}$	Forma bilinear
β, β_n	Número de Onda
c_α	Coeficiente Nodal da Função de Aproximação
C^{P-1}, C^∞	Grau de Continuidade de Funções
$\mathbf{C}$	Matriz de Amortecimento
$d_{\alpha,j}(x)$	Função Distância
Δt	Passo de Tempo
Δt_{crit}	Passo de Tempo Crítico
$Erro, Erro\%$	Erros Absolutos e Percentuais
$Erro_{SM}, Erro\%_{SM}$	Erros Absolutos e Percentuais do Método de Superposição Modal
$E(x)$	Módulo de Elasticidade
$\varepsilon_{\alpha,j}(x)$	Função de Aresta
$f(x)$	Função Arbitrária
$\tilde{f}(x)$	Aproximação da Função Arbitrária
f_α	Coeficiente Nodal
$\mathscr{F}$	Forma Bilinear
$g_{i\alpha}$	Coeficiente Nodal da Função Enriquecida
γ	Constante
$h_{\alpha,j}$	Comprimento do Suporte
H^h, H^2	Espaço de Hilbert
$I(x)$	Inércia da Seção Transversal
$K_{i,j}$	Termo da Matriz de Rigidez
$\mathbf{K}$	Matriz de Rigidez Global

κ	Constante
l_e	Comprimento do Elemento
L	Comprimento da Viga
$L_{i\alpha}$	Conjunto de Funções de Enriquecimento
λ	Autovalor
m	Número de Funções na Base Polinomial
$M_{i,j}$	Termo da Matriz Massa
$\mathbf{M}$	Matriz Massa Global
n	Número de Frequências Naturais da Viga
n_{Gauss}	Número de Pontos de Integração da Quadratura de Gauss
N	Número de Graus de Liberdade da Discretização
$v(x)$	Função de Forma dos Modos de Vibração
$\overline{v_n}$	Constante da Função de Forma dos Modos de Vibração
$\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4}$	Constantes da Função de Forma dos Modos de Vibração
ω, ω_n	Frequência Natural
ω_{max}	Frequência Natural Máxima
Ω	Domínio do Problema
Ω_{el}	Domínio do Elemento na Malha
p	Grau Polinomial
P	Grau de Continuidade
$\mathbf{p}$	Vetor da Base de Funções
$\phi(x)$	Função de Aproximação
ψ	Parâmetro de Decaimento
q_α	Número de Funções de Enriquecimento
$R(x,t)$	Campo de Carregamento Externo
$\mathbf{R}$	Vetor de Carregamento Externo
ρ	Densidade do Material da Viga
t	Variável Temporal
$\overline{T_1}, \overline{T_2}$	Constantes da Função Parcial do Campo Deslocamento
$T(t)$	Função Parcial do Campo Deslocamento
θ	Rotação da Seção Transversal

θ_Γ	Condição de Contorno de Rotação
$u(x,t)$	Campo de Deslocamento Vertical Exato da Viga
u_Γ	Condição de Contorno de Deslocamento
$\overline{u}(x,t)$	Campo de Deslocamento Vertical Aproximado da Viga
$\tilde{u}(x)$	Solução Aproximada do Campo Deslocamento
$\overline{u_i}$	Coeficiente Nodal da Solução Aproximada do Campo Deslocamento
$\mathbf{U}$	Vetor de Deslocamentos
$\dot{\mathbf{U}}$	Vetor de Velocidades
$\ddot{\mathbf{U}}$	Vetor de Acelerações
w_j	Ponderação da Quadratura de Gauss
$w(x,t)$	Função Tentativa
$W_\alpha(x)$	Função Ponderação
$\tilde{w}(x,t)$	Função Tentativa Aproximada
x	Coordenada Espacial
$\overline{x}$	Coordenada Intrínseca
$\overline{x_i}(t)$	Expressão da Solução da i-ésima Frequência do Método de Superposição Modal
$\overline{x_{1,i}}, \overline{x_{2,i}}$	Constantes
ξ	Vetor de Soluções da Base de Hermite
ζ	Termo de Integração da Análise de Convergência

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	**16**
1.1	JUSTIFICATIVA DO TRABALHO	**18**
1.2	OBJETIVOS DO TRABALHO	**20**
1.2.1	**Objetivos Gerais**	**20**
1.2.2	**Objetivos Específicos**	**20**
2	**FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**	**21**
2.1	FORMULAÇÃO DIFERENCIAL PARA PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO LATERAL	**21**
2.2	SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O PROBLEMA PROPOSTO	**22**
2.3	PRINCÍPIO VARIACIONAL PARA A APROXIMAÇÃO DO PROBLEMA	**24**
2.4	APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	**25**
2.5	CONSTRUÇÃO DAS PARTIÇÕES DA UNIDADE PELO MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS	**26**
2.5.1	**Malha de Elementos Finitos**	**27**
2.5.2	**Funções de Aresta**	**28**
2.5.2.1	Funções de Aresta C^{P-1}	**28**
2.5.2.2	Funções de Aresta C^{∞}	**29**
2.5.3	**Construção das Funções de Ponderação**	**30**
2.5.4	**O Método de Mínimos Quadrados Móveis**	**30**
2.6	ENRIQUECIMENTO EXTRÍNSECO DAS PARTIÇÕES DA UNIDADE	**32**
2.7	CONSTRUÇÃO DAS PARTIÇÕES DA UNIDADE HERMITIANAS	**33**
2.8	APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE SUPERPOSIÇÃO MODAL	**34**
3	**MATERIAIS E MÉTODOS**	**36**
3.1	ANÁLISE DE CUSTO COMPUTACIONAL	**36**
3.2	ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DE FREQUÊNCIAS NATURAIS	**38**
3.3	AVALIAÇÃO DE PERFORMANCE NO DOMÍNIO ESPAÇO-TEMPO	**38**
4	**RESULTADOS E DISCUSSÕES**	**40**
4.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	**40**
4.2	ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DE INTEGRAÇÃO	**41**
4.3	ANÁLISE DE CUSTO COMPUTACIONAL	**43**
4.4	ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DE FREQUÊNCIAS NATURAIS	**46**
4.5	ANÁLISE DE ERRO NO ESPAÇO-TEMPO	**50**
5	**CONCLUSÕES**	**56**
5.1	PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS	**56**
	REFERÊNCIAS	**58**

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DO REQUISITO DE SUPORTE ESTENDIDO 60
APÊNDICE B – CONVERGÊNCIA DE ERRO PARA A TERCEIRA E QUARTA FREQUÊNCIA DO SISTEMA 62

1 INTRODUÇÃO

Em engenharia, diversos problemas podem ser descritos por equações diferenciais ordinárias ou parciais, conforme colocado por Fish e Belytschko (2007), e o nível de complexidade dos modelos matemáticos dos problemas está diretamente atrelado ao que se pretende representar.

Em casos onde o nível de complexidade excede a capacidade de se encontrar as soluções analíticas, seja pela falta de ferramentas ou métodos para tanto ou pelo alto nível de dificuldade dos modelos matemáticos, recorre-se aos métodos de aproximação numérica.

Dentre os métodos convencionalmente utilizados para a solução aproximada de equações diferenciais, cita-se especialmente o Método de Elementos Finitos (do inglês *Finite Element Method*, FEM), tema foco do presente trabalho.

O FEM é uma métodologia em que, tendo definido um problema físico de interesse, governado por equações de natureza diferencial, pode-se aproximar a sua solução pela divisão do problema global em outros menores, a serem resolvidos localmente no domínio. Assim, a solução de um complexo sistema de equações pode ser aproximado pela contribuição de diversos outros, de menor complexidade.

A solução de um problema pelo FEM compreende quatro etapas principais, conforme Liu (2003). A primeira, compreende a modelagem da geometria do problema. Já a segunda é a discretização da geometria em uma malha, a qual é composta de pequenas divisões do domínio denominadas elementos. A terceira é a definição das propriedades materiais da geometria e, em seguida, a quarta compreende a definição das condições de contorno e carregamentos. Assim, define-se os requisitos básicos do problema para a obtenção da solução aproximada.

O método convencional do FEM, no entanto, possui uma fraqueza no que tange às propriedades das funções de aproximação. Típicamente, são funções polinomiais, os Interpoladores de Lagrange, apresentadas em Liu (2003) e Fish e Belytschko (2007), que estão limitadas a representar o próprio grau polinomial.

Além disso, as funções possuem um grau de continuidade C^0 que, quando buscam representação de um campo de primeira ordem diferencial, usualmente trazem uma inconsistência física na representação do fenômeno, uma vez que sobre um determinado nó da malha há um conjunto de valores diferentes, e que ditam o valor do campo sobre aquele nó.

Conhecidas algumas das limitações das funções convencionais do FEM, é notório que exigência de problemas de maior complexidade, como os estudos de modelagem e propagação de trincas (MOËS; DOLBOW; BELYTSCHKO, 1999), exijam um tratamento especial das funções utilizadas ou então um complexo refino de malha para se obter soluções minimamente satisfatórias dos fenômenos.

Assim, diversas metodologias surgem como propostas para superar as limitações do FEM convencional. Dentra as propostas de métodos sem malha, citam-se principalmente o Método de Galerkin Livre de Elementos (do inglês *Element-Free Galerkin Method*, EFGM) (BELYTSCHKO; LU; GU, 1994) e o Método de Nuvens *hp* (DUARTE; ODEN, 1996).

Já nas propostas de métodos baseados em malha, que utilizam do conceito de Partições da Unidade (PU), citam-se o Método de Elementos Finitos Generalizados e Extendido (do inglês *Generalized / eXtended Finite Element Method*, GFEM / XFEM) (MOËS; DOLBOW; BELYTSCHKO, 1999; DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000; BELYTSCHKO et al., 2001).

Por fim, há também abordagens não convencionais como o Método de Elementos Finitos Generalizados com Continuidade Arbitrária (C^k-GFEM) (DUARTE; KIM; QUARESMA, 2006), o Método de Elementos Finitos Suavizados (LIU; DAI; NGUYEN, 2007) e a Análise Isogeométrica (COTTRELL; HUGHES; REALI, 2007).

Dentre tantas metodologias propostas, o GFEM / XFEM é particularmente interessante pois utiliza as funções do FEM convencional, agora visualizadas como Partições da Unidade (PU), que são enriquecidas extrínsecamente por funções especiais que podem atribuir à PU alguma característica da solução do problema sem a necessidade de um refino de malha.

Ou seja, são adicionados mais graus de liberdade ao sistema, com características das funções especiais, sem a necessidade de incrementar o número de elementos da malha. Além disso, a estrutura de códigos do FEM convencional, bem como os métodos de integração e imposição de condições de contorno, são mantidos no GFEM / XFEM.

No trabalho de Hsu (2016), funções especiais trigonométricas do GFEM foram aplicadas ao problema de vibração livre de vigas do tipo Timoshenko com o intuito de se reduzir, ou até mesmo eliminar, o efeito de *shear locking*[1] encontrado pela utilização apenas de funções convencionais do tipo C^0.

De outra forma, o C^k-GFEM também apresenta capacidades de aproximação particularmente interessantes quando aplicado aos problemas de mecânica dos sólidos (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009; MENDONÇA; de Barcellos; TORRES, 2013; TORRES; BARCELLOS; MENDONÇA, 2015), enquanto compartilha das mesmas propriedades do FEM convencional em termos de custo computacional, e agrega a robustez do GFEM / XFEM.

Por ser um método baseado em malha, o C^k-GFEM permite que o GFEM / XFEM convencional recupere a suavidade comumente obtida nos métodos sem malha baseados no MLS (LIU, 2003), como o EFGM, enquanto mantém o parâmetro de continuidade k arbitrário.

O trabalho de Surana et al. (2001) foi pioneiro ao trazer a continuidade k como um parâmetro de refino de malha. Porém, a continuidade ganhou um papel importante após o trabalho de Cottrell, Hughes e Reali (2007), da Análise Isogeométrica, onde um ganho significativo de capacidade de aproximação fora atribuído, até então, à continuidade das funções b-splines.

Mesmo com todas as versatilidades apresentadas, o C^k-GFEM ainda possui o problema da reproducibilidade polinomial das funções, e necessita portanto de um enriquecimento extrínseco de grau $p = 1$ das funções para que se obtenha a consistência linear já obtida nas funções convencionais do FEM, e nas PU's do GFEM / XFEM.

[1] Shear locking é o efeito encontrado pela utilização de funções que não possuem boa capacidade de captação do fenômeno de flexão, e introduzem um efeito de cisalhamento errôneo ao problema. O fenômeno é amplamente discutido no trabalho de Baier-Saip et al. (2020).

Vale ressaltar que as PU's do C^k-GFEM são classificadas como racionais, uma vez que são construídas via MLS com uma base de funções constante, também reconhecidas como Funções de Shepard (SCHWEITZER, 2008). Assim, o C^k-GFEM demanda de mais graus de liberdade (do inglês *Degrees of Freedom*, DOF) do que o GFEM / XFEM para se obter o mesmo nível de erro que estes (TORRES; BARCELLOS; MENDONÇA, 2015).

Uma vez que o C^k-GFEM está fundamentado no Método de Mínimos Quadrados Móveis de Lancaster e Salkauskas (1981), e reconhecendo a limitação de reproducibilidade polinomial do método de Duarte, Kim e Quaresma (2006), surge o interesse de se avaliar os efeitos da alteração da base de funções do MLS para uma base polinomial mínima de $p = 1$, para que se obtenha ao menos a qualidade de aproximação do FEM convencional sem a necessidade de adicionar as funções especiais.

Assim, o método melhorado do C^k-GFEM vem como uma proposta de reduzir o custo computacional das aproximações, já que um número menor de graus de liberdade deve ser empregado para que obtenha uma reproducibilidade polinomial mínima de $p = 1$.

1.1 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

A metodologia C^k-GFEM possui uma versatilidade muito grande no que tange à definição de uma continuidade k para as funções de aproximação, além de empregar as funções especiais do GFEM / XFEM para uma melhoria local, ou global, da aproximação da solução sem a necessidade de refino de malha.

Tendo em vista que as Partições da Unidade do C^k-GFEM são geradas via Método de Mínimos Quadrados Móveis, e que uma base polinomial de funções pode ser atribuída de maneira intrínseca ao método, faz-se necessário compreender as consequências de se realizar o enriquecimento intrínseco das funções sobre a qualidade de aproximação e o custo computacional.

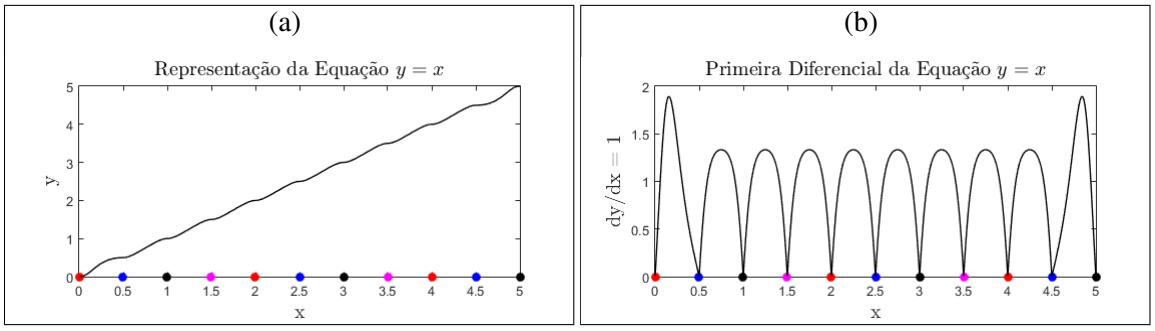
Assim, as funções do C^k-GFEM viriam a adquirir a reproducibilidade polinomial natural das funções convencionais do FEM, característica que não está presente nas PU's do C^k-GFEM convencional, enquanto se mantém também os parâmetros h (relacionados ao comprimento dos elementos), p (representatividade polinomial das funções de aproximação) e k (continuidade das funções de aproximação) independentes entre si, como no C^k-GFEM original.

As Figuras 1 e 2 apresentam a capacidade de representação de uma simples função linear pelas funções convencionais do C^k-GFEM e pelas funções melhoradas via MLS, respectivamente. Nota-se um ganho significativo para as funções melhoradas em termos de reprodutibilidade polinomial, mesmo utilizando-se da mesma quantidade de equações que o C^k-GFEM convencional.

Outro fator importante é a representatividade da primeira diferencial da equação $y(x) = x$, representada nas Figuras 1.b e 2.b, onde para o C^k-GFEM convencional a diferencial torna-se nula sobre os nós (pontos demarcados no eixo da abscissas).

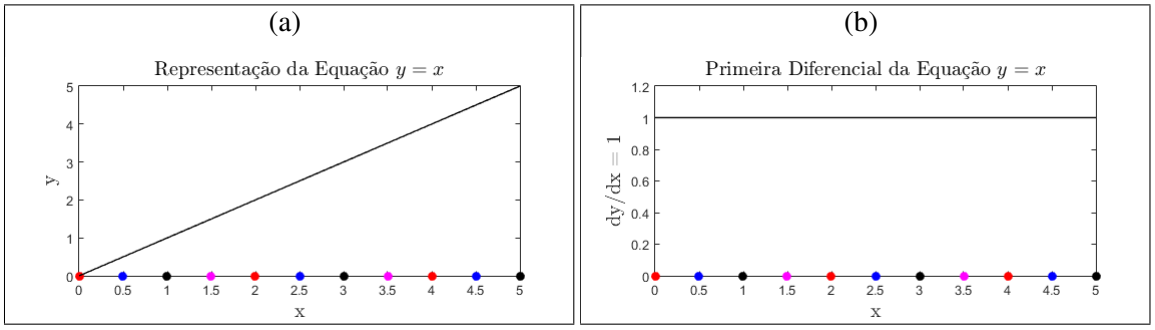
Tal comportamento remete, para análises estruturais, a uma situação de engaste localizado

Figura 1 – Representação da equação $y(x) = x$, bem como sua primeira diferencial, utilizando as Partições da Unidade do C^k-GFEM convencional.



Fonte: O autor.

Figura 2 – Representação da equação $y(x) = x$, bem como sua primeira diferencial, utilizando as Partições da Unidade melhoradas via MLS.



Fonte: O autor.

causada pelas funções de aproximação, o que implica em uma representação física infiel ao modelo que se propõe avaliar.

No trabalho de Garbuio e Torres (2019), uma análise fora realizada acerca das PU's melhoradas em problemas unidimensionais, de elasticidade linear, em condições estáticas, onde foi observada uma melhora significativa na capacidade de aproximação das funções.

Uma vez conhecida a característica oscilatória das PU's geradas pelo MLS, é de interesse que as avaliações de performance sejam realizadas também sobre problemas de vibração, com respostas dinâmicas, onde se espera que as funções melhoradas apresentem uma capacidade de aproximação superior às funções convencionalmente utilizadas no escopo do C^k-GFEM original.

Assim, este trabalho buscou compreender se o enriquecimento realizado de forma intrínseca pelo MLS é capaz de trazer benefícios à capacidade de aproximação das funções, sejam eles em termos de níveis de erros de aproximação ou no custo computacional de processamento numérico dos problemas abordados.

Ainda, o trabalho permitiu compreender de que forma o nível de continuidade das funções do C^k-GFEM convencional, e também das funções propostas, pode refletir na capacidade de aproximação da solução.

1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

1.2.1 Objetivos Gerais

O objetivo principal do trabalho foi realizar uma análise comparativa do método C^k-GFEM original com a sua versão melhorada via MLS, por meio de problemas de vibração livre unidimensionais, de elasticidade linear. Foram realizados, portanto, comparativos de performance entre os métodos apresentados, bem como um comparativo com as aproximações geradas pela base de funções de Hermite, as quais são convencionalmente utilizadas para problemas de vigas Euler-Bernoulli.

A comparação dentre os métodos utilizados será realizada mediante duas frentes: a primeira, em que foram avaliados os custos computacionais de cada abordagem pelo tamanho do sistema de matrizes gerado e pelo número de pontos de integração necessários para tanto; a segunda, em que foram avaliados os níveis de erros de aproximação das funções frente à solução analítica do problema e à aproximação das frequências naturais do problema em estudo.

1.2.2 Objetivos Específicos

Baseados nos objetivos gerais do presente trabalho, define-se também os objetivos específicos:

a) Análise da qualidade de aproximação em termos de nível de erro.

b) Análise da convergência dos métodos com o refino h, p e k de malha.

c) Análise do custo computacional, referente à largura de banda da matriz de rigidez.

d) Análise de convergência das integrações numéricas por meio da Quadratura de Gauss.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 FORMULAÇÃO DIFERENCIAL PARA PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO LATERAL

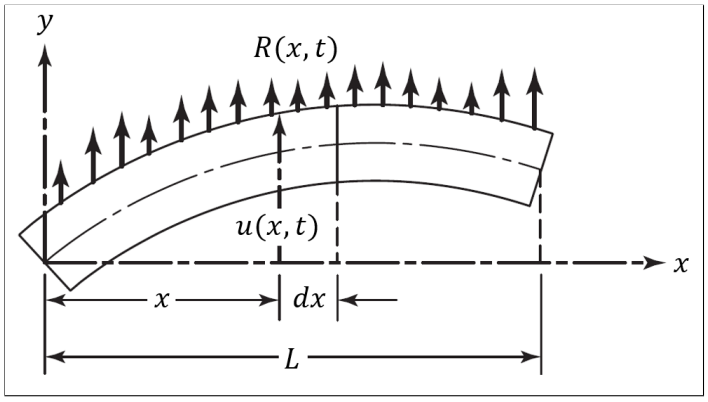
Seja o problema de vibração lateral forçada em viga apresentado na Figura 3. A forma diferencial do problema apresentado é dada a seguir, conforme o discutido em Bathe (2014), assumindo um modelo de viga do tipo Euler-Bernoulli:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right] + \rho A(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = R(x,t) \tag{1}$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, ou módulo de Young, $I(x)$ é a inércia da seção transversal da viga, ρ é a densidade do material e $A(x)$ é a área de seção transversal.

Ainda, $R(x,t)$ é a função de carregamento externo aplicado à viga, e $u(x,t)$ é a solução para o campo de deslocamento vertical da viga em função do tempo t e da coordenada global x. Por fim, a viga apresenta um comprimento total equivalente à L.

Figura 3 – Representação do problema de vibração lateral forçada.



Fonte: Adaptado de Rao (2011)

Para uma viga uniforme, onde a área de seção transversal não se altera ao longo do comprimento da viga, a Equação (1) pode ser reescrita como:

$$EI\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = R(x,t) \tag{2}$$

Em suma, a Equação (2) estabelece a relação entre as forças inerciais e internas (termos à esquerda da equação) e o carregamento externo $R(x,t)$ aplicado à viga.

Em particular, a solução analítica de Equações Diferenciais Parciais (EDP) se encontra disponível, usualmente, para problemas de menor complexidade, conforme apresenta Arndt (2009). Para a EDP apresentada na Equação (2), a solução analítica do problema pode ser obtida pela utilização do método de separação de variáveis, apresentado à seguir.

2.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O PROBLEMA PROPOSTO

A obtenção da solução analítica do problema apresentado na Seção 2.1 é importante no âmbito do presente trabalho pois, uma vez que se pretende avaliar o desempenho de diferentes funções de aproximação, faz-se necessário obter os parâmetros exatos diante do modelo adotado para a computação dos erros de aproximação gerados pelas diferentes abordagens.

A obtenção da solução analítica será realizada mediante a utilização do método de separação de variáveis, conforme apresentado em Rao (2011), que reescreve o campo $u(x,t)$ apresentado na Equação (2) como:

$$u(x,t) = v(x)T(t) \tag{3}$$

onde $v(x)$ é a equação correspondente ao termo espacial da solução, e $T(t)$ a componente temporal. Assim, inserindo a Equação (3) na Equação (2), e assumindo que $R(x,t) = 0$ (viga sem carregamento externo aplicado), obtém-se:

$$EI\frac{d^4v(x)}{dx^4}T(t) + \rho A\frac{d^2T(t)}{dt^2}v(x) = 0 \tag{4}$$

Conforme apresentado em Rao (2011), pode-se reescrever a Equação (4) como:

$$\frac{\kappa^2}{v(x)}\frac{d^4v(x)}{dx^4v(x)} = -\frac{d^2T(t)}{dt^2}\frac{1}{T(t)} = \omega^2 \tag{5}$$

onde ω e κ são constantes positivas. A Equação (5) pode ainda ser reescrita por duas outras:

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4} - \beta^4 v(x) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \tag{7}$$

onde:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{\kappa^2} = \frac{\omega^2\rho A}{EI} \tag{8}$$

As soluções generalizadas para as Equações (6) e (7) são dadas por:

$$T(t) = \overline{T_1}\cos(\omega t) + \overline{T_2}\sin(\omega t) \tag{9}$$

$$v(x) = \overline{v_1}\cos(\beta x) + \overline{v_2}\sin(\beta x) + \overline{v_3}\cosh(\beta x) + \overline{v_4}\sinh(\beta x) \tag{10}$$

em que $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4}\}$ são constantes a determinar a partir das condições de contorno do problema, e $\{\overline{T_1}, \overline{T_2}\}$ são constantes a determinar a partir das condições iniciais prescritas.

Para o problema de viga simplesmente engastada em $x = 0$, as condições de contorno são prescritas conforme se apresenta abaixo:

$$v(x=0) = 0, \quad \frac{dv(x=0)}{dx} = 0, \quad \frac{d^2v(x=L)}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3v(x=L)}{dx^3} = 0 \tag{11}$$

A solução geral para a Equação (10), também reconhecida como Função de Forma, para o problema proposto é dada por:

$$v_n(x) = \overline{v_n}\Big[\sin(\beta_n x) - \sinh(\beta_n x) + \alpha_n\big(\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)\big)\Big] \tag{12}$$

onde:

$$\alpha_n = \left(\frac{\sin(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L)}{\cos(\beta_n L) + \cosh(\beta_n L)}\right) \tag{13}$$

A Equação (12), portanto, é a Função de Forma associada à frequência natural ω_n. Dessa forma, a solução para o campo deslocamento $u(x,t)$ pode ser obtida pelo somatório das contribuições das infinitas frequências naturais da viga, ou seja:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)\left(\overline{T_{1,n}}\cos(\omega_n t) + \overline{T_{2,n}}\sin(\omega_n t)\right) \tag{14}$$

Para cada valor de β_n há uma respectiva frequência ω_n associada ao termo, que pode ser obtida à partir da Equação (8). De outra forma, os infinitos valores de β_n podem ser obtidos pela solução da Equação de Frequência:

$$\cos(\beta_n L)\cosh(\beta_n L) = -1 \tag{15}$$

Assim, somadas as infinitas contribuições de frequências naturais ω_n, e seus respectivos valores de β_n, obtém-se a solução real para o problema de vibração livre.

Dada a impossibilidade de se determinar infinitas frequências para a determinação da solução exata, Bathe (2014) apresenta que apenas com algumas das frequências naturais do sistema pode-se obter uma solução que represente de forma fiel o modelo.

A proposta é de que, conhecida a maior frequência natural significativa do sistema ω_s, pode-se aproximar $u(x,t)$ de forma fiel com uma frequência de até $4\omega_s$. Ou seja, a resposta do sistema pode ser bem representada utilizando a superposição de frequências até aquela quatro vezes maior do que a frequência mais significativa do sistema.

Dentro do escopo do presente trabalho, foram consideradas as nove primeiras frequências do sistema, onde a partir da superposição de tal quantidade de frequências naturais não foram observadas diferenças significativas na resposta dinâmica do problema proposto.

2.3 PRINCÍPIO VARIACIONAL PARA A APROXIMAÇÃO DO PROBLEMA

Tomando o problema apresentado na Seção 2.1, e considerando a condição em que $R(x,t) = 0$, a Equação Diferencial Parcial apresentada na Equação (2) reduz-se à:

$$EI\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{16}$$

Considerando a abordagem de resíduos ponderados para a aproximação do problema, também apresentada em Fish e Belytschko (2007), a EDP apresentada torna-se:

$$\int_\Omega EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 \overline{u}(x,t)}{\partial x^2}\right)w(x,t)dx + \int_\Omega \rho A\frac{\partial^2 \overline{u}(x,t)}{\partial t^2}w(x,t)dx = 0 \tag{17}$$

onde $w(x,t)$ é uma função ponderação, ou função teste, que promove o relaxamento da formulação. A introdução do termo $w(x,t)$ permite que a solução aproximada do campo deslocamento $\overline{u}(x,t)$ admita um determinado nível de erro à ser minimizado.

A partir de uma dupla integração por partes da Equação (17), e uma reorganização da equação, pode-se escrever:

$$w\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2}\right)\Bigg|_\Omega - \frac{\partial w}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2}\right)\Bigg|_\Omega + \int_\Omega \left(EI\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx + \int_\Omega \rho A\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2}wdx = 0 \tag{18}$$

Conforme apresentado em Arndt (2009), para problemas de vibração assume-se soluções na forma:

$$\overline{u}(x,t) = e^{i\omega t}u(x) = \big(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\big)u(x) \tag{19}$$

A partir da expressão acima, define-se o problema de autovalores na forma variacional, conforme apresentado em Fish e Belytschko (2007), como: encontre um par (ω^2, u), com $u \in H^2$, onde H^2 é o espaço de Hilbert de ordem 2 [1], satisfazendo as condições de contorno, e $\omega^2 \in \mathbb{R}$, de forma que:

$$w\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2 u}{dx^2}\right)\Bigg|_\Omega - \frac{dw}{dx}\left(EI\frac{d^2 u}{dx^2}\right)\Bigg|_\Omega + \int_\Omega \left(EI\frac{d^2 u}{dx^2}\right)\frac{d^2 w}{dx^2}dx - \int_\Omega \omega^2 \rho Auwdx = 0 \tag{20}$$

satisfeita para $w \in H^2$. A Equação (20) pode, ainda, ser escrita na forma bilinear $\mathscr{B}(u,w) = \lambda\mathscr{F}(u,w)$, onde $\mathscr{B} : H^2 \times H^2 \mapsto \mathbb{R}$ e $\mathscr{F} : H^2 \times H^2 \mapsto \mathbb{R}$. Assim, define-se:

$$\mathscr{B}(u,w) = \int_\Omega EI\frac{d^2 u}{dx^2}\frac{d^2 w}{dx^2}dx \tag{21}$$

$$\mathscr{F}(u,w) = \int_\Omega \rho Auwdx \tag{22}$$

[1] O espaço de Hilbert de ordem 2 H^2 é aquele em que as funções de aproximação devem possuir, até sua segunda derivada, uma função não nula, contínua e quadraticamente integrável.

No âmbito da aproximação do FEM, pode-se definir funções $\{\tilde{u},\tilde{w}\} \in H^h$, em que $H^h \subset H^2$ é um subespaço aproximado. Assim, escreve-se a forma bilinear como $\mathscr{B}(\tilde{u},\tilde{w}) = \lambda\mathscr{F}(\tilde{u},\tilde{w})$.

Considerando um conjunto de funções de aproximação $\phi(x)$ do subespaço H^h, pode-se escrever a aproximação para o campo $u(x)$ como:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x)\overline{u_i} \tag{23}$$

onde $\overline{u_i}$ é o coeficiente nodal associado à função de aproximação $\phi_i(x)$.

É importante ressaltar que o requisito do espaço H^2 das funções de aproximação delimita, de forma geral, o tipo de função de aproximação que pode ser empregada na solução do problema.

Vale observar ainda que as funções convencionais do FEM, como os interpoladores de Lagrange, não satisfazem esse requisito. Assim, funções especiais, como as funções do C^k-GFEM e do método proposto, bem com as funções da base Hermitiana, podem ser empregadas para a aproximação da solução.

2.4 APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

No âmbito do FEM, as funções tentativa $w(x)$, bem como as funções do campo deslocamento $u(x)$ apresentadas na forma bilinear, são usualmente consideradas como as próprias funções de aproximação $\phi(x)$. Ou seja, o conjunto de funções de aproximação que define $w(x)$ é o mesmo que define $u(x)$, conforme será apresentado adiante.

Para cada elemento da malha gerada, há um conjunto de funções de aproximação $\{w(x),u(x)\} = \{\phi_i(x)\}_{i=1}^{N}$ que deve ser utilizado para a construção da aproximação total, ou global, do problema. A partir da forma bilinear apresentada nas Equações (21) e (22), pode-se definir as contribuições de rigidez e massa de cada elemento da malha por:

$$K_{i,j} = \int_{\Omega el} \frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2} EI \frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2} dx \tag{24}$$

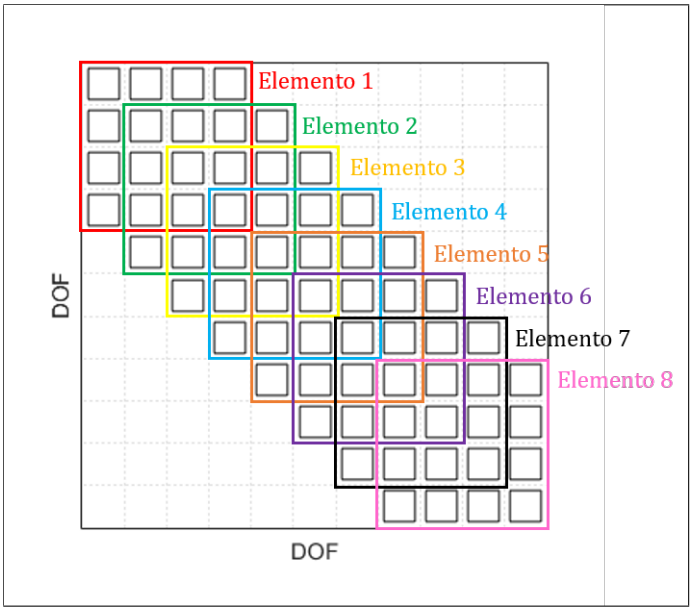
$$M_{i,j} = \int_{\Omega el} \rho A \phi_i(x)\phi_j(x) dx \tag{25}$$

onde $K_{i,j}$ é o termo da matriz de rigidez referente à interação entre as funções de aproximação $\phi_i(x)$ e $\phi_j(x)$ no interior do elemento, e $M_{i,j}$ é o termo da matriz massa referente à interação das mesmas funções $\phi_i(x)$ e $\phi_j(x)$.

Vale notar que, como o conjunto de funções de aproximação é o mesmo para $w(x)$ e $u(x)$, a matriz de rigidez gerada para cada elemento da malha será simétrica.

Para a construção das aproximações via FEM pode-se, ainda, construir as matrizes **M** (matriz massa global) e **K** (matriz de rigidez global) pelo somatório das contribuições de cada elemento da malha. Assim, constrói-se o sistema global de tamanho $N \times N$, que representa o modelo de forma global. Na Figura 4 encontra-se uma representação gráfica da respectiva matriz de rigidez global, junto das contribuições parciais geradas por cada elemento da malha.

Figura 4 – Montagem da matriz de rigidez global **K**.



Fonte: O autor.

2.5 CONSTRUÇÃO DAS PARTIÇÕES DA UNIDADE PELO MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS

O Método de Mínimos Quadrados Móveis (MLS), na sua forma original apresentada em Lancaster e Salkauskas (1981), é uma metodologia sem malha que utiliza de funções de ponderação para a construção da aproximação de um campo de interesse. Algumas das funções de ponderação típicamente utilizadas são apresentadas em Liu (2003).

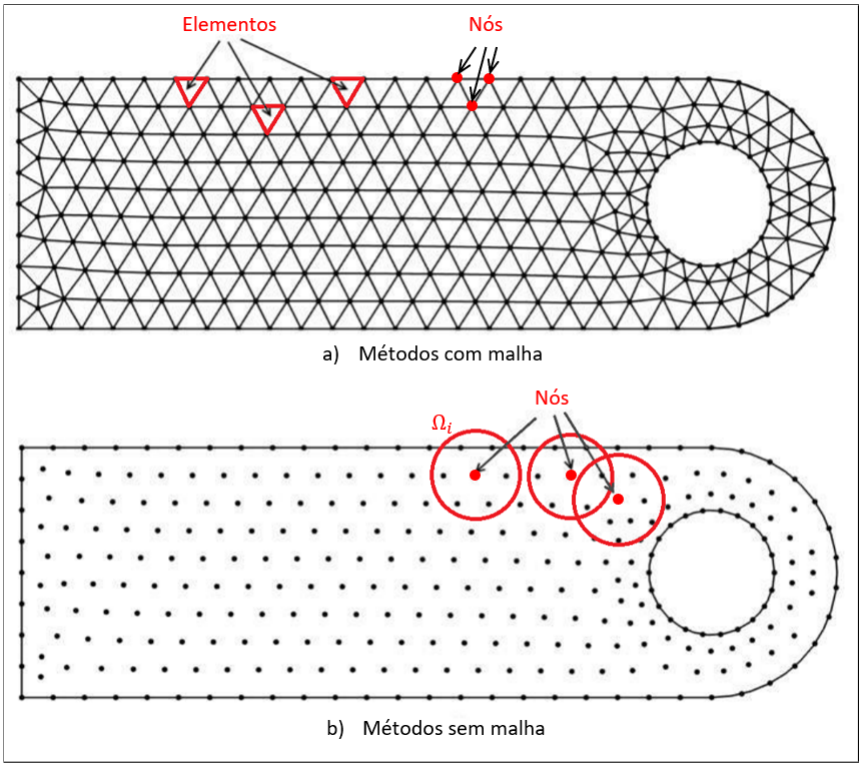
Assim, do ponto de vista do MLS, a discretização do domínio não depende da subdivisão do domínio em elementos, mas da cobertura completa do domínio pelas funções de ponderação Ω_i, usualmente radiais, definidas a partir de cada nó x_i distribuído na malha.

Já na abordagem do C^k-GFEM de Duarte, Kim e Quaresma (2006), as funções de ponderação dependem de uma malha de elementos para a geração da aproximação, o que garante ao método algumas características importantes como a maior facilidade de mapear as ponderações sob cada porção do domínio, a maior facilidade em definir as malhas de integração (a própria malha de elementos, no caso do C^k-GFEM) e a estrutura de códigos similar ao FEM convencional.

A Figura 5 apresenta a discretização para ambas as metodologias com malha, onde o domínio é discretizado em elementos (e os elementos são definidos por 3 nós cada), e sem malha, onde os círculos representam a parte do domínio coberta pela função de ponderação de cada nó.

No escopo do C^k-GFEM, portanto, são necessários quatro passos para a construção das funções de aproximação, discutidas a seguir, listadas por: construção da malha de elementos e das funções distância; construção das funções de aresta; construção das funções ponderação; construção das funções de aproximação via MLS.

Figura 5 – Discretização do domínio: métodos com malha (a) e sem malha (b).



Fonte: Adaptado de Kalutskiy (2021)

2.5.1 Malha de Elementos Finitos

O primeiro passo para a construção das funções de aproximação, conforme executado na metodologia C^k-GFEM, é a discretização do domínio de interesse em uma malha de elementos.

Assim, para cada nó x_α distribuído no domínio, é necessário definir o conjunto de funções distância $d_{\alpha,j}(x)$, cada qual associada com o nó vizinho x_j. Para domínios unidimensionais, as funções distância são definidas ao lado direito e esquerdo dos nós, exceto para aqueles posicionados no contorno do domínio onde apenas uma função distância é requerida.

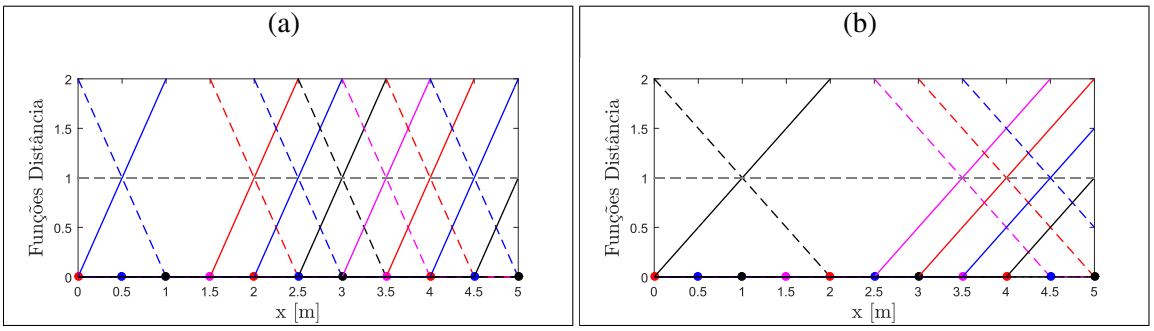
A Figura 6 apresenta as funções distância propostas para um problema unidimensional, onde as linhas cheias representam as funções ao lado esquerdo do nó e as linhas tracejadas representam as funções à direita do nó. Ainda, as funções distância são limitadas à unidade sobre o nó de referência x_α.

A definição usual de funções distância, conforme utilizado no C^k-GFEM, é apresentada na Figura 6.a, onde o suporte do nó x_α é delimitado pelos nós à sua direita e esquerda, o que compreende a cobertura de apenas um elemento para cada um dos lados do nó, denominado de suporte compacto. É importante ressaltar que para essa condição as funções distância se confundem com os interpoladores de Lagrange de ordem $p = 1$, funções utilizadas no FEM convencional, exceto que as funções distância se estendem infinitamente.

Para a metodologia proposta no presente trabalho, é necessário estender o suporte das funções para o funcionamento adequado do MLS, conforme será discutido na Seção 2.5.4. Assim,

para cada lado do nó x_α, dois elementos são cobertos pelas funções distância, conforme apresenta a Figura 6.b. Para essa condição, se dá o nome de suporte duplo.

Figura 6 – Funções distância para malhas com suporte compacto (a) e para malhas com suporte duplo (b)



Fonte: O autor.

A partir das funções distância, deve-se então definir as funções de aresta, conforme apresentado na seção adiante.

2.5.2 Funções de Aresta

Previamente à construção das funções de ponderação, faz-se necessário construir as funções de aresta associadas a cada nó x_α. O objetivo das funções de aresta é atribuir às funções de ponderação, e consequentenemente à Partição da Unidade, o nível de continuidade k requerido para a aproximação.

Para o presente trabalho, as funções de aresta de continuidade C^{P-1} apresentadas por Barcellos, Mendonça e Duarte (2009), bem como as funções de aresta C^∞ apresentadas por Duarte, Kim e Quaresma (2006), são empregadas na construção das Partições da Unidade.

2.5.2.1 Funções de Aresta C^{P-1}

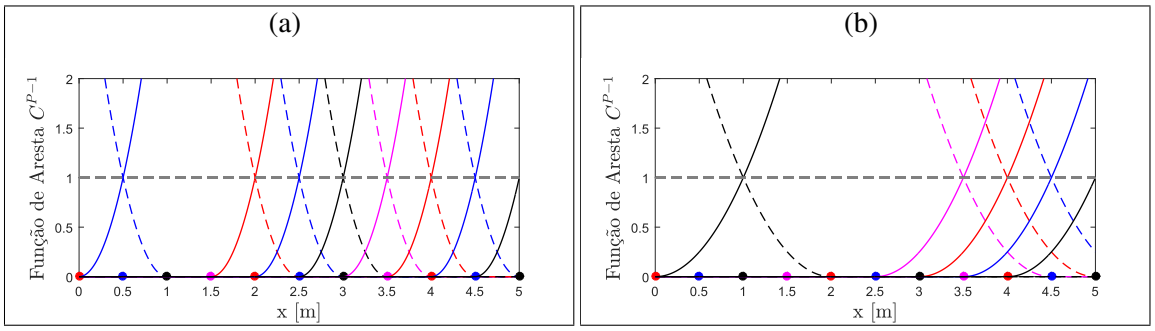
As funções de aresta do tipo C^{P-1} são funções do tipo polinomial (monômios) de grau P, que dependem das funções distância para sua construção. São definidas, conforme se apresenta em Barcellos, Mendonça e Duarte (2009), como:

$$\varepsilon_{\alpha,j}(x) := \begin{cases} \left(d_{\alpha,j}(x)\right)^P, & \text{se } d_{\alpha,j}(x) > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{26}$$

onde $d_{\alpha,j}(x)$ é a função distância j associada ao nó x_α, em que $j = 1,2$, uma vez que para domínios unidimensionais há apenas duas funções distância associadas ao nó x_α.

Uma vez que as funções distância $d_{\alpha,j}(x)$ são positivas dentro do suporte do nó x_α, e unitárias sobre o respectivo nó, as funções de aresta também serão positivas dentro do respectivo suporte e unitárias sobre o nó, conforme pode-se observar na Figura 7.

Figura 7 – Funções de aresta C^{P-1}, considerando $P = 2$ para malhas com suporte compacto (a) e para malhas com suporte duplo (b)



Fonte: O autor.

É importante notar, também, que na medida em que as funções de aresta $\varepsilon_{\alpha,j}(x)$ se aproximam do seu respetivo nó x_j, a suas derivadas convergem à zero. Isso garante que haja uma transição suave do efeito das funções de aresta - e das ponderações - sobre todo o domínio.

2.5.2.2 Funções de Aresta C^{∞}

De forma alternativa às funções C^{P-1}, de continuidade limitada, as funções de aresta C^{∞} apresentadas por Edwards (1996) são utilizadas para a construção de ponderações de continuidade infinita. Pela definição de um operador exponencial é possível de se obter uma continuidade $k = \infty$ para a Partição da Unidade resultante. As funções de aresta C^{∞} são definidas por:

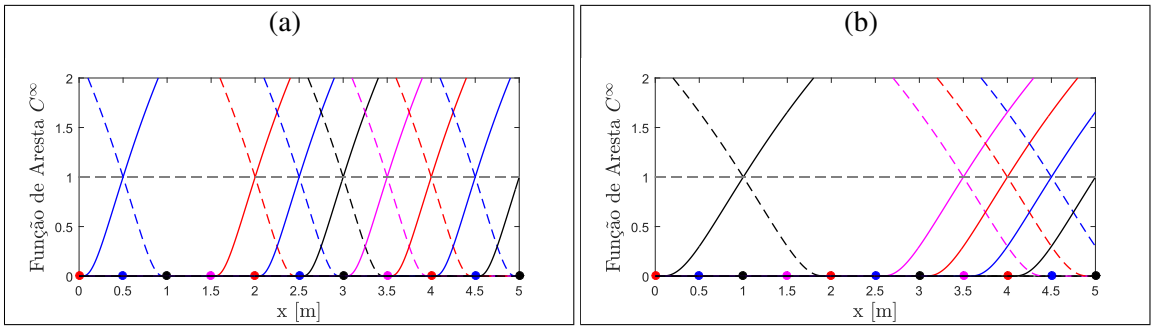
$$\varepsilon_{\alpha,j}(x) := \begin{cases} A_{C^{\infty}} e^{-\left(d_{\alpha,j}(x)/B_{C^{\infty}}\right)^{-\gamma}}, & \text{se } d_{\alpha,j}(x) > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{27}$$

onde $A_{C^{\infty}}$ e $B_{C^{\infty}}$ são parâmetros definidos de tal forma que as funções de aresta sejam unitárias sobre o nó x_{α}, e que o parâmetro de decaimento ψ, definido por $\psi = \varepsilon_{\alpha,j}\left(h_{\alpha,j}/2\right)/\varepsilon_{\alpha,j}\left(h_{\alpha,j}\right)$ seja forçado o mesmo para todas as funções de aresta no suporte do nó x_{α}, onde $h_{\alpha,j}$ representa o comprimento do suporte, de acordo com o tipo de suporte, compacto ou duplo, estabelecido anteriormente na Seção 2.5.1. Ainda, γ é uma constante positiva.

Uma definição apropriada dos parâmetros $A_{C^{\infty}}$ e $B_{C^{\infty}}$ pode ser encontrada nos trabalhos de Duarte, Kim e Quaresma (2006) e Barcellos, Mendonça e Duarte (2009). Com uma breve adaptação para domínios unidimensionais, uma vez que as funções distâncias já foram definidas de forma a normalizar a distância no comprimento do suporte, os parâmetros $A_{C^{\infty}}$ e $B_{C^{\infty}}$ podem ser definidos diretamente por $A_{C^{\infty}} = exp\left[\left((1-2^{\gamma})/log_e(\psi)\right)^{-1}\right]$ e $B_{C^{\infty}} = \left(log_e(\psi)/(1-2^{\gamma})\right)^{\frac{1}{\gamma}}$.

Conforme sugerido nos trabalhos de Barcellos, Mendonça e Duarte (2009) e Duarte, Kim e Quaresma (2006), $\gamma = 0.6$ e $\psi = 0.3$ são considerados no presente trabalho para minimizar o comportamento oscilatório da derivada da Partição da Unidade. Uma representação das funções de aresta C^{∞} pode ser encontrada na Figura 8.

Figura 8 – Funções de aresta C^{∞} para malhas com suporte compacto (a) e para malhas com suporte duplo (b)



Fonte: O autor.

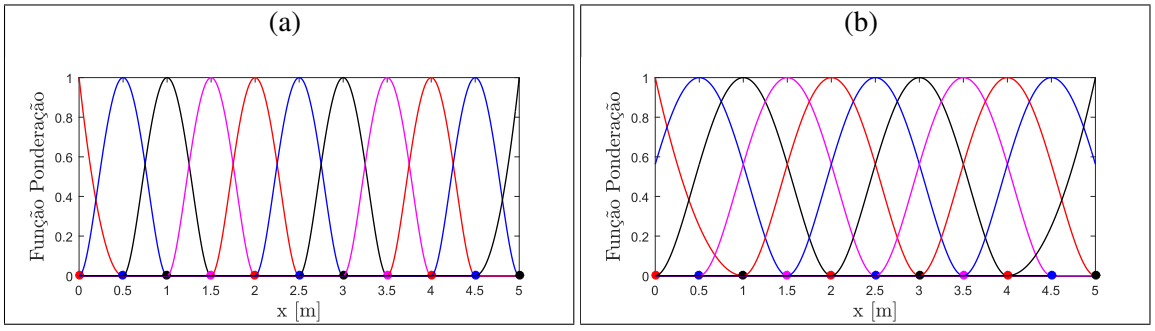
2.5.3 Construção das Funções de Ponderação

As funções ponderação $\mathrm{W}_{\alpha}(x)$, conforme definido em Duarte, Kim e Quaresma (2006), são construídas pelo produto de todas as funções de aresta que compõem o suporte do nó x_{α}, ou seja, $\{\varepsilon_{\alpha,j}(x)\}_{j=1}^{M_{\alpha}}$, onde M_{α} é o número de funções de aresta no suporte do nó x_{α}. Portanto, tem-se que:

$$\mathrm{W}_{\alpha}(x) = \prod_{j=1}^{M_{\alpha}} \varepsilon_{\alpha,j}(x) \quad . \tag{28}$$

Essa metodologia particular para construção de funções ponderação não é única, uma vez que funções do tipo spline e funções exponenciais são apresentadas em (LIU, 2003).

Figura 9 – Funções Ponderação, considerando funções de aresta C^{P-1} com $P = 2$, para malhas com suporte compacto (a) e para malhas com suporte duplo (b)



Fonte: O autor.

Portanto, à partir de multiplas funções associadas ao nó x_{α}, cria-se uma função ponderação única para o nó, posteriormente utilizada para a construção das Partições da Unidade. A Figura 9 apresenta uma representação das funções ponderação.

2.5.4 O Método de Mínimos Quadrados Móveis

A construção das Partições da Unidade pelo Método de Mínimos Quadrados Móveis (MLS), conforme apresentada em Liu (2003), é dada por: seja $f(x)$ uma função definida sobre o

domínio Ω. A aproximação pelo MLS escreve tal função com uma combinação de uma base de m funções, ou seja, $\tilde{f}(x) = \mathbf{p}(x)^T \mathbf{a}(x)$, onde $\mathbf{p}(x)$ é uma matriz $m \times 1$ da base de funções, com os respectivos coeficientes $\mathbf{a}(x)$, que é uma matriz $m \times 1$.

O princípio da aproximação pelo MLS é a minimização do resíduo ponderado entre a solução real e a aproximação pelo MLS, definindo a função ponderação $\mathrm{W}(x, x_\alpha)$ em cada nó x_α, que são funções positivas que decrescem de forma suave na medida em que $||x_\alpha - x||$ aumenta, e deixam de existir no contorno do suporte do respetivo nó x_α. A matriz de momento ponderado $\mathbf{A}(x)$, com dimensão $m \times m$, e $\mathbf{B}(x)$, que é uma matriz $m \times 1$, são definidos por:

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathrm{W}(x, x_\alpha)\ \mathbf{p}(x_\alpha)\ \mathbf{p}^T(x_\alpha) \tag{29}$$

$$\mathbf{B}(x) = \mathrm{W}(x, x_\alpha)\ \mathbf{p}(x_\alpha) \tag{30}$$

Aqui, um requisito de existência é imposto para uma definição apropriada da Partição da Unidade. Se o vetor de base de funções, composto por um monômio completo de ordem m, ou seja, $\mathbf{p}^T = \{1, x, \ldots, x^m\}$ é utilizado, então $n \geq m$ funções de ponderação não nulas são requeridas sobre todo o domínio.

O motivo é que, somente sob as condições prescritas, chega-se à uma matriz de momento ponderado $\mathbf{A}(x)$ não singular (demonstração realizada no Apêndice A). Portanto, se $n \geq m$ e $\mathbf{A}(x)$ é uma matriz não singular, então a aproximação $\widetilde{f}(x)$ e a Partição da Unidade $\phi(x)$ são definidos por:

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{\alpha}^{n} \sum_{j}^{m} p_j(x) \left(\mathbf{A}^{-1}(x)\ \mathbf{B}(x) \right)_{j\alpha} f_\alpha \equiv \sum_{\alpha}^{n} \phi_\alpha(x)\ f_\alpha \tag{31}$$

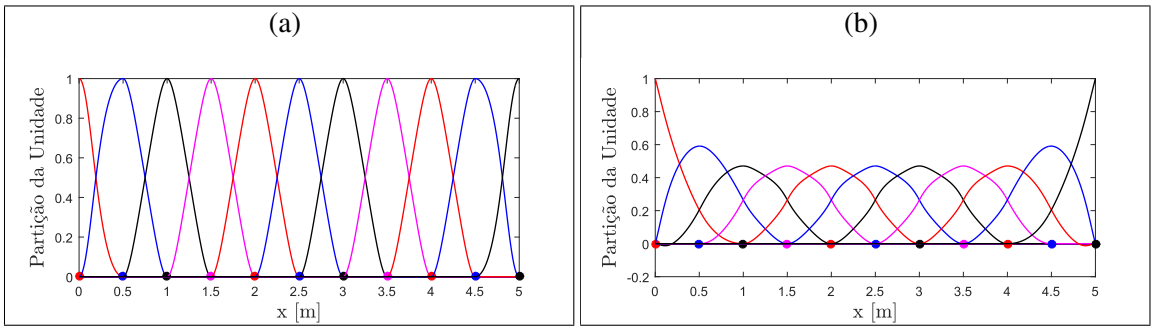
$$\phi_\alpha(x) = \sum_{j}^{m} p_j(x) \left(\mathbf{A}^{-1}(x)\ \mathbf{B}(x) \right)_{j\alpha} \tag{32}$$

Logo, a definição de $\phi_\alpha(x)$ da Equação (32) pode ser obtida pela definição apropriada das funções ponderação $\mathrm{W}(x, x_\alpha) = \mathrm{W}_\alpha(x)$, utilizando diferentes condições de função de aresta como no C^k-GFEM original.

Assim, para a atribuição de uma base de funções $\mathbf{p} = \{1, x\}$ na metodologia proposta, o suporte das funções (ou dos nós x_α) precisa ser aumentado para garantir que a condição $n \geq m$ seja totalmente satisfeita sob todo o domínio do problema.

A Figura 10 apresenta as Partições da Unidade geradas via Mínimos Quadrados Móveis para ambas as condições de suporte compacto (C^k-GFEM convencional) e suporte duplo (funções melhoradas via MLS).

Figura 10 – Partições da Unidade, considerando funções de aresta C^{P-1} com $P = 2$, para malhas com suporte compacto (a) e para malhas com suporte duplo (b)



Fonte: O autor.

2.6 ENRIQUECIMENTO EXTRÍNSECO DAS PARTIÇÕES DA UNIDADE

Dentro do escopo do Método de Elementos Finitos Generalizados convencional (GFEM, sigla em inglês), a qualidade de aproximação da Partição da Unidade pode ser melhorada a partir da multiplicação das respectivas funções $\phi_\alpha(x)$ por um conjunto de funções especiais, usualmente de natureza polinomial, conforme apresenta Babuška, Strouboulis e Copps (2000).

Tal melhoria, denominada como enriquecimento extrínseco, permite que o novo conjunto de funções gerado possua características como a reproducibilidade polinomial, reduzindo ou eliminando a necessidade de se realizar um refino da malha de elementos para se obter uma precisão de aproximação ainda maior, conforme apresenta Torres (2008).

Outro aspecto positivo é que o GFEM permite a utilização dos códigos convencionais do FEM, sem a necessidade de grandes alterações para sua incorporação na aproximação numérica, conforme apresenta Babuška, Strouboulis e Copps (2000).

No presente trabalho, as Partições da Unidade $\phi_\alpha(x)$ construídas pelo MLS são enriquecidas extrínsecamente multiplicando-as por um conjunto de funções de enriquecimento $\{L_{i\alpha}\}_{i=1}^{p}$, onde p é o número de funções de enriquecimento associadas ao nó x_α.

Assim, define-se um conjunto de monômios completos para cada nó $L_{i\alpha} = [1, \bar{x}, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^p]$, onde $\bar{x}$ é uma coordenada intrínseca definida a partir de cada nó x_α como $\bar{x} = (x - x_\alpha)/l_e$. O fator de escala l_e, assumido aqui como o comprimento de um elemento finito, é recomendado no trabalho de Mendonça, de Barcellos e Torres (2013) para reduzir os erros de arredondamento. Dessa forma, a aproximação numérica do problema pode ser expressa pela expansão de Galerkin:

$$\widetilde{u}(x) = \sum_{\alpha=1}^{N} \phi_\alpha(x) \left\{ c_\alpha + \sum_{i=2}^{q_\alpha} L_{i\alpha}(\bar{x})\ g_{i\alpha} \right\} \tag{33}$$

onde $g_{i\alpha}$ é um coeficiente nodal generalizado associado a cada função de enriquecimento $L_{i\alpha}$ do nó x_α, e q_α é o número de funções de enriquecimento associado a ele. Por fim, c_α é o coeficiente associado à Partição da Unidade $\phi_\alpha(x)$.

2.7 CONSTRUÇÃO DAS PARTIÇÕES DA UNIDADE HERMITIANAS

Um conjunto de funções de aproximação convencionalmente utilizado para problemas envolvendo vigas do tipo Euler-Bernoulli é o da base de funções de Hermite, conforme apresentado em Fish e Belytschko (2007).

Esse conjunto de polinômios interpoladores possui propriedades particularmente interessantes do ponto de vista de capacidade de aproximação, e também da facilidade de se impor adequadamente as condições de contorno de deslocamento u_Γ e rotação da seção transversal θ_Γ no contorno do problema.

A primeira propriedade, de capacidade de aproximação, é dada pelo grau polinomial atribuído às funções de aproximação, uma vez que o grau polinomial mínimo atribuído às funções é equivalente a $p = 3$, considerando interpoladores entre dois nós da malha na condição unidimensional. Isso garante que as funções da base de Hermite satisfaçam a condição $\phi(x) \in H^2$, além de naturalmente serem capazes de reproduzir um grau polinomial maior do que a base Lagrangeana convencional.

A segunda propriedade é dada pela independência das funções construídas na imposição das condições de contorno, uma vez que as condições de contorno de deslocamento e rotação podem ser controladas de forma independente no sistema de equações. Isso implica, em suma, que apenas um grau de liberdade é determinante na imposição das condições de contorno.

Pela representação apresentada nas Figuras 11 e 12, é possível observar que sob cada nó da malha (representado pelos pontos em $y = 0$) há apenas uma função da Partição da Unidade não nula. O mesmo pode ser observado para as primeiras diferenciações da Partição da Unidade. Assim, a aproximação de deslocamento e rotação referente aos nós é dada simplesmente pelo valor nodal atribuído à cada uma das funções dos nós.

A definição das funções de Hermite, considerando uma interpolação entre dois nós da malha x_α e $x_{\alpha+1}$, é iniciada pela definição de uma função generalizada $\phi(x) = C0 + C1x + C2x^2 + C3x^3$. Para cada nó x_α, duas funções da PU devem ser definidas.

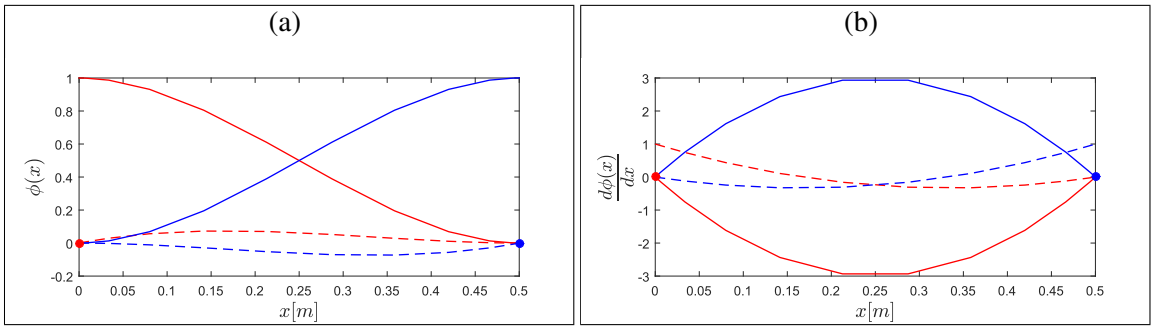
Uma das funções, $\phi_{\alpha,1}(x)$, deve ser unitária sob o nó x_α, nula sob o nó $x_{\alpha+1}$, e com derivadas nulas sob os nós x_α e $x_{\alpha+1}$. A outra função, $\phi_{\alpha,2}(x)$, deve possuir a derivada unitária sob o nó x_α, possuir derivada nula sob o nó $x_{\alpha+1}$, e funções nulas sob os nós x_α e $x_{\alpha+1}$.

Assim, considerando o conjunto de funções $\{\phi_{\alpha,1}(x), \phi_{\alpha,2}(x), \phi_{\alpha+1,1}(x), \phi_{\alpha+1,2}(x)\}$ existentes sob um elemento, os coeficientes $C0, C1, C2$ e $C3$ podem ser definidos resolvendo-se:

$$\begin{bmatrix} \phi(x_\alpha) \\ \phi'(x_\alpha) \\ \phi(x_{\alpha+1}) \\ \phi'(x_{\alpha+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_\alpha & x_\alpha^2 & x_\alpha^3 \\ 0 & 1 & 2x_\alpha & 3x_\alpha^2 \\ 1 & x_{\alpha+1} & x_{\alpha+1}^2 & x_{\alpha+1}^3 \\ 0 & 1 & 2x_{\alpha+1} & 3x_{\alpha+1}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C0 \\ C1 \\ C2 \\ C3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \\ \\ \end{Bmatrix} \tag{34}$$

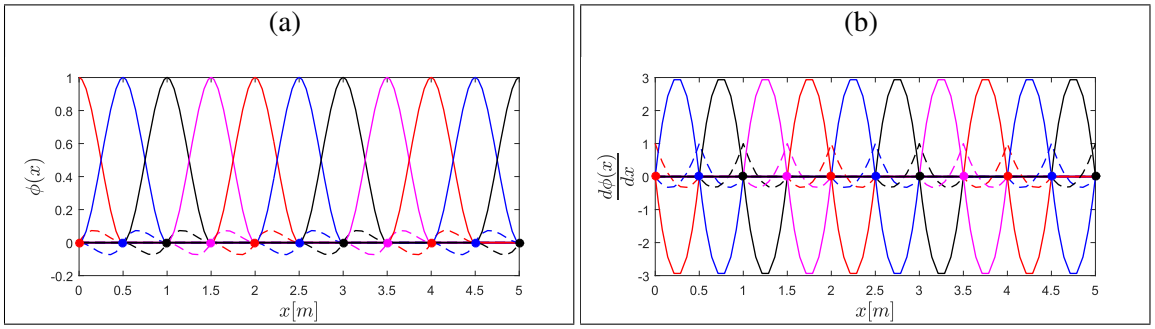
onde, para as funções da Partição da Unidade $\phi_{\alpha,1}(x)$ e $\phi_{\alpha+1,1}(x)$ unitárias sobre os nós, bem como as funções da Partição da Unidade $\phi_{\alpha,2}(x)$ e $\phi_{\alpha+1,2}(x)$ unitárias na primeira diferencial da

Figura 11 – Representação das funções da base Hermitiana no domínio local do primeiro elemento: Partição da Unidade (a) e respectivas primeiras derivadas (b)



Fonte: O autor.

Figura 12 – Representação das funções da base Hermitiana: Partição da Unidade (a) e respectivas primeiras derivadas (b)



Fonte: O autor.

PU, define-se:

$$\{\xi\}_{\phi_{\alpha,1}(x)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \{\xi\}_{\phi_{\alpha,2}(x)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \{\xi\}_{\phi_{\alpha+1,1}(x)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \{\xi\}_{\phi_{\alpha+1,2}(x)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{35}$$

2.8 APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DE SUPERPOSIÇÃO MODAL

A derivação apresentada a seguir, de forma simplificada, é apresentada em Bathe (2014). Seja a equação de equilíbrio para sistemas dinâmicos dada pela expressão abaixo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \tag{36}$$

Admitindo, por simplificação, que o sistema opera em condição de vibração livre, ou seja, $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, e que o efeito de amortecimento é desprezível, reescreve-se a Equação (36) como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{37}$$

Conforme postulado em Bathe (2014), a solução para a Equação (37) assume a forma:

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\lambda} \sin\big(\omega(t - t_0)\big) \tag{38}$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é um vetor de tamanho N, t é a variável de tempo, t_0 é uma constante temporal e ω é a frequência de vibração, em radianos por segundo, referente ao vetor $\boldsymbol{\lambda}$. Inserindo a Equação (38) em (37), obtém-se a expressão generalizada do autoproblema:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \omega^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\lambda} \tag{39}$$

A partir da Equação (39), obtém-se N soluções para $\boldsymbol{\lambda}$ e ω, ou seja, o conjunto de soluções $(\omega_1^2, \boldsymbol{\lambda_1})$, $(\omega_2^2, \boldsymbol{\lambda_2})$, ..., $(\omega_N^2, \boldsymbol{\lambda_N})$. De outra forma, $\boldsymbol{\lambda}_i$ é denominado como o i-ésimo vetor de forma, e ω_i é a i-ésima frequência correspondente ao vetor de forma.

No escopo do Método da Superposição Modal, reescreve-se a base do vetor de deslocamentos $\mathbf{U}$ pela transformação:

$$\mathbf{U}(t) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{X}(t) \tag{40}$$

em que $\mathbf{X}(t)$ é um vetor de deslocamentos generalizados dependente da variável temporal, e de tamanho N. A aproximação completa para os deslocamentos é obtida pela superposição, ou somatório da contribuição, de cada modo de vibração e sua respectiva frequência, ou seja:

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\lambda}_i \overline{x_i}(t) \tag{41}$$

onde o termo $\overline{x_i}(t)$ pode ser obtido, para casos de vibração livre sem amortecimento, pela expressão abaixo:

$$\overline{x_i}(t) = \overline{x_{1,i}} \sin(\omega_i t) + \overline{x_{2,i}} \cos(\omega_i t) \tag{42}$$

Na expressão acima, $\overline{x_{1,i}}$ e $\overline{x_{2,i}}$ são constantes a serem determinadas à partir das condições de deslocamentos ${}^0\mathbf{U}$ e velocidades ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ iniciais prescritas, ou seja:

$$\overline{x_i}(t=0) = \boldsymbol{\lambda}_i^T \mathbf{M}\, {}^0\mathbf{U} \tag{43}$$

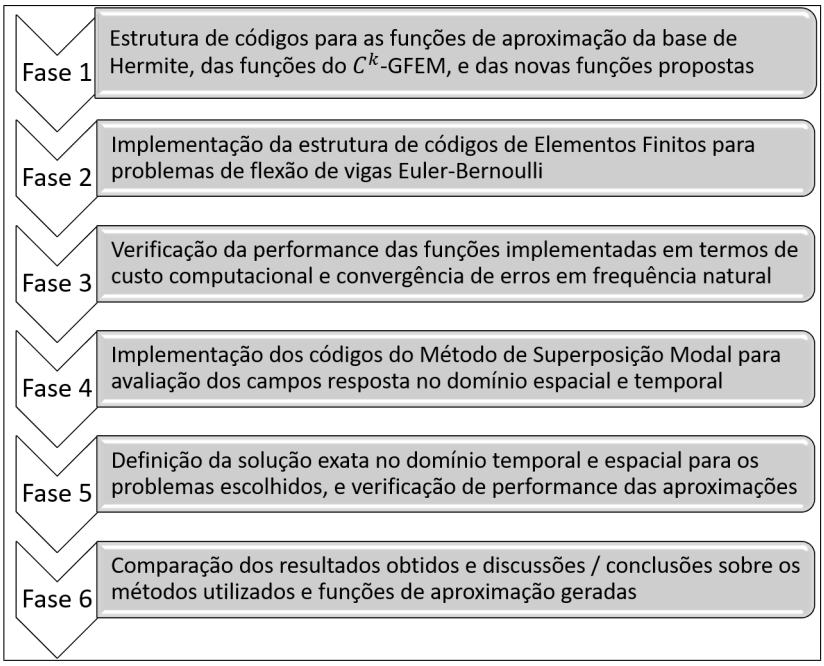
$$\dot{\overline{x}}_i(t=0) = \boldsymbol{\lambda}_i^T \mathbf{M}\, {}^0\dot{\mathbf{U}} \tag{44}$$

Assim, as constantes $\overline{x_{1,i}}$ e $\overline{x_{2,i}}$ determinam, de outra forma, o grau de representatividade da resposta dinâmica do problema por cada freqûencia natural considerada no Método de Superposição Modal.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Os experimentos numéricos apresentados neste trabalho buscaram principalmente a validação do efeito de melhoria da reproducibilidade ponimonial das funções do C^k-GFEM, bem como a validação da implementação numérica das funções de aproximação, da formulação do Método de Elementos Finitos, e também do método numérico de Superposição Modal. Abaixo, são apresentadas as etapas necessárias para que os objetivos propostos sejam atendidos.

Figura 13 – Cronograma de Atividades



Fonte: O autor.

3.1 ANÁLISE DE CUSTO COMPUTACIONAL

Dentro da terceira etapa do trabalho, foi realizada a análise de custo computacional das funções do C^k-GFEM convencional, bem como das funções melhoradas via Mínimos Quadrados Móveis e da base de funções de Hermite, em termos de integrabilidade numérica e tamanho do sistema de equações gerado.

Para a primeira análise, de integração numérica, foi considerado o refino h de malha (incremento do número de elementos finitos na malha) junto do parâmetro de pontos da quadratura da Gauss utilizados para a integração numérica das funções.

Na análise de convergência de integração das funções de aproximação, realizou-se a integração do termo quadrático da segunda diferencial das Partições da Unidade, conforme expressão abaixo:

$$\tilde{\zeta}(n_{Gauss}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{n_{Gauss}} \left(\phi_i''(x_j)\right)^2 w_j \right) \tag{45}$$

onde n_{Gauss} é número de pontos da quadratura de Gauss utilizados e w_j é o termo de ponderação associado ao ponto x_j, onde se calcula o termo quadrático da segunda derivada da PU.

Para tanto, foram realizados os refinos h de malha, considerando-se $10, 20, 40, 80$ e 160 elementos. Já para a quadratura de Gauss, foram considerados $1, 2, 4, 8$ e 16 pontos de integração, cada qual utilizado para cada tamanho de malha. Por simplificação, foi considerada apenas a função de aresta C^{P-1}, com $P = 3$, apresentada na Seção 2.5.2.1.

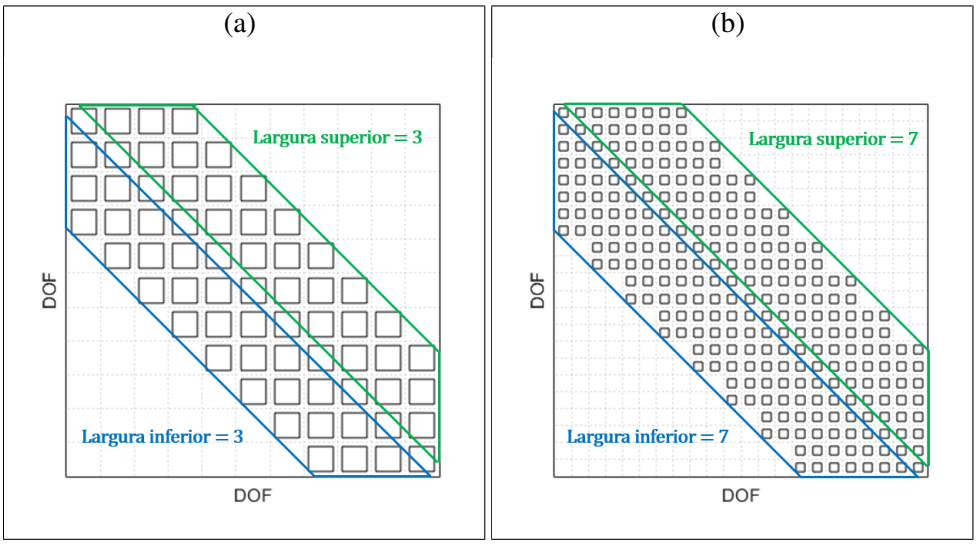
Vale notar que o termo da Expressão (45) se assemelha ao apresentado na Equação (24), o qual foi considerado como crítico em termos de processamento numérico uma vez que a expressão depende das segundas diferenciais das Partições da Unidade, as quais são numericamente desafiadoras de se integrar.

De forma a se obter o resultado em percentual de erro, foi realizada a integração com um um número extrapolador de 64 pontos da quadratura, o qual foi considerado como referência de integral exata da Expressão (45). Portanto, na forma percentual, os termos são calculados por:

$$Erro\%[\tilde{\zeta}(n_{Gauss})] = \frac{\tilde{\zeta}(n_{Gauss})}{\tilde{\zeta}(n_{Gauss} = 64)} \times 100 \tag{46}$$

Esse tipo de análise permite compreender a complexidade de se integrar as diferentes funções do C^k-GFEM convencional e sua versão melhorada, e portanto as vantagens e desvantagens dos diferentes métodos.

Figura 14 – Exemplos de largura de banda de matriz: largura 3 (a) e largura 7 (b).



Fonte: O autor.

Para a análise de integração, não foram consideradas as funções de aproximação de Hermite, uma vez que apenas 3 pontos da quadratura de Gauss são conhecidamente necessários para a integração exata de tais funções, conforme apresenta Fish e Belytschko (2007).

Já na análise do tamanho do sistema de equações gerado, realizou-se a montagem do sistema completo em termos da matriz de rigidez $\mathbf{K}$, e analisou-se dois parâmetros: a largura de banda da matriz de rigidez e o número de termos não nulos totais da matriz.

A largura de banda da matriz **K**, sabendo que se trata de uma matriz simétrica para a abordagem do presente trabalho, consiste na quantificação das diagonais com termos não nulos desconsiderando a diagonal principal da matriz.

Além disso, por ser uma matriz simétrica, considera-se apenas a largura superior ou inferior do sistema na análise aqui proposta. Alguns exemplos do conceito de largura de banda utilizado no presente trabalho pode ser encontrado na Figura 14, onde se encontram matrizes com larguras de 3 e 7.

Na contabilização de termos não nulos da matriz, considera-se todos os termos da matriz, ou seja, a diagonal principal e as porções superiores e inferiores do sistema. Essa contabilização, aliada ao conceito de largura de banda, permite compreender o impacto das funções de aproximação no tamanho do sistema de equações a ser integrado (número de operações de integração), e consequentemente no custo computacional de montagem do mesmo.

3.2 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DE FREQUÊNCIAS NATURAIS

A partir da aproximação das frequências naturais do sistema, obtidas pela solução do autoproblema apresentado na Equação (39), e das frequências naturais exatas obtidas pelas expressões amplamente conhecidas da literatura (RAO, 2011), pode-se realizar a análise de convergência das funções de aproximação.

Neste trabalho, a análise é realizada para ambos os refinos h, p e k de malha onde, mantendo-se os parâmetros p e k fixos (função de aresta fixa e enriquecimento intrínseco e extrínseco fixos), pode-se avaliar o efeito do refino h de malha na qualidade de aproximação das frequências.

Para tal avaliação, realizou-se um estudo para as funções de aresta C^{P-1}, com $P = (3,4,5)$, e C^{∞}, e para os graus polinomiais equivalentes $p = (1,2)$, onde para $p = 1$ avalia-se as funções do C^k-GFEM com enriquecimento extrínseco $p = 1$, e as funções melhoradas enriquecidas intrínsecamente via Mínimos Quadrados Móveis com $\mathbf{p} = \{1, x\}$.

Já para $p = 2$, avalia-se as funções do C^k-GFEM com enriquecimento extrínseco $p = 2$, e as funções melhoradas enriquecidas intrínsecamente via Mínimos Quadrados Móveis com $\mathbf{p} = \{1, x\}$ e também enriquecidas extrínsecamente com $p = 1$ como no C^k-GFEM.

Assim, pode-se avaliar o efeito de todos os parâmetros h, p e k de forma independente nas aproximações de frequências naturais.

3.3 AVALIAÇÃO DE PERFORMANCE NO DOMÍNIO ESPAÇO-TEMPO

Conhecida a solução exata $u_{exata}(x,t)$ do problema, obtida conforme o método de separação de variáveis apresentado na Seção 2.2, pode-se calcular o erro das aproximações geradas via Método de Superposição Modal por:

$$Erro_{SM}[u(x,t)] = \tilde{u}(x,t) - u_{exata}(x,t) \tag{47}$$

Deve-se notar que a Equação (47) estabelece, para cada período de tempo t e para coordenada do domínio x, um erro entre a aproximação do campo de deslocamentos e a solução analítica do problema. Ou seja, para cada $t + \Delta t$ o deslocamento de cada porção da viga é completamente definido e conhecido. Uma forma de tornar a medida de erro relativa à solução analítica do problema é escrevê-la como:

$$Erro\%_{SM} = \int_t \left(\frac{\sqrt{\int_\Omega \left(Erro_{SM}[u(x,t)] \right)^2 dx}}{\sqrt{\int_\Omega \left(u_{exata}(x,t) \right)^2 dx}} \right) dt \tag{48}$$

ou seja, calcula-se uma norma de erro relativa (um único número) à solução exata do problema pela integração do erro no domínio de espaço e tempo do modelo.

A integração no domínio espacial do problema pode ser realizada diretamente mediante a integração numérica pela quadratura de Gauss, já utilizada na construção do sistema de equações do problema. Para a integração no domínio temporal, optou-se pela integração numérica via Regra do Trapézio. Assim, para cada passo de tempo t calcula-se a norma de erro no domínio espacial, pela quadratura de Gauss, por:

$$Erro_{SM}[u(t)] = \frac{\sqrt{\int_\Omega \left(Erro_{SM}[u(x,t)] \right)^2 dx}}{\sqrt{\int_\Omega \left(u_{exata}(x,t) \right)^2 dx}} \tag{49}$$

Para a integração na escala temporal, calcula-se, portanto:

$$Erro\%_{SM} \approx \sum_t \left(\frac{Erro_{SM}[u(t)] + Erro_{SM}[u(t+\Delta t)]}{2} \right) \Delta t \tag{50}$$

Para a medida de erro no espaço-tempo, e pela utilização do Método do Trapézio para a integração no domínio de tempo, deve-se ressaltar a possibilidade de eventuais erros gerados pelo método de integração utilizado. No entanto, de forma comparativa entre as metodologias utilizadas, foram desconsiderados quaisquer erros associados a integração numérica.

Em suma, a Equação (50) é a contabilização de todos os erros das normas em deslocamento durante o período de tempo que se pretende avaliar. Para os demais campos de velocidade e aceleração, o procedimento utilizado é o mesmo descrito para o campo de deslocamento, onde se utiliza, portanto, a expressão exata dos respectivos campos para os cálculos de erros.

Na aproximação pelo Método de Superposição Modal, foram considerados nove termos (nove primeiras frequências) para a aproximação no espaço-tempo do problema, da mesma forma como na definição da solução analítica, vide Equação (14).

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo serão apresentados os resultados numéricos para o problema de vibração livre, obtidos pela utilização das funções propostas no Capítulo 2.

Dada a extensão das discussões que serão apresentadas a seguir, optou-se por realizar um estudo de caso de vibração livre com deslocamento e velocidade inicial prescritas no contorno do domínio.

A primeira etapa de avaliação consiste da verificação do custo computacional das funções utilizadas na aproximação via FEM, em termos de largura de banda da matriz de rigidez, número de termos não nulos e convergência de integração pelo incremento de pontos da quadratura de Gauss.

A segunda etapa de avaliação consiste da análise de convergência das diferentes funções propostas, comparadas excepcionalmente com as funções de base de Hermite, que são vastamente utilizadas para problemas de viga Euler-Bernoulli.

Para comparar as funções do C^k-GFEM convencional com a melhoria proposta, foram levados em conta o tipo de função de aresta utilizada na construção das funções (vide Seção 2.5.2) e o grau polinomial total empregado.

Assim, se as funções do C^k-GFEM recebem enriquecimento extrínseco de grau polinomial $P = 1$ (linear), deve-se comparar às respectivas funções melhoradas que já recebem enriquecimento via Mínimos Quadrados Móveis pela utilização da base de função $\mathbf{p}(x) = \{1, x\}$.

Ainda, se as funções do C^k-GFEM recebem enriquecimento extrínseco de grau polinomial $P = 2$ (quadrático), deve-se comparar às respectivas funções melhoradas e também enriquecidas extrínsecamente com grau polinomial $P = 1$. Assim, ambas funções apresentam capacidade de aproximação de grau polinomial $P = 2$.

A terceira etapa de avaliação das funções consiste da análise de convergência da aproximação do problema no domínio espaço-tempo, considerando o método de Superposição Modal com nove termos de aproximação para ambas as soluções analítica e a aproximação via FEM.

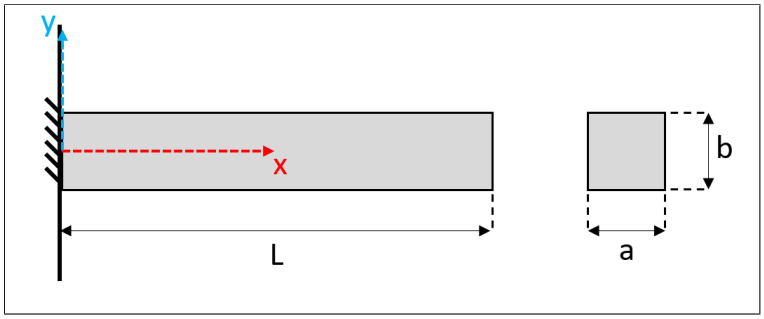
Asism, escolhendo-se um $\Delta t \leq \Delta t_{crit}$, e o fixando para quaisquer combinações de malha, avalia-se a convergência dos erros de aproximação no espaço-tempo apenas pelo refino h, p e k de malha.

4.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Seja o problema de viga simplesmente engastada apresentado abaixo, para uma viga de comprimento total $L = 1$ m, de largura $a = 0,1$ m e altura $b = 0,1$ m (seção transversal quadrada e constente ao longo do comprimento). Para o material da viga, definiu-se o aço com densidade de $\rho = 7860$ kg/m³ e módulo de elasticidade de $E = 206,8$ GPa.

Como condições iniciais prescritas, considera-se o deslocamento inicial de $u(x = L, t = 0) = 0,01$ m prescrito na extremidade livre da viga, bem como a velocidade inicial de $\dot{u}(x = L, t = 0) = 0$ m/s, também na extremidade livre. Para a resposta em espaço-tempo, foi considerado

Figura 15 – Ilustração da estrutura avaliada.



Fonte: O autor.

um modelo com tempo total de $t = 0,01$ segundos, onde o passo de tempo para o Método de Superposição Modal utilizado foi de $\Delta t = 10^{-7}$ segundos.

4.2 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DE INTEGRAÇÃO

Anteriormente a qualquer análise proposta dentro deste trabalho, é necessário compreender dentre as funções originais do C^k-GFEM e as funções melhoradas via MLS qual o nível de dificuldade de integração numérica das funções via quadradura de Gauss.

O reconhecimento do número mínimo de pontos da quadratura de integração é importante para garantir que os erros numéricos encontrados sejam referentes apenas à capacidade de aproximação das funções, e não compreendam erros grosseiros de integração por uma escolha inadequada de pontos.

Uma vez que a matriz de rigidez é composta da segunda derivada das Partições da Unidade $\phi''(x)$, conforme mostra a Equação (24), entendidas como as funções de maior dificuldade de integração numérica, realizou-se a análise de convergência sobre as respectivas funções geradas via C^k-GFEM original e MLS (melhoria proposta).

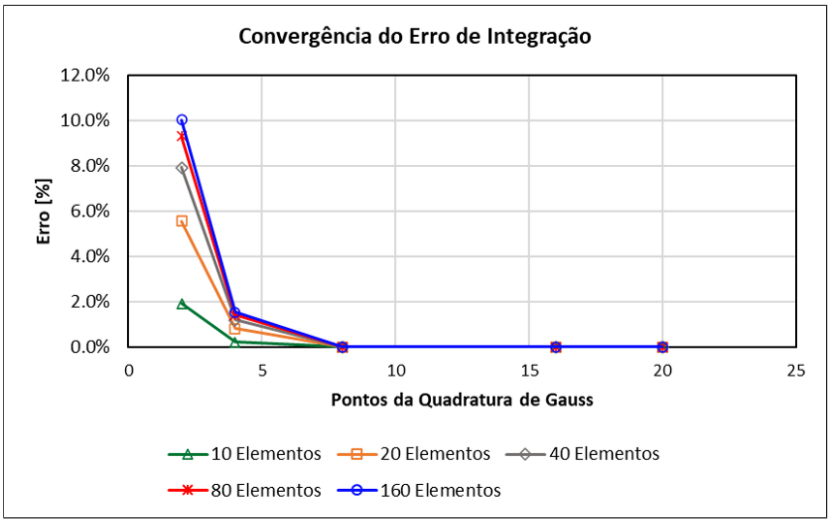
Assim, por simplificação da análise, definiu-se avaliar a convergência para diferentes tamanhos de malha, sendo escolhidas as composições de 10, 20, 40, 80 e 160 elementos, bem como um único tipo de função de aresta, sendo essa a função de aresta C^{P-1} com $P = 3$.

Para a análise, ainda, foi necessário avaliar o erro obtido para diferentes quantidades de pontos de integração da quadratura gaussiana, sendo escolhidos 2, 4, 8 16 e 20 pontos. Assim, foi possível avaliar o impacto do refino h de malha e quantidades de pontos de integração de forma simultânea.

Os resultados da análise de convergência podem ser encontrados nas Figuras 16 e 17. Em uma observação prévia, é possível afirmar que as funções melhoradas via MLS apresentam um nível de erro significativamente inferior (por volta de 80% de erro para o C^k-GFEM e 10% de erro para as funções melhoradas, quando considerados 2 pontos da quadratura) ao obtido pelas funções originais do C^k-GFEM para integrações com até 8 pontos da quadratura.

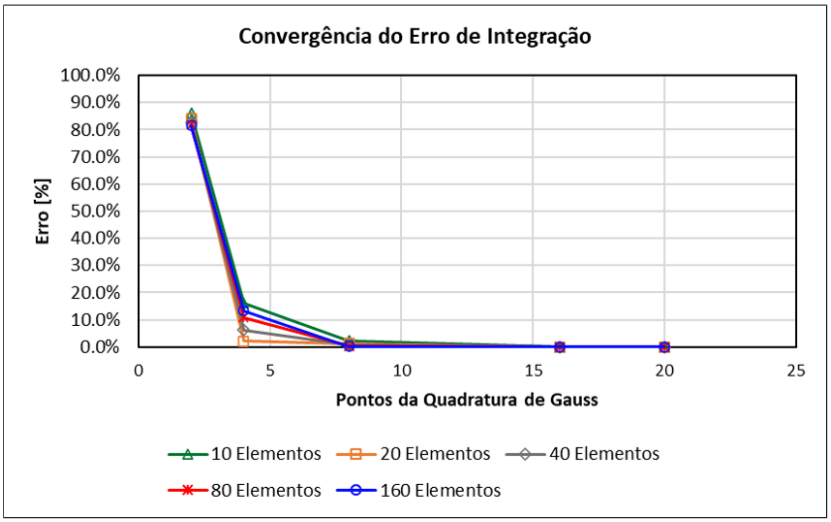
Ambas as funções avaliadas, ainda, apresentaram um erro relativamente estável a partir

Figura 16 – Convergência de integração quadrática da segunda derivada da PU utilizando as funções melhoradas com função de aresta polinomial $P = 3$.



Fonte: O autor.

Figura 17 – Convergência de integração quadrática da segunda derivada da PU utilizando as funções originais do C^k-GFEM, com função de aresta polinomial $P = 3$.



Fonte: O autor.

de 8 pontos de integração da quadratura de Gauss. Portanto, para a sequência de avaliações de performance, definiu-se 20 pontos como o número oficial da quadratura para a integração de ambas as funções. Esse grande número de pontos garante uma integração adequada do sistema.

Por fim, conclui-se que as funções melhoradas via MLS apresentam um menor custo computacional frente às funções originais do C^k-GFEM, enquanto são capazes de manter um erro inferior à 5% com cerca de 4 pontos da integração da quadratura de Gauss. Já para as funções do C^k-GFEM, até 8 pontos são necessários para se obter o mesmo nível de erro.

4.3 ANÁLISE DE CUSTO COMPUTACIONAL

Além do custo computacional referente ao nível de dificuldade de integração das funções utilizadas neste trabalho, conforme discutido na seção anterior, deve-se levar em consideração também a quantidade de operações de integração necessárias para a construção do sistema como um todo.

Conforme apresentado na Seção 2.4, o sistema global de equações contém N graus de liberdade que devem ser considerados na construção das matrizes do FEM. Assim, cada grau de liberdade possui uma função de aproximação $\phi_N(x)$, a qual deve ser integrada junto das demais funções para construção do sistema global.

Assim, na medida em que se incorpora cada vez mais graus de liberdade ao modelo, incorpora-se também custos computacionais adicionais relacionados à integração e incorporação dos novos termos.

As funções originais do C^k-GFEM, conhecidas por não possuírem representatividade polinomial de forma natural, necessitam do enriquecimento extrínseco conforme realizado no GFEM. Assim, para cada grau polinomial incorporado a essas funções, dobra-se o número de graus de liberdade do sistema.

Ou seja, o enriquecimento extrínseco das funções do C^k-GFEM com $p = 1$ (enriquecimento linear) adiciona mais N graus de liberdade, e consequentemente mais operações de integração. Quando se enriquece as funções com $p = 2$ (enriquecimento quadrático), incorpora-se mais $2N$ graus de liberdade, sendo $1N$ associado ao enriquecimento linear e outro $1N$ associado aos termos quadráticos.

Uma representação gráfica de tais condições é apresentada na Figura 18. Considerando 11 nós na malha gerada, a matriz $\mathbf{K}$ para as funções do C^k-GFEM enriquecidas com $p = 1$ (Figura 18.a) possui o tamanho de 22×22. Com enriquecimento extrínseco $p = 2$ (Figura 18.b), a matriz tem seu tamanho aumentado para 33×33.

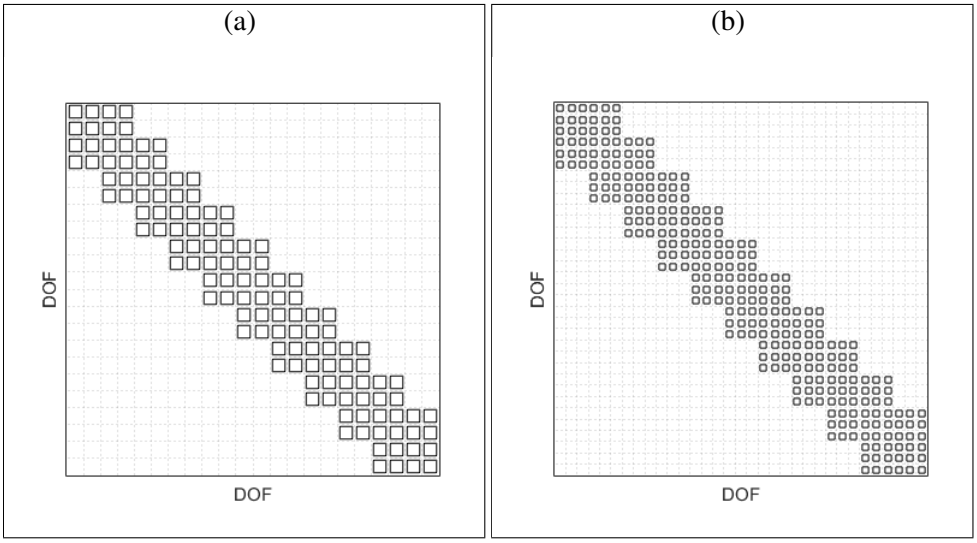
Da mesma forma, é importante notar o aumento da largura de banda da matriz $\mathbf{K}$ com o incremento dos graus de liberdade. Enquanto as funções do C^k-GFEM enriquecidas com $p = 1$ apresentam uma largura de banda igual a 3, para as funções enriquecidas com $p = 2$ a largura da matriz é elevada para 5.

A largura de banda, considerando o caso especial unidimensional, implica diretamente no número de termos não nulos da matriz $\mathbf{K}$. Quanto maior a largura de banda, mais interações entre os diferentes N graus de liberdade haverá, e consequentemente mais termos da matriz devem ser calculados, integrados e incorporados no sistema de equações.

Quando consideradas as funções melhoradas, proposta do presente trabalho, nota-se pela Figura 19 um ganho significativo no número de graus de liberdade do sistema para uma mesma representatividade polinomial p frente ao C^k-GFEM convencional.

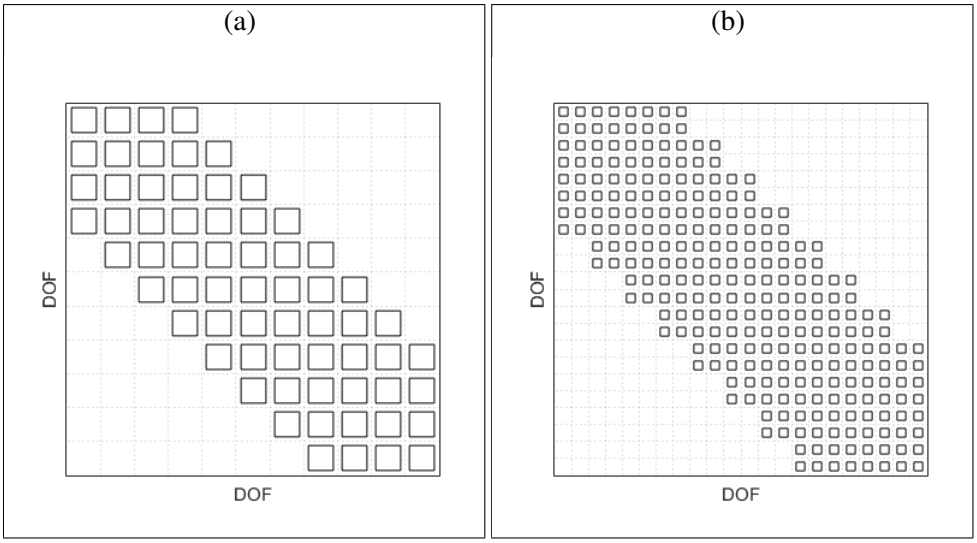
Assim, para as funções melhoradas via enriquecimento intrínseco $p = 1$ (Figura 19.a), a matriz $\mathbf{K}$ apresenta o tamanho exato do número de nós utilizados na malha. Na condição

Figura 18 – Termos não nulos da matriz de rigidez para as funções originais do C^k-GFEM: enriquecimento extrínseco $p = 1$ (a) e enriquecimento extrínseco $p = 2$ (b)



Fonte: O autor.

Figura 19 – Termos não nulos da matriz de rigidez para as funções melhoradas via MLS: enriquecimento intrínseco $p = 1$ (a) e enriquecimento intrínseco $p = 1$ com enriquecimento extrínseco $p = 1$ (b)



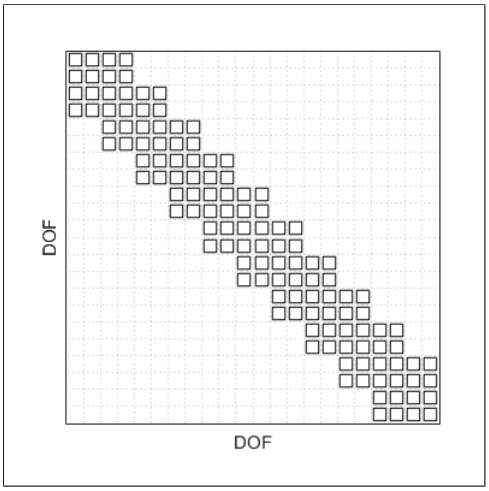
Fonte: O autor.

apresentada na Figura 19.a, onde foram considerados também 11 nós na malha, a matriz de rigidez apresenta o tamanho 11×11.

Além disso, nota-se que a largura da matriz em questão é exatamente a mesma do C^k-GFEM para $p = 1$. Assim, o custo computacional assumido para as funções melhoradas enquanto $p = 1$ pode ser considerado inferior frente ao C^k-GFEM convencional.

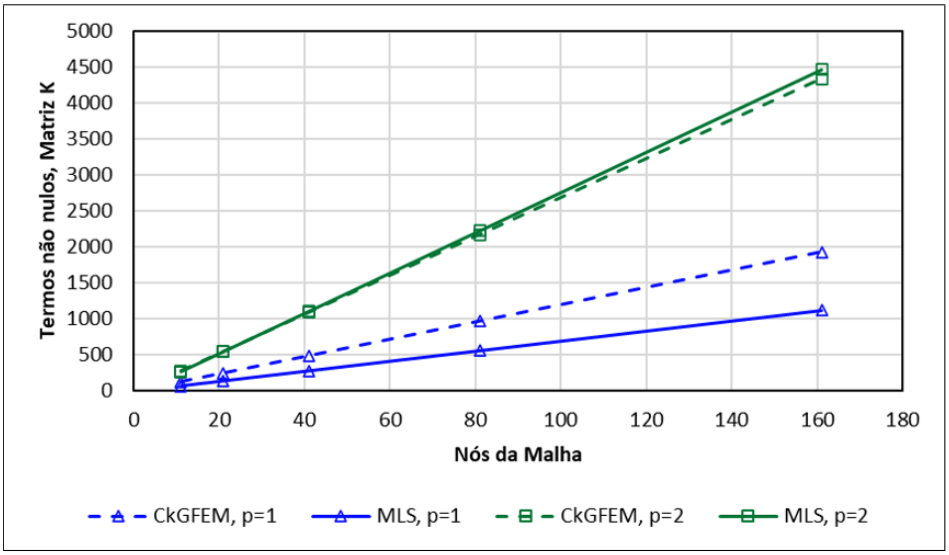
Quando considerado o enriquecimento $p = 2$ para as funções melhoradas (intrínseco $p = 1$ e extrínseco $p = 1$, Figura 19.b), nota-se um incremento significativo na largura de banda da matriz de rigidez. Originalmente com $p = 1$ a largura de banda era equivalente a 3, enquanto

Figura 20 – Termos não nulos da matriz de rigidez para as funções da base de Hermite.



Fonte: O autor.

Figura 21 – Quantidade de termos não nulos da matriz de rigidez **K**.



Fonte: O autor.

para $p = 2$ aumenta-se a largura para 7, ou seja, uma matriz de rigidez ainda mais larga que o próprio C^k-GFEM convencional com $p = 2$ (Figura 18.b).

O motivo para o incremento tão significativo está exatamente no aumento do suporte das funções distância (Seção 2.5.1), necessário para comportar a melhoria das funções via MLS conforme discutido na Seção 2.5.

Uma vez que as Partições da Unidade agora se estendem por vários elementos da malha (suporte duplo), conforme apresenta a Figura 10.b, a interação entre os graus de liberdade é aumentada significativamente para essa proposta. Assim, o impacto causado pelo enriquecimento extrínseco das funções melhoradas é significativamente superior frente ao C^k-GFEM convencional, que apresenta funções com suporte compacto.

Portanto, para os custos computacionais em termos de tamanho de sistema de equações,

o C^k-GFEM torna-se mais atrativo na medida em que há a necessidade de enriquecer as PU's com ainda mais funções polinomiais. Para a base de funções de Hermite, a largura de banda é limitada a 3 para quaisquer combinações de malha. A matriz de rigidez, considerando 11 nós na malha, pode ser observada na Figura 20.

A Figura 21 apresenta uma relação de quantidades de termos não nulos da matriz $\mathbf{K}$ na medida em que se incorpora mais nós à malha do modelo.

Considerando-se $p = 1$ para ambas as funções, as funções melhoradas (MLS) apresentam uma quantidade significativamente inferior de termos não nulos na matriz de rigidez frente ao C^k-GFEM.

Já no caso em que $p = 2$, para malhas grosseiras ambas as propostas de funções apresentam quantidades similares de termos não nulos, mas que apresentam incremento substancial para as funções melhoradas na medida em que se realiza o refino h de malha.

Mesmo com uma matriz de rigidez menor que a do C^k-GFEM convencional, a largura de banda das funções melhoradas é quem promove incrementos cada vez maiores na quantidade de termos da matriz $\mathbf{K}$.

4.4 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DE FREQUÊNCIAS NATURAIS

A partir da construção da matriz massa $\mathbf{M}$ e da matriz de rigidez $\mathbf{K}$ do sistema global, é possível calcular as frequências naturais do problema em questão resolvendo-se $|\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}| = 0$. Assim, para cada grau de liberdade do sistema há uma respectiva frequência natural, determinada de forma aproximada via FEM.

De forma complementar, e conforme apresenta Rao (2011), as frequências naturais exatas do sistema podem ser obtidas à partir da Equação (8), onde cada valor de $\beta_n L$ pode ser obtido de forma a satisfazer a Equação (15). A tabela abaixo apresenta as 9 primeiras frequências naturais do problema proposto.

Tabela 1 – Frequências naturais exatas do problema proposto

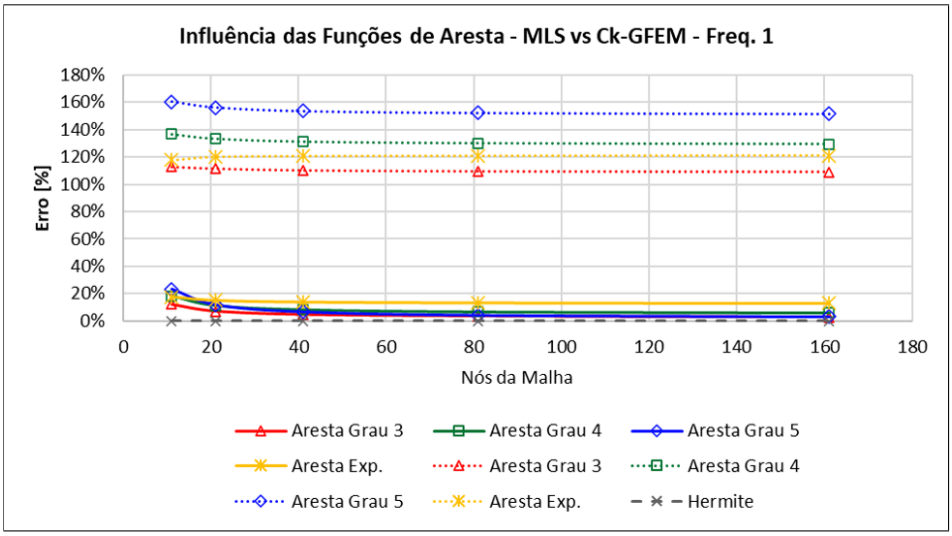
Nº	$\beta_n L$	Frequência [Hz]
1	1,8751	520,62
2	4,6941	3262,69
3	7,8548	9135,64
4	10,9955	17902,21
5	14,1372	29593,63
6	17,2788	44207,76
7	20,4204	61744,72
8	23,5619	82204,51
9	26,7035	105587,13

Uma vez que cada configuração de malha (número de nós) e de funções (função de aresta, enriquecimentos intrínseco e extrínseco) apresentam suas respectivas capacidades de aproximação, pode-se avaliar o impacto dos parâmetros h, p e k na determinação das frequências

naturais do sistema. Em uma primeira análise, considerando a representatividade polinomial $p = 1$ das funções do C^k-GFEM (enriquecimento extrínseco $p = 1$) e do MLS (enriquecimento intrínseco $p = 1$), obteve-se os resultados apresentados na Figura 22 para a primeira frequência do sistema.

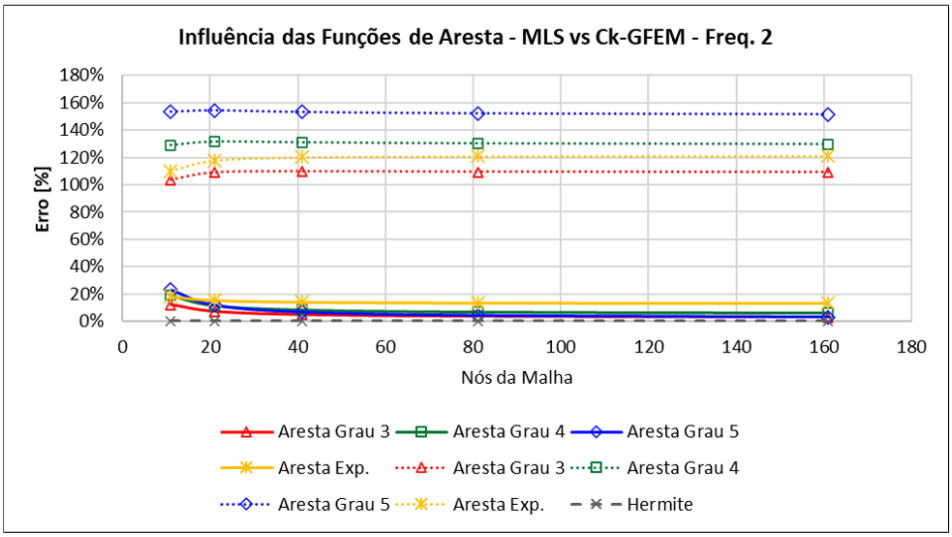
Para as figuras apresentadas adiante, adotou-se a convenção gráfica em que as linhas pontilhadas representam as funções convencionais do C^k-GFEM, e as linhas cheias representam as funções melhoradas via MLS.

Figura 22 – Análise de convergência da primeira frequência natural do sistema para o refino h de malha e diferentes funções de aresta. Funções do C^k-GFEM (extrínseco $p = 1$) e funções melhoradas (intrínseco $p = 1$).



Fonte: O autor.

Figura 23 – Análise de convergência da segunda frequência natural do sistema para o refino h de malha e diferentes funções de aresta. Funções do C^k-GFEM (extrínseco $p = 1$) e funções melhoradas (intrínseco $p = 1$).

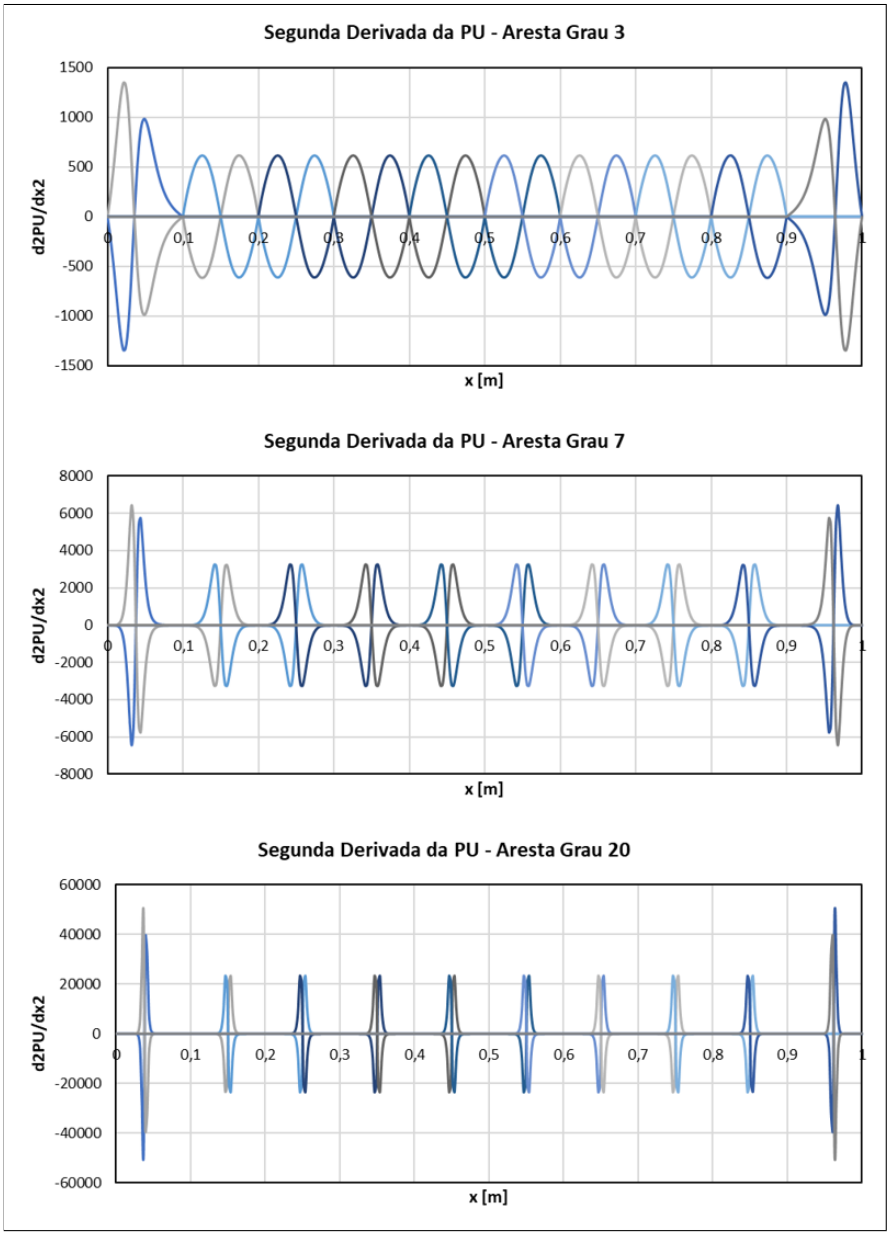


Fonte: O autor.

Pode-se observar, com facilidade, que as funções melhoradas via MLS apresentam aproximações de frequência significativamente superiores às do C^k-GFEM convencional.

Mesmo com uma malha extremamente grosseira (10 elementos), as funções melhoradas apresentam uma capacidade muito superior de aproximação se comparadas com as do C^k-GFEM convencional na melhor condição de malha avaliada (160 elementos). Ou seja, as funções melhoradas são capazes de gerar melhores aproximações com um menor custo computacional.

Figura 24 – Segunda derivada das Partições da Unidade para diferentes graus de função de aresta C^{P-1}. Gráficos para $P = 3$, $P = 7$ e $P = 20$. Utilizados 10 elementos de malha.



Fonte: O autor.

A mesma observação pode ser realizada para a segunda frequência do sistema, conforme apresenta a Figura 23, bem como para as demais frequências obtidas. As análises de convergência para a terceira e quarta frequência do sistema podem ser encontradas no Apêndice B.

É importante ressaltar ainda que o grau de continuidade das funções de aresta utilizadas impacta significativamente a aproximação das frequências naturais. Para as funções de aresta polinomiais C^{P-1}, o aumento do grau de continuidade $k = (P-1)$ apresenta uma piora na aproximação das frequências.

Tal fato pode estar atribuído, em princípio, ao incremento de rigidez atribuído ao modelo puramente pelo incremento de continuidade, ao menos na forma de construção das funções de aresta apresentada na Seção 2.5.2.

Pela Figura 24, é possível de se observar que o incremento dos graus de aresta para as funções C^{P-1}, mantendo uma mesma malha de elementos (10 elementos), proporciona picos localizados da segunda derivada da PU, a qual é utilizada para a construção da matriz de rigidez.

Assim, o efeito desse incremento significativo de rigidez localizado seria, em princípio, capaz de proporcionar frequências maiores do que a expectativa de aproximação.

Uma segunda análise, considerando a representatividade polinomial $p = 2$ das funções do C^k-GFEM (enriquecimento extrínseco $p = 2$) e do MLS (enriquecimento intrínseco $p = 1$, enriquecimento extrínseco $p = 1$), obteve-se os resultados apresentados na Figura 25 para a primeira frequência do sistema.

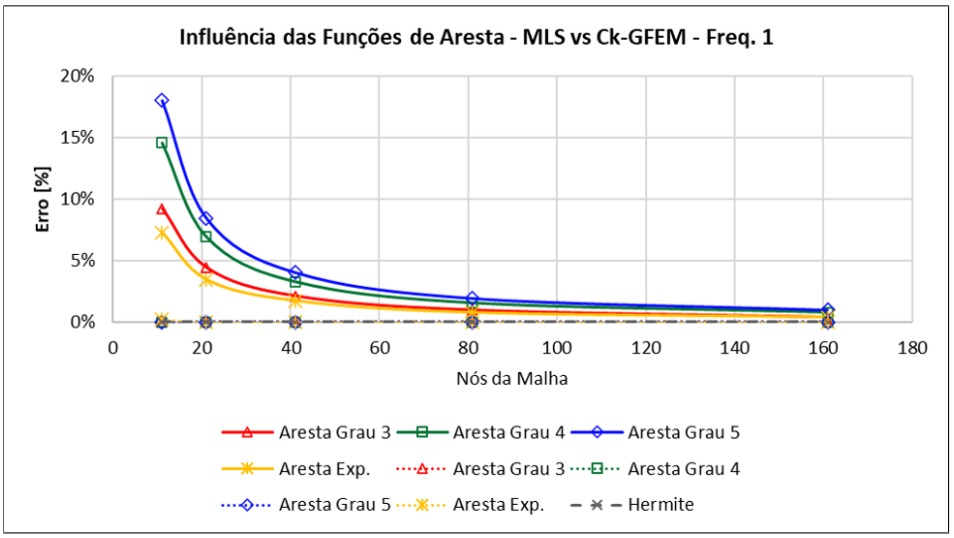
O C^k-GFEM, que agora conta com um grau polinomial quadrático extrínseco de aproximação, apresentou uma capacidade de aproximação significativamente superior frente às funções melhoradas via MLS. Os erros obtidos para tais funções não superam a marca de 1 Hz, mesmo com uma malha grosseira de 10 elementos.

No entanto, mesmo com erros superiores, as funções melhoradas apresentam boa capacidade de aproximação de frequências à partir de 20 elementos de malha, onde um erro inferior à 5% é obtido para as respectivas funções. Da mesma forma, as observações realizadas para a primeira frequência também são encontradas para a segunda frequência, cujos resultados podem ser encontrados na Figura 26. As análises de convergência para a terceira e quarta frequência do sistema, com $p = 2$, também podem ser encontradas no Apêndice B.

Assim, conclui-se que o efeito de enriquecimento extrínseco para as funções do C^k-GFEM se mostra extremamente significativo frente ao obtido pelo enriquecimento extrínseco das funções melhoradas. Tal conclusão foi obtida também nos resultados do trabalho de Garbuio e Torres (2019), onde avaliou-se o desempenho das funções em problemas estáticos unidimensionais.

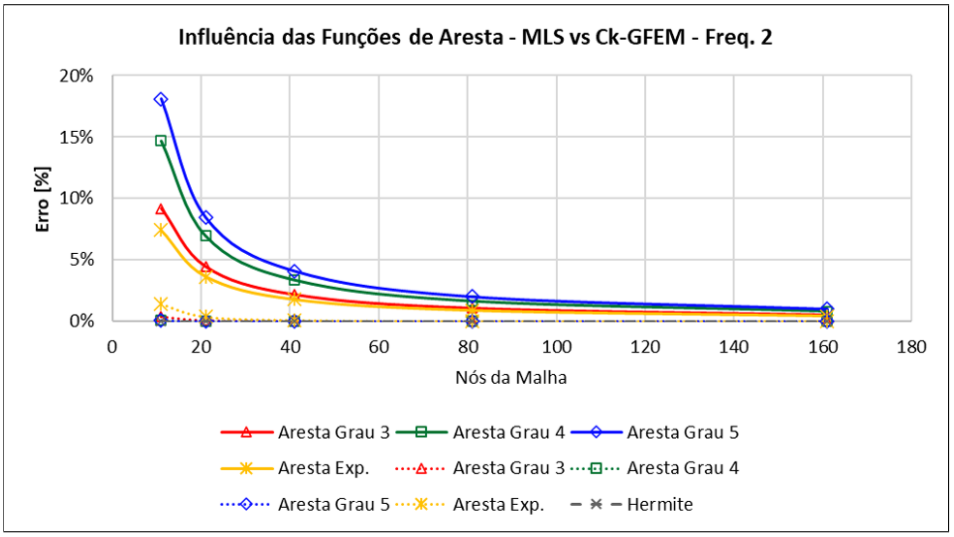
Ainda, vale ressaltar que a aproximação das frequências naturais do sistema pela utilização da base de funções de Hermite superou os níveis de erro obtidos por ambas as funções do C^k-GFEM e da base de funções melhoradas via MLS. Tal observação vale para as condições em que $p = 1$ (Figuras 22 e 23) e $p = 2$ (Figuras 25 e 26), para todos os graus de continuidade avaliados.

Figura 25 – Análise de convergência da primeira frequência natural do sistema para o refino h de malha e diferentes funções de aresta. Funções do C^k-GFEM (extrínseco $p = 2$) e funções melhoradas (intrínseco $p = 1$, extrínseco $p = 1$).



Fonte: O autor.

Figura 26 – Análise de convergência da segunda frequência natural do sistema para o refino h de malha e diferentes funções de aresta. Funções do C^k-GFEM (extrínseco $p = 2$) e funções melhoradas (intrínseco $p = 1$, extrínseco $p = 1$).



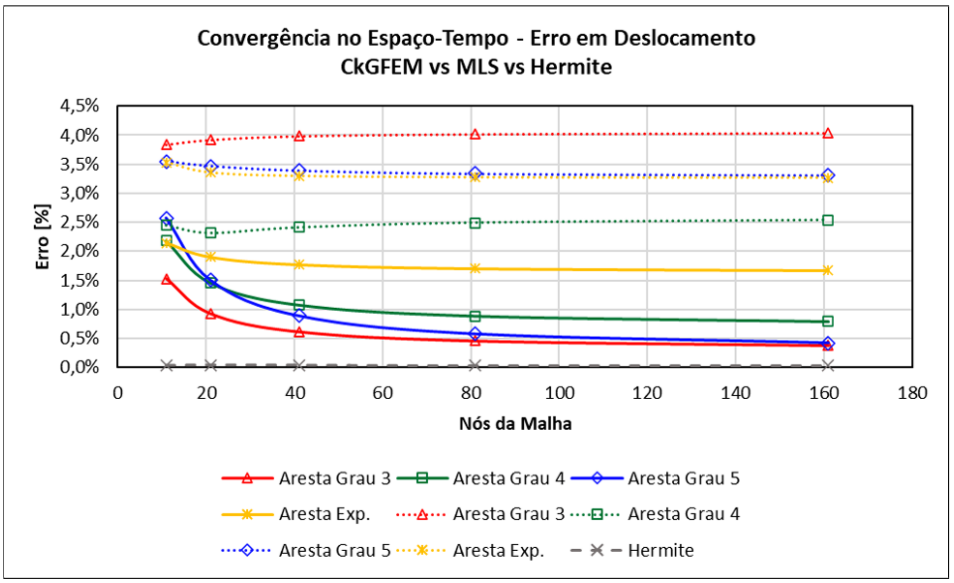
Fonte: O autor.

4.5 ANÁLISE DE ERRO NO ESPAÇO-TEMPO

Nesta seção, serão apresentados os resultados obtidos na análise de erro no domínio espaço-tempo com $p = 1$ e $p = 2$, para ambas as funções originais do C^k-GFEM, as funções melhoradas via MLS e as funções da base de Hermite.

Os resultados de convergência de erro pelo refino h de malha, e considerando $p = 1$, podem ser encontrados nas Figuras 27 (deslocamento), 28 (velocidade) e 29 (aceleração). Os gráficos apresentam também as convergências para as diferentes funções de aresta utilizadas.

Figura 27 – Erro no espaço-tempo em deslocamento, considerando enriquecimento com $p = 1$. Linhas pontilhadas representam as funções do C^k-GFEM, e linhas cheias as funções melhoradas via MLS.



Fonte: O autor.

Sob essas condições, nota-se que o erro relativo gerado pelas funções melhoradas via MLS é significativamente inferior ao obtido pelas funções do C^k-GFEM para quaisquer combinações de tamanho de malha e tipos de função de aresta utilizados.

Deve-se notar que com o refino h de malha as funções melhoradas apresentam a característica de convergência de erro (redução de erro total com posterior estabilização), enquanto as funções do C^k-GFEM apresentam uma característica de divergência da solução real do problema (erros incrementam com o refino de malha).

Uma vez que a solução depende diretamente da qualidade de aproximação das frequências do problema, e foram constatadas dificuldades do C^k-GFEM convencional com $p = 1$ em convergir tais aproximações, o efeito aqui observado torna-se ainda mais crítico na medida em que grandes erros em frequência geram impactos residuais na resposta dinâmica.

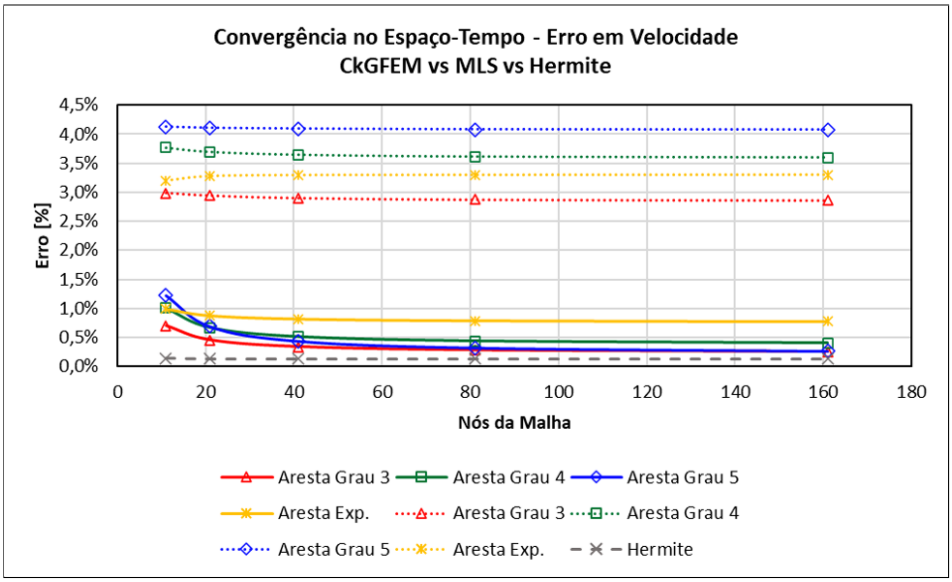
Além disso, é importante notar o nível de erro gerado pelas funções da base de Hermite. O nível de erro em aproximação das frequências naturais é quase desprezível, e portanto o impacto no erro da aproximação espaço-tempo de tais funções torna-se também mínimo.

Já na condição em que $p = 2$, é possível notar um ganho expressivo em capacidade de aproximação para as funções do C^k-GFEM convencional, que passa a apresentar níveis de erros similares aos das funções da base de Hermite.

Para as funções melhoradas via MLS, no entanto, o ganho não é igualmente expressivo. Nota-se, porém, um pequeno ganho em erro percentual para ambos os campos de deslocamento (Figura 30), velocidade (Figura 31) e aceleração (Figura 32) no espaço-tempo da viga analisada.

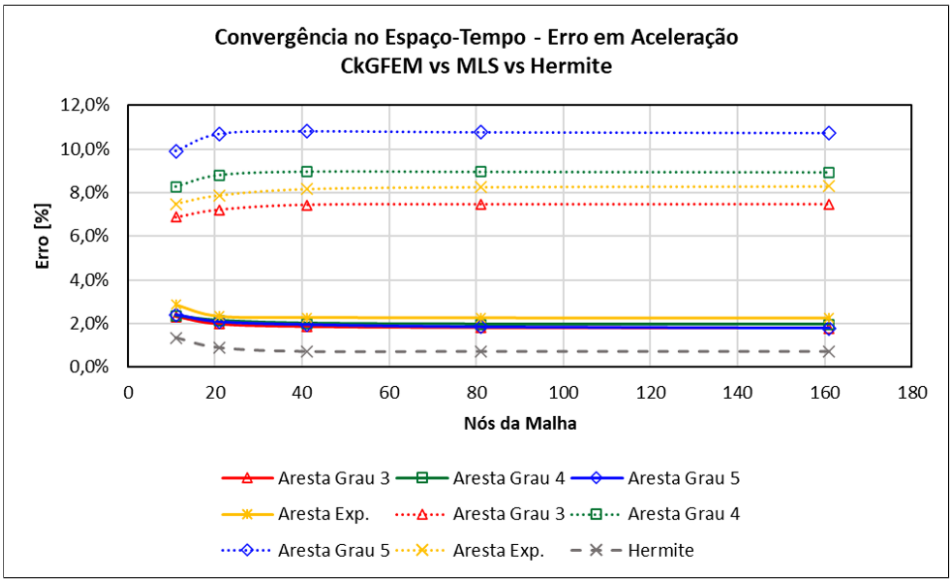
Em outras palavras, o enriquecimento extrínseco com $p = 1$ das funções já melhoradas via MLS com $p = 1$ demonstra-se pouco eficaz se comparado ao enriquecimento $p = 2$ das

Figura 28 – Erro no espaço-tempo em velocidade, considerando enriquecimento com $p = 1$. Linhas pontilhadas representam as funções do C^k-GFEM, e linhas cheias as funções melhoradas via MLS.



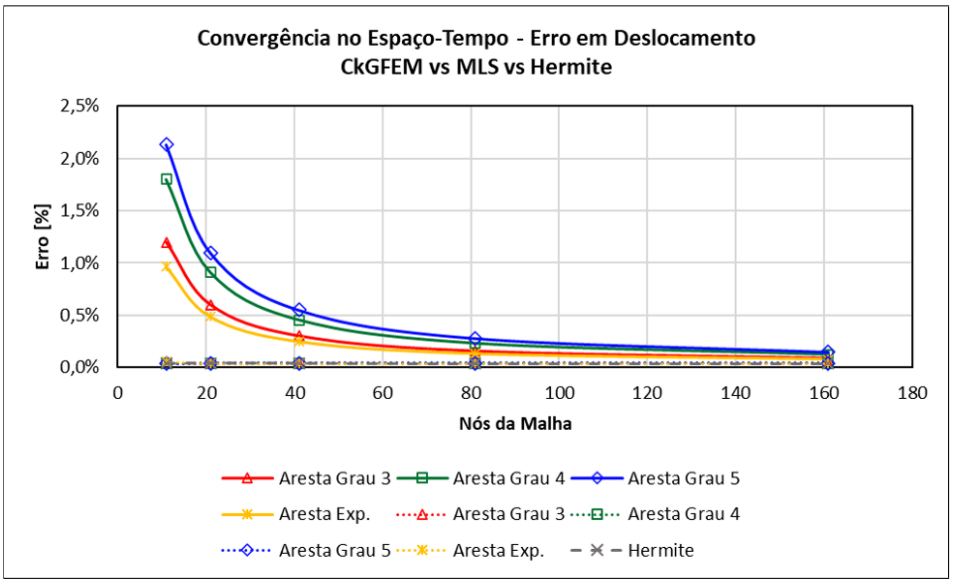
Fonte: O autor.

Figura 29 – Erro no espaço-tempo em aceleração, considerando enriquecimento com $p = 1$. Linhas pontilhadas representam as funções do C^k-GFEM, e linhas cheias as funções melhoradas via MLS.



Fonte: O autor.

Figura 30 – Erro no espaço-tempo em deslocamento, considerando enriquecimento com $p = 2$. Linhas pontilhadas representam as funções do C^k-GFEM, e linhas cheias as funções melhoradas via MLS.



Fonte: O autor.

funções do C^k-GFEM, enquanto compartilham de um sistema de equações já ao mesmo nível de custo computacional.

Uma das hipóteses para tal acontecimento é o nível de interação entre os vários graus de liberdade adicionados aos sistemas pela imposição de um enriquecimento extrínseco das funções.

O C^k-GFEM, por mais que necessite minimamente de um enriquecimento extrínseco com $p = 1$ para gerar quaisquer aproximações, possui suas Partições da Unidade em suporte compacto.

Essa limitação, mas importante característica, permite que a adição de novos enriquecimentos extrínsecos gere sistemas com mais graus de liberdade, porém com sistemas de matrizes com largura de banda relativamente limitada.

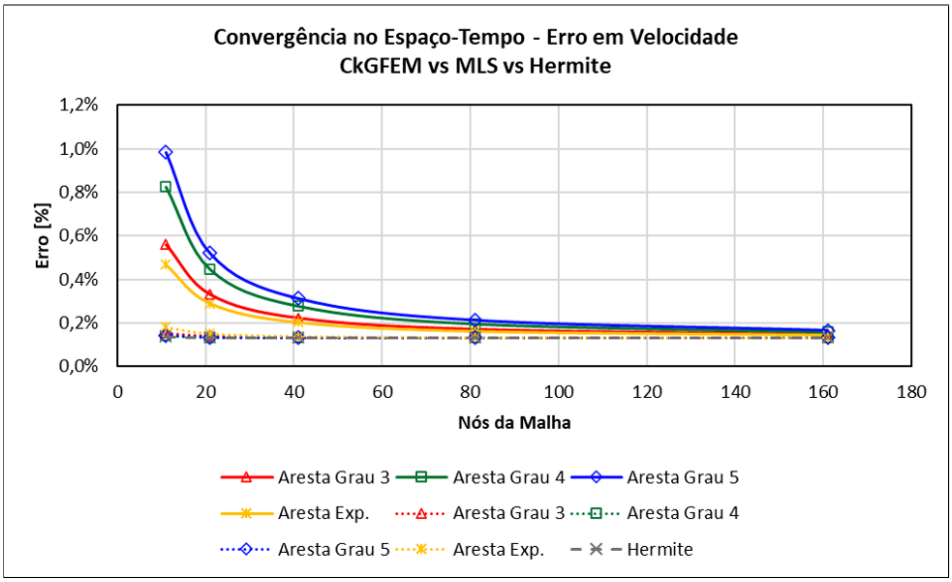
Assim, a aproximação de um determinado ponto do domínio discretizado depende de menos graus de liberdade para sua completa composição, o que restringe os valores nodais atribuídos às funções de aproximação.

Em um sistema como o das funções melhoradas via MLS, considerando $p = 1$, a largura de banda das matrizes geradas é exatamente igual às do C^k-GFEM, o que gera os ganhos apresentados anteriormente em termos de qualidade de aproximação e custo computacional.

No entanto, na medida em que se aplica enriquecimento extrínseco a essas PU's, o sistema gerado apresenta larguras de banda cada vez maiores que as obtidas pelo C^k-GFEM, ou seja, há um nível de interação extremamente alto entre os graus de liberdade do sistema.

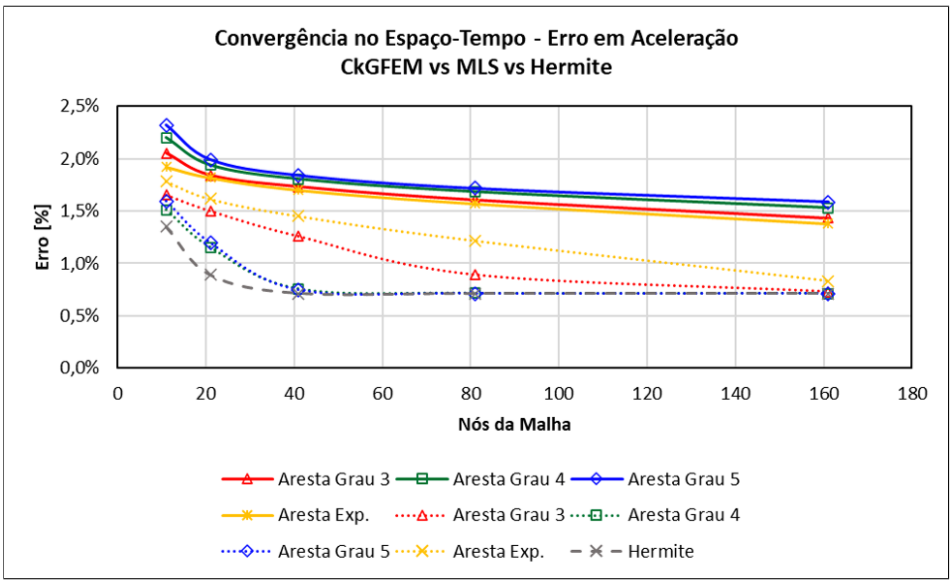
Assim, a composição da aproximação de quaisquer campos de interesse (deslocamento, velocidade e aceleração) depende de um número muito maior de combinações de valores nodais.

Figura 31 – Erro no espaço-tempo em velocidade, considerando enriquecimento com $p = 2$. Linhas pontilhadas representam as funções do C^k-GFEM, e linhas cheias as funções melhoradas via MLS.



Fonte: O autor.

Figura 32 – Erro no espaço-tempo em aceleração, considerando enriquecimento com $p = 2$. Linhas pontilhadas representam as funções do C^k-GFEM, e linhas cheias as funções melhoradas via MLS.



Fonte: O autor.

Tal fenômeno está atribuído, especialmente, ao aumento do suporte das PU's melhoradas (suporte duplo), que permite a existência de tais funções.

Assim, ao passo que o aumento do suporte das funções distância é necessário para a definição matemática adequada das Partições da Unidade, a contrapartida está no nível de interação entre todos os graus de liberdade, expressivamente superior ao C^k-GFEM.

Dessa forma, as funções melhoradas via MLS apresentam performance superior ao C^k-GFEM convencional desde que a aproximação se limite à $p = 1$, onde não há necessidade de enriquecimento extrínseco de tais funções.

Deve-se ressaltar ainda que o enriquecimento utilizado no escopo deste trabalho foi realizado de forma global, ou seja, quando se aplica enriquecimento extrínseco todas as funções da Partição da Unidade são enriquecidas, sem exceção. Uma alternativa ao problema aqui discutido é a possibilidade de enriquecimento local de funções.

Em outras palavras, se enriquece extrínsecamente as funções apenas em algumas funções da PU, de forma a gerar melhores aproximações de forma local no domínio bem como menores sistemas de equações. No entanto, pela complexidade do tema, optou-se por não avaliar esse efeito dentro deste trabalho.

5 CONCLUSÕES

Baseado nos resultados apresentados neste trabalho, nota-se que as funções melhoradas via MLS apresentam performance superior às funções convencionais do C^k-GFEM excepcionalmente quando $p = 1$, ou seja, enriquecimento extrínseco $p = 1$ para o C^k-GFEM e enriquecimento intrínseco $p = 1$ para as funções melhoradas.

Sob essas condições, a capacidade de aproximação das funções melhoradas é significativamente superior ao C^k-GFEM, tanto para a aproximação de frequências naturais quanto para a resposta dinâmica do problema em estudo. Tal observação é válida para quaisquer funções de aresta utilizadas no presente trabalho.

Adicionalmente, as funções melhoradas apresentaram um custo computacional significativamente inferior às do C^k-GFEM na medida em que as matrizes de rigidez geradas apresentam a mesma largura de banda que o método convencional, enquanto utilizam de menos graus de liberdade para uma mesma representatividade polinomial.

Ainda, as funções propostas neste trabalho necessitam de uma menor quantidade de pontos de integração da quadratura de Gauss frente ao C^k-GFEM convencional para um mesmo nível de erro, mais um atributo importante capaz de reduzir ainda mais o custo computacional de tais funções.

Na condição em que $p = 2$, ou seja, enriquecimento extrínseco com $p = 2$ para as funções do C^k-GFEM e enriquecimentro intrínseco mais extrínseco, ambos com $p = 1$, para as funções melhoradas, o comportamento observado se inverte.

Assim, as funções do C^k-GFEM com $p = 2$ apresentam uma capacidade de aproximação significativamente superior às funções propostas, para ambas as respostas dinâmicas e de aproximação de frequências naturais.

Além disso, o custo computacional pelo tamanho do sistema de equações gerado é equivalente, ou pouco superior, para as funções enriquecidas intrinsecamente. Tal observação possui relação direta com o aumento do suporte das funções distância, para correta acomodação do enriquecimento intrínseco via MLS.

5.1 PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Frente aos resultados obtidos pelo trabalho aqui apresentado, sugere-se ao menos quatro tópicos de estudo para melhor compreensão do Método de Mínimos Quadrados Móveis como uma ferramenta de melhoria das funções do C^k-GFEM:

a) Avaliação do efeito de enriquecimento intrínseco para bases polinomiais superiores ($p = 2, 3, 4$) via MLS, frente ao realizado pelo presente trabalho e o convencionalmente utilizado pelo C^k-GFEM, com o intuito de compreender os impactos do MLS para funções com representação polinomial de maior grau, bem como os custos computacionais e capacidades de aproximação de tais funções.

b) Estudo de otimização de largura de suporte das funções distância (e consequentemente, das funções ponderação) para adequação do MLS às condições de bases polinomiais superiores, buscando reduzir o impacto do MLS na largura de banda das matrizes geradas sem gerar grandes impactos na geração das funções de aproximação.

c) Estudo para a integração entre as PU's geradas pelo MLS e as funções convencionais do FEM (base de Lagrange), com o intuito de se melhorar as aproximações de forma localizada no domínio e reduzir o custo computacional, quando julgado necessário.

d) Avaliação de desempenho das funções apresentadas para problemas com maior nível de complexidade (problemas de cascas, placas, esforços localizados), de forma a compreender as limitações e aplicabilidades da proposta do presente trabalho.

REFERÊNCIAS

ARNDT, M. **O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas**. 2009. (Tese de Doutorado), Universidade Federal do Paraná. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 24.

BABUŠKA, I.; STROUBOULIS, T.; COPPS, K. The design and analysis of the generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 181, p. 43–69, 2000. Citado na página 32.

BAIER-SAIP, J. A.; BAIER, P. A.; FARIA, A. R. de; OLIVEIRA, J. C.; BAIER, H. Shear locking in one-dimensional finite element methods. **European Journal of Mechanics / A Solids**, v. 79, 2020. Citado na página 17.

BARCELLOS, C. S. de; MENDONÇA, P. T. R.; DUARTE, C. A. A C^k continuous generalized finite element formulations applied to laminated kirchhoff plate model. **Computational Mechanics**, v. 44, p. 377–393, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 17, 28 e 29.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. 2. ed. Watertown, MA: K.J. Bathe, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 21, 23, 34 e 35.

BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Element-free galerkin method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, p. 229–256, 1994. Citado na página 16.

BELYTSCHKO, T.; MOËS, N.; USUI, S.; PARIMI, C. Arbitrary discontinuities in finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 50, p. 993–1013, 2001. Citado na página 17.

COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; REALI, A. Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, n. 41-44, p. 4160–4183, 2007. Citado na página 17.

DUARTE, C. A.; BABUŠKA, I.; ODEN, J. T. Generalized finite element method for three-dimensional structural mechanics problems. **Computers and Structures**, v. 77, p. 215–232, 2000. Citado na página 17.

DUARTE, C. A.; KIM, D J.; QUARESMA, D. M. Arbitrarily smooth generalized finite element approximations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, p. 33–56, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 17, 18, 26, 28, 29 e 30.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An $h-p$ adaptive method using clouds. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1-4, p. 237–262, 1996. Citado na página 16.

EDWARDS, H. C. C^∞ **finite element basis functions**. University of Texas at Austin, 1996. Citado na página 29.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A First Course in Finite Elements**. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 16, 24, 33 e 37.

GARBUIO, Mateus Afonso; TORRES, Diego Amadeu Furtado. Improving the polynomial reproducibility for the partition of unity in the c^k-generalized fem. In: **Anais do 25° Congresso Internacional de Engenharia Mecânica - COBEM**. Uberlândia, Minas Gerais: [s.n.], 2019. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 49.

HSU, Y. S. Enriched finite element methods for timoshenko beam free vibration analysis. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, n. 15/16, p. 7012–7033, 2016. Citado na página 17.

KALUTSKIY, N. S. Meshfree methods of airframe stress analysis. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**, v. 1024, n. 1, p. 012007, 2021. Citado na página 27.

LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. Surfaces generated by moving least squares methods. **Mathematics of Computation**, v. 37, n. 155, p. 141–158, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 26.

LIU, G. R. **Meshfree methods: moving beyond the Finite Element Method**. [S.l.]: CRC Press, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 26 e 30.

LIU, G. R.; DAI, K. Y.; NGUYEN, T T. A smoothed finite element method for mechanics problems. **Computational Mechanics**, v. 39, n. 6, p. 859–877, 2007. Citado na página 17.

MENDONÇA, P. T. R.; de Barcellos, C. S.; TORRES, D. A. F. Robust c^k/c^0 generalized fem approximations for higher-order conformity requirements: application to reddy's hsdt model for anisotropic laminated plates. **Composite Structures**, v. 96, p. 332–345, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 32.

MOËS, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 46, p. 131–150, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. 5. ed. 1 Lake Street, Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, Inc., 2011. Citado 4 vezes nas páginas 21, 22, 38 e 46.

SCHWEITZER, M. A. **Meshfree and generalized finite element methods**. 2008. (Habilitation thesis), Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität Bonn. Citado na página 18.

SURANA, K. S.; PETTI, S. R.; AHMADI, A. R.; REDDY, J. N. On p-version hierarchical interpolation functions for higher-order continuity finite element models. **International Journal of Computational Engineering Science**, v. 2, n. 4, p. 653–673, 2001. Citado na página 17.

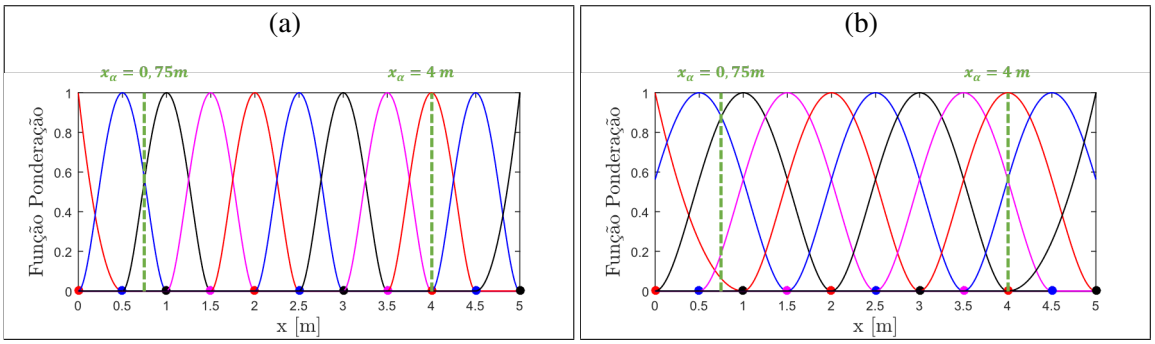
TORRES, D. A. F. **Método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado à anáalise de placas laminadas compostas inteligentes**. 2008. (Dissertação de Mestrado), Universidade Federal de Santa Catarina. Citado na página 32.

TORRES, D. A. F.; BARCELLOS, C. S. de; MENDONÇA, P. T. R. Effects of the smoothness of partitions of unity on the quality of representation of singular enrichments for gfem/xfem stress approximations around brittle cracks. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 283, p. 243–279, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DO REQUISITO DE SUPORTE ESTENDIDO

Conforme demonstrado na Seção 2.5, a construção das funções de aproximação $\phi_\alpha(x)$ depende da definição das funções ponderação $\mathbf{W}(x,x_\alpha)$ e da base de funções utilizada no MLS $\mathbf{p}(x)$. Com ambos os termos pré-definidos, pode-se estabelecer para cada ponto do domínio as n funções de aproximação, associadas a cada nó x_α.

Figura 33 – Funções Ponderação, considerando funções de aresta C^{P-1} com $P=2$, para malhas com suporte compacto (a) e para malhas com suporte duplo (b)



Fonte: O autor.

Dentro do processo de melhoria proposto no escopo do presente trabalho, as funções melhoradas são geradas via MLS quando se define uma base de funções $\mathbf{p}=\{1,x\}$. Assim, a matriz $\mathbf{A}(x)$ é definida como segue:

$$\mathbf{A}(x)=\sum_{\alpha=1}^{n} W(x,x_\alpha)\mathbf{p}(x_\alpha)\mathbf{p}^T(x_\alpha)=\sum_{\alpha=1}^{n} W(x,x_\alpha)\begin{bmatrix}1 & x_\alpha\\ x_\alpha & (x_\alpha)^2\end{bmatrix} \tag{51}$$

Deve-se notar que ambos os termos $\mathbf{p}(x_\alpha)$ são calculados exatamente sobre os respectivos nós x_α, e portanto o termo $W(x,x_\alpha)$ é o único explicitamente dependente da variável espacial x. Para o exemplo apresentado na Figura 33, os 11 nós estão repsentados pelos pontos presentes no eixo das abscissas, igualmente espaçados por $0,5$ metros.

Conforme apresentado na Equação (32), é necessário inverter a matriz $\mathbf{A}(x)$ para se definir apropriadamente a Partição da Unidade. Pela Equação (51) nota-se que, se $n=1$, o termo $\mathbf{p}(x_\alpha)\mathbf{p}^T(x_\alpha)$ retorna uma matriz exatamente singular (determinante nulo).

Ou seja, se apenas um nó exerce influência em determinado ponto do domínio (apenas uma função ponderação não nula), como na Figura 33.a em $x=4$ metros, e a base de funções escolhidas for linear ($\mathbf{p}=\{1,x\}$), logo a matriz $\mathbf{A}(x)$ será singular sobre o respectivo ponto.

Quando se realiza a extensão do suporte das funções ponderação, como no suporte duplo apresentado na Figura 33.b, o efeito de geração de singularidades no domínio é contornado.

Na mesma condição em $x=4$ metros, nota-se que até três funções ponderação não nulas atuam sobre o nó, o que satisfaz a condição $n \geq m$ do MLS. No caso, $n=3$, uma vez que três ponderações são não nulas sobre o ponto, e $m=2$, uma vez que a base de funções $\mathbf{p}=\{1,x\}$ possui dois termos, um constante e outro linear.

Vale ressaltar ainda que, exceto exatamente sobre os nós da malha da Figura 33.a, a condição $n \geq m$ do MLS também é satisfeita quando $\mathbf{p} = \{1, x\}$. A singularidade seria, portanto, gerada apenas sobre os nós da malha.

No entanto, como forma de manter a integridade do método em termos de processamento numérico, opta-se por estender o suporte (Figura 33.b) para que qualquer ponto da malha esteja bem definido no processamento das Partições da Unidade via MLS. Tal extensão pode apresentar, no entanto, impactos negativos na nova forma de se construir as PU's.

Deve-se notar ainda que, quando exatamente $n = m$ sobre os nós da malha (Figura 33.a sobre quaisquer nós, e Figura 33.b em $x = 0$ metros e $x = 5$ metros), a PU gerada torna-se exatamente unitária.

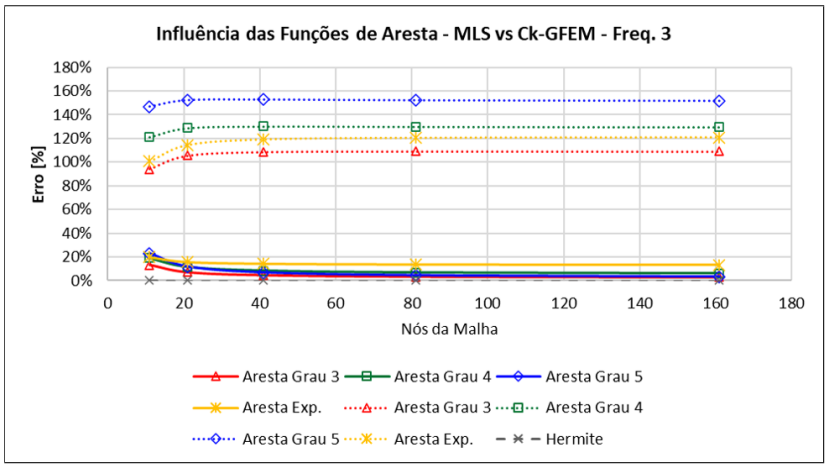
Essa propriedade permite que as condições de contorno de deslocamento nodal possam ser diretamente incorporadas no sistema de equações como no FEM convencional, evitando-se a utilização de métodos numéricos como Multiplicadores de Lagrange ou o Método das Penalidades.

APÊNDICE B – CONVERGÊNCIA DE ERRO PARA A TERCEIRA E QUARTA FREQUÊNCIA DO SISTEMA

As análises de convergência de erro para a condição $p = 1$ podem ser encontradas nas Figuras 34 (terceira frequência) e 35 (quarta frequência). Para a condição $p = 2$, os resultados podem ser encontrados nas Figuras 36 (terceira frequência) e 37 (quarta frequência).

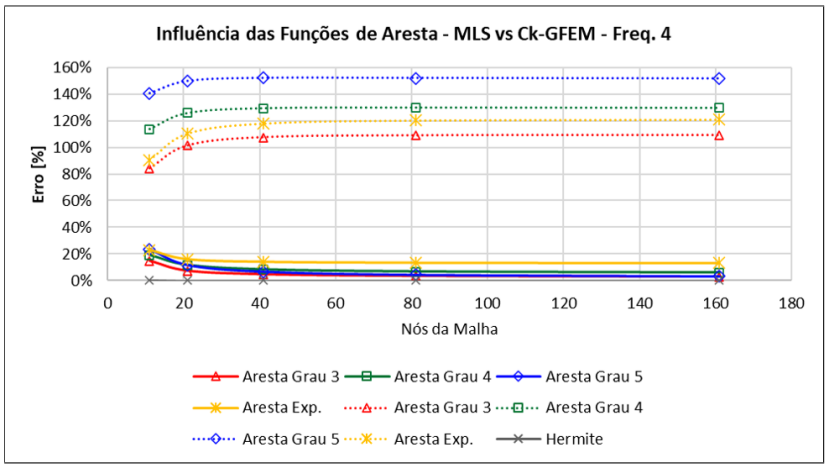
Para ambas as figuras, adotou-se a convenção gráfica em que as linhas cheias representam as funções melhoradas via MLS, enquanto as linhas pontilhadas representam as funções convencionais do C^k-GFEM.

Figura 34 – Análise de convergência da terceira frequência natural do sistema para o refino h de malha e diferentes funções de aresta. Funções do C^k-GFEM (extrínseco $p = 1$) e funções melhoradas (intrínseco $p = 1$).



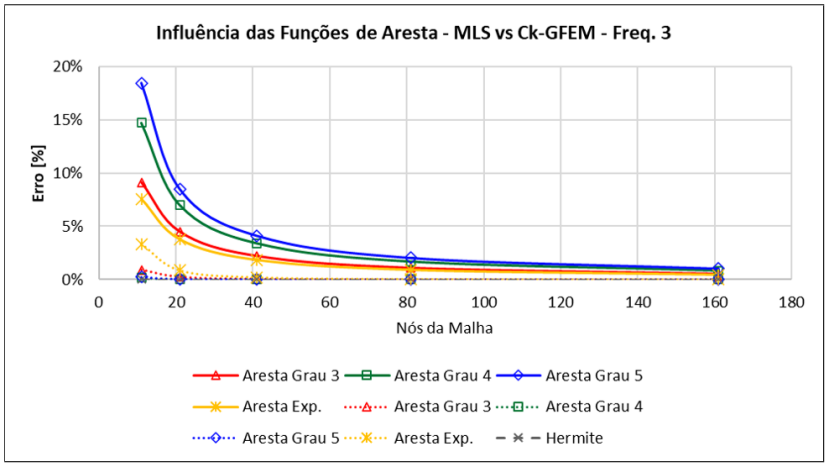
Fonte: O autor.

Figura 35 – Análise de convergência da terceira frequência natural do sistema para o refino h de malha e diferentes funções de aresta. Funções do C^k-GFEM (extrínseco $p = 1$) e funções melhoradas (intrínseco $p = 1$).



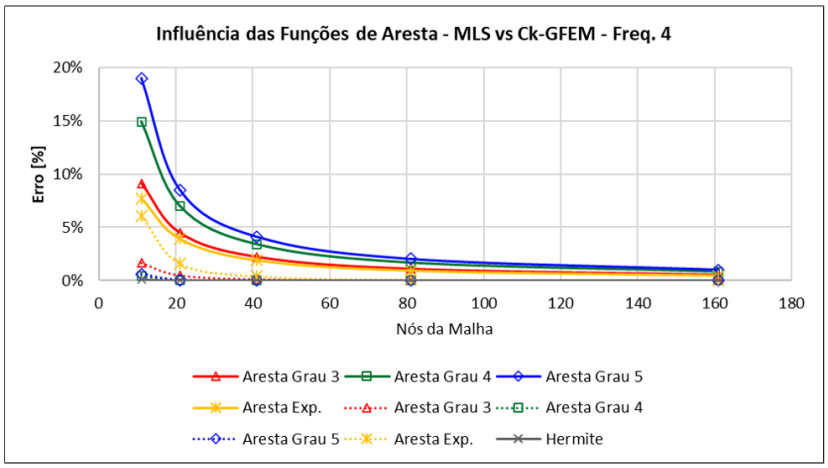
Fonte: O autor.

Figura 36 – Análise de convergência da terceira frequência natural do sistema para o refino h de malha e diferentes funções de aresta. Funções do C^k-GFEM (extrínseco $p = 2$) e funções melhoradas (intrínseco $p = 1$, extrínseco $p = 1$).



Fonte: O autor.

Figura 37 – Análise de convergência da terceira frequência natural do sistema para o refino h de malha e diferentes funções de aresta. Funções do C^k-GFEM (extrínseco $p = 2$) e funções melhoradas (intrínseco $p = 1$, extrínseco $p = 1$).



Fonte: O autor.