

**UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
MESTRADO PROFISSIONAL**

**SAMUEL CORNELLI**

**ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE PÓRTICOS ESPACIAIS COM  
INCERTEZA NO CARREGAMENTO UTILIZANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS  
FINITOS**

**CAXIAS DO SUL**

**2014**

**SAMUEL CORNELLI**

**ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE PÓRTICOS ESPACIAIS COM  
INCERTEZA NO CARREGAMENTO UTILIZANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS  
FINITOS**

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica pela Universidade de Caxias do Sul, área de concentração: Projeto de Componentes e Sistemas Mecânicos.

Orientador: Prof. Dr. Oscar A. Garcia Suarez.  
Coorientador: Prof. Dr. Leandro Luis Corso.

**CAXIAS DO SUL**

**2014**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Universidade de Caxias do Sul  
UCS - BICE - Processamento Técnico

C814a Cornelli, Samuel, 1975-

Análise estática e dinâmica de pórticos espaciais com incerteza no carregamento utilizando o método de elementos finitos / Samuel Cornelli. – 2015.

95 f. : il. ; 30 cm

Apresenta bibliografia.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de Caxias do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2015.

Orientador: Prof. Dr. Oscar A. Garcia Suarez ; coorientador: Prof. Dr. Leandro Luiz Corso.

1. Pórticos espaciais. 2. Método dos elementos finitos. 3. Engenharia mecânica. I. Título.

CDU 2. ed.: 692.298

Índice para o catálogo sistemático:

1. Pórticos espaciais	692.298
2. Método dos elementos finitos	624.04
3. Engenharia mecânica	621

Catalogação na fonte elaborada pela bibliotecária  
Carolina Machado Quadros – CRB 10/2236.

**"Análise estática e dinâmica de pórticos espaciais com incerteza no carregamento  
utilizando o método de elementos finitos"**

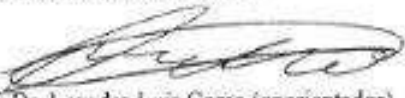
**Samuel Cornelli**

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade de Caxias do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, Área de Concentração: Projeto e Fabricação.

Caxias do Sul, 18 de dezembro de 2014.

Banca Examinadora:

  
Prof. Dr. Oscar Alfredo Garcia de Suarez (orientador)  
Universidade de Caxias do Sul

  
Prof. Dr. Leandro Luis Corso (coorientador)  
Universidade de Caxias do Sul

  
Prof. Dr. João Morais da Silva Neto  
Universidade do Oeste de Santa Catarina

  
Prof. Dr. Julio Cesar Ceballos Aya  
Universidade de Caxias do Sul

  
Prof. Dr. Marcos Alexandre Luciano  
Universidade de Caxias do Sul

## RESUMO

Neste trabalho são descritas análises estática e dinâmica em regime elástico de pórticos espaciais com incerteza no carregamento utilizando o método de elementos finitos (MEF). A abordagem do problema dinâmico estrutural de vibrações forçadas será feita dentro do regime elástico linear com amortecimento viscoso. O pórtico é abordado com teoria de viga fina onde são considerados os acoplamentos devido às forças normais e a torção sobre o modelo de flexão em viga fina de Bernoulli-Euler. A formulação forte do problema dinâmico da viga com carga axial é obtida a partir das equações de equilíbrio de Euler-Lagrange, decorrentes do princípio variacional de Hamilton e, a formulação forte do problema dinâmico do eixo longo sujeito a torção é determinada utilizando o modelo de torção de Saint-Venant. Para a determinação da formulação fraca para o elemento de viga tridimensional foi aplicado o método dos resíduos ponderados Galerkin. Também é descrita neste trabalho, a análise da confiabilidade estrutural considerando a incerteza no carregamento e, em algumas propriedades mecânicas dos materiais, utilizando o método de Monte Carlo (MMC). A série de Neumann foi utilizada como alternativa para reduzir o tempo de processamento do problema dinâmico. A análise simultânea das diversas variáveis foi abordada utilizando a estatística multivariada. Os resultados da análise estática e de vibrações livres dos exemplos numéricos são apresentados com o intuito de validar os métodos contidos neste trabalho comparando-os com resultados obtidos utilizando um *software* comercial de análise estrutural.

**Palavras-chaves:** Pórticos espaciais. Análise estática. Análise Dinâmica. Elementos finitos. Incerteza no carregamento. Monte Carlo.

## ABSTRACT

In this thesis, static and dynamic analysis of elastic space frames with regime uncertainty in loading using the finite element method (FEM) are described. A structural approach to the dynamic problem of forced vibrations will be made within the linear elastic regime with viscous damping. The structure is approached with thin beam theory which the couplings are considered normal forces due to twisting and bending about the model thin Bernoulli-Euler beam. The strong formulation of the dynamic problem of the beam with axial load is obtained from the equilibrium equations of Euler-Lagrange equations arising from the variational principle of Hamilton and the strong formulation of the dynamic problem of the long shaft under torsion is determined using the model of twist of Saint-Venant. To determine the weak formulation for three-dimensional beam element applies the Galerkin method of weighted residues. Is also described in this study, the analysis of structural reliability considering the uncertainty in loading and some mechanical properties of materials using the Monte Carlo method (MMC). Neumann series will be used as an alternative to reduce the processing time of the dynamic problem. The simultaneous analysis of several variables is addressed using multivariate statistics. Some results of numerical examples are presented in order to validate the methods contained in this work compared with the results obtained from structural analysis of commercial software.

**Keywords:** Space frames. Static analysis. Dynamic Analysis. Finite elements. Uncertainty in loading. Monte Carlo.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Modelo cinemático de viga fina: a) movimento; b) rotação .....	20
Figura 2 – Viga engastada sujeita a carregamento axial e transversal .....	22
Figura 3 – Eixo longo engastado nas extremidades sujeito a torção .....	24
Figura 4 – Eixo longo engastado nas extremidades sujeito a momento distribuído.....	27
Figura 5 – Funções de forma linear no domínio natural do elemento.....	29
Figura 6 – Funções de forma para aproximar flexão.....	33
Figura 7 – Vetores de base local $\beta$ representados na base global $g$ .....	37
Figura 8 – Elemento de viga orientado com relação a X,Y,Z.....	39
Figura 9 – Aceleração Média de Newmark .....	45
Figura 10 – Processo estocástico multivariado .....	47
Figura 11 – Domínio de falha $\Omega_f \cap \Omega_g$ .....	54
Figura 12 – Representação Gráfica do "Método de Monte Carlo de acertar ou errar" .....	56
Figura 13 – a) Condições de contorno; b) nós analisados; c) barras analisadas.....	64
Figura 14 – a) Deslocamento PortAL3D; b) deslocamento STRAP.....	66
Figura 15 – a) Modo 1; b) Modo 2 .....	67
Figura 16 – Pulso constante de força num intervalo de 3s .....	68
Figura 17 – Variação do esforço normal da barra 1 no tempo .....	69
Figura 18 – Sinal aleatório e sinal determinístico de excitação na base do pórtico .....	71
Figura 19 – a) Deslocamento do nó 16; b) velocidade do nó 16.....	73
Figura 20 – a) Variação do deslocamento do nó 16; b) variação da velocidade do nó 16.....	74
Figura 21 – Esforços normal na barra 1 .....	75
Figura 22 – Convergência do método MMCD na prescrição da probabilidade de falha .....	75
Figura 23 – Probabilidade de falha no tempo.....	76
Figura 24 – a) Condições de contorno; b) nó e barra analisados.....	77
Figura 25 – Sinal aleatório para carregamento com ruído branco.....	78
Figura 26 – a) Deslocamento do nó 4; b) velocidade do nó 4.....	80
Figura 27 – a) Variação do deslocamento do nó 4; b) variação da velocidade do nó 4.....	81
Figura 28 – Esforços normal na barra 335 .....	82
Figura 29 – Convergência do método MMCD na prescrição da probabilidade de falha .....	82
Figura 30 – Probabilidade de falha no tempo.....	83
Figura 31 – a) Deslocamento do nó 16; b) variação do deslocamento do nó 16; c) velocidade do nó 16; e) variação da velocidade do nó 16 .....	85

Figura 32 – a) Deslocamento do nó 4; b) variação do deslocamento do nó 4; c) velocidade do nó 4; d) variação da velocidade do nó 4 .....	87
Figura 33 – Esforço normal na barra 1 .....	89
Figura 34 – Esforço normal na barra 335 .....	89

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Condições de contorno .....	30
Tabela 2 – Propriedades mecânicas e geométricas do pórtico 1 .....	64
Tabela 3 – Comparação deslocamentos STRAP x PortAL3D .....	65
Tabela 4 – Comparação esforço normal STRAP x PortAL3D.....	66
Tabela 5 – Comparação frequência natural STRAP x PortAL3D.....	67
Tabela 6 – Comparação modelo estático x modelo dinâmico .....	69
Tabela 7 – Propriedades mecânicas e geométricas do pórtico 2 .....	78
Tabela 8 – Tempo de processamento em horas para o exemplo 1 .....	90
Tabela 9 – Tempo de processamento em horas para o exemplo 2 .....	90

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FORM	<i>First order reliability method</i> - Método de aproximação de primeira ordem
MEF	Método de elementos finitos
MMC	Método de Monte Carlo
MSR	Método de Superfície de Resposta
MMCD-N1	Método de Monte Carlo direto juntamente com a série de Neumann com expansão linear
MMCD-N2	Método de Monte Carlo direto juntamente com a série de Neumann com expansão quadrática
MN	Método de Newmark
SORM	<i>Second order reliability method</i> - Método de aproximação de segunda ordem

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Minúsculas Romanas

$h$	Altura (m)
$n$	Número de termos
$q$	Carga distribuída
$t$	Tempo (s)
$t_1$	Instante de tempo 1
$t_2$	Instante de tempo 2
$u$	Deslocamento na coordenada x (m)
$\dot{u}$	Velocidade na coordenada x (m/s)
$\ddot{u}$	Aceleração na coordenada x (m/s <sup>2</sup> )
$\hat{u}$	Funções peso
$\tilde{u}$	Funções tentativas
$w$	Deslocamento na coordenada y (m)
$\dot{w}$	Velocidade na coordenada y (m/s)
$\ddot{w}$	Aceleração na coordenada y (m/s <sup>2</sup> )
$\tilde{w}$	Funções tentativas

### Maiúsculas Romanas

$A$	Área (m <sup>2</sup> )
$C$	Matriz de amortecimento
$C^1$	Primeira derivada contínua
$C^2$	Segunda derivada contínua
$C^4$	Quarta derivada contínua
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$G$	Módulo de elasticidade transversal
$H^1$	Espaço das funções lineares integráveis
$H^2$	Espaço das funções quadráticas integráveis
$I$	Segundo momento de inércia (m <sup>4</sup> )
$I$	Matriz identidade
$J$	Jacobiano
$K$	Matriz de rigidez

$L$	Comprimento (m)
$L$	Lagrangeano
$M$	Matriz de massa
$Q$	Operação de rotação
$\check{S}$	Coefficiente de amortecimento
$S$	Autocorrelação
$T$	Energia cinética do sistema
$U_e$	Vetor de parâmetros
$U_1$	Vetor de parâmetros de deslocamento
Var	Espaço de variações
$V$	Espaços vetoriais
$W$	Deslocamento transversal

### **Minúsculas Gregas**

$\partial$	Diferencial parcial
$\delta$	Ângulo de aproximação da viga fina em relação ao eixo x
$\varepsilon$	Deformação
$\phi$	Ângulo da viga fina em relação ao eixo x
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\sigma$	Tensões normais
$\omega$	Movimento angular
$\beta$	Base local
$\rho$	Massa específica
$\Omega$	Matriz diagonal de autovalores

### **Maiúsculas Gregas**

$\Delta$	Variação
$\Phi$	Matriz de autovalores
$\Pi$	Energia potencia do sistema
$\Sigma$	Covariância

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
1.1	APRESENTAÇÃO DA EMPRESA .....	12
1.2	JUSTIFICATIVA .....	12
1.3	OBJETIVO GERAL.....	14
1.4	OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	14
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>15</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA APLICADA .....</b>	<b>18</b>
3.1	PROBLEMAS DE VIBRAÇÕES FORÇADAS EM PÓRTICOS ESPACIAIS UTILIZANDO O MEF.....	18
<b>3.1.1</b>	<b>Modelo cinemático para vigas finas.....</b>	<b>19</b>
<b>3.1.2</b>	<b>Formulação forte do problema dinâmico da viga fina.....</b>	<b>21</b>
<b>3.1.3</b>	<b>Formulação forte do problema dinâmico de torção em eixos longos .....</b>	<b>24</b>
<b>3.1.4</b>	<b>Formulação fraca para o problema de vibrações forçadas da viga em 3D.....</b>	<b>26</b>
<b>3.1.5</b>	<b>Funções de forma e mapeamento.....</b>	<b>28</b>
3.1.5.1	Funções de forma lineares .....	28
3.1.5.2	Funções de forma para aproximar flexão .....	30
<b>3.1.6</b>	<b>Formulação semi discreta para elemento de viga fina em 3D.....</b>	<b>34</b>
<b>3.1.7</b>	<b>Equações de equilíbrio dinâmico no sistema global de coordenadas.....</b>	<b>37</b>
<b>3.1.8</b>	<b>Método de superposição modal .....</b>	<b>41</b>
<b>3.1.9</b>	<b>Amortecimento viscoso.....</b>	<b>43</b>
<b>3.1.10</b>	<b>Integração direta - Método de Newmark .....</b>	<b>44</b>
3.2	ESTATÍSTICA MULTIVARIADA.....	46
<b>3.2.1</b>	<b>Variáveis aleatórias multidimensionais.....</b>	<b>47</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Estatísticas descritivas.....</b>	<b>49</b>
3.3	MÉTODO DE MONTE CARLO DIRETO (MMCD).....	52
<b>3.3.1</b>	<b>Confiabilidade estrutural.....</b>	<b>53</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Método de Monte Carlo direto.....</b>	<b>55</b>
<b>3.3.3</b>	<b>Integração de Monte Carlo.....</b>	<b>56</b>
<b>3.3.4</b>	<b>Formulação do método de Neumann em sistemas lineares .....</b>	<b>59</b>

<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b> .....	<b>63</b>
4.1	ANÁLISE ESTÁTICA.....	63
4.1.1	<b>Resultados para deslocamento nodal e esforço normal</b> .....	<b>65</b>
4.1.2	<b>Resultados para a frequência natural</b> .....	<b>67</b>
4.2	ANÁLISE DINÂMICA.....	68
4.2.1	<b>Propriedades do modelo dinâmico determinístico</b> .....	<b>68</b>
4.2.2	<b>Resultados</b> .....	<b>69</b>
4.3	CONFIABILIDADE ESTRUTURAL – MONTE CARLO DIRETO.....	70
4.3.1	<b>Exemplo 1: Propriedades do modelo dinâmico estocástico</b> .....	<b>70</b>
4.3.2	<b>Exemplo 1: Especificação das variáveis aleatórias</b> .....	<b>71</b>
4.3.2.1	Carregamento.....	71
4.3.2.2	Módulo de elasticidade.....	72
4.3.2.3	Tensão de escoamento .....	72
4.3.3	<b>Exemplo 1: Resultados</b> .....	<b>72</b>
4.3.4	<b>Exemplo 2: Propriedades do modelo dinâmico estocástico</b> .....	<b>76</b>
4.3.5	<b>Exemplo 2: Especificação das variáveis aleatórias</b> .....	<b>78</b>
4.3.5.1	Carregamento.....	78
4.3.5.2	Módulo de elasticidade.....	79
4.3.5.3	Tensão de escoamento .....	79
4.3.6	<b>Exemplo 2: Resultados</b> .....	<b>79</b>
4.4	MONTE CARLO UTILIZANDO A SÉRIE DE NEUMANN .....	84
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>91</b>
5.1	SUGESTÃO DE TRABALHOS FUTUROS.....	93
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>94</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A presente dissertação refere-se à análise estática e dinâmica de pórticos espaciais com incerteza no carregamento utilizando o método de elementos finitos e faz parte do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade de Caxias do Sul, Mestrado Profissional, realizado juntamente com a empresa Dallemole Estruturas Metálicas.

## 1.1 APRESENTAÇÃO DA EMPRESA

A Dallemole Estruturas Metálicas iniciou suas atividades empresariais em 1988, atua na fabricação e montagem de obras para fins industriais e comerciais. Localizada na cidade de Flores da Cunha, a empresa está instalada em uma planta industrial com 12.000 m<sup>2</sup> de área construída. Especializada em galpões industriais, a Dallemole Estruturas Metálicas se responsabiliza pelo projeto, fabricação e montagem das estruturas metálicas. Com foco na fabricação de peças metálicas treliçadas, a Dallemole Estruturas Metálicas conta com uma equipe de engenharia própria, que é a responsável pelo desenvolvimento de todos os seus projetos de acordo com as normas nacionais e internacionais. Na montagem das estruturas metálicas, a empresa conta com uma equipe de supervisores que fiscalizam a montagem garantindo a sua conformidade com o projeto e o cumprimento dos prazos acordados com o cliente.

Com projetos de crescimento previstos em seu planejamento estratégico para os próximos anos e, projeção de dobrar a capacidade produtiva já em 2014 com a inauguração da nova planta com 24.000 m<sup>2</sup> de área construída, a empresa investe no conhecimento para o desenvolvimento de novos projetos visando desenvolver produtos cada vez mais seguros e competitivos.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

O crescimento da construção metálica no Brasil, proporcionado pela disseminação da utilização do aço em edificações e pelo aumento da demanda do mercado em obras mais rápidas, eficientes e com menor impacto ambiental, poderá ser limitado pela falta de capacitação e qualificação dos profissionais responsáveis pelo seu desenvolvimento.

Para atender a este cenário, o tipo de estrutura metálica mudou nas últimas décadas. Os projetos estão cada vez mais desafiadores, ou seja, estruturas maiores e mais esbeltas exigindo uma maior qualificação por parte dos profissionais responsáveis por estes projetos.

Dentro deste contexto surge a necessidade de se reavaliar comportamentos que, em estruturas menores, não causam impactos significativos para o seu dimensionamento, porém em grandes estruturas podem ser relevantes nos resultados.

Na utilização de estruturas, onde os efeitos dinâmicos são significativos, como aeronaves, plataformas de prospecção de petróleo, pontes de grandes vãos, estruturas submetidas a fenômenos sísmicos, grandes estruturas submetidas à ação de vento, etc., os modelos de carregamento determinísticos não se mostram adequados para aproximar as solicitações de caráter aleatório sobre os componentes estruturais. Neste sentido a consideração dos efeitos de aleatoriedade do carregamento possibilita ao modelo uma simulação mais realista do comportamento dinâmico estrutural e dos mecanismos de falha a ele associados.

Os fenômenos de aleatoriedade começam a ser abordados, com um formalismo matemático consolidado, na década de quarenta por um grupo de físicos do laboratório americano de Los Alamos no novo México, para estudar problemas de difusão aleatória de neutrinos num material radiativo. Dentre estes físicos se destaca Stanislaw Ulam, pai do método de Monte Carlo, baseado na teoria de variáveis aleatórias. Desde então a utilização deste método, vem sendo ampliada em vários seguimentos das ciências e da tecnologia. Na engenharia estrutural, a utilização de métodos que consideram aleatoriedade de carregamentos, propriedades físicas e geométricas dos componentes estruturais tem ganhado significativa importância a partir da década de oitenta. Dentro deste contexto, pesquisas têm evoluído no sentido de aprimorar os métodos tradicionais, como o Monte Carlo Direto, de forma a torná-lo mais eficiente na abordagem de problemas de grande porte.

A partir do exposto propõe-se neste trabalho uma abordagem do comportamento dinâmico de estruturas reticuladas tridimensionais, utilizando o Método de Elementos Finitos juntamente com o método de Monte Carlo Direto, para considerar os efeitos aleatórios do carregamento em problemas estáticos e dinâmicos de estruturas reticuladas espaciais.

### 1.3 OBJETIVO GERAL

Este trabalho tem por objetivo analisar o comportamento estático e dinâmica de pórticos espaciais com incerteza no carregamento utilizando o método de elementos finitos, juntamente com o método de Monte Carlo.

### 1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A fim de alcançar o objetivo geral do trabalho, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- a) Estudar o método de elementos finitos para abordagem estática e dinâmica de estruturas reticuladas espaciais.
- b) Desenvolver as rotinas de pré e pós processamento para pórticos espaciais utilizando o método de elementos finitos convencional.
- c) Estudar o método de Monte Carlo e suas aplicações em problemas de confiabilidade estrutural.
- d) Desenvolver rotinas no Matlab para aplicar o método de Monte Carlo na abordagem de problemas dinâmicos em estruturas reticuladas sujeitas a carregamentos aleatórios.
- e) Desenvolver o Método de Monte Carlo utilizando a série de Neumann para reduzir o tempo de inversão da matriz efetiva na abordagem dinâmica.
- f) Determinar a probabilidade de falha da estrutura.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A análise estrutural exige conhecimento, tempo e habilidade do calculista antes e durante o processo de cálculo. As corretas escolhas do modelo utilizado para simular o comportamento estrutural e as seleções adequadas dos componentes que irão compor o arranjo estrutural são, dentre outras tarefas, as que mais exigem da capacidade técnica do engenheiro.

A utilização de técnicas de análise computacional das estruturas exige um aprimoramento profundo dos sistemas estruturais, de forma a proporcionarem maior economia e principalmente uma adequada segurança.

As representações matemáticas dos modelos físicos, expressas geralmente em equações diferenciais e/ou integrais, podem ser solucionadas via métodos analíticos. Este tipo de solução se aplica para poucos casos, tais como a análise elástica de estruturas com carregamento estático. Para casos de estruturas onde os efeitos dinâmicos são significativos as soluções analíticas, em geral, não estão disponíveis para esses casos, requerendo, portanto, a escolha de procedimentos aproximados para a construção das soluções: os métodos numéricos. Dentre as técnicas numéricas destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Estabelecida a partir da discretização do meio contínuo, o Método de Elementos Finitos (MEF) é uma técnica de cálculo de maneira que o sólido é subdividido em um número finito de partes, denominados de Elementos, conectados entre si por intermédio de pontos discretos, chamados de Nós. A escolha adequada do tipo e do tamanho dos Elementos depende das propriedades do problema em questão. Segundo Clough e Wilson (1990) a análise estrutural anterior a 1952 estava restrita à discretização do contínuo utilizando-se elementos conectados a dois pontos no espaço. A designação de Método dos Elementos Finitos foi cunhada por Clough (1960) em um artigo sobre análise de estados planos de tensão, cujos campos de deformações foram interpolados por uma distribuição constante. O MEF já foi aplicado em diversos problemas de análise estrutural desde estruturas reticuladas, passando por estruturas de superfícies (placas, cascas) e finalmente em estruturas volumétricas. A descrição específica do MEF para componentes estruturais pode ser encontrada em diversos trabalhos, como no caso do levantamento feito por Mackerle (2000).

As primeiras abordagens de problemas físicos utilizando métodos estocásticos na engenharia estrutural, com o intuito de questionar a incerteza nos parâmetros de projeto de componentes estruturais, segundo Nowak e Collins (2000), se devem a Mayer (1926),

Wierzbicki (1936) e Strelezki (1947). Nos trabalhos supracitados os autores concluíram que as cargas e os parâmetros de resistência são variáveis aleatórias dependentes ou não do tempo e sempre para cada estrutura há uma probabilidade finita de falha durante a sua vida útil.

Entretanto, os trabalhos apresentados por Cornell (1969) e posteriormente por Hasofer e Lind (1974) foram os primeiros a abordar os aspectos qualitativos da análise de confiabilidade estrutural. O trabalho apresentado por Cornell (1969) propõe o índice de confiabilidade em segundo momento (variância) resultando em uma formulação que continua em vigor. No segundo trabalho, é proposta a definição para um formato invariante do índice de confiabilidade  $\beta$  obtido no espaço das variáveis reduzidas (espaço Gauseano), que consiste em avaliar o valor da variável aleatória ao invés de suas médias na função de estado limite no ponto de projeto. Esta proposta é considerada uma das maiores contribuições nos modelos matemáticos de confiabilidade estrutural.

O trabalho apresentado por Rackwitz e Fiessle (1978) propõe calcular o índice de confiabilidade, por meio de um método iterativo, que leva em consideração a função densidade de probabilidade normal para todas as variáveis.

A proposta de Grigoriu, Veneziano e Cornell (1979) consiste na definição das funções de distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias. Se estas funções não forem definidas corretamente acarretarão em graves erros na determinação do índice de confiabilidade.

Melchers (1983) destaca a importância de se considerar, em sistemas estruturais, a correlação entre resistência dos seus elementos para obter uma avaliação correta da probabilidade global de falha do sistema estrutural.

Em outra importante proposta, que leva em consideração o fato de que as variáveis aleatórias não possuem a mesma influência na probabilidade global de falha de um sistema estrutural, Madssen (1988) propõe um modelo que define fatores de sensibilidade associados a estas variáveis. Estes fatores contribuem para a diminuição do número de variáveis aleatórias do problema e, conseqüentemente, influenciam diretamente no tempo necessário para o processamento.

Dentre os trabalhos mais recentes na área de confiabilidade estrutural, em âmbito nacional, podem ser citados, entre outros: Nogueira (2005) e Verzenhassi (2008).

No procedimento proposto por Nogueira (2005), as variáveis associadas ao ponto ótimo são o ponto de partida para um novo problema de otimização de um novo Lagrangeano agora com as restrições impostas pela equação de estado limite de confiabilidade estrutural. Isto é obtido através de uma técnica de acoplamento entre o método determinístico de

otimização, baseado na minimização sem restrições do Lagrangeano da função objetivo, e de um método probabilístico que utiliza o Método de Superfície de Resposta (MSR) na determinação de equação de estado limite.

Verzenhassi (2008) utiliza os métodos FORM/SORM para determinar as equações de estado limite, juntamente com os métodos de interpolação quadrática e Reguly-Falsi na determinação do coeficiente de segurança ótimo para uma função objetivo definida como custo global da estrutura.

Conforme Wenhui (2010), a utilização da simulação de Monte Carlo Direto na resolução de problemas estocásticos utilizando o método de elementos finitos requer um grande número de amostras, o que requer muito tempo de processamento para a realização do cálculo. Aplicando a expansão de Neumann, no método de Monte Carlo, ocorre um incremento na eficiência computacional tornando o modelo de elementos finitos mais vantajoso. Wenhui (2010) apresenta também outros métodos aplicados no cálculo de problemas estocásticos que podem melhorar a precisão e a eficiência computacional.

No capítulo 3 serão apresentadas as principais bases teóricas que serão utilizadas neste trabalho.

### 3 METODOLOGIA APLICADA

A abordagem deste trabalho, para obtenção dos resultados que serão apresentados no capítulo 4, será realizada em duas etapas assim discriminadas.

Na primeira etapa será feita a abordagem do problema dinâmico estrutural de vibrações forçadas utilizando o MEF. O modelo cinemático para vigas finas, onde se definirão os acoplamentos devido às forças normais e a torção, será abordado com a teoria de viga fina de Bernoulli-Euler. Utilizando as equações de equilíbrio de Euler-Lagrange será obtida a formulação forte do problema dinâmico da viga com carga axial e, a formulação forte do problema dinâmico de torção do eixo longo será determinada utilizando o modelo de torção de Saint-Venant. A formulação fraca para a viga tridimensional será determinada através do método dos resíduos ponderados Galerkin. Os coeficientes de rigidez, associados à deformação normal, torção e flexão, serão obtidos através da determinação das funções de forma e mapeamento. As equações de equilíbrio dinâmico serão obtidas de acordo com a formulação semi discreta para elementos de viga fina tridimensional. Para diminuir os tempos de processamento dos métodos de integração direta, o método de superposição modal será utilizado. O amortecimento de Rayleigh, para o problema dinâmico, será obtido por combinação linear das matrizes de massa e rigidez.

Na segunda etapa será feita a análise simultânea das variáveis contidas no problema utilizando os conceitos da estatística multivariada. O método de Monte Carlo (MMC) será utilizado para a análise da confiabilidade estrutural considerando a incerteza no carregamento e em algumas propriedades mecânicas dos materiais. A série de Neumann será utilizada como alternativa para reduzir o tempo de processamento do problema dinâmico através da aproximação da inversão da matriz de rigidez equivalente.

#### 3.1 PROBLEMAS DE VIBRAÇÕES FORÇADAS EM PÓRTICOS ESPACIAIS UTILIZANDO O MEF

O problema do pórtico espacial é abordado com teoria de viga fina onde são considerados os acoplamentos devido às forças normais e a torção sobre o modelo de flexão em viga fina de Bernoulli-Euler. A abordagem do problema dinâmico estrutural de vibrações forçadas será feita dentro do regime elástico linear de acordo o seguinte escopo:

- a) Determinação do modelo cinemático para vigas finas.
- b) Obtenção das equações de equilíbrio dinâmico a partir do princípio variacional de Hamilton para o problema de flexão em vigas sob força axial.
- c) Obtenção das equações de equilíbrio dinâmico para o problema de torção em eixos circulares longos.
- d) Formulações fracas para o problema da viga com carga axial.
- e) Formulação fraca para o problema de torção em eixos longos.
- f) Formulação fraca para o problema de vibração forçada em vigas em 3D e construção do espaço de aproximação.
- g) Formulação semi discreta em problemas de vibrações forçadas em vigas em 3D.
- h) Descrição do problema no sistema global de coordenadas.
- i) Método de integração direta de Newmark (MN).
- j) Método de decomposição modal.
- k) Amortecimento viscoso.

### 3.1.1 Modelo cinemático para vigas finas

Na abordagem do modelo de vigas finas foram considerados pequenos deslocamentos, de forma que permaneçam válidas as hipóteses da viga de Bernoulli-Euler.

O modelo de viga fina, ou modelo de Bernoulli-Euler é largamente utilizado na engenharia, o mesmo é definido a partir de um modelo cinemático que desconsidera a deformação cisalhante. Este modelo é utilizado para uma razão vão livre / altura da ordem de  $L/h \geq 10$ , e fundamentam-se nas seguintes hipóteses:

- a) Entre a superfície livre superior e inferior da viga há uma superfície onde as fibras não modificam seu comprimento, chamada de superfície neutra.
- b) As seções retas antes da deflexão permanecem retas após a deflexão.
- c) As fibras perpendiculares à superfície neutra antes da deflexão permanecem perpendiculares após a deflexão (desconsideração da deformação cisalhante).
- d) As tensões normais à superfície neutra não são levadas em consideração.

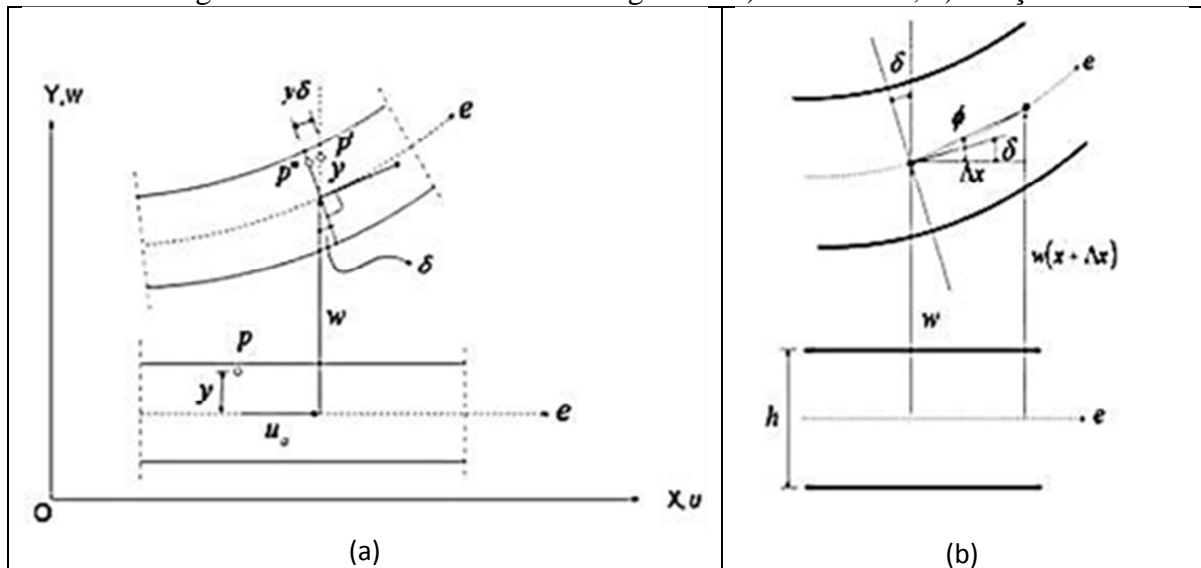
A partir das hipóteses supracitadas, o modelo cinemático que descreve o movimento de um ponto no interior da viga é mostrado na Figura 1(a) e definido pelas equações 1 e 2. Na abordagem do modelo da viga coluna foram considerados pequenos deslocamentos, de forma que permaneçam válidas as hipóteses da viga de Bernoulli-Euler.

$$u(x) = u_0 - y \frac{dw}{dx} \quad (1)$$

$$w(x) = w_0(x) \quad (2)$$

Na equação 1, a derivada do deslocamento transversal é a rotação sofrida pela seção que contém  $p'$ , que permanece perpendicular à tangente à linha neutra como indicado na Figura 1(a). A utilização da derivada do deslocamento transversal para aproximar a rotação é válida para contemplar pequenas rotações já que é obtida a partir de uma linearização da expansão em série de Taylor do deslocamento transversal em  $w(x + \Delta x)$  como indicado nas equações 3 e 4.

Figura 1 – Modelo cinemático de viga fina: a) movimento; b) rotação



Fonte: O Autor

$$w(x + \Delta x) \cong w(x) + \frac{dw}{dx} \Delta x \quad (3)$$

Considerando  $\Delta x$  muito pequeno, na Figura 1(b), resulta-se em  $\tan(\phi) = \phi$  e  $\phi = \delta$  onde:

$$\phi = \frac{w(x + \Delta x) - w(x)}{\Delta x} = \frac{dw}{dx} = \delta \quad (4)$$

Um dos aspectos relevantes do modelo de viga fina é que o deslocamento transversal é definido a partir do deslocamento da linha neutra, ou seja, para todos os pontos sobre uma

fibra perpendicular à linha neutra será considerado, como deslocamento transversal destes pontos, o deslocamento da linha neutra.

Outro aspecto relevante desta teoria é que limita o campo de deformações à deformação normal na direção do seu eixo produzida por flexão e por esforço normal.

Definido o campo de deslocamento, na próxima subseção, será determinada a formulação forte do problema dinâmico da viga coluna.

### 3.1.2 Formulação forte do problema dinâmico da viga fina

A abordagem do problema de formulação forte para os problemas de viga sujeita a carregamento axial foi desenvolvido de acordo com Petyt (2010), entretanto a notação assim como as figuras foram propostas pelo autor deste manuscrito.

A formulação forte do problema dinâmico da viga com carga axial é obtida a partir das equações de equilíbrio de Euler-Lagrange, decorrentes do princípio variacional de Hamilton, e das condições de contorno e de valor inicial para o problema em questão.

O princípio variacional de Hamilton fundamenta-se na determinação dos extremos do funcional definido pela integral do Lagrangeano num certo intervalo de tempo. O Lagrangeano, definido na equação 5, descreve a energia total da viga, ou seja: a energia potencial interna, a energia produzida pelas forças externas e a energia cinética associada aos deslocamentos  $u(x,t)$  e  $w(x,t)$ .

$$L = \frac{1}{2} \int_V \rho \left( \frac{\partial u_o}{\partial t} \right)^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \rho y^2(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dV - \frac{1}{2} \int_V E \left( \frac{\partial u_o}{\partial x} \right)^2 dV - \frac{1}{2} \int_V E y^2(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dV + \frac{1}{2} \int_L p u_o dx + \frac{1}{2} \int_L q w dx \quad (5)$$

O princípio variacional de Hamilton estabelece que para uma vizinhança de funções testes, que extrema o funcional definido pela integral do Lagrangeano na equação 5 entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ , é aquela que satisfaz o princípio de conservação do momento linear (segunda lei de Newton). A partir do exposto, o problema de determinar o extremo do funcional supracitado para o problema da viga indicada na Figura 2 é enunciado como:

Determinar  $u(x,t)$  e  $w(x,t)$ , utilizando a equação 6, para a viga indicada na Figura 2 tal que  $\delta u, \delta w \in Var^t$ :



Fonte: O Autor

$$\begin{aligned}
 \delta^1 \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \delta u}{\partial t} \right) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho I \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} \right) dx dt \\
 &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right) dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) dx dt \\
 &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L p \delta u dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L q \delta w dx dt = 0, \quad \forall \delta u, \delta w \in Var^t
 \end{aligned} \tag{6}$$

O espaço  $Var^t$  é o espaço das variações definidos como:

$$Var^t = \left\{ \delta w \in H^2[0, L] \times ]t_1, t_2[ \mid \delta w(0) = \delta w(L, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(L, t) = 0, \delta w(x, t_1) = \delta w(x, t_2) = 0, x \in [0, L] \right\}$$

Integrando-se por partes, no tempo e no comprimento, as primeiras cinco integrais da equação 6 se obtém a equação 7, cujo núcleo de integração representa a equação de Euler-Lagrange.

$$\begin{aligned} \delta^1 \int_{t_1}^{t_2} L dt = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( -\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p \right) \delta u dx dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + q \right) \delta w dx dt = 0, \quad \forall \delta u, \delta w \in \text{Var}^t o \end{aligned} \quad (7)$$

O primeiro termo da segunda integral da equação 7 corresponde à inércia rotacional, que é desprezada nos modelos de viga fina por ser muito pequena com relação à inércia transversal. A partir da equação 7, se define o problema de valor inicial e de contorno, ou formulação forte para a viga, como sendo: Determinar  $u_o(x,t) \in C^2[0,L] \times [0,t]$  e  $w(x,t) \in C^4[0,L] \times [0,t]$  tal que:

As equações do domínio são 8a e 8b.

$$EA \frac{\partial^2 u_o}{\partial x^2} - p + \rho A \frac{\partial^2 u_o}{\partial t^2} = 0, \quad x \in ]0, L[ \times ]0, t[ \quad (8a)$$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - q + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad x \in ]0, L[ \times ]0, t[ \quad (8b)$$

As condições de contorno são expressas pelas equações 8c-8e.

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \in ]0, t[ \quad (8c)$$

$$w(0,t) = w(L,t) = 0, \quad t \in ]0, t[ \quad (8d)$$

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial w(L,t)}{\partial x} = 0, \quad t \in ]0, t[ \quad (8e)$$

Já as condições de valor inicial são definidas pelas equações 8f-8i.

$$u(x,0) = u_i(x), \quad x \in [0, L] \quad (8f)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \dot{u}_i(x), \quad x \in [0, L] \quad (8g)$$

$$w(x,0) = w_i(x), \quad x \in [0, L] \quad (8h)$$

$$\frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = \dot{w}_i(x), \quad x \in [0, L] \quad (8i)$$

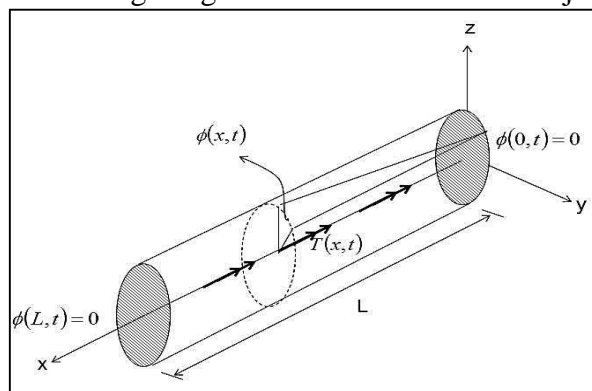
Em modelos de pórticos tridimensionais, além da flexão, tração e compressão, se têm as solicitações decorrentes da torção. Em componentes solicitados dentro do regime elástico linear é possível desacoplar estes fenômenos sem perda da generalidade do problema.

Sendo assim serão determinadas a seguir as equações de equilíbrio dinâmico para o problema de torção em eixos longos.

### 3.1.3 Formulação forte do problema dinâmico de torção em eixos longos

A equação de Euler-Lagrange em eixos longos sujeitos a torção é obtida a partir do princípio variacional de Hamilton para o eixo de seção circular, constituído de material isotrópico, homogêneo e com resposta elástica linear, indicado na Figura 3.

Figura 3 – Eixo longo engastado nas extremidades sujeito a torção



Fonte: O Autor

A equação de equilíbrio dinâmico para o eixo longo sujeito a torção é determinada a partir do princípio variacional de Hamilton de forma similar ao que foi utilizada para o problema da viga coluna mostrada na subseção 3.2. Para este modelo específico é utilizado o modelo de torção de Saint-Venant, onde são consideradas apenas as tensões e deformações cisalhantes produzidas por torção. Para este modelo em questão, o Lagrangeano é definido pela equação 9.

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L G I_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L T \phi dx \quad (9)$$

A solução que se procura é uma função  $\phi(x,t)$  tal que, para  $\delta\phi(x,t) \in Var^t$ , se tem a equação 10.

$$\delta^1 \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^L \rho I_x \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi}{\partial t} dx - \int_0^L G I_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} dx + \int_0^L T \delta \phi dx \right] dt = 0, \quad \forall \delta \phi \in Var^t \quad (10)$$

O conjunto  $Var^t$  para o problema de torção é definido abaixo:

$$Var^t = \left\{ \delta \phi \in H^1[0, L] \times ]t_1, t_2[ \mid \delta \phi(0) = \delta \phi(L, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(L, t) = 0, \delta \phi(x, t_1) = \delta \phi(x, t_2) = 0, x \in [0, L] \right\}$$

Integrando por partes as duas primeiras integrais da equação 10 se obtém a equação 11.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( -\rho I_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - G I_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + T \right) \delta \phi dx dt = 0, \quad \forall \delta \phi \in Var^t \quad (11)$$

Como a equação 11 se anula para qualquer valor de  $\delta \phi \in Var^t$  então, pelo teorema do cálculo variacional, se tem a equação 12.

$$G I_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho I_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - T = 0, \quad \forall x \in ]0, L[ \times ]0, t[ \quad (12)$$

A equação 12 corresponde à equação de Euler-Lagrange para o problema de torção. A partir desta equação, pode-se descrever o problema de condições de contorno e de valor inicial que consiste em determinar  $\phi(x,t) \in C^2[0, L] \times [0, t]$  tal que:

A equação 13a é a equação do domínio.

$$G I_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho I_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - T = 0, \quad \forall x \in ]0, L[ \times ]0, t[ \quad (13a)$$

As condições de contorno são expressas pelas equações 13b e 13c.

$$\phi(0,t) = 0 \quad (13b)$$

$$\phi(L,t) = 0 \quad (13c)$$

Já as condições de valor inicial são definidas pelas equações 14a e 14b.

$$\phi(x,0) = \phi_o(x) \quad (14a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0) = \dot{\phi}_o(x) \quad (14b)$$

Nas subseções 3.1.2 e 3.1.3 foram abordados as formulações fortes para os problemas hiperbólicos de vibrações forçadas não amortecidas em vigas finas sujeitas a força axial e eixos longos sob torção.

Na próxima subseção, a partir das formulações fortes, será obtida a formulação fraca semi discreta utilizando o método dos resíduos ponderados Galerkin.

### 3.1.4 Formulação fraca para o problema de vibrações forçadas da viga em 3D

A formulação fraca para o elemento de viga tridimensional é obtida pelo método dos resíduos ponderados Galerkin. Por se tratar de um problema linear, será utilizado o princípio de sobreposição de efeitos para considerar separadamente os efeitos de flexão, esforço normal e torção. O problema apresentado nesta subseção corresponde ao elemento de viga de seção circular, material homogêneo com resposta elástica linear e condições de contorno e carregamento indicados na Figura 4.

Deve-se ressaltar que, no exemplo proposto, se tem uma situação de flexão oblíqua que será abordada por sobreposição juntamente com os efeitos das forças axiais e do torque.

O método dos resíduos ponderados aplicado a este problema é obtido para quatro situações que sejam: Deformação normal em x; torção em torno de x; flexão em torno de z; flexão em torno de y.



$$Var^* = \left\{ \hat{w}(x) \in H^2[0, L] \mid \hat{w}(0) = \hat{w}(L) = 0, \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}(0) = \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}(L) = 0 \right\} \quad (19)$$

A partir da formulação fraca definida pela equação 17, pode-se agora descrever a formulação semi discreta, contudo, é necessário definir previamente as funções de forma para aproximar o deslocamento axial, o ângulo de torção e o deslocamento transversal como é mostrado na subseção 3.1.5.

### 3.1.5 Funções de forma e mapeamento

As funções de forma são determinadas de maneira a se obter exatamente os coeficientes de rigidez associados à deformação normal, torção e flexão. A rigidez em uma determinada direção de um ponto do domínio do componente estrutural é, por definição, a solicitação necessária para produzir, na direção supracitada, um deslocamento ou rotação de magnitude unitária. Os coeficientes de rigidez em estruturas reticuladas planas estão associados às forças e momentos que produzem deslocamentos ou rotações unitárias nas extremidades das barras. Pela teoria das equações diferenciais ordinárias aplicadas a problemas de valores no contorno (Petyt, 2010), as funções que aproximam exatamente os coeficientes de rigidez na torção e deformações axiais são funções lineares enquanto que na flexão são polinômios cúbicos. A construção das funções é apresentada a seguir nas subseções 3.1.5.1 e 3.1.5.2.

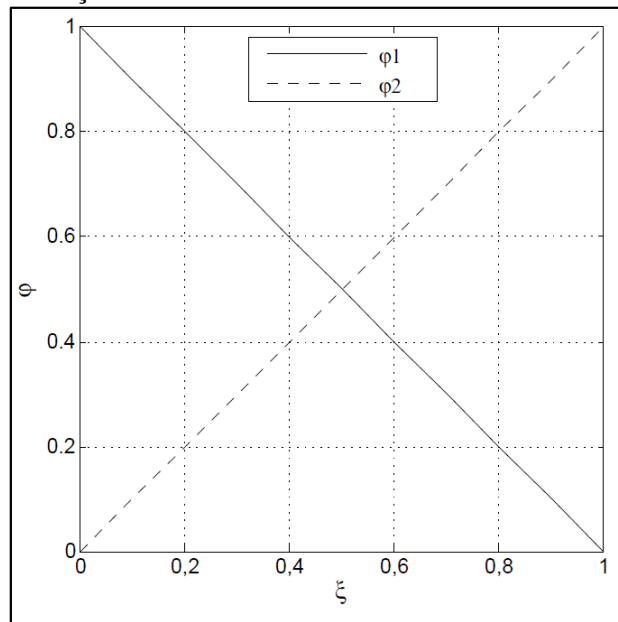
#### 3.1.5.1 Funções de forma lineares

As funções de forma para aproximar deslocamentos axiais e ângulos de torção são as funções lineares definidas no domínio natural do elemento pelas equações 20a-20b e mostradas na Figura 5.

$$\varphi_1(\xi) = 1 - \xi \quad (20a)$$

$$\varphi_2(\xi) = \xi \quad (20b)$$

Figura 5 – Funções de forma linear no domínio natural do elemento



Fonte: O Autor

As funções definidas nas equações 20a-20b são também utilizadas para aproximar os mapeamentos lineares onde, para uma viga de comprimento  $L$  do elemento de barra, se tem a equação 21.

$$x(\xi) = L\xi \quad (21)$$

Da equação 21 se tem o mapeamento da derivada e do elemento de arco mostrados nas equações 22-24.

$$\frac{dx}{d\xi} = L \quad (22)$$

$$dx = Jd\xi \quad (23)$$

Onde:

$$J = L \quad (24)$$

Na equação 24,  $J$  é o jacobiano do mapeamento da derivada da coordenada e do elemento de arco.

### 3.1.5.2 Funções de forma para aproximar flexão

As funções de forma que aproximam flexão em viga fina de Bernoulli-Euler devem satisfazer os critérios de continuidade para a primeira derivada já que a rotação é a primeira derivada do campo de deslocamento transversal. As funções que atendem estas propriedades são conhecidas como funções de Hermite para problemas de flexão com regularidade  $C^1[0,L]$ .

As funções apresentadas a seguir estão definidas no domínio paramétrico de um elemento definido em  $\Omega_e[0,1]$  e tem a forma dada pela equação 25:

$$\psi_i(\xi) = a_3\xi^3 + a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0 \quad (25)$$

A equação 25 é obtida para satisfazer os critérios de continuidade definidos na Tabela 1 como segue:

Tabela 1 – Condições de contorno

$i$	$\psi_i(0)$	$\psi_i(1)$	$\frac{d\psi_i}{d\xi}(0)$	$\frac{d\psi_i}{d\xi}(1)$
1	1	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	0	0	1

Fonte: O Autor

Nota-se que, na Tabela 1, são definidas as condições de contorno para quatro funções de forma, as funções  $\psi_1$  e  $\psi_3$  são partições de unidade e garantem que nos nós dos elementos os parâmetros de deslocamento transversal coincidem com o deslocamento no ponto. Por outro lado, às funções  $\psi_2$  e  $\psi_4$  garantem a continuidade da rotação com valor unitário para a primeira derivada entre os nós do elemento, o que permite dizer, que o parâmetro associado à rotação é a própria rotação no nó. Os comentários supracitados podem ser melhores compreendidos através das equações 26 e 27 apresentadas a seguir. Supondo que  $w(\xi)$  é o deslocamento transversal descrito no domínio natural do elemento como:

$$w(\xi) = w_1\psi_1(\xi) + \theta_1\psi_2(\xi) + w_2\psi_3(\xi) + \theta_2\psi_4(\xi) \quad (26)$$

Na equação 26 se tem que,  $w(0) = w_1$  e  $w(1) = w_2$ , nota-se que  $\psi_2(0) = \psi_4(1) = 0$ .

Da mesma forma se tem para a rotação, ou seja,  $\frac{dw}{dx}(0) = \theta_1$  e  $\frac{dw}{dx}(1) = \theta_2$ , neste caso se tem:  $\psi_{2,\xi}(0) = \psi_{4,\xi}(1) = 1$ .

Uma maneira prática de se obter as funções de forma cúbicas é através do processo matricial indicado na equação 27.

$$w = Pa \quad (27)$$

Onde:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$a^T = \{a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3\} \quad (29)$$

Por outro lado, considerando um mapeamento linear da geometria e aplicando as condições de contorno indicadas na Tabela 1, para um elemento de viga com comprimento L se tem:

$$\begin{aligned} w_1 &= a_0 \cdot 1 + a_1 x(0) + a_2 x^2(0) + a_3 x^3(0); \\ \theta_1 &= 0 + a_1 + 2a_2 x(0) + 3a_3 x^2(0); \\ w_2 &= a_0 + a_1 x(1) + a_2 x^2(1) + a_3 x^3(1); \\ \theta_2 &= 0 + a_1 + 2a_2 x(1) + 3a_3 x^2(1); \end{aligned} \quad (30)$$

O sistema de equações descrito na equação 30 pode ser escrito de forma mais conveniente em notação matricial resultando:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x(0) & x^2(0) & x^3(0) \\ 0 & 1 & 2x(0) & 3x^2(0) \\ 1 & x(1) & x^2(1) & x^3(1) \\ 0 & 1 & 2x(1) & 3x^2(1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

A equação 31 pode ainda ser expressa de forma compacta como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{a} \quad (32)$$

Onde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{u}^T = \{w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2\} \quad (34)$$

A partir da equação 32 pode-se isolar o vetor  $\mathbf{a}$  e substituir na equação 27, obtendo-se a função deslocamento transversal  $w$  como combinação linear de funções de forma e os vetores de parâmetros de deslocamentos  $\mathbf{u}$  como segue:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \quad (35)$$

Substituindo a equação 35 na equação 27 se obtém:

$$w = \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \quad (36)$$

A equação 36 ainda pode ser escrita em função da matriz de funções de forma como:

$$w = \mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (37)$$

Na equação 37 a matriz de funções de forma é obtida a partir da equação 36 como segue:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1} \quad (38)$$

Para um mapeamento linear, descrito na equação 21, pode se descrever as funções de  $\mathbf{H}$  no domínio natural do elemento como indicado na equação 39.

$$\mathbf{H}(\xi) = \begin{bmatrix} \psi_1(\xi) \\ \psi_2(\xi) \\ \psi_3(\xi) \\ \psi_4(\xi) \end{bmatrix} \quad (39)$$

As funções de forma da matriz 39 são definidas nas equações 40a-40d, apresentadas a seguir, e mostradas no domínio natural do elemento na Figura 6.

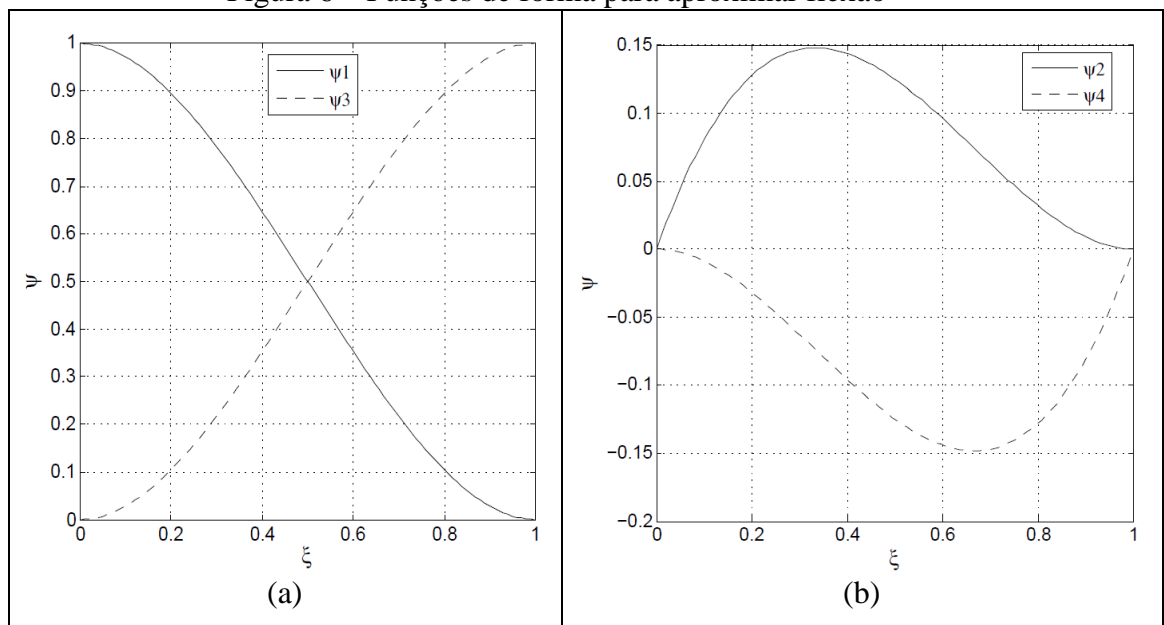
$$\psi_1(\xi) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \quad (40a)$$

$$\psi_2(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi \quad (40b)$$

$$\psi_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (40c)$$

$$\psi_4(\xi) = \xi^3 - \xi^2 \quad (40d)$$

Figura 6 – Funções de forma para aproximar flexão



Fonte: O Autor

Definidas as funções de forma para aproximar os problemas de deformação axial, torção e flexão pode-se agora determinar a formulação semi discreta para o elemento de viga indicado na subseção 3.1.6.

### 3.1.6 Formulação semi discreta para elemento de viga fina em 3D

A formulação semi discreta abordada nesta subseção foi desenvolvida conforme Hughes (1987), onde a discretização é feita no domínio físico do problema, ficando o vetor de parâmetros de deslocamento em função do tempo. A mesma será obtida a partir da equação 17 para o elemento de viga indicado na Figura 4, onde o problema agora passa a ser:

Determinar  $u_h^e(x, t)$  e  $\phi_h^e(x, t) \in \delta_h^e$ ,  $v_h^e(x, t)$  e  $w_h^e(x, t) \in \gamma_h^e$  de maneira que  $\delta_h^e \subset \delta$  e  $\gamma_h^e \subset \gamma$ , onde:

$$u_h^e = N_u^e U_e(t) \quad (41a)$$

$$\phi_h^e = N_\phi^e U_e(t) \quad (41b)$$

$$v_h^e = N_v^e U_e(t) \quad (41c)$$

$$w_h^e = N_w^e U_e(t) \quad (41d)$$

Nas equações 41a-41d,  $N_u^e$ ,  $N_\phi^e$ ,  $N_v^e$  e  $N_w^e$  são as matrizes de funções de forma e  $U_e$  é o vetor de parâmetros nodais definidos com segue, pelas equações 42a-42e:

$$N_u^e = [\varphi_1(\xi) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \varphi_2(\xi) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]; \quad (42a)$$

$$N_\phi^e = [0 \ 0 \ 0 \ \varphi_1(\xi) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \varphi_2(\xi) \ 0 \ 0]; \quad (42b)$$

$$N_v^e = [0 \ \psi_1(\xi) \ 0 \ 0 \ 0 \ \psi_2(\xi) \ 0 \ \psi_3(\xi) \ 0 \ 0 \ 0 \ \psi_4(\xi)]; \quad (42c)$$

$$N_w^e = [0 \ \psi_1(\xi) \ 0 \ 0 \ 0 \ -\psi_2(\xi) \ 0 \ \psi_3(\xi) \ 0 \ 0 \ 0 \ -\psi_4(\xi)]; \quad (42d)$$

$$U^T(t) = \{u_1(t) \ v_1(t) \ w_1(t) \ \theta_x^1(t) \ \theta_y^1(t) \ \theta_z^1(t) \\ u_2(t) \ v_2(t) \ w_2(t) \ \theta_x^2(t) \ \theta_y^2(t) \ \theta_z^2(t)\}; \quad (42e)$$

As variações dos campos de deslocamentos,  $\delta u_h^e$ ,  $\delta \phi_h^e$ ,  $\delta v_h^e$  e  $\delta w_h^e$ , são definidas utilizando o mesmo espaço de aproximação utilizado nas equações 42a-42e como segue:

$$\delta u_h^e = N_u^e V_e \quad (43a)$$

$$\delta \phi_h^e = N_\phi^e V_e \quad (43b)$$

$$\delta v_h^e = N_v^e V_e \quad (43c)$$

$$\delta w_h^e = N_w^e V_e \quad (43d)$$

Deve-se ressaltar aqui que o vetor de parâmetros de deslocamentos associados aos campos de variações independe do tempo, já a formulação semi discreta é obtida a partir do método de resíduos ponderados (Galerkin). Sendo assim se tem (equação 44):

$$\mathbf{V}^T = \{\hat{u}_1 \quad \hat{v}_1 \quad \hat{w}_1 \quad \hat{\theta}_x^1 \quad \hat{\theta}_y^1 \quad \hat{\theta}_z^1 \quad \hat{u}_2 \quad \hat{v}_2 \quad \hat{w}_2 \quad \hat{\theta}_x^2 \quad \hat{\theta}_y^2 \quad \hat{\theta}_z^2\} \quad (44)$$

A partir das equações 41a-41d e equações 42a-42d, se obtém a aproximação para o campo de deformações normais, produzidas por esforço normal, flexão e deformações cisalhantes decorrentes de torção como segue:

$$\frac{\partial u_h^e}{\partial x} = J^{-1} B_u^e U_e(t) \quad (45a)$$

$$\frac{\partial \phi_h^e}{\partial x} = J^{-1} B_\phi^e U_e(t) \quad (45b)$$

$$\frac{\partial^2 v_h^e}{\partial x^2} = J^{-2} B_v^e U_e(t) \quad (45c)$$

$$\frac{\partial^2 w_h^e}{\partial x^2} = J^{-2} B_w^e U_e(t) \quad (45d)$$

Das equações 45a-45d se tem que:

$$\mathbf{B}_u = \frac{\partial N_u^e}{\partial \xi} \quad (46a)$$

$$\mathbf{B}_\phi = \frac{\partial N_\phi^e}{\partial \xi} \quad (46b)$$

$$\mathbf{B}_v = \frac{\partial^2 N_v^e}{\partial \xi^2} \quad (46c)$$

$$\mathbf{B}_w = \frac{\partial^2 N_w^e}{\partial \xi^2} \quad (46d)$$

A formulação semi discreta para o elemento é obtida substituindo as equações 41a-41d, equações 43a-43d e equações 46a-46d na equação (17) resultando, após manipulação matemática, na equação 47 como segue:

$$\begin{aligned}
& \left( \int_0^1 EAB_u^T B_u J^{-1} d\xi + \int_0^1 GI_x B_\phi^T B_\phi J^{-1} d\xi + \int_0^1 EI_y J^{-3} B_v^T B_v d\xi + \int_0^1 EI_z J^{-3} B_w^T B_w d\xi \right) U \\
& + \left( \int_0^1 \rho AN_w^T N_w J d\xi + \int_0^1 \rho AN_v^T N J d\xi - \int_0^1 \rho AN_u^T N_u J d\xi - \int_0^1 \rho I_x N_\phi^T N_\phi J d\xi \right) \ddot{U} \\
& + \int_0^1 N_u^T p J d\xi + \int_0^1 N_\phi^T T J d\xi - \int_0^1 N_w^T q_z J d\xi - \int_0^1 N_v^T q_y J d\xi = 0
\end{aligned} \tag{47}$$

A equação 47 pode ser escrita em forma matricial, com relação ao sistema local de coordenadas, através da equação 48.

$$M_l \ddot{U}_l + K_l U_l = F_l \tag{48}$$

Na equação 48 se tem:

$$K_l = \int_0^1 EAB_u^T B_u J^{-1} d\xi + \int_0^1 GI_x B_\phi^T B_\phi J^{-1} d\xi + \int_0^1 EI_y J^{-3} B_v^T B_v d\xi + \int_0^1 EI_z J^{-3} B_w^T B_w d\xi \tag{49}$$

$$M_l = \int_0^1 \rho AN_w^T N_w J d\xi + \int_0^1 \rho AN_v^T N J d\xi - \int_0^1 \rho AN_u^T N_u J d\xi - \int_0^1 \rho I_x N_\phi^T N_\phi J d\xi \tag{50}$$

$$F_l = - \int_0^1 N_u^T p J d\xi - \int_0^1 N_\phi^T T J d\xi + \int_0^1 N_w^T q_z J d\xi + \int_0^1 N_v^T q_y J d\xi = 0 \tag{51}$$

Para o caso de estruturas reticuladas espaciais, onde se tem acoplamento de elementos estruturais, como é o caso de pórticos e treliças, o sistema global de equações de equilíbrio dinâmico é obtido pela contribuição de cada elemento com relação a um sistema global de coordenadas através de regras de conectividade de cada elemento conforme Hughes (1987).

### 3.1.7 Equações de equilíbrio dinâmico no sistema global de coordenadas

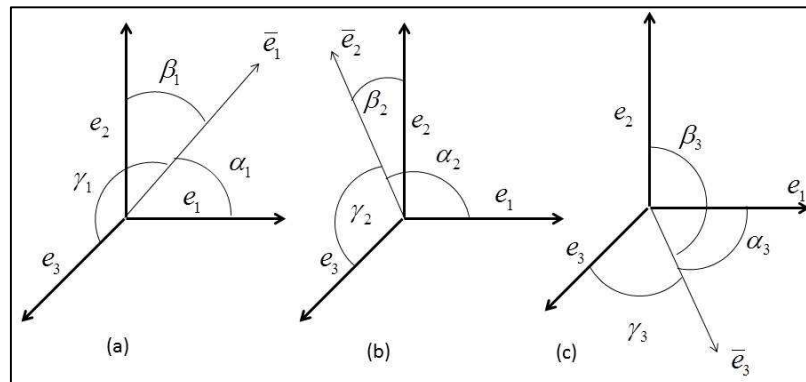
A abordagem a seguir será feita para o caso geral, ou seja, levando em conta que os eixos principais da seção coincidem com os eixos de coordenadas locais do elemento de viga.

Para introduzir esta seção é indispensável definir previamente o que seja um operador de rotação. As definições a seguir são feitas de acordo com Nering (1970).

Definição: Seja  $Q$ , um operador que representa uma transformação linear definido por  $Q: \bar{V} \rightarrow V$ , onde  $\bar{V}$  e  $V$  são espaços vetoriais reais. Diz-se que  $Q$  é um operador de rotação se  $\exists Q^{-1} = Q^T$  tal que  $Q^T: V \rightarrow \bar{V}$ , ou seja, a transformação linear constitui um isomorfismo.

O operador de rotação que leva vetores de uma base local  $\beta = \{\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \ \bar{e}_3\}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^3$ , para uma base global  $g = \{e_1 \ e_2 \ e_3\}$ ,  $g \in \mathbb{R}^3$ , ambas com vetores definidos na Figura 7 (a-c), é obtido através de uma operação de mudança de base como segue:

Figura 7 – Vetores de base local  $\beta$  representados na base global  $g$



Fonte: O Autor

Para obter o operador de rotação parte-se do problema de determinar as coordenadas de um vetor  $v \in V$ , no sistema de coordenadas da base  $\beta$ . Desta forma se tem a equação 52.

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 \quad (52)$$

Com relação à base  $\beta$  onde  $v^T = \{\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3\}$ , as coordenadas podem ser obtidas por projeção como segue nas equações 53-55:

$$\bar{v}_1 = \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 = v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \beta_1 + v_3 \cos \gamma_1 \quad (53)$$

$$\bar{v}_2 = \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 = v_1 \cos \alpha_2 + v_2 \cos \beta_2 + v_3 \cos \gamma_2 \quad (54)$$

$$\bar{v}_3 = \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3 = v_1 \cos \alpha_3 + v_2 \cos \beta_3 + v_3 \cos \gamma_3 \quad (55)$$

As equações 53-55 escritas na forma matricial são apresentadas na equação 56.

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (56)$$

De forma compacta a equação 56 é escrita como:

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} \quad (57)$$

A partir da equação 57 conclui-se que:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Por outro lado, como,

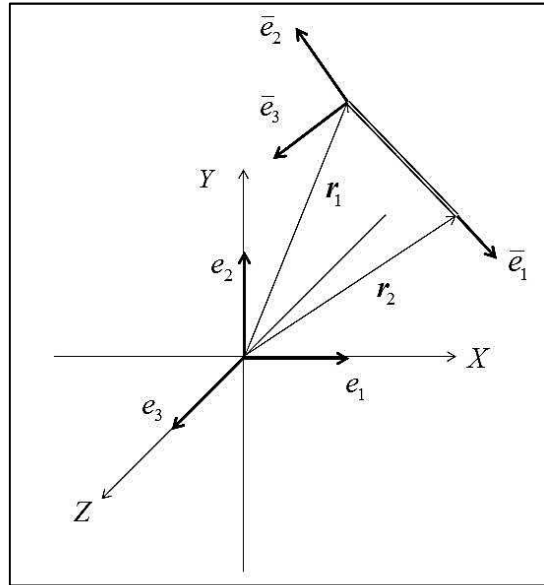
$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \quad (59)$$

Portanto:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (60)$$

A partir da equação 60 pode-se agora determinar o operador de rotação para representar o vetor de parâmetros de deslocamento definido na equação 42e, para o elemento de viga indicado na Figura 8, no domínio global de coordenadas:

Figura 8 – Elemento de viga orientado com relação a X,Y,Z



Fonte: O Autor

Para determinar o operador de rotação  $R$  do elemento de viga indicado na Figura 8 é necessário determinar primeiramente o operador  $Q$  através da orientação do elemento com relação à base global  $g$ . Para determinar a base  $\beta$  determina-se primeiramente o vetor  $\bar{e}_1$  representado pela equação 61.

$$\bar{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} \quad (61)$$

Os vetores  $\bar{e}_2$  e  $\bar{e}_3$  são determinados por produto vetorial de  $\bar{e}_1$  com os vetores da base  $g$ , sendo que o produto vetorial deve ser feito para os vetores que satisfazem a seguinte condição  $\bar{e}_1 \cdot \mathbf{e}_i \neq 1, i = 1, 2, 3$ . Supondo que  $\bar{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \neq 1$  então se tem as equações 62 e 63.

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{e}_1 \times \mathbf{e}_3}{\|\bar{e}_1 \times \mathbf{e}_3\|} \quad (62)$$

$$\bar{e}_3 = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{\|\bar{e}_1 \times \bar{e}_2\|} \quad (63)$$

Lembrando que para  $i = 1, 2, 3$ , se obtêm as equações 64a-64c.

$$\cos\alpha_i = \mathbf{e}_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_i \quad (64a)$$

$$\cos\beta_i = \mathbf{e}_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_i \quad (64b)$$

$$\cos\gamma_i = \mathbf{e}_3 \cdot \bar{\mathbf{e}}_i \quad (64c)$$

A partir das equações 64a-64c, obtêm-se o operador  $\mathbf{R}$ , representado na equação 66, tal que:

$$\mathbf{U}_g = \mathbf{R}\mathbf{U}_l \quad (65)$$

Onde:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q \end{bmatrix} \quad (66)$$

Na equação 65,  $\mathbf{U}_l$  é o vetor de parâmetros de deslocamento com relação ao sistema local de coordenadas indicado na equação 42e e  $\mathbf{U}_g$  é o mesmo vetor representado no sistema global de coordenadas. Em virtude que cada elemento tem uma orientação diferente na estrutura, a contribuição da rigidez da massa e do vetor de forças consistentes de cada elemento deve ser feita no sistema global de coordenadas. Sendo assim, deve-se escrever a equação 48 com relação ao sistema global de coordenadas resultando na equação 67.

$$\mathbf{M}_g \ddot{\mathbf{U}}_g + \mathbf{K}_g \mathbf{U}_g = \mathbf{F}_g \quad (67)$$

Na equação 67 se tem:

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{R}\mathbf{M}_l\mathbf{R}^T \quad (68)$$

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{R}\mathbf{K}_l\mathbf{R}^T \quad (69)$$

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{R}\mathbf{F}_l \quad (70)$$

A equação de equilíbrio dinâmico global para um problema não amortecido, indicada na equação 71, é obtida por regra de conectividade usual a partir das matrizes  $\mathbf{K}_g$ ,  $\mathbf{M}_g$  e  $\mathbf{F}_g$  conforme Hughes (1987).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (71)$$

A equação 71 constitui uma forma de representar o comportamento dinâmica da estrutura, onde as amplitudes de variação de deslocamento, velocidade e aceleração se mantêm constantes. O modelo supracitado, obviamente, não representa adequadamente o comportamento estrutural amortecido que ocorre nos modelos experimentais. Um modelo mais realista é obtido introduzindo o efeito de dissipação de energia dinâmica através do amortecimento com descrito na equação 72.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (72)$$

Nas próximas subseções serão abordados, segundo Petyt (2010), a diagonalização da equação 72 e o modelo de amortecimento viscoso ou também chamado modelo de Rayleigh.

### 3.1.8 Método de superposição modal

O método de superposição modal consiste em descrever o sistema linear da equação 72 no espaço modal, conseguindo assim a forma diagonalizada do sistema linear. A ideia básica deste método é diminuir os tempos de processamento dos métodos de integração direta.

Para descrever esta metodologia parte-se descrevendo os vetores  $\ddot{\mathbf{U}}$  e  $\mathbf{U}$  como combinação linear dos autovetores correspondentes à equação 48.

$$\mathbf{K}\Phi = \Omega\mathbf{M}\Phi \quad (73)$$

Na equação 73,  $\Omega$  é a matriz diagonal de autovalores e  $\Phi$  é uma matriz cujas colunas são os autovetores da equação 73, ambas definidas como segue:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \omega_i^2 & \\ & & & & \dots \\ & & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_i \quad \dots \quad \phi_n] \quad (75)$$

O procedimento de diagonalização parte dos princípios (ver Petyt (2010)) de que os autovetores  $\phi_i$ , obtidos a partir da equação 73 são mutuamente ortogonais e, além disto, são massa-ortonormais.

Por outro lado podem-se descrever os vetores  $\ddot{U}$ ,  $\dot{U}$  e  $U$  como combinação linear dos autovalores  $\phi_i$  de forma que:

$$U = \Phi x(t) \quad (76a)$$

$$\dot{U} = \Phi \dot{x}(t) \quad (76b)$$

$$\ddot{U} = \Phi \ddot{x}(t) \quad (76c)$$

Substituindo as equações 76a-76c na equação 72 e pré-multiplicando a equação resultante por  $\Phi^T$  se obtém a equação 77.

$$\Phi^T M \Phi \ddot{x} + \Phi^T C \Phi \dot{x} + \Phi^T K \Phi x = \Phi^T F \quad (77)$$

Aplicando a propriedade que os autovetores são massa-ortonormais:

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (78a)$$

$$\bar{C} = \Phi^T C \Phi \quad (78b)$$

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (78c)$$

$$\bar{F} = \Phi^T F \quad (78d)$$

Nas equações 78a-78d,  $I$ ,  $\bar{C}$ ,  $\Lambda$  e  $\bar{F}$  são a matriz identidade, a matriz de amortecimento descrita no espaço modal, a matriz diagonal do quadrado das frequências naturais e o vetor de forças descrito no espaço modal respectivamente.

Substituindo as equações 78a-78d na equação 77 se obtém a forma diagonal da equação 72.

$$I\ddot{x} + \bar{C}\dot{x} + \Lambda x = \bar{F} \quad (79)$$

Como o sistema de equações descrito pela equação 79 é desacoplado, pode se escrever na forma indicial, para  $i, j = 1, \dots, n$ :

$$\ddot{x}_i + C_i \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \bar{F}_i \quad (80)$$

A equação 80 será utilizada na determinação da matriz de amortecimento proporcional que será comentada a seguir na subseção 3.1.9.

### 3.1.9 Amortecimento viscoso

No problema dinâmico, considerando o amortecimento viscoso ou amortecimento de Rayleigh, a matriz de amortecimento é obtida por combinação linear das matrizes de massa e rigidez como indicado na equação 81.

$$\alpha M + \beta K = C \quad (81)$$

Os coeficientes da equação 81 são obtidos através da equação 80 escrita em função do coeficiente de amortecimento como segue:

$$\ddot{x}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \bar{F}_i \quad (82)$$

Na equação 82 se tem  $C_i = 2\xi_i \omega_i$ , onde  $\xi_i$  é o coeficiente de amortecimento correspondente ao modo "i". A partir do exposto, a equação 81 pode ser escrita em forma desacoplada resultando no seguinte sistema linear:

$$\alpha + \beta\omega_i^2 = 2\xi_i\omega_i, \quad i = 1,2 \quad (83)$$

Para as duas primeiras frequências naturais e os dois primeiros coeficientes de amortecimento se obtém o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha + \beta\omega_1^2 = 2\xi_1\omega_1 \\ \alpha + \beta\omega_2^2 = 2\xi_2\omega_2 \end{cases} \quad (84)$$

Nota-se que, para obter os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  é necessário conhecer previamente as primeiras duas frequências naturais do sistema  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e os coeficientes de amortecimento  $\xi_1$  e  $\xi_2$  associados aos dois primeiros modos.

Os valores  $\alpha$  e  $\beta$  determinados, desta forma, são utilizados para obter a matriz de amortecimento  $C$  na equação 81. Embora este modelo de amortecimento seja muito citado na literatura da engenharia, não é um modelo adequado para ser utilizado em componentes com coeficientes de amortecimento muito baixo como é o caso de estruturas constituídas de aço e concreto entre outros. Neste caso é recomendada uma abordagem de análise modal no domínio da frequência e a utilização de amortecimento histerético como mostrado em Petyt (2010).

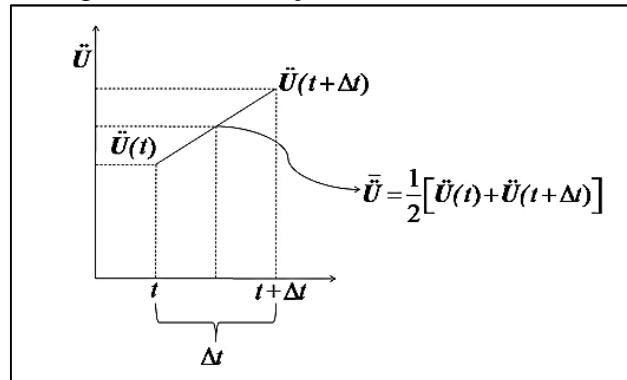
### 3.1.10 Integração direta - Método de Newmark

O método de integração direta de Newmark (MN) é um método numérico iterativo que fornece as componentes  $\mathbf{U}(t + \Delta t)$ ,  $\dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t)$  e  $\ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t)$  a partir de valores conhecidos  $\mathbf{U}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{U}}(t)$  e  $\ddot{\mathbf{U}}(t)$  e da variação destes campos correspondente ao intervalo  $\Delta t$ , obtido através da equação de equilíbrio dinâmico correspondente ao problema em questão. Sendo  $\mathbf{U}(t)$  o vetor de deslocamentos nodais,  $\dot{\mathbf{U}}(t)$  o vetor de velocidades e  $\ddot{\mathbf{U}}(t)$  o vetor de aceleração.

A equação de equilíbrio dinâmica é estabelecida no instante  $(t + \Delta t)$ , por este motivo, o método de Newmark (MN) faz parte dos métodos implícitos de integração direta. O método é restrito à consideração linear da aceleração e não deve ser utilizada, por exemplo, em problemas de impacto onde ocorre um comportamento não linear brusco na desaceleração de um componente estrutural.

O MN é uma extensão do método da aceleração linear também conhecido como método da aceleração média como esquematizado na Figura 9.

Figura 9 – Aceleração Média de Newmark



Fonte: Adaptado de Bathe (1996)

A equação de equilíbrio dinâmico é definida pela equação 85.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{R}^{t+\Delta t} \quad (85)$$

Sendo  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  as matrizes de massa, amortecimento e rigidez global.

Neste método, os vetores  $\mathbf{U}(t + \Delta t)$ ,  $\dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t)$  e  $\ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t)$  são obtidos a partir dos vetores  $\mathbf{U}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{U}}(t)$  e  $\ddot{\mathbf{U}}(t)$ . Considerando o conceito da aceleração média entre os instantes  $t$  e  $t + \Delta t$  e o parâmetro  $\delta = 0,5$  se obtém a equação 86.

$$\bar{\ddot{\mathbf{U}}} = (1 - \delta)\ddot{\mathbf{U}}(t) + \delta\ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{U}}(t) + \ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t)) \quad (86)$$

Utilizando a expansão em série de Taylor da função  $\mathbf{U}(t + \Delta t)$  até o termo quadrático se obtém a equação 87.

$$\mathbf{U}(t + \Delta t) = \mathbf{U}_0 + \frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{U}(t)}{dt^2} \Delta t^2 \quad (87)$$

Substituindo a aceleração média, definida na equação 86, na equação 87 se obtém:

$$\mathbf{U}(t + \Delta t) = \mathbf{U}(t) + \dot{\mathbf{U}}(t)\Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{U}}(t) + \alpha \ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) \right] \Delta t^2 \quad (88)$$

Sendo o parâmetro  $\alpha \geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \delta \right)^2$  se obtém, considerando a aceleração média com  $\delta = 0,5$ ,  $\alpha = 0,25$ .

Expandindo em série de Taylor até o termo linear o vetor velocidade  $\dot{U}(t + \Delta t)$  se obtém a equação 89.

$$\dot{U}(t + \Delta t) = \dot{U}(t) + \frac{d\dot{U}(t)}{dt} \Delta t \quad (89)$$

Substituindo  $\frac{d\dot{U}(t)}{dt}$  na equação 89 pela aceleração média da equação 86, se obtém a equação 90.

$$\dot{U}(t + \Delta t) = \dot{U}(t) + [(1 - \delta)\ddot{U}(t) + \delta\ddot{U}(t + \Delta t)]\Delta t \quad (90)$$

As constantes  $\alpha$  e  $\delta$  empregadas no método de Newmark determinam a forma como os deslocamentos, velocidades e acelerações são calculadas em cada passo de tempo da solução. O método considera que a aceleração é constante entre os passos de tempo ( $t$ ) e ( $t + \Delta t$ ) se  $\delta = 0,5$  e  $\alpha = 0,25$ . Bathe (1996) argumenta que se  $\alpha \geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \delta \right)^2$  e  $\delta \geq \frac{1}{2}$  então o método é incondicionalmente estável, ou seja, para qualquer incremento de tempo  $\Delta t$  considerado o método convergirá.

Na próxima seção serão abordados os conceitos que serão utilizados para analisar simultaneamente as variáveis contidas no problema da confiabilidade estrutural.

### 3.2 ESTATÍSTICA MULTIVARIADA

A estatística multivariada estuda os fenômenos observando e analisando suas diversas variáveis simultaneamente. Dificilmente o interesse de um estudo é focado em apenas uma variável e, portanto, estabelecer as relações entre elas conduzirá a análises mais robustas e mais informativas.

A análise, a descrição e a interferência são realizadas com base nas respostas simultâneas, valendo-se da estrutura de correlação entre as variáveis. Os assuntos abordados nesta seção estão textualmente de acordo com Ferreira (2008).

### 3.2.1 Variáveis aleatórias multidimensionais

As variáveis aleatórias multidimensionais constituem os fundamentos básicos do processo estocástico (processo aleatório que depende do tempo) conforme Ferreira (2008). Um exemplo deste tipo de variável é o comportamento aleatório de uma torre metálica sobre diferentes tipos de ações de vento.

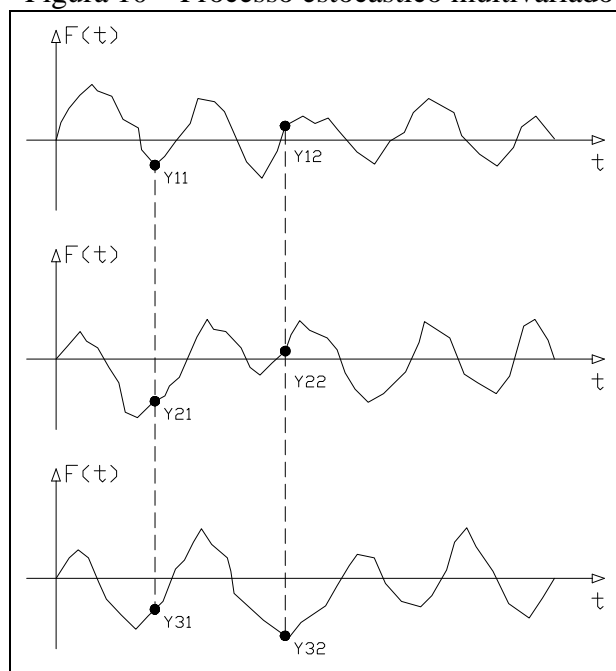
Um processo estocástico multivariado, Figura 10, contendo as  $p$  variáveis mensuradas nas  $n$  unidades amostrais, é normalmente representado por uma matriz  $Y_{jk}$  indicada na equação 91. O primeiro índice refere-se a  $j$ -ésima unidade amostral e o segundo, a  $k$ -ésima variável aleatória, sendo  $j = 1, \dots, n$  e  $k = 1, \dots, p$ .

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & \cdots & Y_{np} \end{bmatrix} \quad (91)$$

Como notação específica, a variável aleatória será representada por letras maiúsculas e as suas realizações por letras minúsculas.

Cada linha da matriz, apresentada na equação 91, representa um vetor  $p$ -dimensional, de observações multivariadas, e cada coluna, um vetor  $n$ -dimensional das  $n$  realizações independentes de uma determinada variável.

Figura 10 – Processo estocástico multivariado



Fonte: O Autor

Para o processo estocástico, representado pelo vetor aleatório  $Y$ , a função de distribuição de probabilidade multivariada é dada pela equação 92.

$$F(\mathbf{y}) = P(Y \leq \mathbf{y}) = P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, \dots, Y_p \leq y_p) \quad (92)$$

Se a variável  $p$ -dimensional  $Y$  for contínua, então existe uma função densidade de probabilidade  $f(\mathbf{y})$  não negativa dada pela equação 93.

$$f(\mathbf{y}) = \frac{\partial^p F(\mathbf{y})}{\partial y_1 \dots \partial y_p} \quad (93)$$

Sendo  $F(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{y_p} \dots \int_{-\infty}^{y_1} f(y_1, \dots, y_p) dy_1 \dots dy_p$  a função probabilidade correspondente. Para que a equação 92 seja uma função densidade de probabilidade, ela tem de obedecer às propriedades estabelecidas pelas equações 94 e 95:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_p) dy_1 \dots dy_p = 1 \quad (94)$$

$$f(y_1, \dots, y_p) \geq 0 \quad (95)$$

A esperança matemática para um vetor aleatório  $Y$ , no caso contínuo, é definida para cada elemento do vetor por uma integral múltipla definida na equação 96.

$$E(Y) = \begin{bmatrix} E(Y_1) \\ \vdots \\ E(Y_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} y_1 f(y_1, \dots, y_p) dy_1 \dots dy_p \\ \vdots \\ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} y_p f(y_1, \dots, y_p) dy_1 \dots dy_p \end{bmatrix} = \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} \quad (96)$$

Outra medida a ser utilizada é a interferência estatística entre as variáveis. A variância ou a covariância de um vetor aleatório é uma matriz definida pela equação 97.

$$Cov(Y) = E(Y - \mu)(Y - \mu)^T = \begin{bmatrix} E(Y_1 - \mu_1)^2 & \dots & E(Y_1 - \mu_1)(Y_p - \mu_p) \\ E(Y_2 - \mu_2)(Y_1 - \mu_1) & \dots & E(Y_2 - \mu_2)(Y_p - \mu_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(Y_p - \mu_p)(Y_1 - \mu_1) & \dots & E(Y_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix}, \quad (97)$$

em que  $E(Y_k - \mu_k)(Y_l - \mu_l) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (y_k - \mu_k)(y_l - \mu_l)f(y_1, \dots, y_p) dy_1 \dots dy_p$  para  $k, l = 1, 2, \dots, p$ , é a covariância entre a variável  $Y_k$  e  $Y_l$  também representada por  $\sigma_{kl}$ .

Quanto as variáveis tem correlação nula a matriz se torna diagonal e o erro de dispersão é dado pela variância que é definida pela diagonal da equação 97.

A matriz de covariância é também conhecida como matriz de variância populacional definida na equação 98.

$$Cov(Y) = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \dots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \quad (98)$$

Deve-se notar que as expressões supracitadas tratam de um único vetor aleatório, portanto, a equação 98 é também chamada de matriz de autocovariância. Por outro lado é comum se trabalhar com mais de uma variável aleatória onde se tem a matriz de covariância cruzada descrita a seguir.

Se  $X$  é um vetor aleatório  $p$  dimensional de uma distribuição com média  $\mu_x$  e covariância  $\Sigma_{xx}$  e  $Y$  outro vetor aleatório com média  $\mu_y$  e covariância  $\Sigma_{yy}$  então:

$$Cov(X, Y) = E(XY^T) - E(X)E(Y^T) = E(XY^T) - \mu_x \mu_y^T \quad (99)$$

Na equação 99, no caso de  $X$  e  $Y$  serem independentes,  $Cov(X, Y) = \Sigma_{XY} = 0$ .

### 3.2.2 Estatísticas descritivas

As estatísticas descritivas de um processo estocástico são definidas pelos momentos estatísticos como: a média amostral, para estimar a média da distribuição, e a matriz de covariância para medir a dispersão e a covariação.

A média amostral, de uma amostra aleatória  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  em  $\mathbb{R}^p$ , estimador de  $\mu$  é definida pela equação 100.

$$\bar{Y}_{\cdot} = \frac{\sum_{j=1}^n Y_j}{n} = \frac{1}{n} Y^T \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{\cdot 1} \\ \bar{Y}_{\cdot 2} \\ \vdots \\ \bar{Y}_{\cdot p} \end{bmatrix} \quad (100)$$

A equação 100 pode ser escrita em forma matricial conforme a equação 101.

$$\bar{Y}_{\cdot} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{21} & \dots & Y_{n1} \\ Y_{12} & Y_{22} & \dots & Y_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Y_{1p} & Y_{2p} & \dots & Y_{np} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (101)$$

A autocorrelação amostral, estimador de  $\Sigma$ , entre as variáveis  $Y_{\cdot k}$  e  $Y_{\cdot l}$  é definida pela equação 102.

$$S_{kl} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_{jk} - \bar{Y}_{\cdot k})(Y_{jl} - \bar{Y}_{\cdot l}) \quad (102)$$

Se as variáveis não são correlacionadas então a matriz  $S$  é diagonal, onde  $k = l$ , então a equação 102 se reduz a variância apresentada na equação 103.

$$S_{kk} = S^2_k = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_{jk} - \bar{Y}_{\cdot k})^2 \quad (103)$$

Por outro lado, a matriz de autocorrelação  $S$  pode ser obtida a partir da matriz  $Y$  que representa o processo estocástico através da equação 104.

$$S = \frac{1}{n-1} \left[ Y^T Y - \frac{1}{n} Y^T \mathbf{1} \mathbf{1}^T Y \right] \quad (104)$$

Colocando em evidencia  $Y^T$  e  $Y$  na equação anterior obtém-se a equação 105.

$$S = \frac{1}{n-1} Y^T \left[ I - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \right] Y \quad (105)$$

A equação 148 pode ser descrita em função da matriz de projeção  $Q = I - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ . Esta matriz é simétrica e independente, ou seja,  $QQ = Q^2 = Q$  e  $Q = Q^T$ . Uma consequência disto é que  $S$  é ao menos não-negativa definida, pois para um vetor  $\underline{a}$  qualquer não nulo pertencente a  $\mathbb{R}^p$  obtém-se a equação 106.

$$\begin{aligned} \underline{a}^T S \underline{a} &= \frac{1}{n-1} \underline{a}^T Y^T Q Y \underline{a} = \frac{1}{n-1} [\underline{a}^T Y^T Q^T][Q Y \underline{a}] = \\ &= \frac{1}{n-1} X^T X = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n X_j^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (106)$$

Para  $X = QY\underline{a}$ .

A matriz de soma de quadrados e produtos amostral é representada por  $W$  e definida pela equação 107.

$$W = (n-1)S = Y^T \left[ I - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T \right] Y = Y^T Q Y \quad (107)$$

Outra quantidade populacional relevante é o coeficiente de correlação entre duas variáveis  $Y_k, Y_l$  definido pela equação 108.

$$\rho_{kl} = \frac{\sigma_{kl}}{\sqrt{\sigma_{kk}\sigma_{ll}}} \quad (108)$$

A correlação é uma estimativa de covariação entre as variáveis  $Y_k, Y_l$  em uma escala padronizada e possui domínio no intervalo  $[-1,1]$ . A covariância possui domínio no intervalo  $]-\infty, \infty[$  e, portanto pode não fornecer uma ideia precisa se a associação linear entre as variáveis é forte ou fraca. Na escala padronizada um valor muito próximo de  $\pm 1$  indica que as variáveis estão fortemente associadas. Se o coeficiente de correlação populacional for zero, indicará que as variáveis não possuem associação linear. Se for definido  $V = \text{diag}(\Sigma) = \text{diag}(\sigma_{kk})$  e  $V^{-1/2} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_{kk}}}\right)$  obtém-se a matriz de correlações populacional  $\rho_{(p \times p)}$  definida na equação 109.

$$\rho = V^{-1/2}\Sigma V^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (109)$$

De forma análoga pode-se definir  $D = \text{diag}(S) = \text{diag}(S_{kk})$  e também  $D^{-1/2} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{S_{kk}}}\right)$ , então o estimador da matriz de correlação é definido na equação 110.

$$R = D^{-1/2}SD^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (110)$$

Sendo  $r_{kl}$  definido pela equação 111.

$$r_{kl} = \frac{S_{kl}}{\sqrt{S_{kk}S_{ll}}} D^{-1/2}SD^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (111)$$

Os conceitos apresentados na seção 3.2 serão utilizados para analisar simultaneamente as variáveis contidas no problema da confiabilidade estrutural considerando a incerteza no carregamento e em algumas propriedades mecânicas dos materiais.

Na próxima seção serão apresentados os métodos que serão utilizados para tratar as incertezas dos carregamentos e a determinação da confiabilidade estrutural.

### 3.3 MÉTODO DE MONTE CARLO DIRETO (MMCD)

Nesta seção serão abordados os métodos utilizados para tratar as incertezas dos carregamentos e das propriedades da estrutura: confiabilidade estrutural; método de Monte Carlo direto; integração de Monte Carlo e formulação do método de Neumann em sistemas lineares.

### 3.3.1 Confiabilidade estrutural

Confiabilidade estrutural é a habilidade de uma estrutura em desempenhar adequadamente, durante sua vida útil, a função para a qual foi projetada (Nogueira, 2005). Portanto, a confiabilidade deve medir a probabilidade da estrutura de violar um determinado estado-limite, ou simplesmente, falhar. De um modo genérico, a falha pode ser definida como a incapacidade do componente corresponder à demanda que lhe é exigida, ou seja, a sua capacidade é inferior à demanda. As formas com que o componente estrutural pode falhar dependem do tipo de carregamento, tipo do material, condições ambientais, tempo de vida, cuidados com manutenção, etc.

Os modos de falha de estruturas reticuladas tridimensionais são independentes do tempo (*time-invariant*). São modos que possuem igual probabilidade de ocorrer em qualquer que seja a vida ou tempo de uso do produto considerado.

Ao se considerar um modo de falha particular, uma modelagem de incerteza deve ser considerada. Esta modelagem é realizada a partir de parâmetros de projeto cuja variabilidade é significativa na definição da equação de estado limite para o problema em questão. Estes parâmetros que não tem mais caráter determinístico e sim randômico são chamados de variáveis aleatórias de um problema de confiabilidade estrutural. A notação matemática usual para variáveis aleatórias são letras maiúsculas.

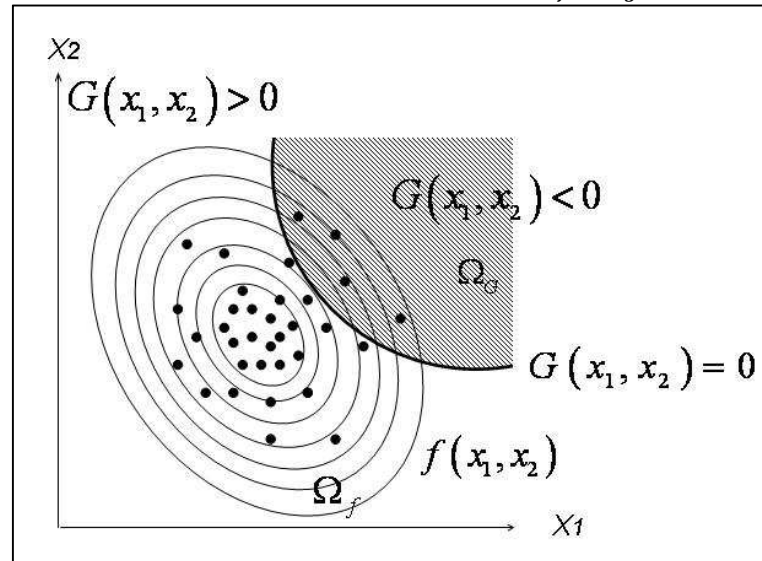
Matematicamente a confiabilidade estrutural é definida como a probabilidade de não ocorrer falha associada a um ou mais modos simultaneamente (fratura, plastificação, flambagem, deformação elástica excessiva, etc.) sendo definida pela equação 112.

$$C_e = 1 - P_f \quad (112)$$

Na equação 112, o termo  $P_f$  é a probabilidade de falha da estrutura correspondente ao modo analisado e é definida matematicamente pela equação 113.

$$P_f = \int_{G(X) < 0} f(X) dX \quad (113)$$

Na equação 113, o domínio de integração  $G(X) < 0$  representa a região do domínio probabilístico onde os pontos estão contidos na superfície definida pela equação de estado limite conforme indicado na Figura 11.

Figura 11 – Domínio de falha  $\Omega_f \cap \Omega_g$ 

Fonte: Adaptada de Nogueira (2005)

A função  $G(X_1, X_2)$  define a superfície de estado limite. O estado limite pode ser definido como a fronteira entre o desempenho desejado e o indesejado de uma estrutura. De forma genérica uma função de estado limite, em problemas de confiabilidade estrutural, é obtida a partir de parâmetros, com pelo menos um deles apresentando variabilidade, associados à capacidade de resistência e à solicitação da estrutura. De forma compacta uma função de estado limite pode ser definida pela equação 114.

$$G(X_i) = R(X_i) - S(X_i), i = 1, 2, \dots, n; \quad (114)$$

Onde  $R(X_i)$  é capacidade de resistência do componente e  $S(X_i)$  a solicitação atuante, onde os dois parâmetros por sua vez podem ser dependentes de variáveis aleatórias.

A partir da equação 114, pode-se escrever a equação 113 de forma mais compacta com auxílio de uma função indicatriz  $I_g$  obtida a partir de  $G(X_i)$ :

$$I_G = \begin{cases} 1, G(X_i) \leq 0 \\ 0, G(X_i) > 0 \end{cases} \quad (115)$$

Desta forma, a probabilidade de falha pode ser escrita como na equação 116.

$$P_f = P[G(X_i) < 0, X_i] = \int_D I_G f(X_i) dX_i \quad (116)$$

Onde  $f(X_i)$  é a função distribuição de probabilidade para uma determinada variável aleatória. Na subseção a seguir, será apresentado o método utilizado para a determinação da probabilidade de falha.

### 3.3.2 Método de Monte Carlo direto

O Método de Monte Carlo Direto (MMCD) permite simular qualquer processo cujo andamento dependa de fatores aleatórios. Surgiu oficialmente no ano de 1949, com o artigo *The Monte Carlo Method* de autoria dos matemáticos John von Neumann e Stanislaw Ulam. Segundo Ulam, o nome do método foi dado em homenagem ao seu tio, que era frequentador do cassino de Monte Carlo. Aplicado inicialmente em problemas relacionados à bomba atômica e posteriormente, em resoluções de integrais multidimensionais e complexas para resolver certas equações integrais que não eram passíveis de solução analítica.

O MMCD foi utilizado para examinar a equação de Boltzmann e, em 1908, o método foi utilizado para estimar o coeficiente de correlação da distribuição de Student. Seu processo de implementação é simples, porém, sua utilização é restrita devido a seu alto custo computacional.

Uma das vantagens do MMCD é de permitir que se substitua o cálculo de integrais complexas, que não possuem soluções analíticas fechadas, por expressões baseadas em teorias probabilísticas de grandes números. Entretanto, a grande desvantagem está relacionada ao número excessivo de simulações necessárias para que se possa estimar com precisão a probabilidade de falha.

Por exemplo, para se estimar uma probabilidade de falha da ordem de  $10^{-n}$ , o número de simulações necessárias não deverá ser inferior a  $10^{(n+2)}$  ou  $10^{(n+3)}$ , dependendo da variabilidade dos parâmetros envolvidos. Para estruturas metálicas, considera-se uma probabilidade de falha na ordem de  $10^{-3}$  a  $10^{-6}$ , portanto, seriam necessárias  $10^5$  a  $10^9$  simulações. Esta quantidade excessiva de simulações torna o MMCD menos eficiente do que outros métodos quando da utilização de modelos não lineares de representação do comportamento das estruturas.

Para sua utilização é necessário que as variáveis aleatórias tenham distribuição de probabilidade conhecida, onde a ideia básica do MMCD é utilizar procedimentos baseados em teoria probabilística para calcular a integral que define a probabilidade de falha da estrutura.

### 3.3.3 Integração de Monte Carlo

Nesta subsecção, será apresentada uma técnica simples para calcular integrais unidimensionais, equação 117, por um método de Monte Carlo textualmente de acordo com Rubinstein (1981).

$$I = \int_a^b g(x) dx \quad (117)$$

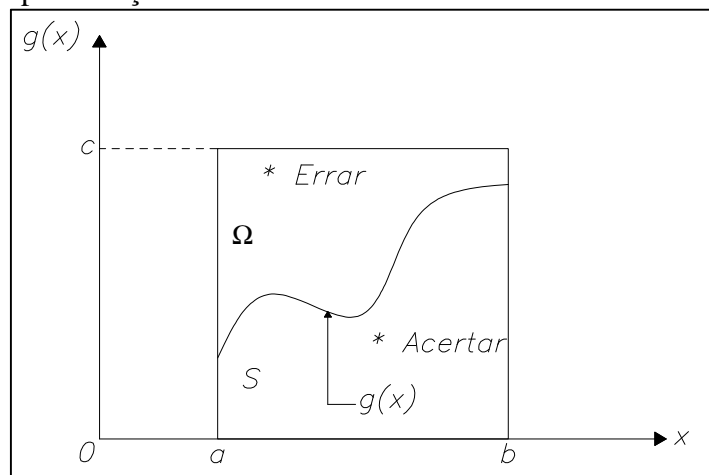
A técnica é chamada de "Método de Monte Carlo de acertar ou errar", e baseia-se na interpretação geométrica de uma integral como uma área. Para o cálculo da integral da equação 96 considera-se que o integrando de  $g(x)$  é limitado:

$$0 \leq g(x) \leq c, \quad a \leq x \leq b.$$

Considerar  $\Omega$  como sendo o retângulo da Figura 12.

$$\Omega = \{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq c\}.$$

Figura 12 – Representação Gráfica do "Método de Monte Carlo de acertar ou errar"



Fonte: Adaptado de Rubinstein (1981)

Seja  $(X, Y)$  um vetor aleatório distribuído uniformemente sobre o retângulo  $\Omega$  com a função de densidade de probabilidade representada na equação 118.

$$f_{x,y}(X, Y) = \begin{cases} \frac{1}{c(b-a)} & , se (x, y) \in \Omega \\ 0 & , outro \end{cases} \quad (118)$$

Para determinar qual é a probabilidade  $p$ , representada pela equação 120, para que o vetor aleatório  $(X, Y)$  esteja abaixo da curva  $g(x)$ , sendo  $S = \{(x, y): y \leq g(x)\}$ , segue:

$$\text{área abaixo de } g(x) = \text{área } S = \int_a^b g(x) dx \quad (119)$$

$$p = \frac{\text{área } S}{\text{área } \Omega} = \frac{\int_a^b g(x) dx}{c(b-a)} = \frac{I}{c(b-a)} \quad (120)$$

Supondo-se que  $N$  vetores aleatórios independentes são gerados  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$ . O parâmetro  $\hat{p}$  pode ser estimado pela equação 121.

$$\hat{p} = \frac{N_H}{N} \quad (121)$$

Onde  $N_H$  é o número de situações em que  $g(X_i) \geq Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , ou seja, o número de acertos, e  $N - N_H$  é o número de erros. A integral  $I$  pode ser estimada, a partir das equações 120 e 121, pela equação 122.

$$I \approx \theta_1 = c(b-a) \frac{N_H}{N} \quad (122)$$

A variância de  $\hat{p}$  é representada pela equação 123.

$$\text{var } \hat{p} = \text{var} \left( \frac{N_H}{N} \right) = \frac{1}{N^2} \text{var}(N_H) = \frac{1}{N} p(1-p) \quad (123)$$

Aplicando a equação 120 na equação 123 se tem a equação 124.

$$\text{var } \hat{p} = \frac{1}{N} \frac{I}{[c(b-a)]^2} [c(b-a) - I] \quad (124)$$

Portanto, a equação 125 define  $var \theta_1$ .

$$var \theta_1 = [c(b - a)]^2 var \hat{p} = [c(b - a)]^2 \frac{1}{N} p(1 - p) = \frac{I}{N} [c(b - a) - I] \quad (125)$$

E o desvio padrão é definido pela equação 126.

$$\sigma_{\theta_1} = [var \theta_1]^{1/2} = N^{-1/2} \{I[c(b - a) - I]\}^{1/2} \quad (126)$$

Para se determinar a quantidade de estimativas  $N$  parte-se da questão representada pela equação 127.

$$P[|\theta_1 - I| < \varepsilon] \geq \alpha? \quad (127)$$

Utilizando a desigualdade de Chebyshev se obtêm as equações 128 e 129.

$$P[|\theta_1 - I| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{var \theta_1}{\varepsilon^2} \quad (128)$$

$$\alpha \leq 1 - \frac{var \theta_1}{\varepsilon^2} \quad (129)$$

Substituindo a equação 125 em 129 se obtém a equação 130.

$$\alpha \leq 1 - \frac{p(1 - p)[c(b - a)]^2}{N\varepsilon^2} \quad (130)$$

Isolando  $N$  na equação 130 se define a equação 131.

$$N \geq \frac{p(1 - p)[c(b - a)]^2}{(1 - \alpha)\varepsilon^2} \quad (131)$$

Quando  $N$  é suficientemente grande, pode-se aplicar o teorema do limite central, que diz que a variável aleatória  $\hat{\theta}_1$  é distribuída aproximadamente de acordo com a distribuição normal, sendo:

$$\hat{\theta}_1 \leq \frac{\theta_1 - I}{\sigma_{\theta_1}} \quad (132)$$

$$P(\theta_1 \leq x) \cong \phi(x), \quad (133)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad (134)$$

Portanto, o intervalo de confiança com nível  $1 - 2\alpha$  para  $I$  é definido pela equação 135.

$$\theta_1 \pm z_\alpha \frac{[\hat{p}(1 - \hat{p})]^{1/2}(b - a)c}{N^{1/2}} ; \quad (135)$$

Onde  $z_\alpha$  é expresso pela equação 136.

$$z_\alpha = \phi^{-1}(\alpha). \quad (136)$$

Desta forma pode-se calcular a integral que determina a probabilidade de falha de uma estrutura.

### 3.3.4 Formulação do método de Neumann em sistemas lineares

A série de Neumann tem como finalidade reduzir o tempo de processamento do problema dinâmico, apresentado nas equações 137 e 138, através da aproximação da inversão da matriz de rigidez equivalente.

$$K_{eq} Y_{t+\Delta t} = F_{eq} \quad (137)$$

$$Y_{t+\Delta t} = K_{eq}^{-1} F_{eq} \quad (138)$$

Onde  $Y_{t+\Delta t}$  é o vetor de deslocamento nodal e  $F_{eq}$  é o vetor de força equivalente.

A matriz de rigidez equivalente é definida pelas equações 139, 140 e 141.

$$K_{eq} = K_g + \Delta K + a_0 M_g + a_1 C_g \quad (139)$$

$$K_0 = K_g + a_0 M_g + a_1 C_g \quad (140)$$

$$K_{eq} = K_0 + \Delta K \quad (141)$$

Na equação 139 os coeficientes  $a_0$  e  $a_1$  provem da equação do método de integração direta de Newmark (ver Hughes (1987)).

Sendo  $K_g$ ,  $M_g$  e  $C_g$  as matrizes de rigidez, massa e amortecimento respectivamente, a parcela determinística da matriz equivalente  $K_0$  é obtida pelas somas das parcelas determinísticas correspondentes a matriz de rigidez, de massa e de amortecimento como indicado na equação 140. A parcela  $\Delta K$  corresponde ao desvio na matriz de rigidez efetiva decorrente da incerteza do módulo de elasticidade.

A série de Neumann para  $K_{eq}^{-1}$  é apresentada na equação 142.

$$K_{eq}^{-1} = (K_0 + \Delta K)^{-1} = (I - P + P^2 - P^3 + \dots)K_0^{-1} \quad (142)$$

Onde  $I$  é a matriz identidade e a matriz  $P$  é descrita na equação 143.

$$P = K_0^{-1}\Delta K \quad (143)$$

De forma análoga, o vetor de força equivalente também pode ser decomposto no vetor de força determinística e no vetor de força estocástica conforme equação 144.

$$F_{eq} = F_0 + \Delta F \quad (144)$$

Substituindo as equações 142 e 144 na equação 138 se obtém a equação 145.

$$Y_{t+\Delta t} = (I - P + P^2 - P^3 + \dots)K_0^{-1}(F_0 + \Delta F) \quad (145)$$

O procedimento de sistematização da implementação computacional da série de Neumann foi realizado de acordo com Lei e Qiu (2000). Este procedimento é obtido a partir de um algoritmo de sistematização do processo mostrado a seguir.

Definindo  $\bar{Y}_0$  e  $\Delta Y_0$  nas equações 146 e 147 se obtém a equação 148.

$$\bar{Y}_0 = K_0^{-1}F_0 \quad (146)$$

$$\Delta Y_0 = K_0^{-1} \Delta F \quad (147)$$

$$Y_{t+\Delta t} = (I - P + P^2 - P^3 + \dots)(\bar{Y}_0 + \Delta Y_0) = \bar{Y}_0 + \Delta Y_0 - P\bar{Y}_0 - P\Delta Y_0 + P^2\bar{Y}_0 + P^2\Delta Y_0 - P^3\bar{Y}_0 - P^3\Delta Y_0 + \dots \quad (148)$$

A equação 148 pode ser representada pela equação 149.

$$Y_{t+\Delta t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P^n (\bar{Y}_0 + \Delta Y_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P^n \bar{Y}_0 \quad (149)$$

Definindo  $\bar{Y}_n$ ,  $\Delta Y_n$  e  $Y_n$  nas equações 150, 151 e 152 e os substituindo na equação 149 se obtém o vetor de deslocamento nodal na equação 153.

$$\bar{Y}_n = P^n \bar{Y}_0 ; n = 0, 1, 2, \dots \quad (150)$$

$$\Delta Y_n = P^n \Delta Y_0 ; n = 0, 1, 2, \dots \quad (151)$$

$$Y_n = \bar{Y}_n + \Delta Y_n ; n = 0, 1, 2, \dots \quad (152)$$

$$Y_{t+\Delta t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Y_n = Y_0 - Y_1 + Y_2 - Y_3 \dots \quad (153)$$

Por outro lado é possível obter uma fórmula de recursividade para obter  $Y_n$  conhecendo  $Y_{n-1}$  conforme indicado na equação 154.

$$Y_n = P^n (\bar{Y}_0 + \Delta Y_0) = P(P^{n-1} Y_0) = K_0^{-1} \Delta K (P^{n-1} Y_0) \quad (154)$$

Um dos aspectos fundamentais na aplicação da metodologia proposta consiste da obtenção do modelo de incerteza para o módulo de elasticidade. Este modelo estabelece uma relação da aleatoriedade do módulo de elasticidade com as coordenadas do centroide de cada barra do reticulado. Para o problema proposto, a função do módulo de aleatoriedade é descrito pela equação 155.

$$E(x, \xi) = \mu_E [1 + \phi(x, \xi)] \quad (155)$$

Na equação 155,  $\mathbf{x}$  é o vetor posição das coordenadas do centroide das barras do reticulado,  $\xi(\omega)$  é a variável aleatória onde  $\omega \in [0,1]$ ,  $\mu_E$  é o valor médio do módulo de elasticidade do material utilizado e  $\phi(\mathbf{x}, \xi)$  é o vetor que confere a incerteza ao módulo de elasticidade em função do vetor posição com a dimensão equivalente ao número de elementos obtido pela equação 156.

$$\phi(\mathbf{x}, \xi) = \mathbf{S}^T \psi(\xi) \quad (156)$$

Na equação 156,  $\mathbf{S}^T$  é o fator transposto da decomposição de Cholesky da matriz de autocorrelação  $\mathbf{R}$  das distâncias dos centroides das barras descrita na equação 158. A função de incerteza  $\psi(\xi)$  é obtida a partir da variável aleatória  $\xi(\omega)$  supracitada de forma que:

$$\psi(\xi) = \xi \quad (157)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}^T \mathbf{S} \quad (158)$$

A matriz de autocorrelação das distâncias dos centroides das barras do reticulado é obtida pela equação 159.

$$R_{ij}(\mathbf{x}) = \sigma^2 e^{-(\gamma_{ij}/d)^2} \quad (159)$$

Na equação 159,  $\sigma$  é o coeficiente de dispersão,  $d$  é a distância de correlação e  $\gamma_{ij}$  é a matriz cruzada de distâncias dos centroides das barras do reticulado. Para todos os exemplos estudados neste trabalho foram utilizados  $\sigma = 0,1$  e  $d = 1$ .

Os conceitos abordados neste capítulo, bem como nos capítulos anteriores, serão aplicados em exemplos numéricos de pórticos espaciais sendo que os resultados serão apresentados no capítulo a seguir.

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo serão apresentados exemplos de estruturas calculadas utilizando as formulações descritas no capítulo anterior. Para tal, foi desenvolvido um programa computacional, utilizando um software interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico (MATLAB), chamado PortAL3D. Alguns de seus resultados serão comparados aos obtidos por meio do software comercial de análise estrutural (STRAP).

Será apresentado um exemplo de cálculo estático e um exemplo de cálculo dinâmico de pórtico espacial utilizando o Método de Elementos Finitos (MEF). Para a confiabilidade estrutural, serão apresentados exemplos de estruturas calculadas utilizando o Método de Monte Carlo Direto (MMCD) e o Método de Monte Carlo utilizando a série de Neumann para reduzir o tempo de inversão da matriz efetiva na abordagem dinâmica. O capítulo de resultados aborda os seguintes temas: análise estática, vibrações livres, análise dinâmica determinística, análise dinâmica estocástica utilizando o MMCD e a utilização da série de Neumann para inversão da matriz efetiva.

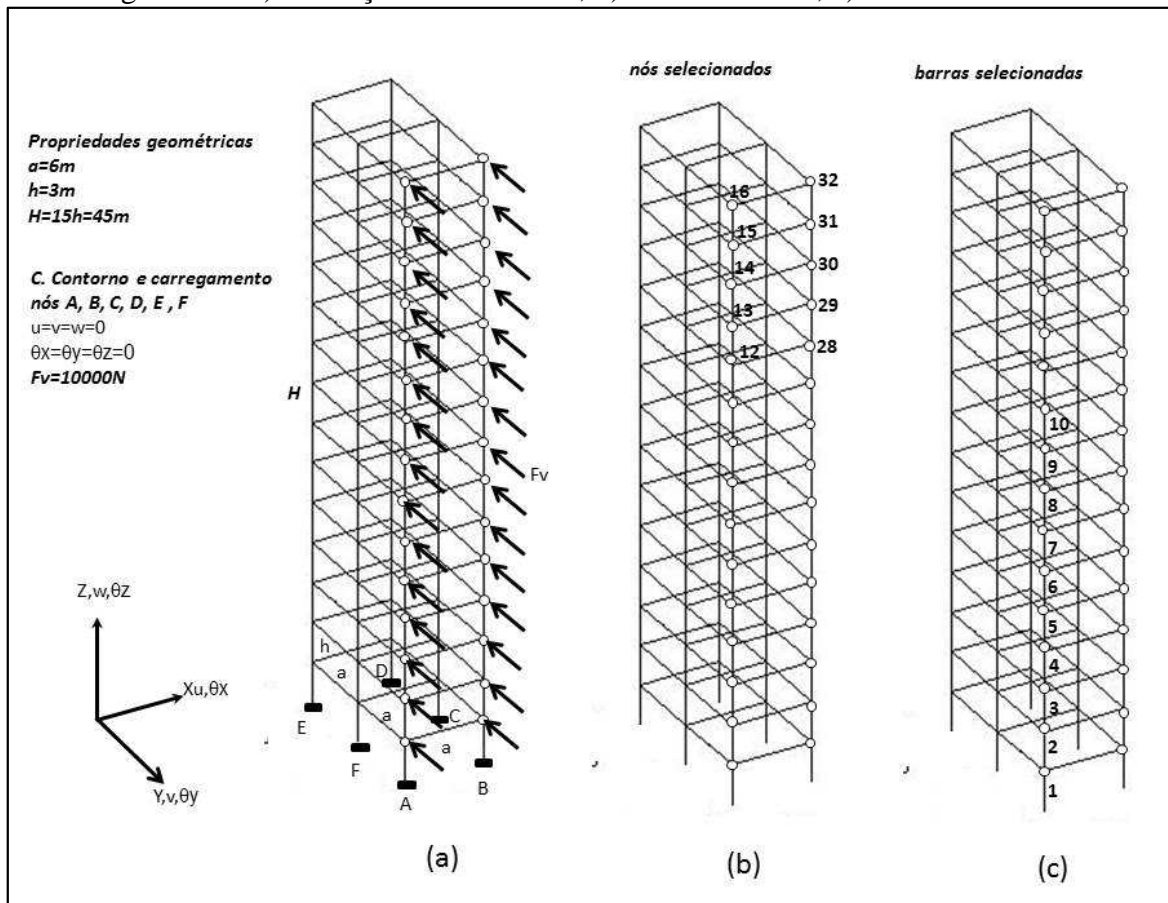
### 4.1 ANÁLISE ESTÁTICA

Nesta seção serão mostrados os resultados para o modelo estático, utilizando o MEF para os deslocamentos nodais e esforços normais em barras de um pórtico tridimensional em regime elástico linear com condições de contorno, geométricas e de carregamento indicadas na Figura 13(a). Os resultados obtidos, utilizando o programa próprio PortAL3D, são comparados com os resultados do *software* comercial STRAP.

O pórtico 1 é constituído de aço estrutural, com propriedades mecânicas e geométricas da seção transversal indicadas na Tabela 2, para todos os elementos do reticulado. As Figuras 13(b) e 13(c) indicam os nós, com os maiores valores de deslocamento, e as barras, com os maiores valores de esforços, que serão utilizados para a apresentação dos resultados.

O pórtico 1 foi submetido a um carregamento genérico, simulando uma ação do vento sobre a lateral do pórtico como indicado na Figura 13(a), sendo que para o modelo estático é considerado um coeficiente de majoração de 1,4 sobre a pressão dinâmica.

Figura 13 – a) Condições de contorno; b) nós analisados; c) barras analisadas



Fonte: O Autor

Tabela 2 – Propriedades mecânicas e geométricas do pórtico 1

Propriedades dos Materiais	
Módulo de Elasticidade do Aço	$2,0 \times 10^5$ MPa
Coefficiente de Poisson	0,3
Peso Específico	$78,50$ kN/m <sup>3</sup>
Tensão de Escoamento	250 MPa
Tensão de Ruptura	400 MPa
Propriedades Geométricas das Barras	
Perfil	Tubo $\varnothing$ 355,6 x 9,5
Área	$10.329$ mm <sup>2</sup>
Momento de Inércia	$1,5478 \times 10^8$ mm <sup>4</sup>
Momento Polar de Inércia	$3,0956 \times 10^8$ mm <sup>4</sup>

Fonte: O Autor

#### 4.1.1 Resultados para deslocamento nodal e esforço normal

Os resultados obtidos para a componente  $v_h$  do deslocamento nodal e para o esforço normal estão indicados na Tabela 3 e na Tabela 4. A diferença relativa entre os resultados obtidos com o PortAL3D e com o STRAP é estabelecida pelas equações 155 e 156.

$$\Delta_v = \frac{|v_h - v_s|}{|v_s|} \quad (160)$$

$$\Delta_N = \frac{|N_h - N_s|}{|N_s|} \quad (161)$$

Nas equações 155 e 156,  $\Delta_v$  é a diferença relativa para o deslocamento transversal e  $\Delta_N$  a diferença relativa para o esforço normal. Os termos  $v_h$ ,  $N_h$ ,  $v_s$ ,  $N_s$ , são os deslocamentos e os esforços normais obtidos no PortAL3D e no STRAP respectivamente. As Figuras 14(a) e 14(b) ilustram os deslocamentos nodais obtidos.

Tabela 3– Comparação deslocamentos STRAP x PortAL3D

Componente de deslocamento $v$ (m)			
NÓ	STRAP	PortAL3D	$\Delta v$
12	0,10841	0,10923	0,76%
13	0,11344	0,11432	0,78%
14	0,11751	0,11842	0,77%
15	0,12065	0,12155	0,75%
16	0,12284	0,12377	0,76%
28	0,10845	0,10923	0,72%
29	0,11351	0,11432	0,71%
30	0,11752	0,11842	0,77%
31	0,12064	0,12155	0,75%
32	0,12284	0,12377	0,76%

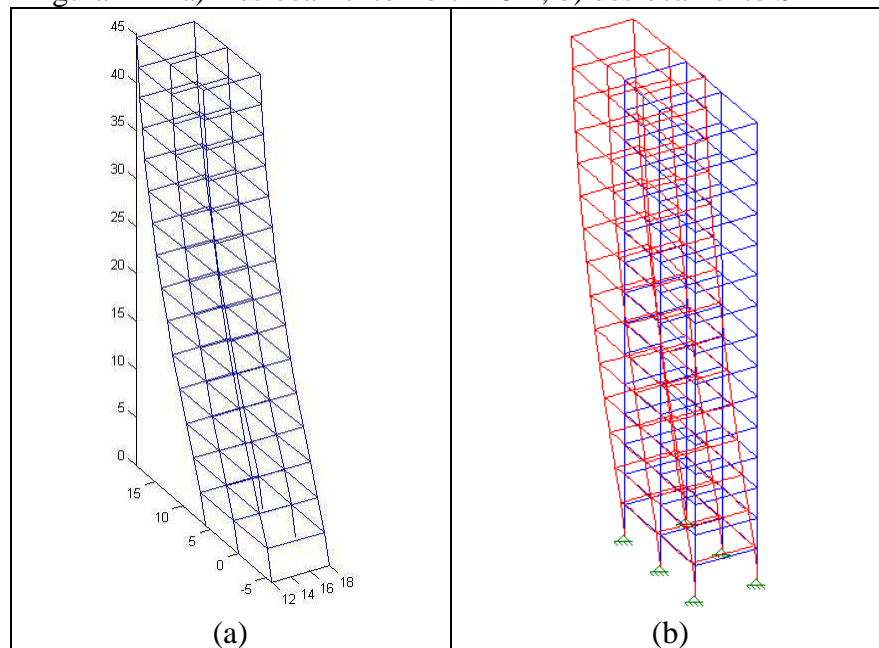
Fonte: O Autor

Tabela 4 – Comparação esforço normal STRAP x PortAL3D

Esforço normal (N)			
BARRA	STRAP	PortAL3D	$\Delta N$
1	273261,22	273431,01	0,06%
2	244021,39	244065,72	0,02%
3	211515,34	211513,04	0,00%
4	180504,97	180491,26	0,01%
5	151811,42	151794,82	0,01%
6	125584,75	125567,60	0,01%
7	101850,82	101833,55	0,02%
8	80614,39	80597,05	0,02%
9	61876,16	61858,82	0,03%
10	45636,25	45619,00	0,04%

Fonte: O Autor

Figura 14 – a) Deslocamento PortAL3D; b) deslocamento STRAP



Fonte: O Autor

Os resultados observados para a componente  $v_h$  do deslocamento mostram valores próximos do PortAL3D e do STRAP, esta diferença, embora abaixo de 1,0%, não deve ser considerada como um erro já que não se tem uma solução analítica padrão para comparar os resultados de ambos os *softwares*. Os resultados de esforço normal apresentam diferenças inferiores a 0,1%. Na próxima seção serão analisadas as frequências naturais do reticulado, que servem como orientação em projetos para evitar fenômenos de ressonância.

#### 4.1.2 Resultados para a frequência natural

As frequências naturais são determinadas para os primeiros dois modos e os resultados obtidos no PortAL3D e no STRAP são apresentados na Tabela 5 por meio das frequências naturais e da diferença relativa definida na equação 157. Os primeiros dois modos são mostrados na Figura 15.

$$\Delta\omega = \frac{|\omega_h - \omega_s|}{|\omega_s|} \quad (162)$$

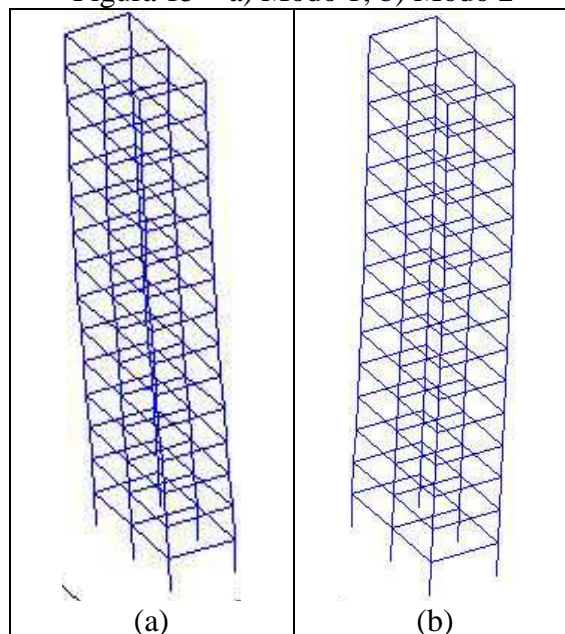
Na equação 157,  $\Delta\omega$  é a diferença relativa para a frequência natural. Os termos  $\omega_h$  e  $\omega_s$  são as frequências naturais obtidas no PortAL3D e no STRAP respectivamente.

Tabela 5– Comparação frequência natural STRAP x PortAL3D

Frequência natural (Hz)			
MODO	STRAP	PortAL3D	$\Delta\omega$
1	0,8998	0,9072	0,82%
2	1,0323	1,0420	0,94%

Fonte: O Autor

Figura 15 – a) Modo 1; b) Modo 2



Fonte: O Autor

Os resultados observados para as frequências naturais mostram uma diferença abaixo de 1% para as frequências obtidas no PortAL3D e as obtidos no STRAP. Neste estudo de caso os resultados obtidos no PortAL3D mostram que o modo é ligeiramente mais rígido daquele obtido pelo STRAP para a mesma ordem de frequência.

## 4.2 ANÁLISE DINÂMICA

Nesta seção, o pórtico tridimensional utilizado no exemplo anterior, será analisado por meio de um modelo dinâmico determinístico. Os resultados, para o esforço normal do modelo dinâmico determinístico, serão obtidos para o mesmo carregamento do modelo estático supracitado, porém sem o coeficiente de majoração.

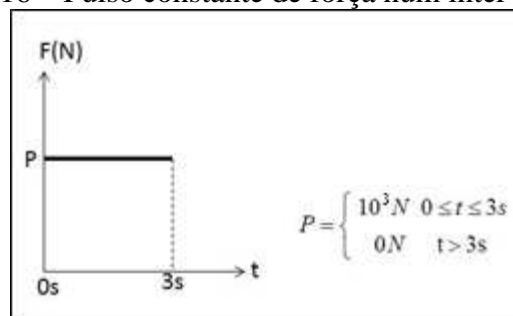
Os resultados serão obtidos para o esforço normal em barras do modelo estático e o esforço normal do modelo dinâmico determinístico.

### 4.2.1 Propriedades do modelo dinâmico determinístico

Para definir o modelo dinâmico, algumas premissas serão consideradas:

- Será considerado amortecimento viscoso (Amortecimento de Rayleigh) com coeficientes de amortecimento, associados à primeira e à segunda frequência natural, de  $\xi_1 = 0,025$  e  $\xi_2 = 0,035$ .
- A força é aplicada por um pulso uniforme indicado na Figura 16 com duração de 3s.
- O tempo de amostragem será de 3s.
- O intervalo de tempo a ser utilizado no processo de integração direta é de  $\Delta t = 0,01s$ .

Figura 16 – Pulso constante de força num intervalo de 3s



Fonte: O Autor

#### 4.2.2 Resultados

Os resultados obtidos são para o esforço normal na barra 1. A diferença relativa entre o valor estático e o dinâmico é dada pela equação 158 como segue,

$$\Delta_N = \frac{|N_d - N_e|}{|N_e|} \quad (163)$$

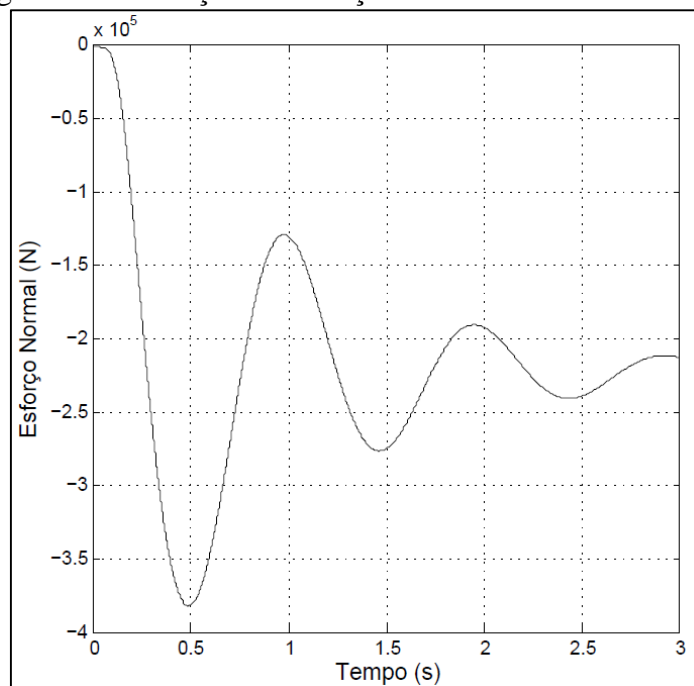
Onde  $N_d$  e  $N_e$  são os esforços normais da barra 1 decorrentes do modelo dinâmico determinístico e estático respectivamente. Os resultados são apresentados na Tabela 6 para o valor médio no intervalo de tempo de amostragem do esforço na barra para a resposta dinâmica e o valor do esforço obtido pelo modelo estático supracitado.

Tabela 6– Comparação modelo estático x modelo dinâmico

Esforço normal (N)			
BARRA	$N_e$	$N_d$	$\Delta N$
1	273.431,01	274.634,10	0,44%

Fonte: O Autor

Figura 17 – Variação do esforço normal da barra 1 no tempo



Fonte: O Autor

Os resultados observados para o valor médio do esforço normal do modelo dinâmico determinístico apresentaram valores inferiores, com diferença abaixo de 0,44% com relação ao modelo estático, contudo, deve-se levar em conta que os efeitos das forças de inércia podem ser potencializados caso se tenham repetições sucessivas do pulso.

A Figura 17 mostra o comportamento do esforço normal no intervalo do tempo de amostragem.

### 4.3 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL – MONTE CARLO DIRETO

Nesta seção, será utilizado o Método de Monte Carlo Direto na abordagem de dois exemplos de vibrações forçadas. No primeiro exemplo, com amortecimento viscoso, as vibrações forçadas são produzidas por um sinal aleatório atuando na base e, no segundo exemplo, sem amortecimento, por uma força produzida por um sinal de ruído branco (sinal aleatório estacionário de média nula). Além do carregamento, o módulo de elasticidade do material e a sua tensão de escoamento também serão variáveis aleatórias do modelo.

A verificação da convergência do método será avaliada com relação à solução dinâmica determinística para um número adequadamente elevado de realizações. Os resultados são mostrados através do comportamento no tempo do deslocamento e da velocidade num ponto específico, bem como do comportamento do esforço normal no tempo, para uma barra específica, devido ao carregamento aleatório.

#### 4.3.1 Exemplo 1: Propriedades do modelo dinâmico estocástico

Para a aplicação do Método de Monte Carlo no cálculo da confiabilidade estrutural, para o pórtico tridimensional utilizado no exemplo anterior, seguem abaixo algumas considerações adotadas:

- a) Foram consideradas três variáveis aleatórias que sejam o sinal na base, o módulo de elasticidade e a tensão admissível do material.
- b) Será considerado amortecimento viscoso (Amortecimento de Rayleigh) com coeficientes de amortecimento, associados à primeira e à segunda frequência natural, de  $\xi_1 = 0,025$  e  $\xi_2 = 0,035$ .

- c) O nó de amostragem é o número 16 indicado na Figura 13(b). Foi escolhido em virtude de apresentar o maior deslocamento no problema dinâmico determinístico.
- d) O número de realizações foi de 2500.
- e) O tempo de amostragem e de aplicação do sinal é de  $t=1s$ .
- f) O incremento de tempo na integração numérica é de  $\Delta t = 0,01s$ .

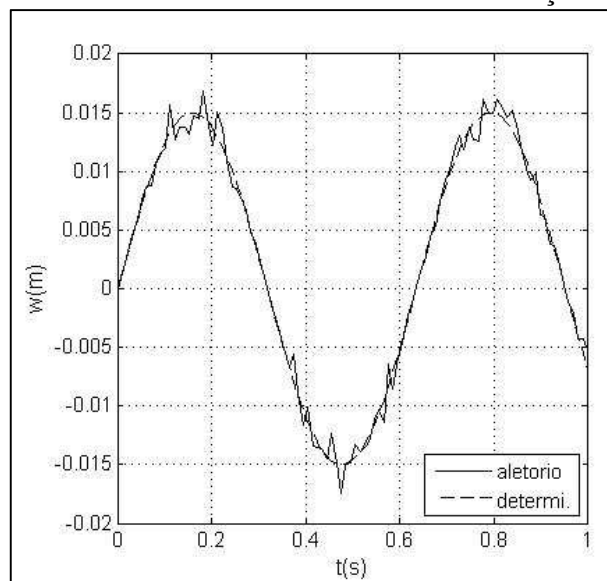
### 4.3.2 Exemplo 1: Especificação das variáveis aleatórias

A seguir serão descritas as variáveis aleatórias utilizadas no cálculo.

#### 4.3.2.1 Carregamento

O pórtico 1 foi submetido a um carregamento produzido por deslocamento na componente  $w$  obtido por um sinal harmônico perturbado por um ruído branco (sinal determinístico). O sinal aleatório que atua nos nós A-E, indicados na Figura 13(a), é obtido a partir de uma distribuição normal para os valores do sinal pseudo-aleatório com valor máximo da amplitude média de 0,015 m e desvio padrão de 10%. O comportamento do sinal aleatório no tempo para a primeira realização é mostrado na Figura 18.

Figura 18 – Sinal aleatório e sinal determinístico de excitação na base do pórtico



Fonte: O Autor

#### 4.3.2.2 Módulo de elasticidade

O módulo de elasticidade, com distribuição aleatória, é obtido para cada elemento sem considerar correlação estatística da propriedade entre elementos. Os valores aleatórios para a propriedade são obtidos por meio de geração pseudo-randômica (função do MATLAB) com distribuição normal de média  $E_o = 2 \times 10^5$  MPa e dispersão  $\mu_E = 0,1E_o$ .

#### 4.3.2.3 Tensão de escoamento

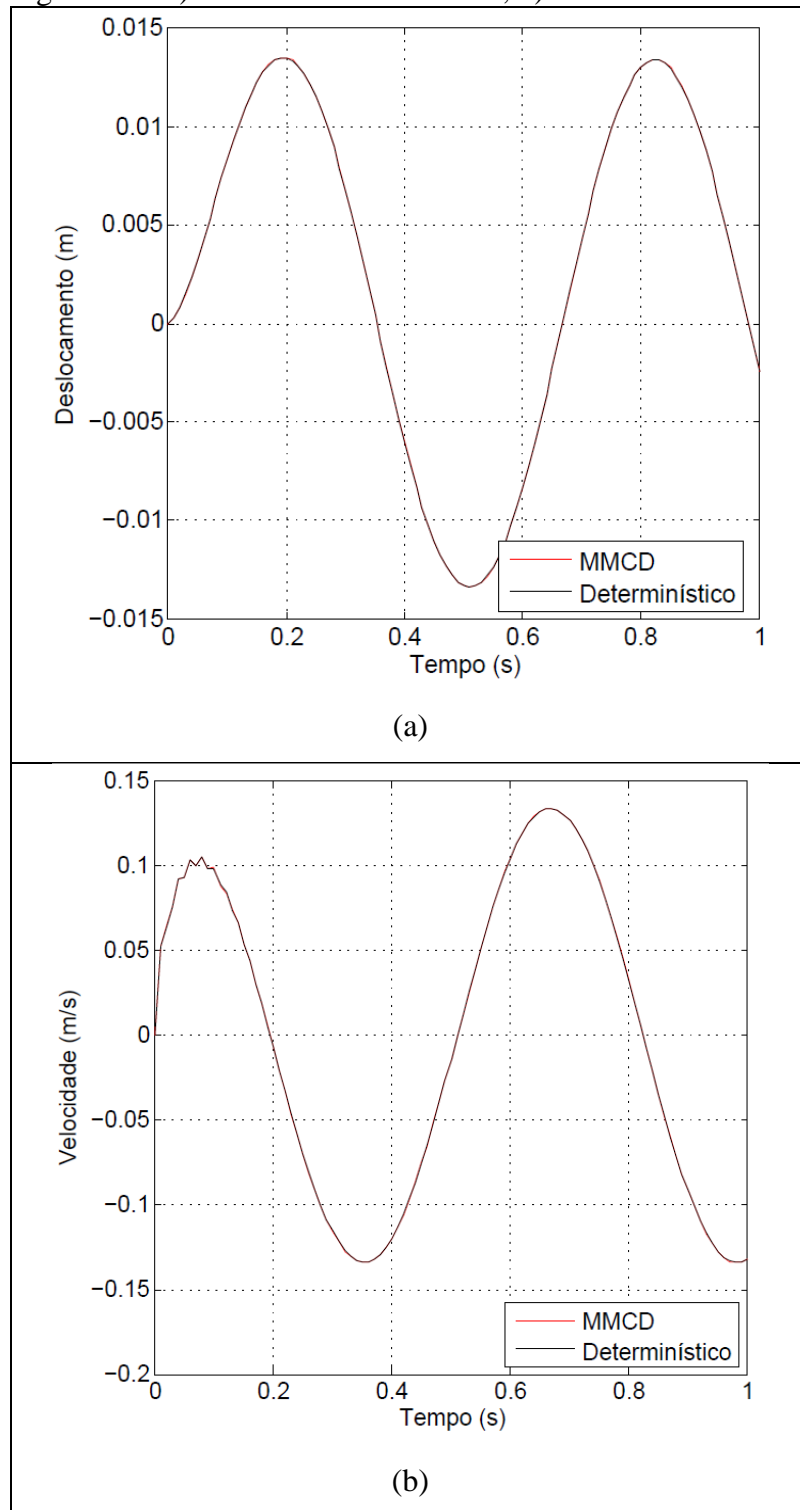
A tensão de escoamento também foi considerada como uma variável aleatória obtida a partir de geração pseudo randômica normal (função do MATLAB) com valor médio  $\sigma_o = 250$  MPa e com um desvio padrão  $\mu_\sigma = 0,1\sigma_o$ .

### 4.3.3 Exemplo 1: Resultados

Os resultados são analisados sobre os seguintes aspectos:

- a) Os valores médios do deslocamento e da velocidade no tempo, para o nó analisado, obtidos pelo modelo determinístico e pelo Método de Monte Carlo Direto mostrados nas Figuras 19(a) e 19(b).
- b) As variações do deslocamento e da velocidade no tempo, para o nó analisado, obtidos pelo modelo determinístico e pelo Método de Monte Carlo Direto mostrados nas Figuras 20(a) e 20(b).
- c) A variação do esforço normal no tempo, para a barra analisada, obtida pelo modelo determinístico e pelo Método de Monte Carlo Direto mostrado na Figura 21.
- d) Convergência da análise de confiabilidade em função do número de realizações para o critério de falha baseada na tensão de escoamento mostrado na Figura 22.
- e) Probabilidade de falha no tempo baseada na tensão admissível para a barra em análise mostrada na Figura 23.

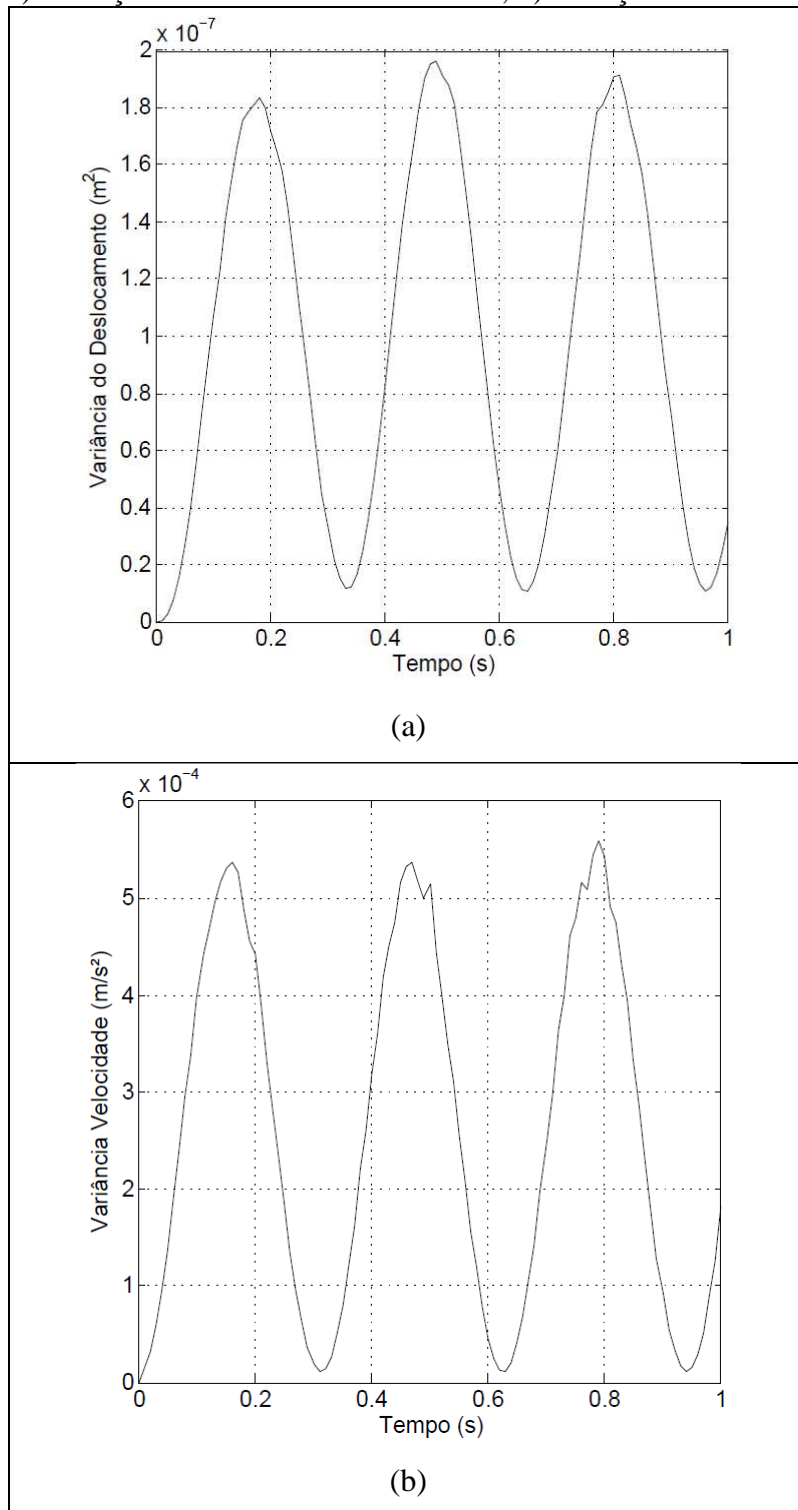
Figura 19 – a) Deslocamento do nó 16; b) velocidade do nó 16



Fonte: O Autor

A Figura 19 ilustra a aproximação obtida por meio do MMCD indicando os valores médios do deslocamento e da velocidade no tempo para o nó analisado.

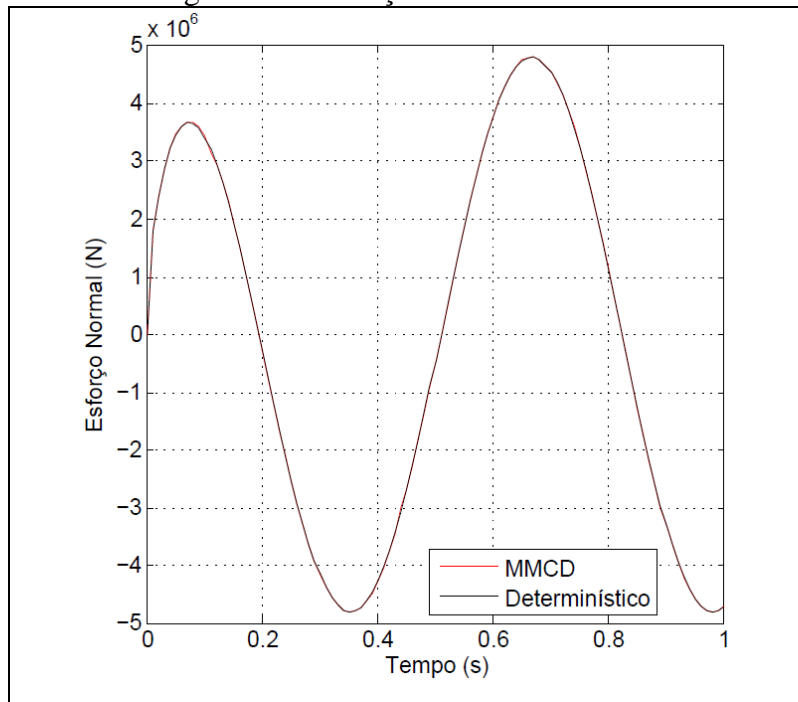
Figura 20 – a) Variação do deslocamento do nó 16; b) variação da velocidade do nó 16



Fonte: O Autor

A Figura 20 apresenta resultados que indicam a aproximação obtida por meio do MMCD, tendo em vista que a variância máxima para o deslocamento ficou em torno de  $1,9 \times 10^{-7}$  m<sup>2</sup> e para a velocidade em torno de  $5,5 \times 10^{-4}$  (m/s)<sup>2</sup>.

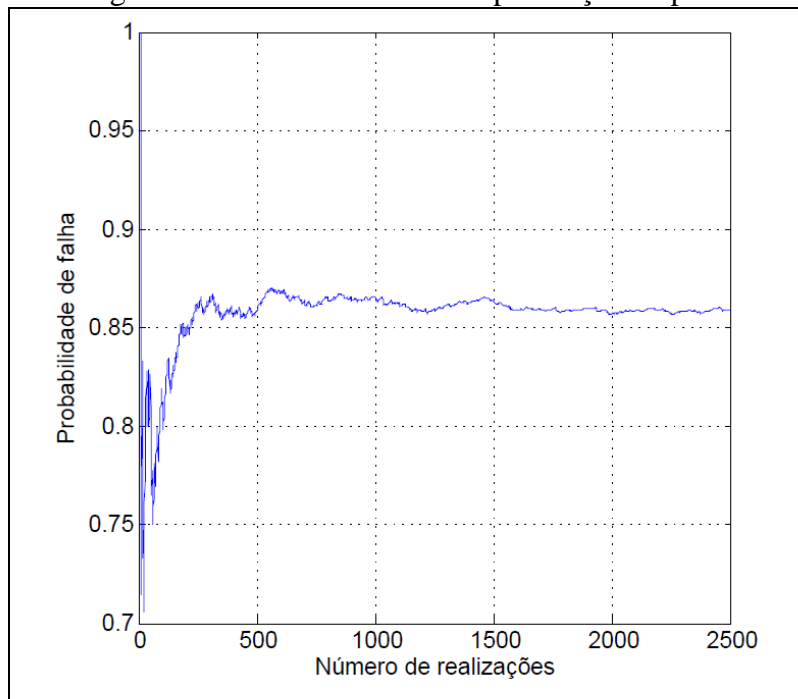
Figura 21 – Esforços normal na barra 1



Fonte: O Autor

A Figura 21 apresenta resultados que ilustra a aproximação obtida por meio do MMCD indicando os valores médios do esforço normal na barra 1.

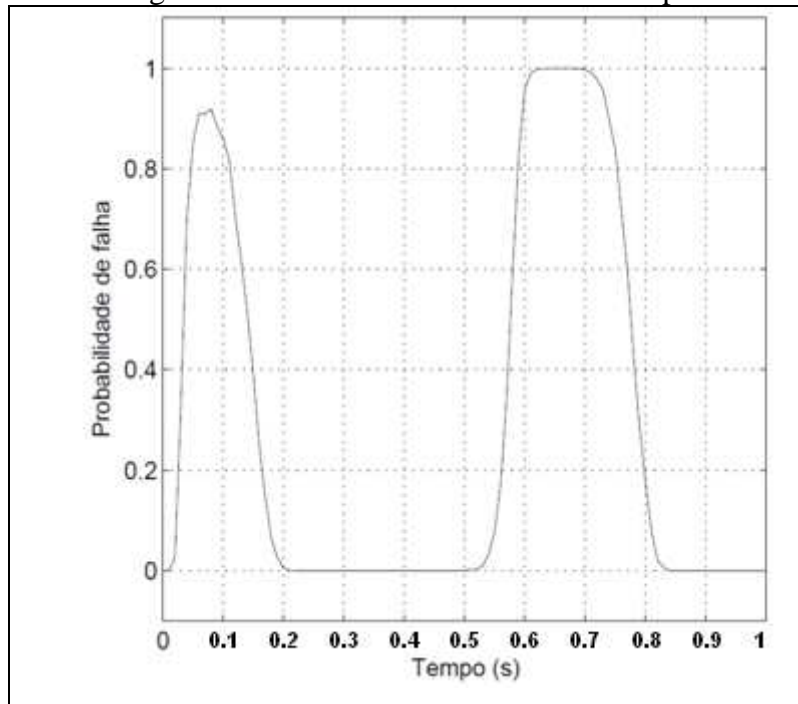
Figura 22 – Convergência do método MMCD na prescrição da probabilidade de falha



Fonte: O Autor

O resultado apresentado na Figura 22 indica que, pelo critério da tensão de escoamento sobre a qual atua também a incerteza, a barra irá falhar com uma probabilidade de aproximadamente 87%. Outro resultado, como é mostrado na Figura 23, são os intervalos de tempo aonde a barra irá a falhar.

Figura 23 – Probabilidade de falha no tempo



Fonte: O Autor

Como pode se notar na curva da Figura 23, há probabilidade de falha não nula entre o instante inicial e o segundo décimo de segundo e depois do quinto décimo ao oitavo décimo de segundo. A curva apresentada deve estar de acordo com os valores no tempo onde a curva de esforço normal atinge os valores máximos absolutos.

#### 4.3.4 Exemplo 2: Propriedades do modelo dinâmico estocástico

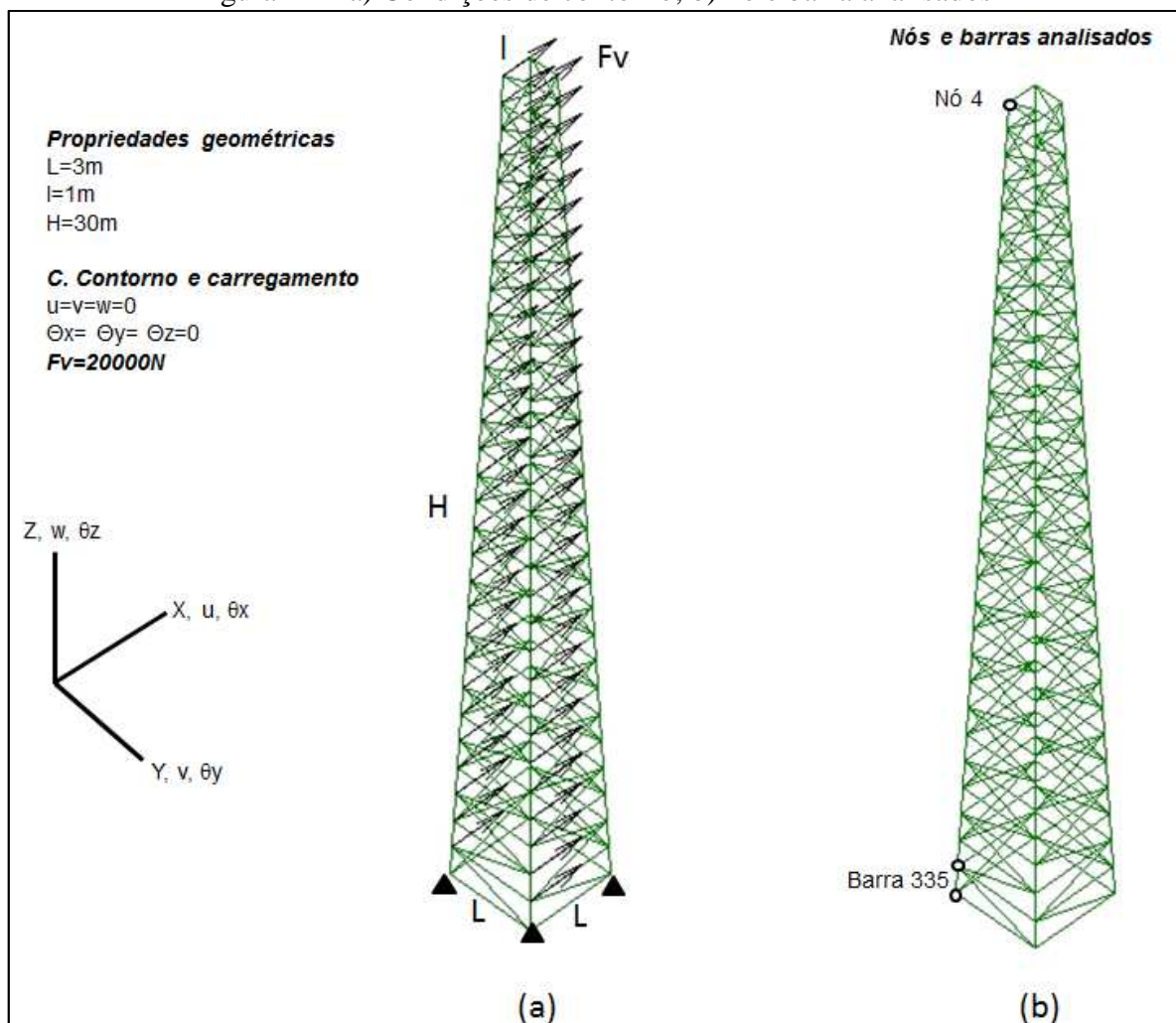
Para a aplicação do Método de Monte Carlo no cálculo da confiabilidade estrutural, para o pórtico tridimensional em regime elástico linear não amortecido com condições de contorno, geométricas e de carregamento indicadas na Figura 24(a), seguem abaixo algumas considerações adotadas:

- a) Foram consideradas três variáveis aleatórias que sejam a força produzida por um sinal de ruído branco, o módulo de elasticidade e a tensão admissível do material.

- b) Não será considerado o amortecimento.
- c) O nó de amostragem é o número 4 indicado na Figura 24(b). Foi escolhido em virtude de apresentar o maior deslocamento no problema dinâmico determinístico.
- d) O número de realizações foi de 2500.
- e) O tempo de amostragem e de aplicação do sinal é de  $t=1s$ .
- f) O incremento de tempo na integração numérica é de  $\Delta t = 0,01s$ .

O pórtico 2 é constituído de aço estrutural, com propriedades mecânicas dos materiais e geométricas da seção transversal indicadas na Tabela 7, para todos os elementos do reticulado. A Figura 24(b) indica o nó e a barra que serão utilizados para a apresentação dos resultados.

Figura 24 – a) Condições de contorno; b) nó e barra analisados



Fonte: O Autor

Tabela 7 – Propriedades mecânicas e geométricas do pórtico 2

Propriedades dos Materiais	
Módulo de Elasticidade do Aço	$2,0 \times 10^5$ MPa
Coefficiente de Poisson	0,3
Peso Específico	78,50 kN/m <sup>3</sup>
Tensão de Escoamento	300 MPa
Tensão de Ruptura	400 MPa
Propriedades Geométricas das Barras	
Perfil	Tubo $\varnothing$ 355,6 x 9,5
Área	10.329 mm <sup>2</sup>
Momento de Inércia	$1,5478 \times 10^8$ mm <sup>4</sup>
Momento Polar de Inércia	$3,0956 \times 10^8$ mm <sup>4</sup>

Fonte: O Autor

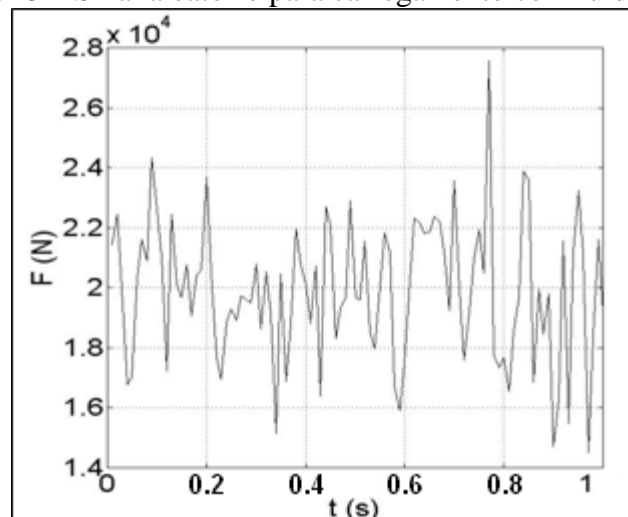
### 4.3.5 Exemplo 2: Especificação das variáveis aleatórias

A seguir serão descritas as variáveis aleatórias utilizadas no cálculo.

#### 4.3.5.1 Carregamento

O pórtico 2 foi submetido a um carregamento produzido por uma força gerada por um sinal de ruído branco. O sinal aleatório, que atua nos nós localizados na face ZY, é obtido a partir de uma distribuição normal para os valores do sinal pseudo-randômico com valor médio de 20.000 N e desvio padrão de 10%. O comportamento do sinal aleatório no tempo para a primeira realização é mostrado na Figura 25.

Figura 25 – Sinal aleatório para carregamento com ruído branco



Fonte: O Autor

#### 4.3.5.2 Módulo de elasticidade

O módulo de elasticidade, com distribuição aleatória, é obtido para cada elemento sem considerar correlação estatística da propriedade entre elementos. Os valores aleatórios para a propriedade são obtidos através de geração pseudo-randômica (função do MATLAB) com distribuição normal de média  $E_o = 2 \times 10^5$  MPa e dispersão  $\mu_E = 0,1E_o$ .

#### 4.3.5.3 Tensão de escoamento

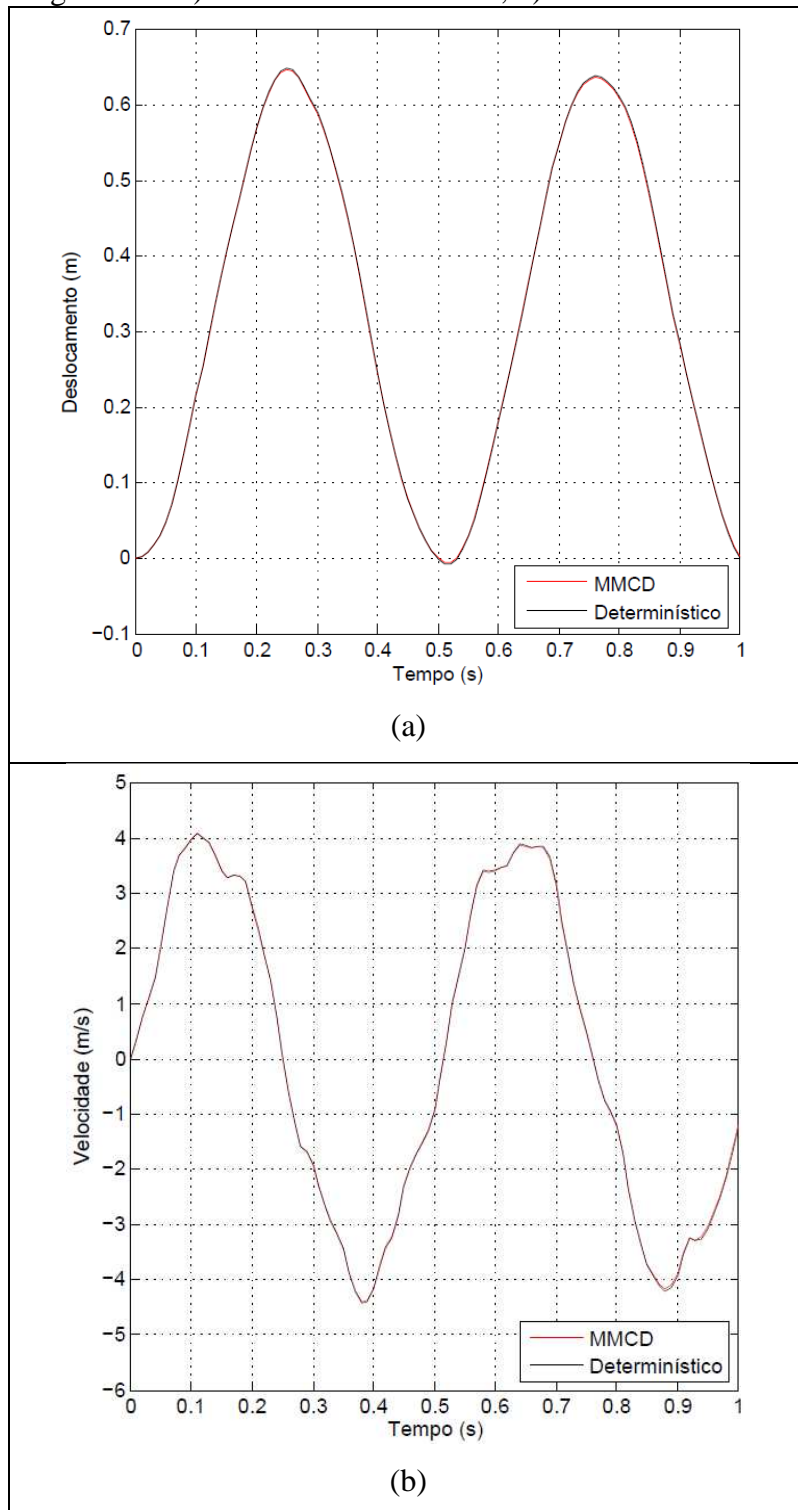
A tensão de escoamento também foi considerada como uma variável aleatória obtida a partir de geração pseudo randômica normal (função do MATLAB) com valor médio  $\sigma_o = 250$  MPa e com um desvio padrão  $\mu_\sigma = 0,1\sigma_o$ .

### 4.3.6 Exemplo 2: Resultados

Os resultados são analisados sobre os seguintes aspectos:

- a) Os valores médios do deslocamento e da velocidade no tempo, para o nó analisado, obtidos pelo modelo determinístico e pelo Método de Monte Carlo Direto mostrados nas Figuras 26(a) e 26(b).
- b) As variações do deslocamento e da velocidade no tempo, para o nó analisado, obtidos pelo modelo determinístico e pelo Método de Monte Carlo Direto mostrados nas Figuras 27(a) e 27(b).
- c) A variação do esforço normal no tempo, para a barra analisada, obtida pelo modelo determinístico e pelo Método de Monte Carlo Direto mostrado na Figura 28.
- d) Convergência da análise de confiabilidade em função do número de realizações para o critério de falha baseada na tensão de escoamento mostrado na Figura 29.
- e) Probabilidade de falha no tempo baseada na tensão admissível para a barra em análise mostrada na Figura 30.

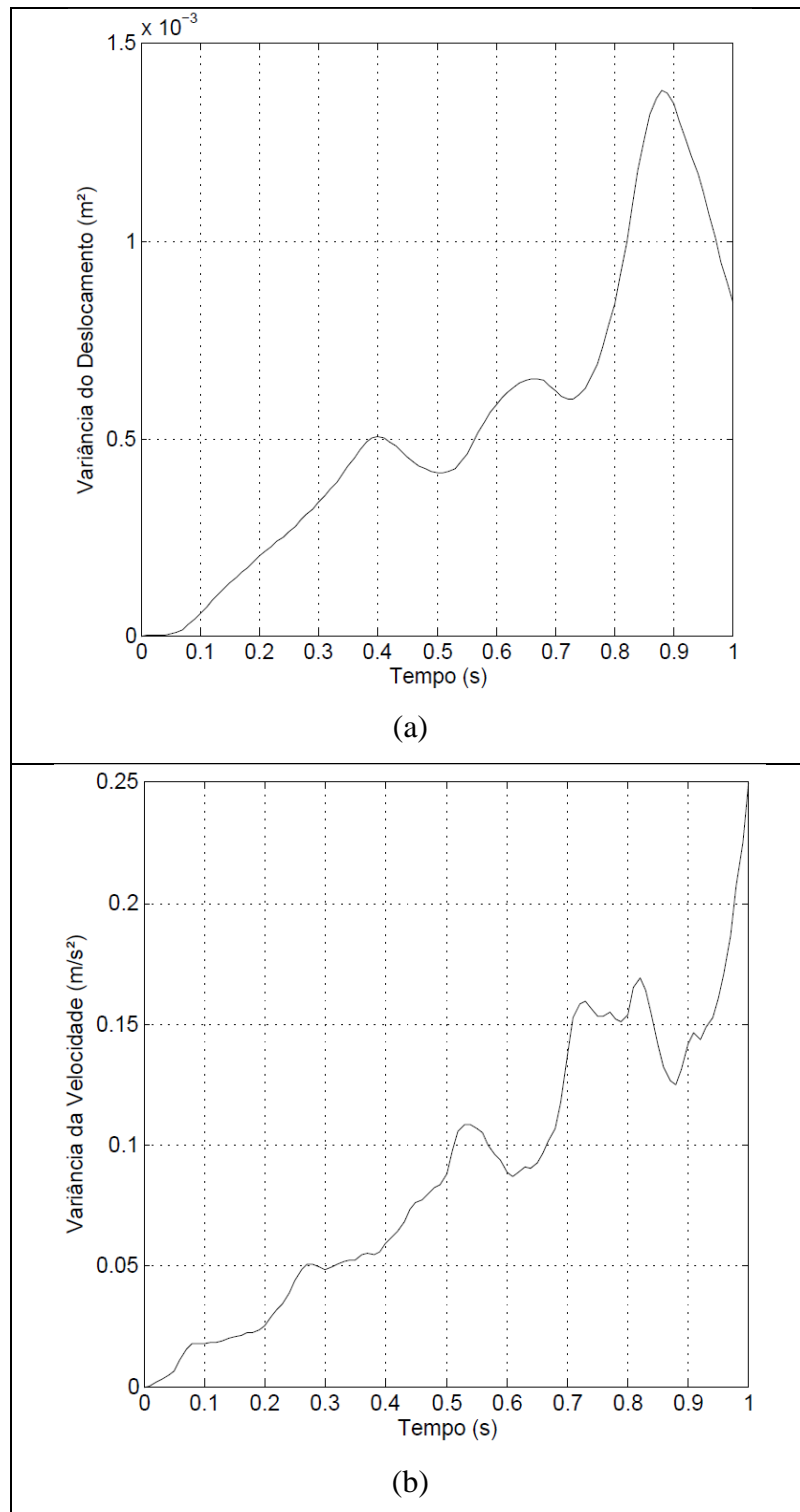
Figura 26 – a) Deslocamento do nó 4; b) velocidade do nó 4



Fonte: O Autor

A Figura 26 apresenta resultados que indicam a aproximação obtida através do MMCD, indicando os valores médios do deslocamento e da velocidade no tempo para o nó analisado.

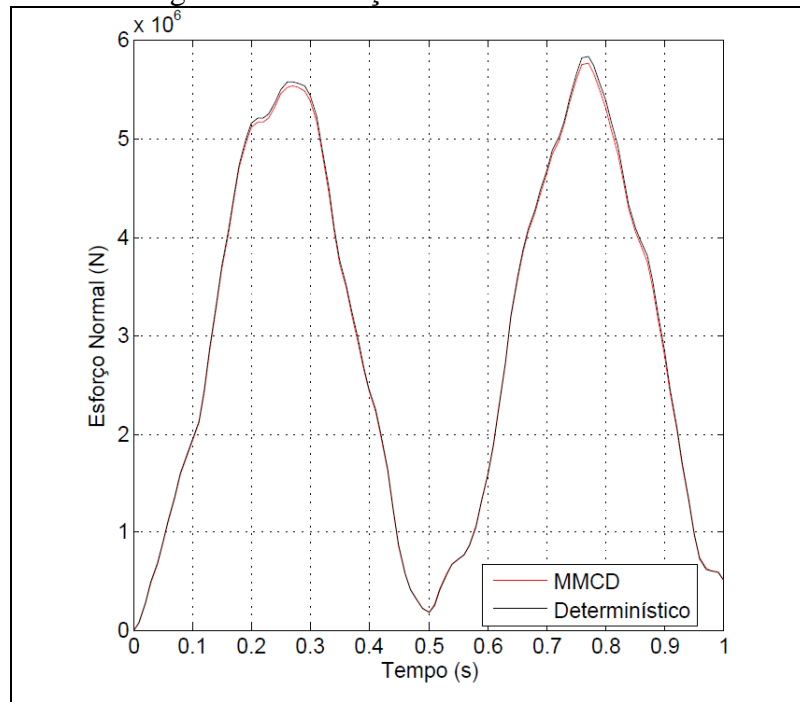
Figura 27 – a) Variação do deslocamento do nó 4; b) variação da velocidade do nó 4



Fonte: O Autor

A Figura 27 apresenta resultados que indicam a aproximação obtida através do MMCD, tendo em vista que a variância máxima para o deslocamento ficou em torno de  $1,5 \times 10^{-3} m^2$  e para a velocidade em torno de  $0,25 (m/s)^2$ .

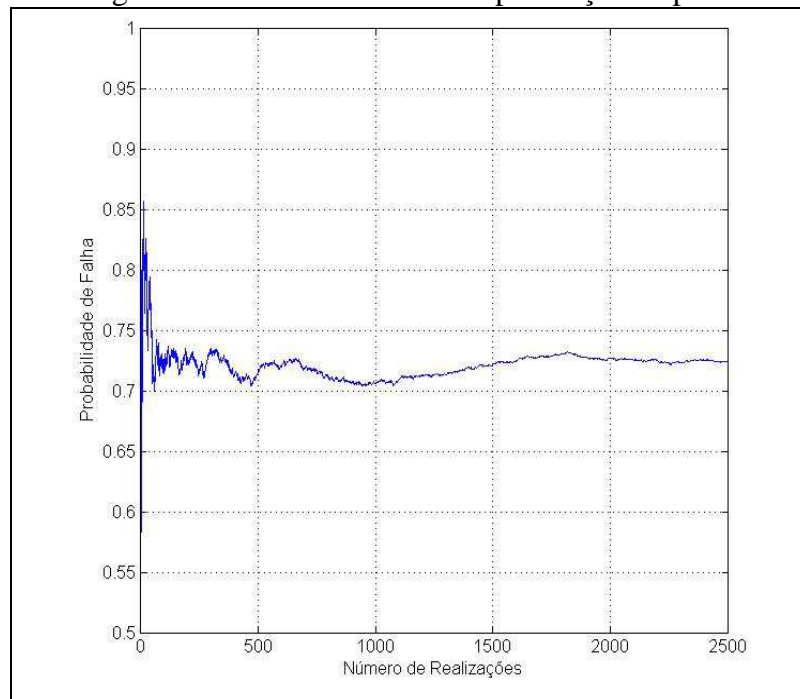
Figura 28 – Esforços normal na barra 335



Fonte: O Autor

A Figura 28 apresenta resultados que ilustram a aproximação obtida por meio do MMCD indicando os valores médios do esforço normal na barra 335.

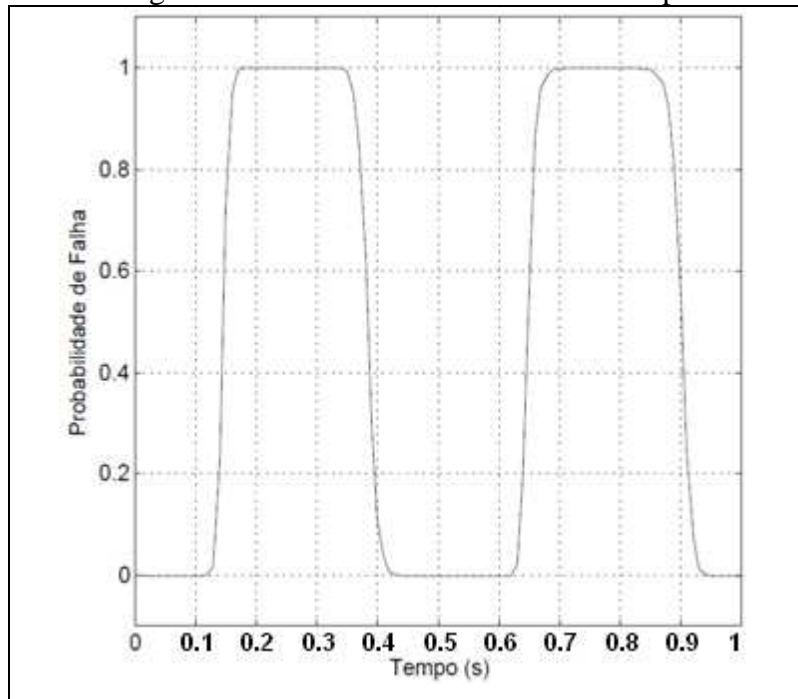
Figura 29 – Convergência do método MMCD na prescrição da probabilidade de falha



Fonte: O Autor

O resultado apresentado na Figura 29 indica que, pelo critério da tensão de escoamento sobre a qual atua também a incerteza, a barra irá falhar com uma probabilidade de aproximadamente 73%. Outro resultado interessante, como é mostrado na Figura 30, são os intervalos de tempo aonde a barra irá a falhar.

Figura 30 – Probabilidade de falha no tempo



Fonte: O Autor

Como pode se notar na curva da Figura 30, há probabilidade de falha não nula entre o primeiro e o quarto décimo de segundo e depois do sexto ao nono décimo de segundo. A curva apresentada deve estar de acordo com os valores no tempo onde a curva de esforço normal atinge os valores máximos absolutos.

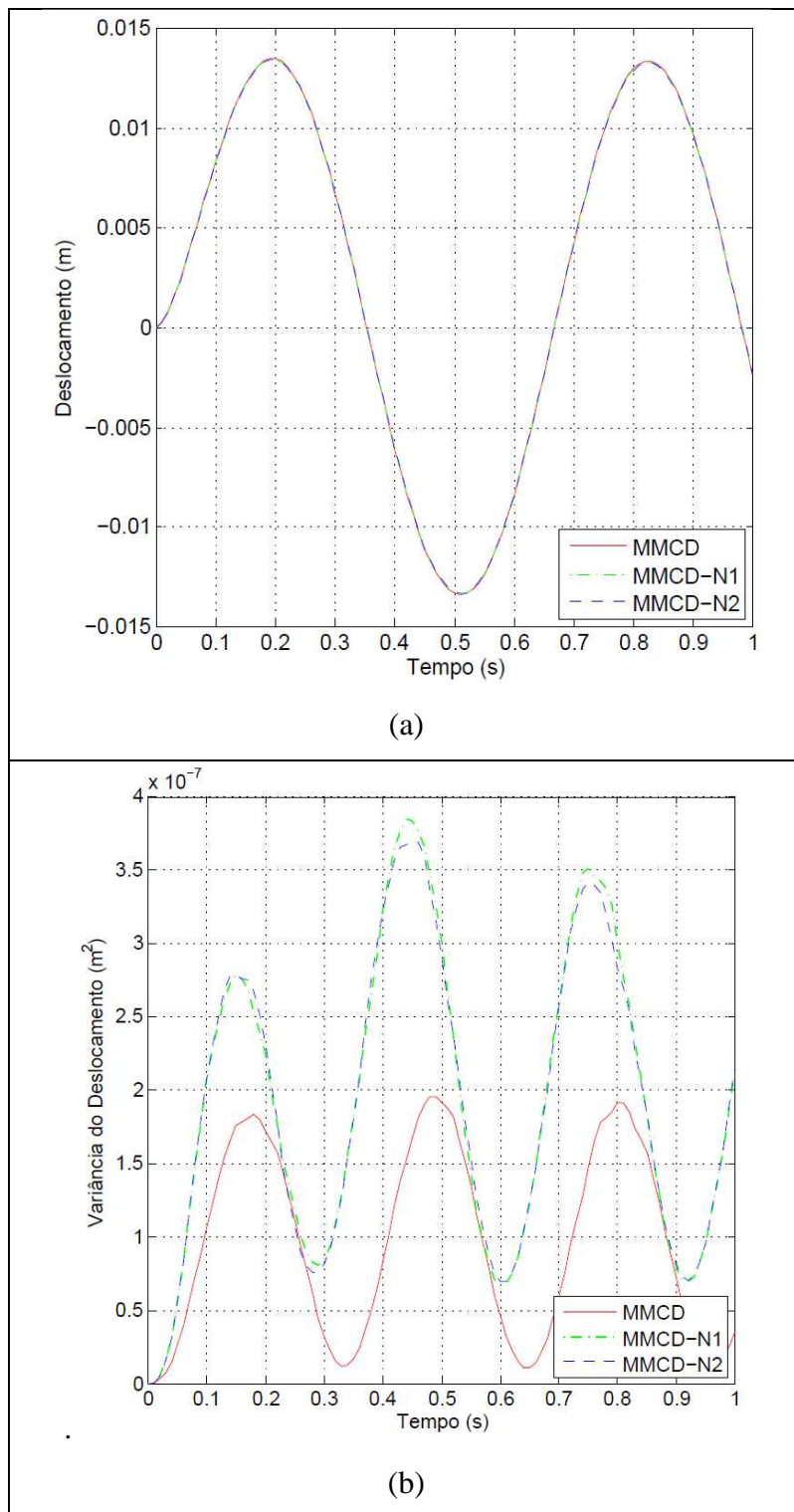
Um procedimento para diminuir o tempo de processamento decorrente do Método de Monte Carlo Direto, quando se tem uma variável aleatória que influencia a matriz de rigidez efetiva, consiste na utilização da série de Neumann para evitar a inversão da matriz de rigidez efetiva. Nos exemplos abordados, o módulo de elasticidade com aleatoriedade na posição torna o processo de inversão da matriz de rigidez efetiva com alto custo computacional. Na próxima seção é utilizado o MMCD com a série de Neumann com ordem linear e ordem quadrática na abordagem dos exemplos supracitados fazendo as comparações dos resultados quanto à precisão e ao tempo de processamento.

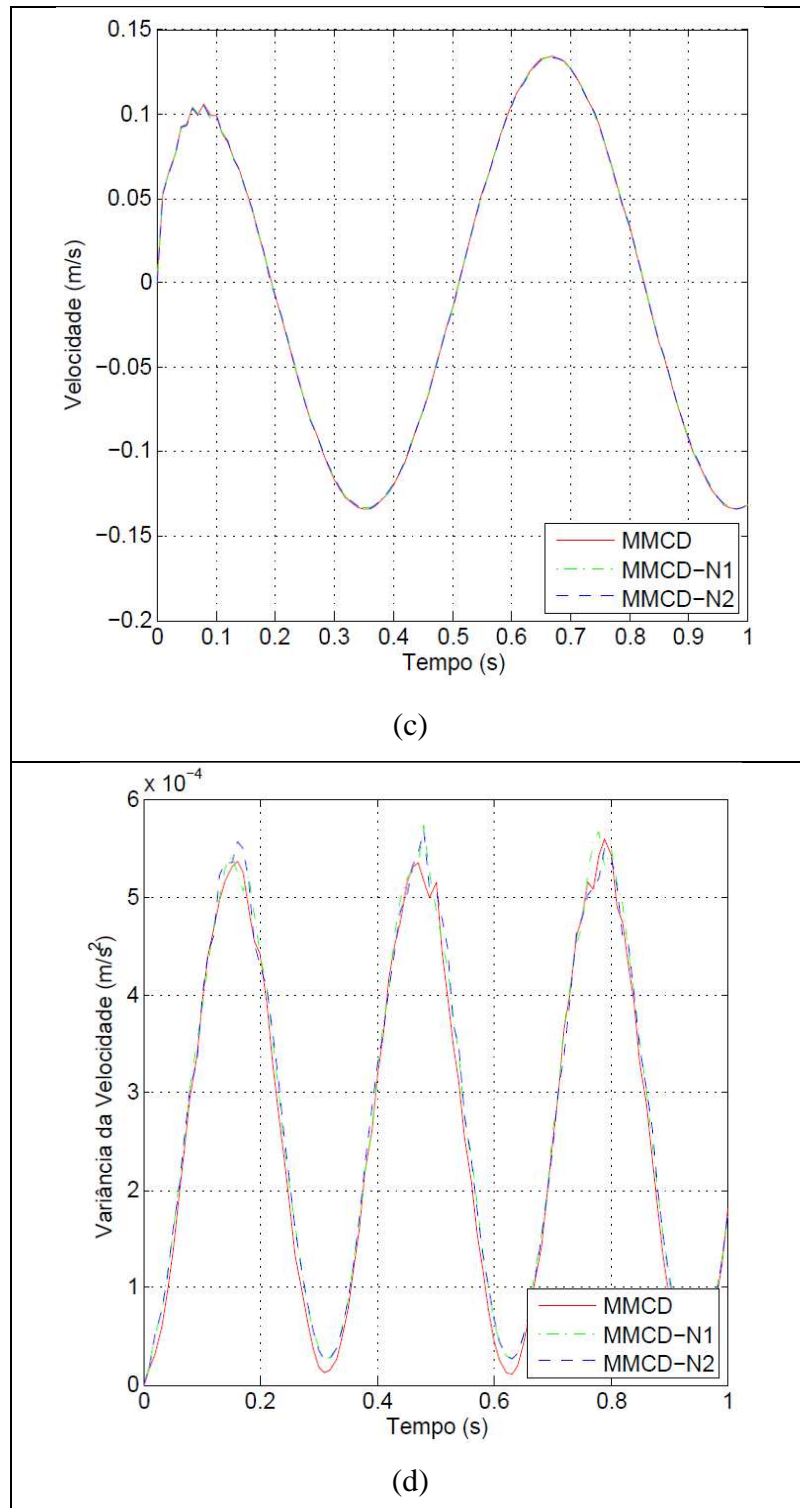
#### 4.4 MONTE CARLO UTILIZANDO A SÉRIE DE NEUMANN

Nesta seção, os pórticos utilizados no exemplo anterior, serão analisados por meio de rotinas desenvolvidas no MATLAB utilizando a série de Neumann na abordagem de problemas dinâmicos em estruturas reticuladas sujeitas a carregamentos aleatórios. A série de Neumann tem como finalidade reduzir o tempo de processamento do problema dinâmico aproximando a inversão da matriz de rigidez efetiva quando a mesma também é aleatória em função do módulo de elasticidade. Nestes exemplos é utilizado o MMCD juntamente com a utilização da série de Neumann com ordem linear e ordem quadrática na abordagem dos problemas dinâmicos da seção 4.3. A apresentação de resultados segue a seguinte sequência:

- a) **Para o exemplo 1:** Comparação entre os valores médios do deslocamento e da velocidade do nó 16 e de suas variâncias utilizando o MMCD e o MMCD juntamente com a série de Neumann com expansão linear (MMCD-N1) e expansão quadrática (MMCD-N2) conforme Figuras 31(a – d);
- b) **Para o exemplo 2:** Comparação entre os valores médios do deslocamento e da velocidade do nó 4 e de suas variâncias utilizando o MMCD e o MMCD juntamente com a série de Neumann com expansão linear (MMCD-N1) conforme Figuras 32(a – d);
- c) **Para o exemplo 1:** Comparação da componente do esforço normal na barra 1 utilizando MMCD e o MMCD juntamente com série de Neumann com expansão linear (MMCD-N1) e expansão quadrática (MMCD-N2) conforme Figura 33;
- d) **Para o exemplo 2:** Comparação da componente do esforço normal na barra 335 utilizando MMCD e o MMCD juntamente com série de Neumann com expansão linear (MMCD-N1) conforme Figura 34;
- e) **Para o exemplo 1:** Comparação dos tempos de processamento decorrentes do MMCD e do MMCD utilizando a série de Neumann com expansão linear (MMCD-N1) e com expansão quadrática (MMCD-N2) cujos resultados são apresentados na Tabela 8.
- f) **Para o exemplo 2:** Comparação dos tempos de processamento decorrentes do MMCD e do MMCD utilizando a série de Neumann com expansão linear (MMCD-N1) cujos resultados são apresentados na Tabela 9.

Figura 31 – a) Deslocamento do nó 16; b) variação do deslocamento do nó 16; c) velocidade do nó 16; e) variação da velocidade do nó 16



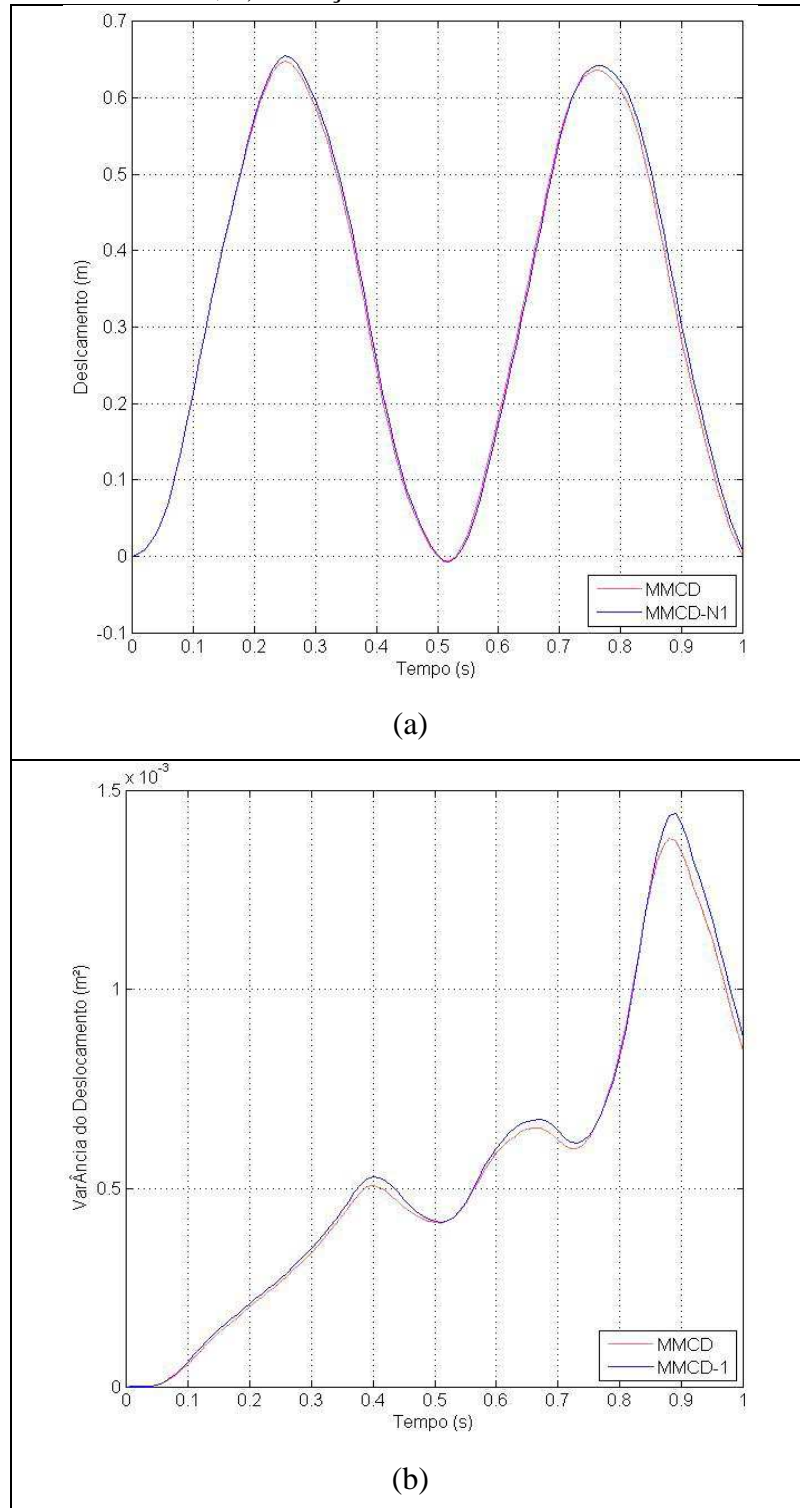


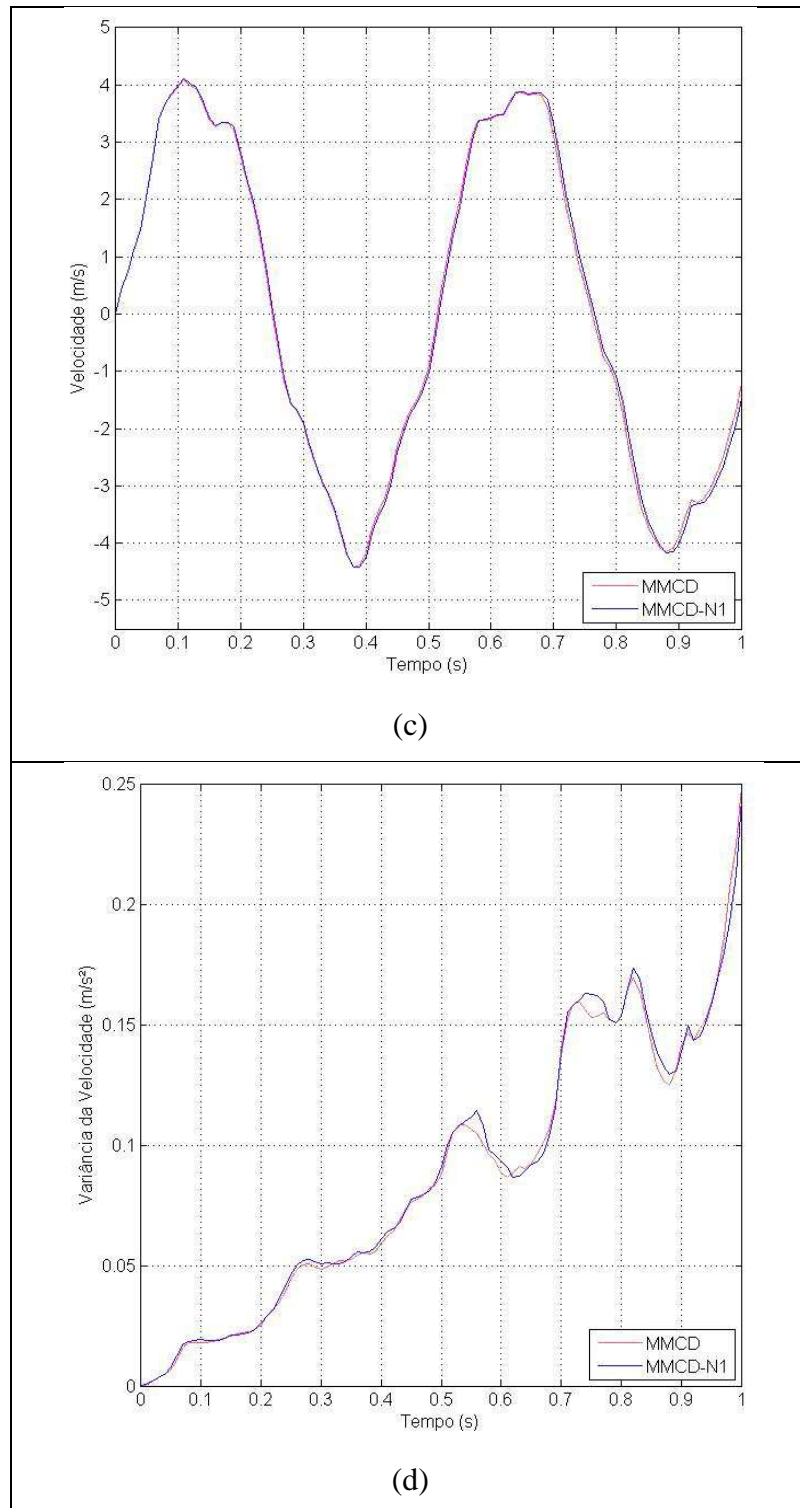
Fonte: O Autor

A Figura 31 apresenta os resultados da comparação entre os valores médios do deslocamento e da velocidade do nó 16, para o modelo do exemplo 1, e de suas variâncias utilizando o MMCD e o MMCD juntamente com a série de Neumann com expansão linear (MMCD-N1) e expansão quadrática (MMCD-N2). Os gráficos indicam valores de variância

maiores, respectivamente, para MMCD-N1, MMCD-N2 e MMCD, ou seja, quanto maior o grau da expansão da série de Neumann menor é a variância.

Figura 32 – a) Deslocamento do nó 4; b) variação do deslocamento do nó 4; c) velocidade do nó 4; d) variação da velocidade do nó 4

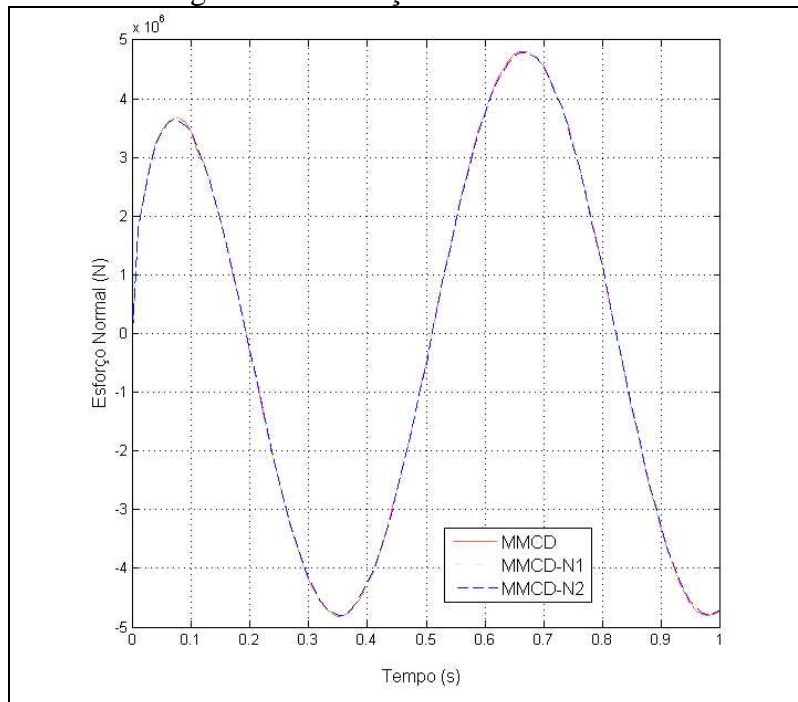




Fonte: O Autor

A Figura 32 apresenta os resultados da comparação entre os valores médios do deslocamento e da velocidade do nó 4, para o modelo do exemplo 2, e de suas variâncias utilizando o MMCD e o MMCD juntamente com a série de Neumann com expansão linear (MMCD-N1). Os gráficos indicam valores de variância maiores para MMCD-N1 em relação ao MMCD.

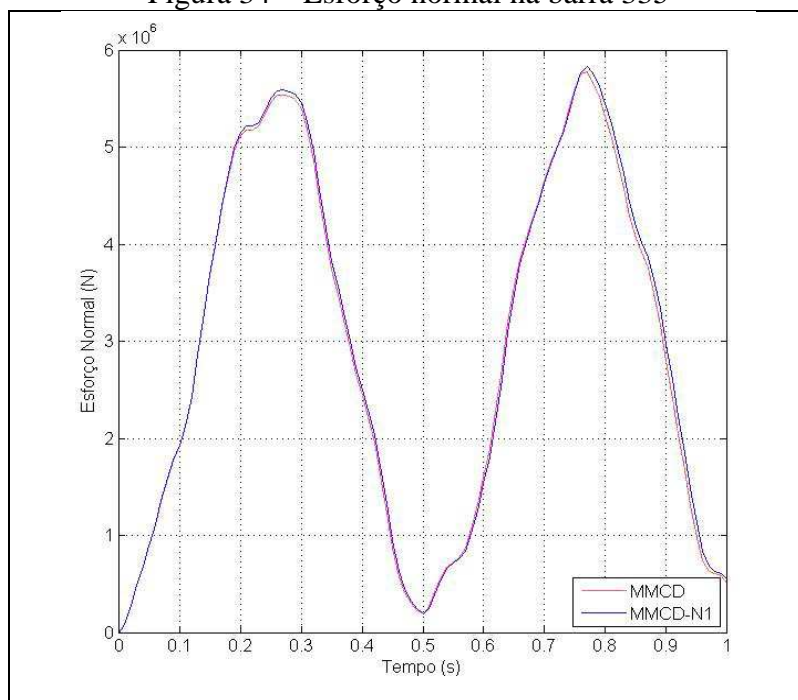
Figura 33 – Esforço normal na barra 1



Fonte: O Autor

A Figura 33 apresenta a comparação da componente do esforço normal na barra 1, para o exemplo 1, utilizando o MMCD e o MMCD juntamente com série de Neumann com expansão linear (MMCD-N1) e expansão quadrática (MMCD-N2). O gráfico indica valores de esforço normal maiores, respectivamente, para MMCD-N1, MMCD-N2 e MMCD.

Figura 34 – Esforço normal na barra 335



Fonte: O Autor

A Figura 34 apresenta a comparação da componente do esforço normal na barra 335, para o exemplo 2, utilizando MMCD e o MMCD juntamente com série de Neumann com expansão linear (MMCD-N1). O gráfico indica valores de esforço normal maiores para MMCD-N1 em relação ao MMCD.

Tabela 8– Tempo de processamento em horas para o exemplo 1

	MMCD	MMCD-N1	MMCD-N2
Tempo (h)	12,51	11,41	12,11

Fonte: O Autor

Tabela 9– Tempo de processamento em horas para o exemplo 2

	MMCD	MMCD-N1
Tempo (h)	14,31	12,05

Fonte: O Autor

De acordo com os resultados obtidos, a utilização da série de Neumann com expansão linear na abordagem de problemas dinâmicos em estruturas reticuladas sujeitas a carregamentos aleatórios apresenta uma variância maior quando comparada ao MMCD (figuras 31 a 34), em contra partida, ocorre uma diminuição no tempo de processamento (tabelas 8 e 9). Quanto ao tempo de processamento, cabe salientar que todos os exemplos foram calculados em um mesmo computador com processador Intel Core i5 de 2.6 GHz e memória RAM de 4 GB.

Os valores obtidos por meio da utilização da série de Neumann com expansão quadrática indicam uma redução na variância (figuras 31 e 33), porém, um aumento no tempo de processamento quando comparados com os valores da série de Neumann com expansão linear (tabela 8).

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram desenvolvidas rotinas no MATLAB, de pré processamento e de pós processamento, para análise estática e dinâmica de estruturas reticuladas espaciais utilizando o método de elementos finitos convencional (MEF). Embora a solução de estruturas reticuladas com o uso de elementos finitos já esteja amplamente difundida, algumas técnicas e teorias aqui abordadas são pouco conhecidas. Esse é o caso da análise de pórticos espaciais sujeitos a carregamentos aleatórios, com a opção de análise da confiabilidade estrutural através da determinação da probabilidade de falha no tempo, utilizando o método de Monte Carlo Direto (MMCD). Além disso, outra contribuição do presente trabalho é a utilização da série de Neumann para reduzir o tempo de processamento do problema dinâmico aproximando a inversão da matriz de rigidez efetiva.

Foram apresentados alguns exemplos de estruturas calculadas utilizando as formulações descritas neste trabalho e, de seus resultados, pode-se concluir o seguinte:

- a) Os resultados obtidos do programa desenvolvido no MATLAB para o cálculo estático (PortAL3D) estão compatíveis com os resultados obtidos do *software* comercial STRAP. Para o deslocamento nodal, a diferença entre os resultados ficou abaixo de 1,0% e, para o esforço normal, as diferenças encontradas foram inferiores a 0,1%.
- b) Para as frequências naturais, os resultados observados mostram uma diferença abaixo de 1% para os dois primeiros modos de vibração, sendo que o modo de vibração obtido no PortAL3D é ligeiramente mais rígido daquele obtido pelo STRAP para a mesma ordem de frequência. Para analisar com maior precisão os modos de vibração superiores a estes, deve-se aumentar a discretização das barras do modelo.
- c) No modelo dinâmico determinístico, os resultados observados estão compatíveis com os resultados do modelo estático. O valor médio obtido para o esforço normal do modelo dinâmico é ligeiramente inferior quando comparado ao valor obtido do modelo estático com diferença abaixo de 0,5%. Contudo, deve-se levar em conta que os efeitos das forças de inércia podem ser potencializados caso se tenham repetições sucessivas do pulso.

- d) O modelo dinâmico e as incertezas nos carregamentos e nas propriedades dos materiais representam um modelo mais próximo ao modelo real, porém a complexidade e o tempo de processamento são maiores.
- e) Para a aplicação do método de Monte Carlo Direto no cálculo da confiabilidade estrutural do pórtico tridimensional amortecido, os resultados indicam a aproximação obtida por meio dos valores encontrados para a variância do deslocamento e da velocidade (em torno de  $1,9 \times 10^{-7} \text{ m}^2$  e de  $5,5 \times 10^{-4} \text{ (m/s)}^2$  respectivamente).
- f) Para o pórtico tridimensional não amortecido, a aplicação do método de Monte Carlo Direto no cálculo da confiabilidade estrutural apresentou resultados com uma aproximação menor quando comparado com o modelo amortecido. A variância para o deslocamento ficou em torno de  $1,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  e para a velocidade em torno de  $0,25 \text{ (m/s)}^2$ .
- g) O MMCD apresenta resultados que indicam, pelo critério da tensão de escoamento sobre a qual atua também a incerteza, a probabilidade em percentual que a barra irá falhar. Outro resultado interessante são os intervalos de tempo aonde a barra irá falhar. A interpretação correta destes resultados indica que a consideração do carregamento como uma variável aleatória poderá acarretar em redução de custo na estrutura.
- h) A utilização da série de Neumann com expansão linear apresenta uma variância maior quando comparada ao MMCD, em contra partida, ocorre uma diminuição no tempo de processamento.
- i) A utilização da série de Neumann com expansão quadrática indica uma redução na variância e um aumento no tempo de processamento quando comparada a série de Neumann com expansão linear.
- j) Os valores de redução no tempo de processamento, quando da utilização da série de Neumann, não são expressivos, pois a parcela relativa ao tempo necessário para realizar a inversão da matriz de rigidez é pequena em relação ao tempo total. Em modelos com matriz de rigidez muito grande esta redução pode ser mais significativa.

Na próxima seção, serão apresentadas algumas sugestões sobre trabalhos futuros relacionados a assuntos que não puderam ser abordados neste trabalho.

## 5.1 SUGESTÃO DE TRABALHOS FUTUROS

Sugerem-se a seguir, futuras contribuições a este trabalho que podem ser fundamentais para a consolidação de uma proposta de solução para problemas de engenharia estrutural que são comumente encontrados nos escritórios de análise de cálculo estrutural:

- a) Implementação da não linearidade geométrica para dimensionamento de prédios metálicos;
- b) Utilização de modelos com carregamentos obtidos de acordo com as Normas Técnicas;
- c) Otimização dos programas desenvolvidos utilizando a programação DELPHI;
- d) Abordagem de análise modal no domínio da frequência e a utilização de amortecimento hysterético;
- e) Estudo da otimização para o coeficiente de segurança de estruturas que possuem grande custo estrutural como, por exemplo, grandes prédios metálicos;
- f) Avaliação dos índices de confiabilidade de referência para revisão dos coeficientes de segurança das Normas Técnicas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATHE, K.. **Finite element procedures**. New Jersey. Prentice Hall. 1996;
- CLOUGH, R. W.. **The Finite Element Method in Plane Stress Analysis**. Proc. 2nd ASCE Conf. On Electronic Computation. Pittsburg. Pa. 1960;
- CLOUGH, R. W.; WILSON E. L. **Early Finite Element Research at Berkely**. Present at the Fifth U.S. National Conference on Computational Mechanics. 1990.
- CORNELL, C.A. **A probability-based structural code**. ACI Journal. 1969;
- FERREIRA, D.F.. **Estatística multivariada** . 1ª ed.. Lavras. UFLA. 2008.
- GRIGORIU, M.; VENEZIANO, D.; CORNELL, C.A.. **Probabilistic modeling as decision making**. Journal of the Engineering Mechanics Division. ASCE. v.105. n.EM4. 1979;
- HASOFER, A.M.; LIND, N.C.. **Exact and invariant second moment code format**. Journal of the Engineering Mechanics Division. ASCE. v.100. n.EM1. 1974;
- HUGHES, T.J.R.. **The Finite Element Method: Linear static and dynamic finite element analysis**. Prentice-Hall. New York. 1987;
- LEI, Z.; QUI, C.. **Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration for structures with stochastic parameters to random excitation**. Computers and Structure. 77. 2000.
- MACKERLE, J. **Finite element linear and nonlinear, static and dynamic analysis of structural elements an addendum**. Engineering Computations. v.17. n. 3. 2000;
- MADSEN, H.O.. **Omission sensitivity factors**. Structural Safety. v.5. 1988;
- MELCHERS, R.E.. **Reliability of parallel structural systems**. Journal of Structural Engineering. ASCE. v.109. n.11, 1983;
- NERING E.D.. **Linear Algebra and Matrix Theory**. John Wiley and Sons. New York. 1970;
- NOGUEIRA, C. G.. **Um modelo de confiabilidade e otimização aplicada às estruturas de barras de concreto armado**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. São Carlos. 2005;
- NOWAK, A.S.; COLLINS, K.R.. **Reliability of structures**. Michigan. MacGraw Hill. 2000;
- PETTYT, M.. **Introduction to finite element vibration analysis**. Cambridge. Cambridge University Press. 2nd ed.. 2010;
- RACKWITZ, R.; FIESSLE, R.B.. **Structural reliability under combined random load sequence**. Computers and Structures. 1978;

RUBINSTEIN, R. Y.. **Simulation and the Monte Carlo method.** New York. John Wiley & Sons. 1981;

VERZENHASSI, C.C.. **Otimização de risco estrutural baseada em confiabilidade.** Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. São Carlos. 2008;

WENHUI, MO. **Stochastic Finite Element for Structural Vibration.** Hindawi Publishing Corporation. Mathematical Problems in Engineering. 2010.