

UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL
ÁREA DO CONHECIMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E ENGENHARIAS

MURILO SIMIONATO

**AVALIAÇÃO ESTRUTURAL DE UM CARDAN RÍGIDO INDUSTRIAL APLICADO
NA TRANSMISSÃO DE MOVIMENTO ENTRE EIXOS PERPENDICULARES**

CAXIAS DO SUL

2022

MURILO SIMIONATO

**AVALIAÇÃO ESTRUTURAL DE UM CARDAN RÍGIDO INDUSTRIAL APLICADO
NA TRANSMISSÃO DE MOVIMENTO ENTRE EIXOS PERPENDICULARES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade de Caxias do Sul, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica. Área de concentração: Projetos de elementos de máquina.

Orientador: Prof. Me. Vagner Grison

CAXIAS DO SUL

2022

MURILO SIMIONATO

**AVALIAÇÃO ESTRUTURAL DE UM CARDAN RÍGIDO INDUSTRIAL APLICADO
NA TRANSMISSÃO DE MOVIMENTO ENTRE EIXOS PERPENDICULARES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade de Caxias do Sul, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica. Área de concentração: Projetos de elementos de máquina.

Orientador: Prof. Me. Vagner Grison

Aprovado em 22/06/2022

Banca Examinadora

Prof. Me. Vagner Grison
Universidade de Caxias do Sul

Prof. Me. Adelair Lino Colombo
Universidade de Caxias do Sul

Prof. Dr. Vagner do Nascimento
Universidade de Caxias do Sul

RESUMO

Neste trabalho, é descrita a metodologia utilizada na análise de tensões em componentes de um cardan rígido industrial, conectando eixos desalinhados por um ângulo de 90° conforme condições de contorno de uma aplicação particular. O objetivo da análise foi evidenciar a influência do ângulo de desalinhamento das juntas universais na transmissão do torque e da velocidade angular e analisar o conjunto através de critérios de fadiga. Três condições de desalinhamento foram comparadas para a mesma aplicação, sendo elas 15°, 30° e 45°. O erro de gimbal é uma característica das juntas de que quando desalinhadas, transmitem o movimento rotativo de maneira não uniforme em seu eixo de saída, mesmo que o movimento de entrada seja uniforme. Um eixo cardan montado obedecendo certas condições de instalação, irá transmitir o movimento de maneira uniforme em seu eixo de saída. Porém, mesmo neste caso, o corpo central do cardan, localizando entre as duas juntas universais, ainda estará submetido a uma variação senoidal de torque e de velocidade angular, apresentando picos que se repetem duas vezes a cada revolução completa do sistema. O comportamento senoidal do torque verificado no corpo central na condição de 45° apresentou amplitude de 378 N.m e valor máximo de 1512 N.m. Já para 15°, a amplitude ficou em 37 N.m e o valor máximo foi de 1107 N.m. A variação cíclica de carregamentos no corpo central contribui para a redução da vida do conjunto, sendo que para 45° uma vida finita de 22 horas pode ser estimada para o cardan, já para as demais condições de desalinhamento o fator de segurança em fadiga foi calculado.

Palavras-chave: junta universal; eixo cardan; fadiga;

ABSTRACT

In this work, the methodology used in the stress analysis on components of an industrial rigid cardan shaft is described, connecting shafts misaligned by an angle of 90° according to boundary conditions of a particular application. The objective of the analysis is to evidence the influence of the misalignment angle of the universal joints in the transmission of torque and angular velocity and to analyze the set through fatigue criteria. Three misalignment conditions were compared for the same application, being 15° , 30° and 45° . The gimbal error is a characteristic of the universal joints that when angled, they transmit rotary motion unevenly on their output shaft, even though the input motion is uniform. A cardan shaft mounted under certain installation conditions will transmit motion uniformly on its output shaft. However, even in this case, the central body of the cardan, located between the two universal joints, will still be subjected to a sinusoidal variation of torque and angular velocity, presenting peaks that are repeated twice at each complete revolution of the system. The sinusoidal behavior of the torque verified in the central body in the condition of 45° presented amplitude of 378 N.m and maximum value of 1512 N.m. For 15° , the amplitude was 37 N.m and the maximum value was 1107 N.m. The cyclical variation of loads in the components of the central body contributes to the reduction of the life of the set, for 45° a finite life of 22 hours was estimated for the cardan, while for the other misalignmet conditions the fatigue safety fator was calculated.

Key words: universal joint; cardan shaft; fatigue;

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Componentes que constituem: a) uma junta universal; b) um eixo cardan com compensação axial.	16
Figura 2 - a) forma de montagem dos garfos internos; b) disposições para montagem do eixo cardan.	18
Figura 3 - a) junta universal analisada; b) diagrama simplificado da junta.	19
Figura 4 - Projecção dos movimentos dos garfos no plano “aOa”: a) vista frontal; b) vista isométrica.	20
Figura 5 - Diferença angular ($\Delta\varphi$) e velocidade angular (ω_2) para ângulos de articulação de $\beta = 15^\circ, 30^\circ$ e 45° em função de θ	21
Figura 6 - Eixo cardan com duas juntas universais.	23
Figura 7 - Diagramas de corpo livre de uma junta universal considerando: a) $\theta = 0^\circ = 180^\circ$; b) $\theta = 90^\circ = 270^\circ$	24
Figura 8 - Diagrama $S-N$ traçado com base em ensaios de fadiga para um aço.	29
Figura 9 - Diagrama $S-N$ estimado.	30
Figura 10 - Diagrama σ_m versus σ_a para critérios de falha em fadiga.	31
Figura 11 - Torque aplicado versus posição angular e diferentes velocidades angulares do eixo de entrada.	34
Figura 12 - Esboço da aplicação do cardan analisado.	37
Figura 13 - Modelo de cardan proposto.	39
Figura 14 - Condições de contorno utilizadas nas análises de elementos finitos.	42
Figura 15 - Diagrama $S-N$ estimado para o aço SAE 1040 forjado.	44
Figura 16 - Velocidade angular (ω_2) e aceleração angular (α_2) do corpo central do cardan para $\beta = 15^\circ, 30^\circ$ e 45° em função de θ	46
Figura 17 - Torque (M_2) no corpo central do cardan para $\beta = 15^\circ, 30^\circ$ e 45° em função de θ . .	47
Figura 18 - Rotação crítica em função do comprimento entre cruzetas para duas situações. ..	48
Figura 19 - Gradiente de tensões principais P1 no corpo central para: a) torque máximo quando $\beta=45^\circ$; b) torque mínimo quando $\beta=45^\circ$	50
Figura 20 - Número de ciclos estimado para o cardan no diagrama $S-N$ do material.	52

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores utilizados no cálculo do coeficiente de segurança à fadiga.	35
Tabela 2 - Dados do motorreductor considerado na aplicação.	38
Tabela 3 - Propriedades mecânicas do aço SAE 1040 forjado.	39
Tabela 4 - Resultados das medições de dureza Brinell (HB) do garfo.	45
Tabela 5 - Valores do torque no corpo central do cardan com e sem considerar $M\alpha$	49
Tabela 6 - Valores da tensão média e alternante no corpo central para $\beta=15^\circ, 30^\circ$ e 45°	52

LISTA DE ABREVIATURAS

Hz	hertz
Kg	quilograma
Kg.m ²	quilogramas por metro ao quadrado
kW	kilowatt
m	metro
mm	milímetro
max	máximo
min	mínimo
MPa	megapascal
N	newton
N.m	newton metro
rad	radiano
rad/s	radianos por segundo
rad/s ²	radianos por segundo ao quadrado
rpm	rotações por minuto
HB	dureza Brinell

LISTA DE SÍMBOLOS

β_1	Ângulo de desalinhamento/articulação da junta universal no eixo de entrada do cardan (graus)
β_2	Ângulo de desalinhamento/articulação da junta universal no eixo de saída do cardan (graus)
θ	Deslocamento angular realizado pelo eixo de entrada do cardan ou junta universal (graus ou rad)
ϕ	Deslocamento angular realizado pelo eixo de saída da junta universal (graus ou rad)
$\Delta\phi$	Diferença entre os deslocamentos angulares do eixo de saída e de entrada da junta universal (graus ou rad)
ω_1	Velocidade angular no eixo de entrada do cardan ou junta universal (rad/s)
ω_2	Velocidade angular no eixo de saída da junta universal (rad/s)
α_2	Aceleração angular no eixo de saída da junta universal (rad/s ²)
γ	Deslocamento angular realizado pelo eixo de saída do cardan (graus ou rad)
M_1	Torque de entrada aplicado no cardan ou junta universal (N.m)
M_2	Torque produzido no eixo de saída da junta universal em função de M_1 (N.m)
P_1	Força de reação produzida no garfo de entrada e cruzeta em função de M_1 (N)
P_2	Força de reação produzida no garfo de saída e cruzeta em função de M_1 (N)
Z	Força de reação adicional produzida para equilibrar P_1 ou P_2 (N)
R	Força de reação resultante entre P_1 ou P_2 e Z (N)
h	Distância entre os apoios da cruzeta no garfo (m)
$M_{z I}$	Torque secundário produzido no garfo motor da junta universal em função de M_1 (N.m)
$M_{z II}$	Torque secundário produzido no garfo movido da junta universal em função de M_1 (N.m)
L	Comprimento do corpo central medido entre centros das cruzetas (m)
n_{kr}	Velocidade de rotação crítica para o primeiro modo de vibração do cardan (rpm)
$n_{max permitida}$	Velocidade de rotação máxima permitida para o cardan (rpm)
J	Momento de inércia de massa do corpo analisado (kg.m ²)
$M_{2 res}$	Torque resultante produzido no corpo central do cardan (N.m)

M_α	Torque de inércia produzido no corpo central do cardan (N.m)
S_f	Tensão de resistência à fadiga do material em função de N (MPa)
N	Número de ciclos de tensão aplicado ao material (ciclos)
S_{ut}	Tensão limite de ruptura à tração do material (MPa)
S'_e	Tensão limite de fadiga para vida infinita do corpo de prova do material (MPa)
$S_f 10^3$	Tensão limite de fadiga de alto ciclo (10^3 ciclos) para o material (MPa)
S_e	Tensão limite de fadiga corrigida para vida infinita do material (MPa)
σ_m	Tensão média do carregamento cíclico (MPa)
σ_a	Tensão alternante do carregamento cíclico (MPa)
σ'	Tensão equivalente de von Mises (MPa)
S_y	Tensão limite de escoamento à tração do material (MPa)
F_{sy}	Coefficiente de segurança à fadiga
E	Módulo de elasticidade do material (GPa)
$\sigma' f$	Coefficiente de resistência à fadiga do material (MPa)
b	Expoente de resistência à fadiga do material
Pot	Potência transmitida pelo cardan (W)
σ_{max}	Tensão máxima média na região crítica obtida via análise FEA (MPa)
σ_{min}	Tensão mínima média na região crítica obtida via análise FEA (MPa)
$\sigma_{m,o}$	Tensão média nominal do carregamento cíclico sem considerar o concentrador de tensão (MPa)
$\sigma_{a,o}$	Tensão alternante nominal do carregamento cíclico sem considerar o concentrador de tensão (MPa)
k_f	Concentrador de tensão intrínseco as tensões obtidas na análise de elementos finitos
k_{fm}	Concentrador de tensão calculado via método de Dowling

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	12
1.1	TEMA.....	13
1.2	JUSTIFICATIVA.....	14
1.3	OBJETIVOS DO TRABALHO.....	14
1.3.1	Objetivo geral.....	14
1.3.2	Objetivos específicos.....	15
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	16
2.1	EIXO CARDAN.....	16
2.2	ANÁLISE CINEMÁTICA.....	18
2.3	ANÁLISE ESTRUTURAL.....	23
2.3.1	Forças atuantes em uma junta universal.....	23
2.3.2	Rotação crítica em função do comprimento do cardan.....	25
2.3.3	Rotação permitida em função do ângulo β.....	27
2.4	ANÁLISE DE FADIGA.....	28
2.4.1	Limite de resistência à fadiga.....	28
2.4.2	Diagrama <i>S-N</i> estimado.....	30
2.4.3	Caracterização das tensões flutuantes.....	30
2.4.4	Tensões multiaxiais em fadiga.....	31
2.4.5	Critérios de falha por fadiga.....	31
2.5	ANÁLISE DE ELEMENTOS FINITOS.....	32
2.6	TRABALHOS CORRELATOS.....	33
3	MATERIAIS E MÉTODOS.....	37
3.1	CONDIÇÕES DE CONTORNO DA APLICAÇÃO.....	37
3.2	MODELO DE CARDAN PROPOSTO.....	38
3.3	ANÁLISE CINEMÁTICA E ESTRUTURAL DO CARDAN PROPOSTO.....	40
3.4	VERIFICAÇÃO DA ROTAÇÃO CRÍTICA EM FUNÇÃO DO COMPRIMENTO DO CARDAN PROPOSTO.....	40
3.5	VERIFICAÇÃO DOS TORQUES DE INÉRCIA EM FUNÇÃO DA VARIAÇÃO DA ACELERAÇÃO ANGULAR NO CORPO CENTRAL DO CARDAN.....	41
3.6	ANÁLISE DE ELEMENTOS FINITOS DO CARDAN PROPOSTO.....	41

3.7	ANÁLISE DE FADIGA DO CARDAN PROPOSTO.....	42
4	RESULTADOS	45
4.1	MEDIÇÃO DE DUREZA NO GARFO	45
4.2	VARIAÇÃO DA VELOCIDADE E ACELERAÇÃO ANGULAR NO CORPO CENTRAL.....	45
4.3	VARIAÇÃO DO TORQUE NO CORPO CENTRAL.....	47
4.4	ROTAÇÃO CRÍTICA DO CARDAN	48
4.5	INFLUÊNCIA DOS TORQUES DE INÉRCIA NO CORPO CENTRAL.....	49
4.6	RESULTADOS DA ANÁLISE LINEAR ESTÁTICA DE ELEMENTOS FINITOS	50
4.7	VIDA ESTIMADA PARA O CARDAN	51
5	CONCLUSÃO.....	53
6	TRABALHOS FUTUROS	55
	REFERÊNCIAS	56
	ANEXO A – GRÁFICO RELACIONANDO O ÂNGULO DE DESALINHAMENTO DAS JUNTAS β COM A ROTAÇÃO n DO CARDAN PARA DIVERSOS MODELOS GWB	58

1 INTRODUÇÃO

Durante o projeto de máquinas rotativas, frequentemente o projetista irá se deparar com a necessidade de transmitir a potência produzida por um motor de uma posição para outra. Muitas vezes isso pode ser feito através de eixos de transmissão, porém, em certos projetos, devido a características construtivas do equipamento, surge a necessidade do uso de acoplamentos. Norton (2013) divide os acoplamentos em duas categorias: rígidos ou complacentes. No caso de existir algum desalinhamento entre os dois pontos a serem interligados, os acoplamentos complacentes devem ser utilizados, sendo que estes podem ainda ser divididos em outras duas subcategorias: flexíveis e articulados.

Conforme Norton (2013), os acoplamentos flexíveis permitem desalinhamentos angulares casuais de até 3° , oriundos do desgaste de mancais ou variações de temperatura por exemplo, estes modelos possuem também, a capacidade de absorver choques. Já os acoplamentos articulados, ligam árvores de transmissão que formam um ângulo permanente entre si, com valores partindo de 1° até acima de 20° . Existem diversos tipos de acoplamentos disponíveis no mercado, oferecendo ao projetista a possibilidade de escolher o modelo mais apropriado conforme o projeto que está sendo desenvolvido. Conforme Sclater (2011), as juntas de Hooke, muitas vezes denominadas de juntas universais, são um tipo de acoplamento complacente articulado, caracterizadas por absorver desalinhamentos angulares de até 45° entre os eixos a serem conectados. Estas características fazem com que esse tipo de mecanismo seja muito utilizado em automóveis com tração traseira, tendo a função de transmitir a potência do motor a combustão para o eixo traseiro do veículo. Neste tipo de aplicação mencionada, os desalinhamentos entre o eixo do motor e a suspensão traseira são uma consequência do projeto do veículo e também do movimento relativo entre o chassi e o sistema de tração gerado pela suspensão do automóvel.

Ainda segundo Norton (2013), as juntas universais geralmente são aplicadas em pares dentro de uma árvore de transmissão. Isso ocorre principalmente pois, uma junta universal única, quando angulada, transmite o movimento rotativo de maneira não uniforme em seu eixo de saída, mesmo que o movimento de entrada seja uniforme. Conforme Elbe Group (2020), esse erro de velocidade, denominado erro de gimbal, faz com que no eixo de saída, o torque e a velocidade angular sejam transmitidos de maneira flutuante, apresentando picos que se repetem duas vezes a cada revolução completa do sistema. O erro de velocidade cresce quanto maior for o ângulo aplicado na junta universal. Conforme Voith Group (2020), se duas juntas

forem conectadas em um conjunto único, sendo que certas condições de instalação devem ser obedecidas, o erro de gimbal será anulado totalmente, e o movimento transmitido será uniforme.

O mecanismo constituído por duas juntas universais conectadas passa a ser chamado de eixo cardan. A junção pode ser feita através de um tubo de aço, dando origem a um eixo cardan rígido ou então através do uso de uma ponteira estriada junto a uma luva, possibilitando que o cardan absorva variações axiais de comprimento durante a sua utilização. Além de ser muito usado no setor rodoviário, os eixos cardan também são largamente aplicados no setor industrial e no setor agrícola, podendo transmitir torques em valores que podem ir de 250 N.m (linha industrial leve) até acima de 1.000.000 N.m (linha industrial pesada), mesmo sendo submetidos a desalinhamentos.

Neste trabalho, será realizada uma análise nas tensões atuantes em componentes de um cardan rígido industrial, conectando eixos desalinhados por um ângulo de 90°. Este cardan será desenvolvido pela empresa Cardan Sistemas de Transmissão e Freios Ltda conforme as condições de contorno de uma aplicação em particular. A rotação máxima de entrada no cardan será de 133,97 rpm e o torque a ser transmitido será de 1069 N.m, produzido por um motorreductor. Os eixos cardan estão continuamente submetidos a tensões oscilantes durante a sua aplicação, e estes esforços podem ainda ser amplificados pelo erro de gimbal e pelo desalinhamento proposto. Sendo assim serão verificados os coeficientes de segurança em fadiga para determinados componentes do conjunto. Por fim, com os resultados obtidos, será evidenciando como o ângulo de desalinhamento das juntas influencia na capacidade do equipamento de transmitir torque e velocidade angular.

1.1 TEMA

Neste trabalho serão realizados cálculos de tensão para pontos específicos do cardan estudado, buscando saber como os componentes do mecanismo estão se comportando frente ao carregamento e as condições de funcionamento estipuladas. Conhecimentos das áreas de mecânica dos sólidos, resistência dos materiais, integridade estrutural, cinemática e dinâmica serão utilizados, bem como a área de modelagem computacional para as análises de elementos finitos.

1.2 JUSTIFICATIVA

O dimensionamento atual dos cardans realizado pela engenharia da empresa, é feito utilizando os componentes que melhor se encaixam na classe estipulada para o produto. Essa classe é definida tendo-se como base dados da aplicação ao qual o mecanismo será submetido, sendo alguns deles: ângulo de desalinhamento das juntas universais, distância entre flanges de acoplamentos, rotação e torque a serem transmitidos, espaço disponível. Porém, em alguns casos, o cardan definido para determinada aplicação, encontra-se em um limite entre as classes de dimensionamento disponíveis, sendo assim um estudo mais focado deve ser conduzido. Utilizar uma classe imediatamente superior acarretaria em um produto mais robusto, porém mais caro, podendo inviabilizar a venda do mesmo. São realizadas então análises computacionais estáticas de elementos finitos para se definir quais seriam os pontos críticos e se estes estão ou não adequados.

Sendo o cardan, um mecanismo de alto valor agregado, podendo causar significativos danos materiais e econômicos em caso de quebra ou parada não programada, é pertinente que seja feita uma avaliação estrutural do conjunto levando em conta a fadiga. Conforme Budynas e Nisbett (2011), frequentemente se descobre que membros de máquinas falharam devido a fadiga, mesmo que as tensões atuantes estivessem bem abaixo dos limites de ruptura e até mesmo de escoamento do material. Levando-se em conta ainda as características de funcionamento da junta universal, de transmissão não uniforme de movimento, torna-se ainda mais evidente a necessidade do estudo proposto. Conforme Elbe Group (2020), para um desalinhamento de 45° da junta universal, o torque atuante no eixo central do cardan, aumenta em 41% em relação ao torque de entrada, atingindo este pico duas vezes a cada revolução completa do conjunto. Além disso, a realização deste tipo de análise agrega valor e confiabilidade ao trabalho da engenharia da empresa e aos produtos.

1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

1.3.1 Objetivo geral

Fazer a avaliação estrutural de um cardan rígido industrial aplicado na transmissão de torque e velocidade angular entre dois eixos perpendiculares.

1.3.2 Objetivos específicos

O objetivo geral descrito pode ser dividido nos seguintes objetivos específicos:

- a) analisar o comportamento cinemático dos componentes de um modelo de cardan desenvolvido conforme os dados recebidos de uma aplicação específica do cliente;
- b) estabelecer um modelo matemático que represente as cargas e as condições de contorno as quais o produto será submetido;
- c) analisar as tensões resultantes através do método de elementos finitos;
- d) realizar análise estrutural e de fadiga de componentes específicos do cardan evidenciando a influência do ângulo de desalinhamento das juntas na transmissão do torque e da velocidade angular.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

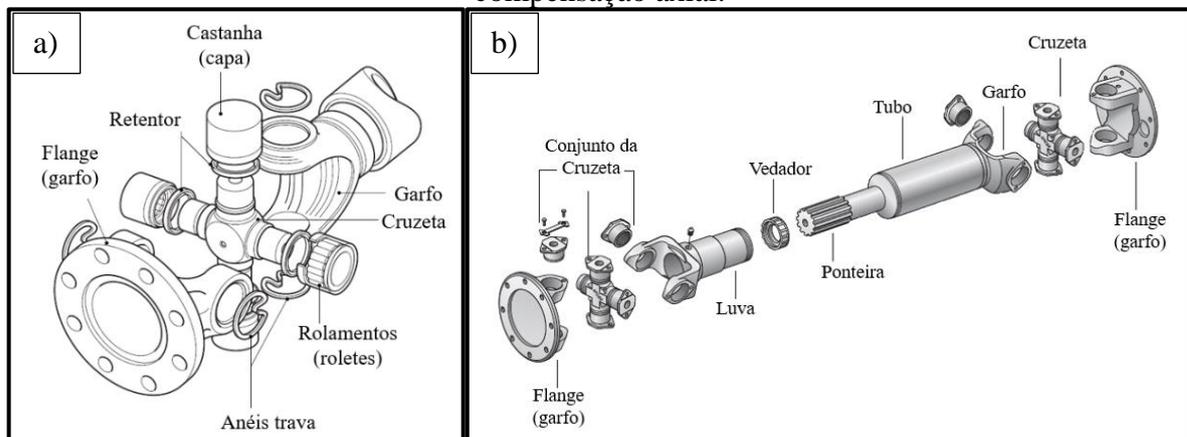
Serão descritos na sequência, os principais conceitos utilizados na produção deste trabalho, partindo de uma caracterização das partes que formam o mecanismo estudado até uma breve explicação dos tipos de análises propostas. Todas as informações apresentadas possuem embasamento na literatura clássica e em trabalhos correlatos.

2.1 EIXO CARDAN

Conforme Palma *et. al* (2017), um eixo cardan é constituído de duas juntas universais conectadas uma à outra por um corpo central, geralmente tubular. Duas versões de eixos cardan podem ser produzidas: o cardan rígido e o cardan telescópico, sendo que este último possibilita a compensação axial do seu comprimento durante a operação. Essa compensação é feita pela aplicação de uma ponteira e uma luva com estrias, como as de uma engrenagem, no corpo central.

Ainda segundo Palma *et. al* (2017), cada junta universal é composta principalmente por dois garfos (um para o eixo de entrada e um para o eixo de saída), uma cruzeta e quatro rolamentos. Na maioria das vezes os garfos externos do conjunto serão acompanhados de um flange com furos, utilizado no acoplamento do cardan junto a máquina motora ou movida. A Figura 1 mostra os componentes que constituem uma junta universal e um eixo cardan com compensação axial, respectivamente.

Figura 1 - Componentes que constituem: a) uma junta universal; b) um eixo cardan com compensação axial.



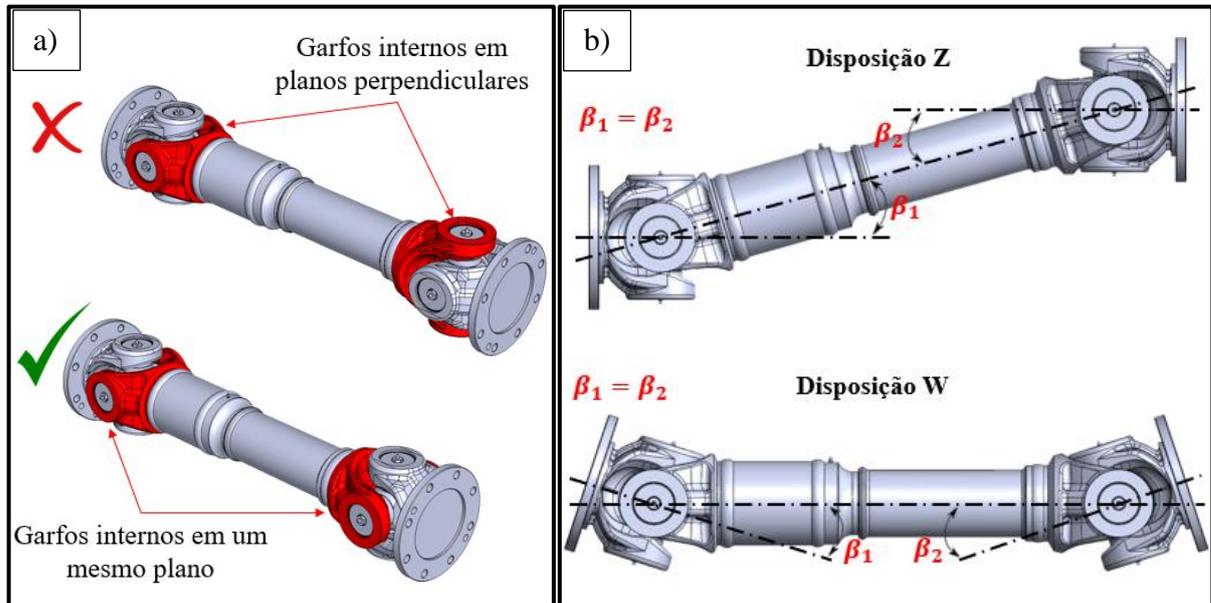
Fonte: Spicer (1998).

Segundo Vesali, Rezvani e Kashfi (2012), a cruzeta é uma das principais partes do eixo cardan, sendo esta formada por quatro braços perpendiculares entre si. Duas pontas da cruzeta conectam o garfo de entrada e as duas outras pontas conectam o garfo de saída da junta universal. Na extremidade de cada ponta da cruzeta encontram-se os rolamentos de agulha, formados por diversos roletes cilíndricos sobrepostos por uma capa (ou castanha). Anéis-trava garantem que as capas permaneçam montadas durante o giro do conjunto. A lubrificação periódica das cruzetas com graxas específicas indicadas pelo fabricante é essencial para o bom funcionamento do cardan. Vesali, Rezvani e Kashfi (2012) apontam ainda que um importante aspecto dos rolamentos de agulha é de que eles nunca completarão um giro completo durante a operação do cardan, cada rolamento rotaciona apenas alguns graus em torno de seu eixo. Sendo assim, a carga aplicada no rolamento é sustentada por apenas um grupo de rolos, e não por todos eles.

Conforme Elbe Group (2020), quando duas juntas universais são unidas, sendo que a segunda junta é posicionada 90° em relação à primeira, a não uniformidade na transmissão de movimento da primeira junta será balanceada pelo movimento não uniforme da segunda junta, sendo assim, o torque e o movimento rotativo transmitido na saída do eixo cardan será uniforme. O posicionamento de 90° entre as juntas pode ser garantido quando os dois garfos internos das juntas forem colocados em um mesmo plano. Outra condição que deve ser atendida, é de que os ângulos de desalinhamento β_1 e β_2 das duas juntas sejam iguais. Na prática esta última condição é bastante difícil de ser atendida, sendo assim, Maina (2009) limita que a diferença entre os ângulos seja de no máximo 1° à $1,5^\circ$ para aplicações em rotações acima de 300 rpm, já para aplicações abaixo de 300 rpm, diferenças de 2° à 3° são admitidas. Conforme Voith Group (2020) existem duas disposições de montagem do cardan que garantem que $\beta_1 = \beta_2$, a disposição “Z” ou “W”. A Figura 2 mostra a correta forma de montagem dos garfos internos bem como as formas de montagem disponíveis na aplicação de um eixo cardan, respectivamente.

Mesmo que o movimento no eixo de saída do cardan seja uniforme, se as juntas estiverem desalinhadas por um ângulo β , o corpo central ainda estará submetido às variações senoidais de torque e de velocidade angular geradas pela primeira junta. Vale ressaltar ainda que se a montagem do cardan for feita, deixando os garfos internos das juntas em planos perpendiculares, os picos gerados pela primeira junta se somarão aos da segunda junta, causando vibração e produzindo danos catastróficos ao cardan e a toda a árvore de transmissão.

Figura 2 - a) forma de montagem dos garfos internos; b) disposições para montagem do eixo cardan.



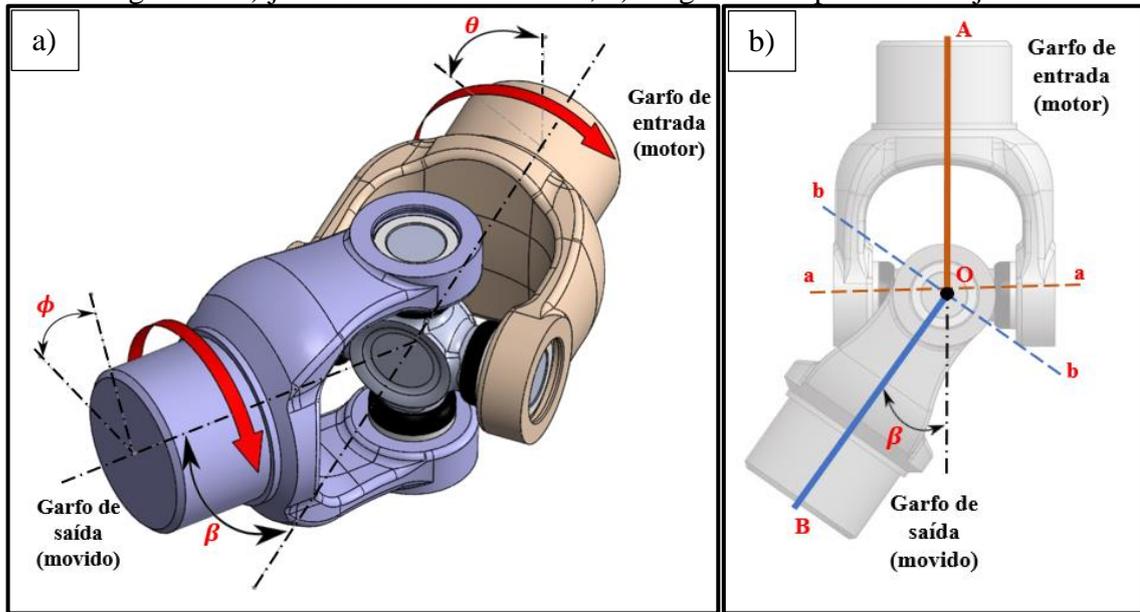
Fonte: adaptado de Dana GWB (2013).

2.2 ANÁLISE CINEMÁTICA

Conforme Norton (2010), a cinemática é o estudo dos movimentos, sem considerar as forças que o causaram. Um dos principais objetivos da cinemática é projetar os movimentos desejados de elementos mecânicos e então calcular os deslocamentos, velocidades e acelerações que esses movimentos irão gerar nos respectivos componentes.

O estudo da cinemática de uma junta universal, ajuda a entender a origem do erro de gimbal e porque a velocidade transmitida no eixo de saída da junta não é constante e varia de forma senoidal. Em sua dissertação, Souza (2014) faz uma comparação entre as trajetórias percorridas pelos garfos do eixo motor e do eixo movido de uma junta submetida a um desalinhamento angular β , explicando a cinemática envolvida. A Figura 3, mostra a junta universal analisada, bem como a simplificação do modelo em um diagrama, respectivamente. θ e ϕ representam o deslocamento angular realizado pelo eixo de entrada e pelo eixo de saída da junta. No diagrama, a linha AO representa o eixo de entrada, cujo garfo rotaciona descrevendo uma circunferência no plano aOa, e a linha OB representa o eixo de saída, cujo garfo rotaciona descrevendo uma circunferência no plano bOb.

Figura 3 - a) junta universal analisada; b) diagrama simplificado da junta.

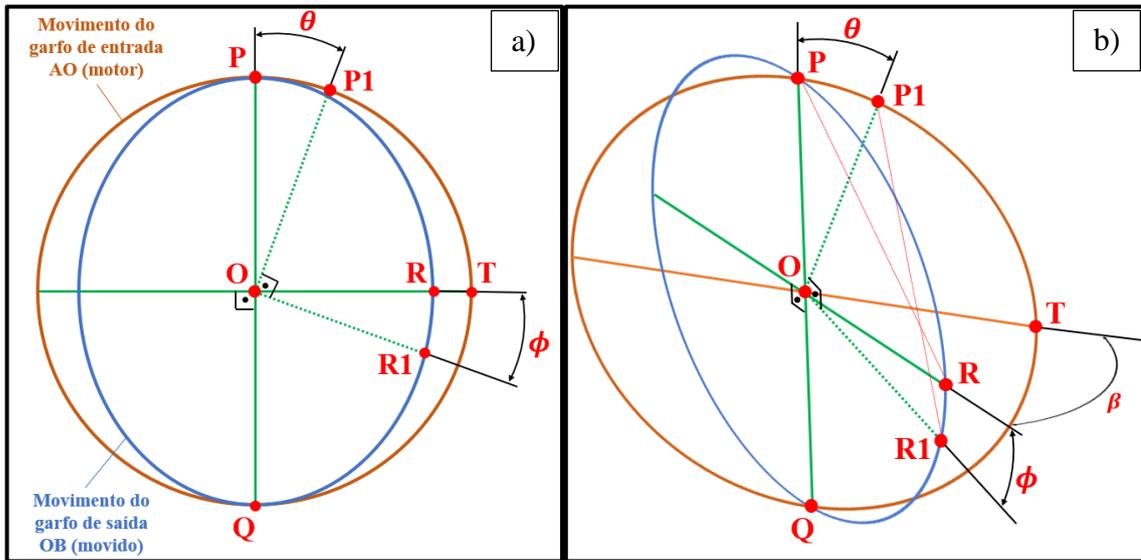


Fonte: adaptado de Souza (2014).

Conforme Souza (2014), quando o giro do garfo motor AO é observado no plano aOa, nota-se um círculo sendo formado. Porém, o giro do garfo movido OB observado neste mesmo plano, forma uma elipse. Isso ocorre pois o que está sendo visualizado é a projeção do movimento circular do garfo movido, em cima do plano aOa, e como os planos estão desalinhados por um ângulo β , uma elipse é vista. A Figura 4a mostra a projeção dos movimentos dos garfos no plano aOa, sendo que, o círculo que passa pelos pontos PTQ se refere ao movimento do garfo motor e a elipse que passa pelos pontos PRQ se refere ao movimento do garfo movido.

Se por exemplo, o garfo de entrada for deslocado em um ângulo de θ , em torno de seu eixo axial, o ponto P se deslocará até P1 e o ponto R se deslocará até R1. Embora o ângulo formado entre P e P1 seja de θ , no plano aOa, o ângulo formado entre R e R1 não será θ , pois R e R1 estão contidos no plano bOb e se deslocam descrevendo uma elipse. Segundo Souza (2014), o ângulo ϕ formado entre R e R1, pode ser encontrado graficamente, considerando que a distância PR é igual a distância P1R1, conforme Figura 4b.

Figura 4 - Projeção dos movimentos dos garfos no plano “aOa”: a) vista frontal; b) vista isométrica.

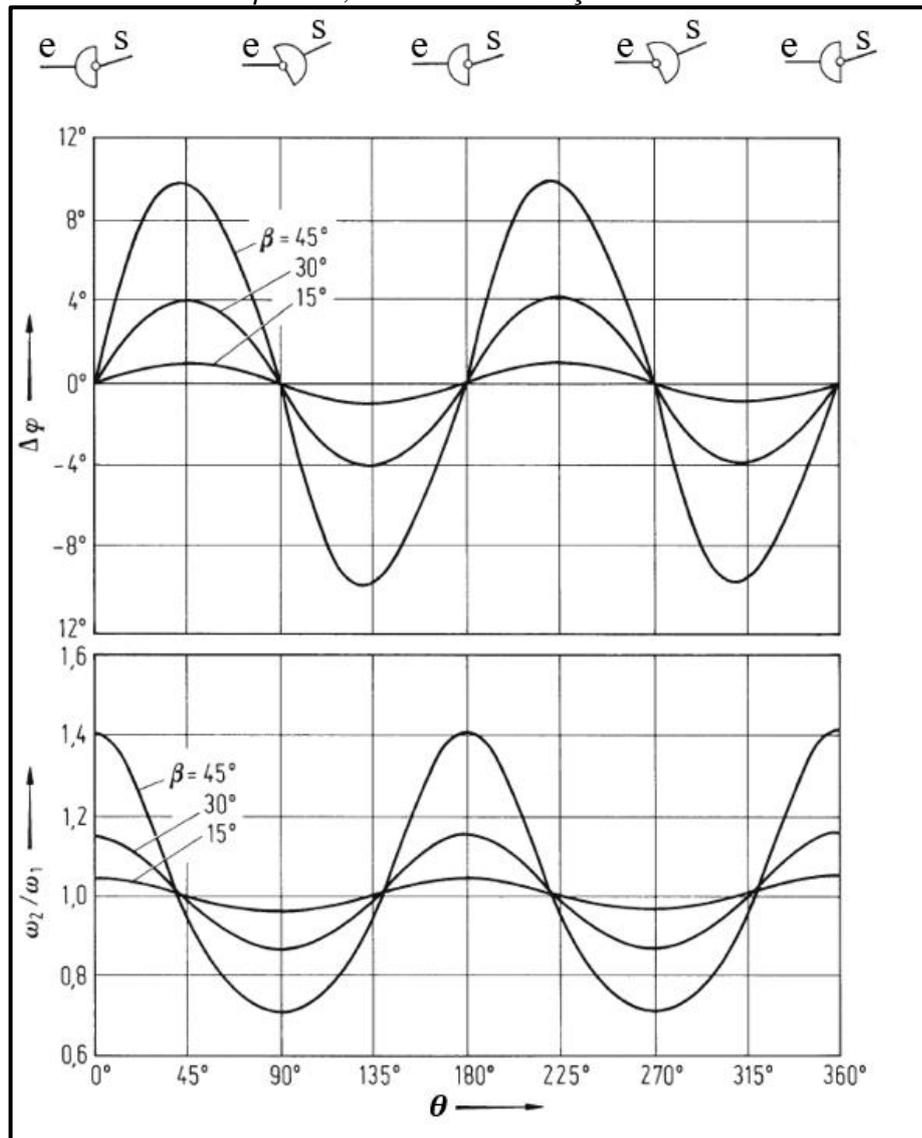


Fonte: adaptado de Souza (2014).

A cruzeta é o corpo que conecta os garfos do eixo de entrada e do eixo de saída da junta universal. Enquanto os braços da cruzeta ligados ao garfo motor irão descrever uma trajetória circular, no plano aOa, os braços da cruzeta ligados ao garfo movido irão realizar o movimento elíptico, porém, para isso, devem alternar sua posição, ficando ora no plano aOa, perpendicular ao eixo de entrada, ora no plano bOb, perpendicular ao eixo de saída. Esse movimento entre planos varia duas vezes a cada ciclo completo do eixo cardan, e é possível devido aos rolamentos de agulha localizados nas extremidades da cruzeta. É esse movimento que causa a aceleração e a desaceleração do garfo de saída, fazendo com que a velocidade transmitida pela junta universal seja não uniforme.

Seherr-Thoss, Schmelz e Aucktor (2010) disponibilizam gráficos que mostram como a diferença de deslocamentos angulares ($\Delta\varphi$), bem como a velocidade angular (ω_2) do eixo de saída, variam em um giro de 360° da junta, apontando também a influência do ângulo β . Esses mesmos gráficos são apresentados na Figura 5, onde $\Delta\varphi = \phi - \theta$. Nota-se que, quando todas as extremidades da cruzeta estão no plano aOa, $\Delta\varphi = 0^\circ$ e verifica-se a maior amplificação de ω_2 em relação a ω_1 , chegando a 41% para $\beta = 45^\circ$. Porém, quando as extremidades da cruzeta ligadas no garfo de saída estão no plano bOb, $\Delta\varphi = 0^\circ$ e verifica-se a maior redução de ω_2 em relação a ω_1 , podendo chegar a 29% para $\beta = 45^\circ$.

Figura 5 - Diferença angular ($\Delta\phi$) e velocidade angular (ω_2) para ângulos de articulação de $\beta = 15^\circ, 30^\circ$ e 45° em função de θ .



Fonte: adaptado de Seherr-Thoss, Schmelz e Aucktor (2010).

Seherr-Thoss, Schmelz e Aucktor (2010) apresentam ainda a Equação 1, onde são relacionados os deslocamentos angulares dos eixos de entrada (θ) e de saída (ϕ) bem como o ângulo de desalinhamento entre eixos (β), conforme Figura 4.

$$\phi = \arctan(\cos \beta \tan \theta) \text{ [graus ou rad]} \quad (1)$$

A derivada de ϕ em relação ao tempo ($d\phi/dt$) resulta na Equação 2, que relaciona as velocidades angulares dos eixos de entrada (ω_1) e de saída (ω_2).

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 \cos \beta}{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \theta} \text{ [rad/s]} \quad (2)$$

As velocidades angulares mínima ($\omega_{2 \min}$) e máxima ($\omega_{2 \max}$) do eixo de saída, mostradas na Figura 5, podem ser encontradas conforme Equações 3 e 4.

$$\text{Para } \theta = 90^\circ, \theta = 270^\circ \rightarrow \omega_2 = \omega_{2 \min} = \omega_1 \cos \beta \quad (3)$$

$$\text{Para } \theta = 0^\circ, \theta = 180^\circ \rightarrow \omega_2 = \omega_{2 \max} = \frac{\omega_1}{\cos \beta} \quad (4)$$

A derivada de ω_2 em relação ao tempo ($d\omega_2/dt$) resulta na Equação 5, que possibilita encontrar a aceleração angular (α_2) do eixo de saída da junta universal.

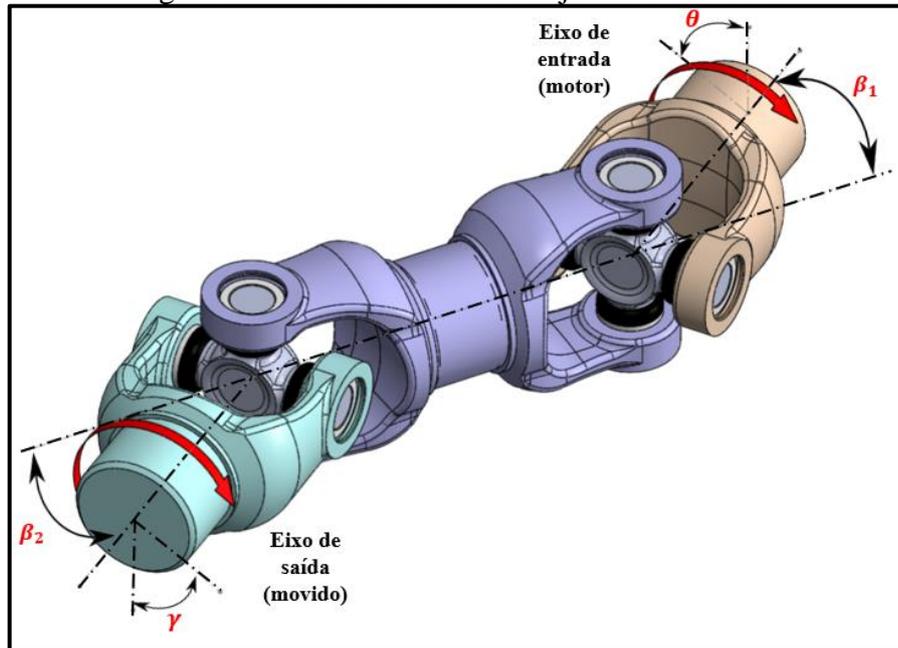
$$\alpha_2 = \frac{\omega_1^2 \cos \beta \sin^2 \beta \sin 2\theta}{(1 - \sin^2 \beta \sin^2 \theta)^2} \text{ [rad/s}^2\text{]} \quad (5)$$

Seherr-Thoss, Schmelz e Aucktor (2010) apresentam também a Equação 6, que relaciona os deslocamentos angulares do eixo de entrada (θ) e do eixo de saída (γ) de um eixo cardan com duas juntas universais aplicadas e com garfos internos em um mesmo plano, conforme Figura 6. Os ângulos β_1 e β_2 são os ângulos de desalinhamentos das duas juntas.

$$\gamma = \arctan\left(\frac{\cos \beta_1 \tan \theta}{\cos \beta_2}\right) \text{ [graus ou rad]} \quad (6)$$

Na Equação 6 é possível se verificar ainda que quando $\beta_1 = \beta_2$, os deslocamentos angulares obtidos, de entrada e de saída do cardan, são iguais ($\gamma = \theta$), gerando uniformidade na transmissão de movimento e confirmando a condição apresentada por Elbe Group (2020) mencionada no item 2.1.

Figura 6 - Eixo cardan com duas juntas universais.



Fonte: adaptado de Seherr-Thoss, Schmelz e Aucktor (2010).

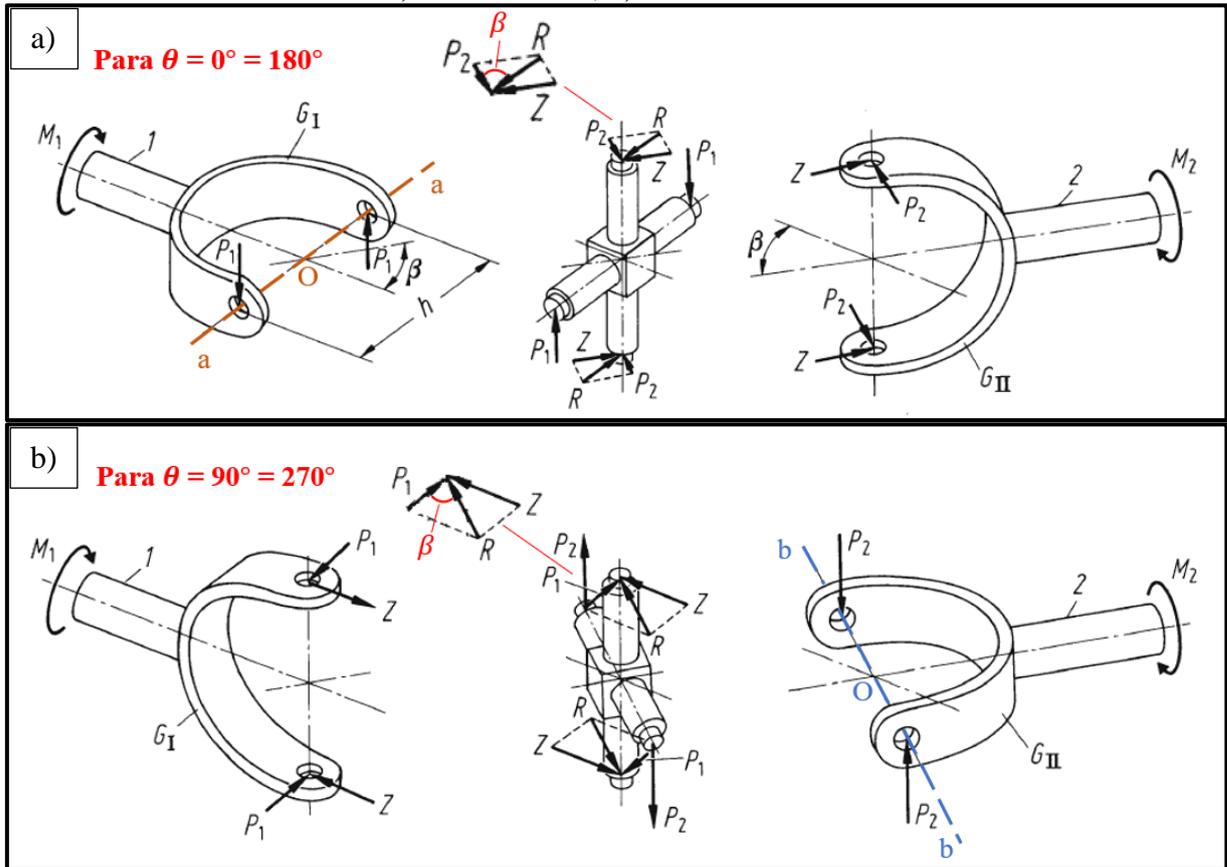
2.3 ANÁLISE ESTRUTURAL

Conforme Seherr-Thoss, Schmelz e Aucktor (2010), a magnitude do torque que é possível ser transmitido entre dois eixos, através de uma junta universal ou de um eixo cardan, é limitada pela capacidade do material utilizado. Entretanto, é possível abordar a resistência do conjunto ao carregamento de duas formas, tendo-se como base o tempo de uso previsto: para pouco tempo de uso o estado de tensões é quase estático, e a junta pode ser projetada de forma que a deformação plástica excessiva não ocorra. Para um longo tempo de uso o estado de tensões é dinâmico, e a junta deve ser projetada através de critérios de fadiga, considerando a quantidade de ciclos de tensão que irá resistir.

2.3.1 Forças atuantes em uma junta universal

Seherr-Thoss, Schmelz e Aucktor (2010) montaram dois diagramas de corpo livre para uma junta universal desalinhada por um ângulo β . Um diagrama similar também é apresentado por Elbe Group (2020). Estes diagramas são mostrados na sequência, onde, na Figura 7a são apontadas as forças atuantes considerando a situação onde todas as extremidades da cruzeta estão no plano aOa ($\omega_{2\max}$). Já na Figura 7b são mostradas as forças atuantes considerando a situação onde os braços da cruzeta ligadas ao garfo de saída estão no plano bOb ($\omega_{2\min}$), conforme mencionado no item 2.2.

Figura 7 - Diagramas de corpo livre de uma junta universal considerando:
a) $\theta = 0^\circ = 180^\circ$; b) $\theta = 90^\circ = 270^\circ$.



Fonte: adaptado de Seherr-Thoss, Schmelz e Aucktor (2010).

A Figura 7a mostra as forças atuantes no garfo de entrada G_I , no garfo de saída G_{II} e na cruzeta. Com a aplicação do torque de entrada M_1 em G_I , um torque de reação M_2 é produzido em G_{II} e as forças P_1 e P_2 agem sobre a cruzeta. A cruzeta só transmite torque no plano em que os braços ligados ao garfo de saída estiverem localizados, neste caso, no plano aOa . P_1 e P_2 não agem do mesmo plano, logo, para manter o equilíbrio de forças na cruzeta, forças adicionais Z surgem agindo em conjunto à força P_2 , dando origem a força resultante R , localizada no plano aOa e equilibrando P_1 . Considerando as relações trigonométricas conforme as Equações (7) e (8) e a distância entre apoios dos braços da cruzeta em ambos os garfos como sendo h , é possível encontrar as Equações (9) e (10) que representam o torque mínimo no eixo de saída ($M_{2\min}$) e o torque secundário máximo no garfo movido ($M_{Z_{II}}$), respectivamente.

$$P_2 = R \cos \beta \text{ [N]} \quad (7)$$

$$Z = R \sin \beta \text{ [N]} \quad (8)$$

Para $R h = M_1$:

$$M_{2\min} = P_2 h = R h \cos \beta = M_1 \cos \beta [N.m] \quad (9)$$

$$M_{ZII} = Z h = R h \sin \beta = M_1 \sin \beta [N.m] \quad (10)$$

Na Figura 7b, os braços da cruzeta ligados ao garfo de saída agora estão localizados no plano bOb. Novamente P_1 e P_2 não agem do mesmo plano, e para manter o equilíbrio de forças na cruzeta, forças adicionais Z surgem agindo dessa vez em conjunto a força P_1 , dando origem a força resultante R , localizada no plano bOb e equilibrando P_2 . As Equações 11 e 12 mostram as relações trigonométricas para este caso e as Equações 13 e 14 representam o torque máximo no eixo de saída ($M_{2\max}$) e o torque secundário máximo agora no garfo motor (M_{ZI}), respectivamente.

$$P_1 = R \cos \beta [N] \quad (11)$$

$$Z = R \sin \beta [N] \quad (12)$$

Para $P_1 h = M_1$ e $R = P_1 / \cos \beta$:

$$M_{2\max} = R h = \frac{P_1}{\cos \beta} h = \frac{M_1}{\cos \beta} [N.m] \quad (13)$$

$$M_{ZI} = Z h = R h \sin \beta = \frac{P_1}{\cos \beta} h \sin \beta = \frac{M_1}{\cos \beta} \sin \beta = M_1 \tan \beta [N.m] \quad (14)$$

Conforme Souza (2014), esse torque secundário gerado, que varia seu valor máximo entre o garfo motor e o garfo movido, reage na estrutura através dos mancais de fixação do cardan, causando vibrações.

2.3.2 Rotação crítica em função do comprimento do cardan

Rao (2008) explica que todo corpo que é perturbado por uma força, irá vibrar. A frequência com que um corpo vibra por si só, após uma perturbação inicial, sem a ação de novas forças externas, é conhecida como frequência natural. Um sistema pode ter mais que uma

frequência natural, sendo que para cada uma destas frequências corresponde um modo de vibrar diferente do corpo. Sempre que a frequência de uma excitação externa aplicada em um mecanismo, por exemplo, coincidir com uma de suas frequências naturais, ocorrerá o fenômeno conhecido como ressonância, onde a amplitude de vibração é acentuada, causando deflexões excessivas, ruídos e falhas na estrutura.

Conforme Voith Group (2020), o corpo central de um eixo cardan, que interliga as duas juntas universais, é periodicamente submetido a tensões de flexão causadas pelo torque secundário M_{ZII} , conforme mencionado no item 2.3.1. Esse torque secundário faz o corpo central vibrar. Para evitar que a frequência da vibração causada por M_{ZII} se aproxime das frequências naturais do eixo cardan, prevenindo a ressonância, os fabricantes indicam que uma análise seja feita onde pode ser obtido o valor da velocidade crítica (n_{kr}) para o primeiro modo de vibração do conjunto. Seherr-Thoss, Schmelz e Aucktor (2010) apresentam as Equações 15 e 16, com as quais é possível obter o valor de n_{kr} em duas situações: quando o corpo central for composto de um eixo circular maciço e quando este for tubular, respectivamente.

$$n_{kr \text{ maciço}} = 1,22 \cdot 10^8 \frac{d}{L^2} \text{ [rpm]} \quad (15)$$

$$n_{kr \text{ tubular}} = 1,22 \cdot 10^8 \frac{\sqrt{D_e^2 + d_i^2}}{L^2} \text{ [rpm]} \quad (16)$$

onde: d é o diâmetro do eixo maciço [mm];

D_e é o diâmetro externo do tubo do corpo central [mm];

d_i é o diâmetro interno do tubo do corpo central [mm];

L é o comprimento do corpo central medido entre centros das cruzetas [mm].

Seherr-Thoss, Schmelz e Aucktor (2010) afirmam ainda, que para cardans com juntas universais, não há necessidade de avaliar as velocidades críticas referentes à modos de vibrar maiores que o primeiro. Os fabricantes indicam em seus catálogos que a velocidade de rotação máxima permitida ($n_{max \text{ permitida}}$) para o cardan deve obedecer a uma margem de segurança abaixo do valor obtido para n_{kr} . A Equação 17 mostra como obter $n_{max \text{ permitida}}$.

$$n_{max \text{ permitida}} = 0,75 n_{kr} \text{ [rpm]} \quad (17)$$

2.3.3 Rotação permitida em função do ângulo β

Conforme mencionado no item 2.2, o corpo central de um eixo cardan constituído de duas juntas universais estará submetido a uma variação cíclica de velocidade durante o giro do sistema, sendo assim estarão presentes também acelerações cíclicas. Conforme Alves Filho (2008), quando elementos de uma estrutura são submetidos a acelerações, surgem as chamadas forças de inércia, que estão associadas às massas destes elementos. Estas forças devem ser contabilizadas no somatório de forças para equilíbrio do diagrama de corpo livre e são o principal fator que diferencia uma análise estática de uma análise dinâmica na engenharia.

Conforme Norton (2010), em sistemas que sofrem rotação, como é o caso dos cardans, a contabilização da força de inércia pode ser realizada considerando o torque de inércia gerado em função da aceleração angular do corpo (α dada em rad/s²) e do momento de inércia de massa (J dado em kg.m²) em torno do eixo que passa pelo seu centro de massa. O momento de inércia J é uma propriedade que mede a distribuição de massa em relação a um eixo, sendo que quanto mais distante a massa está do eixo considerado, mais difícil é girar o corpo em relação a este eixo.

Seherr-Thoss, Schmelz e Aucktor (2010) apresentam a Equação 18 que permite obter o torque resultante ($M_{2\ res}$) no corpo central de um eixo cardan considerando o torque de inércia (M_{α}) e o torque de entrada sendo transmitido (M_2).

$$M_{2\ res} = M_2 + M_{\alpha} = M_2 + J_2\alpha_2 \quad [N.m] \quad (18)$$

Os fabricantes de cardans como Voith Group (2020) mencionam que os torques de inércia produzem vibrações provocando uma operação menos suave de todo conjunto. Para evitar os efeitos adversos destas vibrações são disponibilizados gráficos que relacionam a rotação permitida para cada modelo de cardan e o ângulo de desalinhamento das juntas (β). O gráfico disponibilizado por Dana GWB (2013) é apresentado no Anexo A.

Além disso, os fabricantes também frisam a importância do balanceamento do cardan antes da utilização, seguindo a Norma ISO 1940, para garantir a equalização das massas girando excentricamente e prevenir vibrações adicionais. Dana GWB (2013) menciona que o balanceamento do cardan para rotações abaixo de 500 rpm normalmente não é necessário.

2.4 ANÁLISE DE FADIGA

A maioria das falhas em máquinas acontece devido a cargas que variam no tempo, e não a esforços estáticos (NORTON, 2013). Ainda segundo Norton (2013), as falhas por fadiga têm origem em trincas microscópicas ($< 0,25$ mm) existentes na microestrutura do material. Concentradores de tensão como furos ou entalhes (“cantos vivos”), são as regiões mais críticas onde trincas surgem e começam a se propagar. Nestas regiões encontram-se pontos com tensão local mais elevada em relação ao restante da peça, e, quando carregamentos que variam no tempo são considerados, estes causam deformações plásticas localizadas, mesmo que a tensão nominal aplicada seja menor que o limite de escoamento do material. À medida que os ciclos de tensão ocorrem, microtrincas são desenvolvidas e se propagam, levando a peça ao colapso repentino.

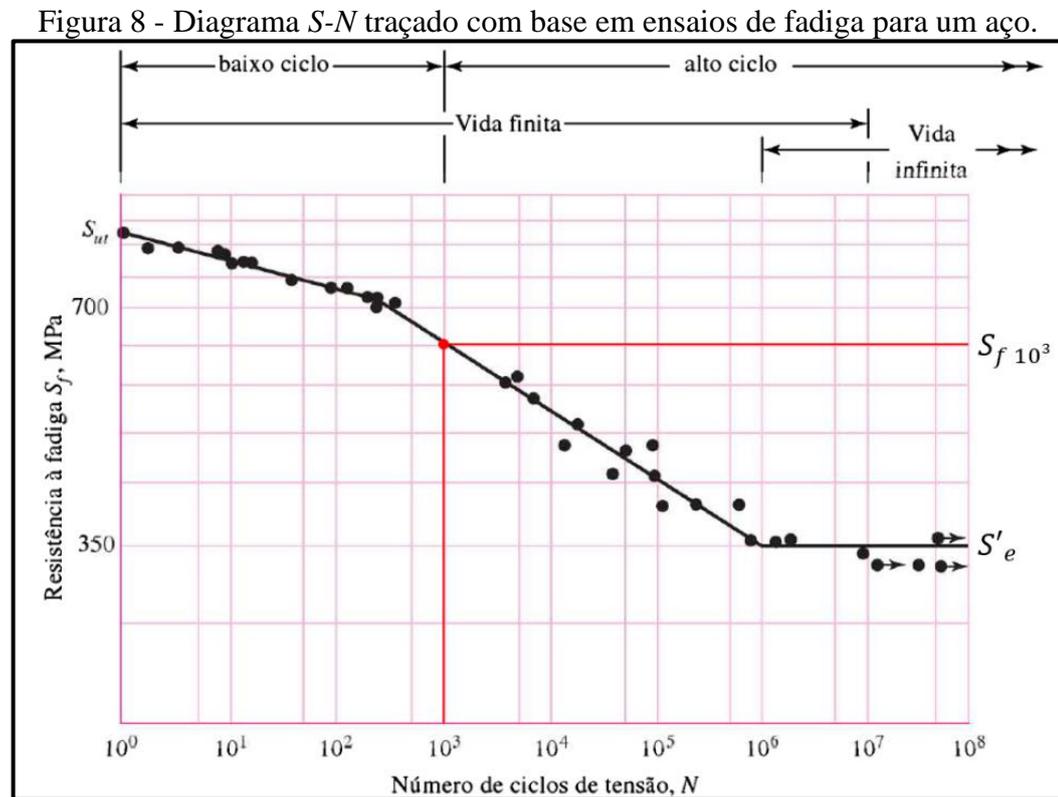
Budynas e Nisbett (2011) apresentam três métodos principais usados pela engenharia para tentar calcular a vida de um componente em número de ciclos até que ocorra a sua falha, considerando um carregamento especificado: O método da vida sob tensão, vida sob deformação e o método da fratura linear-elástica. Para todos, uma vida menor que 10^3 ciclos é considerada como fadiga de baixo ciclo, já para uma vida acima de 10^3 ciclos considera-se fadiga de alto ciclo.

Budynas e Nisbett (2011) explicam ainda que o método da vida sob tensão, embora seja o menos acurado, é o método mais simples de implementar e o mais tradicional, sendo adequado em aplicações de alta ciclagem. Este método é baseado em níveis de tensão e busca determinar o limite de fadiga do material, de modo que se as tensões cíclicas de uma aplicação real forem mantidas abaixo deste nível, não ocorrerá falha para um número de ciclos desejados.

2.4.1 Limite de resistência à fadiga

Para se determinar o limite de resistência à fadiga, espécimes laboratoriais de um determinado material são submetidos a um grande número de testes em um dispositivo de ensaio de fadiga. Tensões alternantes especificadas são aplicadas e os ciclos são contados, até a destruição do corpo de prova. A cada teste a magnitude da tensão aplicada é variada. Todos os resultados obtidos são então montados em um diagrama conhecido como $S-N$, onde uma curva mostra a relação da tensão de resistência à fadiga do material (S_f) em função no número de ciclos (N). A Figura 8 mostra o diagrama $S-N$ montado para um aço com limite de ruptura à

tração (S_{ut}) de 810 MPa, onde, S'_e representa o valor do limite de fadiga para vida infinita (acima de 10^6 ciclos) do corpo de prova. Já $S_f 10^3$ representa a tensão máxima que o material suporta para fadiga de alto ciclo, considerando uma vida finita de 10^3 ciclos.



Fonte: adaptado de Budynas e Nisbett (2011).

No caso em que não seja possível realizar o ensaio de fadiga em um material e não existam dados disponíveis de resistência à fadiga, Norton (2013) menciona que os valores de S'_e podem ser estimados com base nos limites de ruptura à tração do material (S_{ut}).

Porém, em projetos de componentes mecânicos para aplicações reais, não é pertinente usar somente o valor de S'_e como limite de resistência à fadiga. Isso pois este valor é obtido através de corpos de prova cuidadosamente preparados, polidos e ensaiados em ambiente controlado. As diferenças entre as condições do corpo de prova e de uma peça real projetada podem ser consideradas através da aplicação de fatores de correção, conhecidos como coeficientes de Marin, no cálculo do limite corrigido de resistência a fadiga para vida infinita (S_e), conforme Equação 19.

$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e \text{ [MPa]} \quad (19)$$

onde: k_a é o fator de correção conforme o acabamento superficial da peça;

k_b é o fator de correção de tamanho da peça;

k_c é o fator de correção conforme o carregamento aplicado na peça;

k_d é o fator de correção conforme a temperatura do meio onde a peça será aplicada;

k_e é o fator de correção conforme a confiabilidade desejada para a peça;

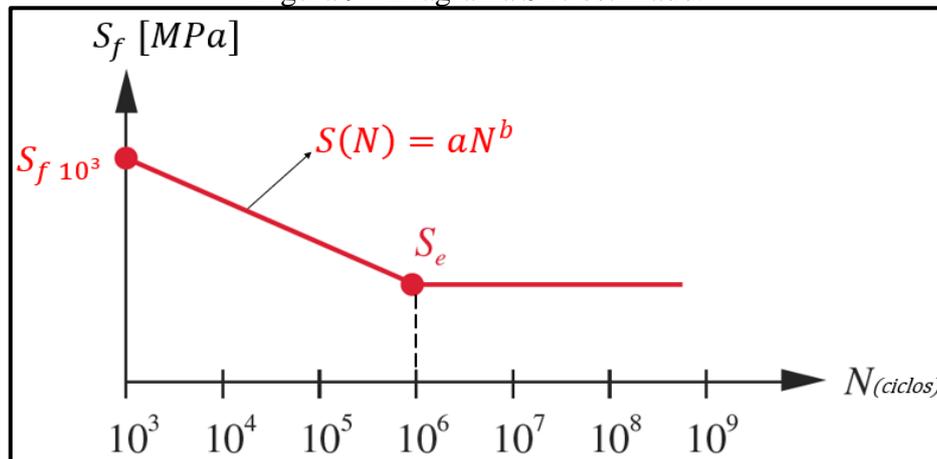
k_f é o fator de correção reservado a efeitos variados que podem afetar o limite de resistência à fadiga.

2.4.2 Diagrama $S-N$ estimado

Norton (2013) afirma também, que o diagrama $S-N$ de um material, na região de fadiga de alto ciclo, também pode ser estimado. Assim como S'_e , o valor da resistência à fadiga para 10^3 ciclos ($S_f 10^3$) é obtido tendo-se como base S_{ut} .

A Figura 9 mostra um diagrama $S-N$ estimado e a equação da reta que liga $S_f 10^3$ e S_e . $S(N)$ é a resistência à fadiga para N ciclos, a e b são constantes definidas pelas condições de contorno.

Figura 9 - Diagrama $S-N$ estimado.



Fonte: adaptado de Norton (2013).

2.4.3 Caracterização das tensões flutuantes

As tensões flutuantes que atuam em uma peça podem tomar várias formas, em máquinas rotativas o padrão senoidal é frequente. Budynas e Nisbett (2011) explicam que padrões que exibem um único valor máximo e um único valor mínimo de tensão podem ser caracterizados

quando conhecemos os valores da tensão média (σ_m) e da tensão alternada (σ_a), não sendo importante a forma exata da onda descrita.

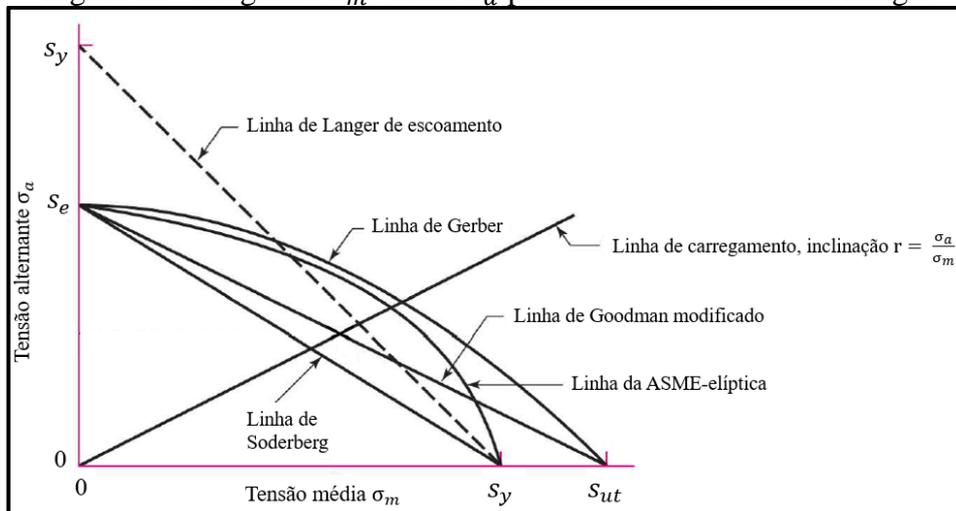
2.4.4 Tensões multiaxiais em fadiga

Norton (2013) menciona que é bastante comum em aplicações reais, existirem esforços combinados que criam combinações de tensões biaxiais e triaxiais variáveis em um ponto. Podem ser obtidas então tensões médias e alternantes agindo nos eixos x, y ou z para cada um dos esforços de flexão e torção. Para unir estas tensões em um único valor equivalente (σ'), a teoria da energia de distorção de von Mises pode ser aplicada,

2.4.5 Critérios de falha por fadiga

Os critérios de falha por fadiga são uma metodologia desenvolvida para auxiliar os projetistas a avaliar se a falha poderá ou não ocorrer quando a tensão média do carregamento dinâmico é diferente de zero. Dentre os modelos existentes, um dos mais utilizados é o diagrama de σ_m versus σ_a , apresentado na Figura 10, onde estão presentes quatro critérios de falha por fadiga: Soderberg, Goodman modificada, Gerber e ASME-elíptica. Budynas e Nisbett (2011) explicam que o intuito do diagrama é de estabelecer uma divisão geométrica que delimita as regiões seguras das inseguras conforme as coordenadas de σ_m e σ_a utilizadas. Os carregamentos que ficarem abaixo das linhas de critério de falha são considerados seguros. A linha de Langer, é utilizada como critério estático para tensões de escoamento (S_y).

Figura 10 - Diagrama σ_m versus σ_a para critérios de falha em fadiga.



Fonte: adaptado de Budynas e Nisbett (2011).

2.5 ANÁLISE DE ELEMENTOS FINITOS

Conforme Alves Filho (2013), os métodos básicos de cálculo mecânico, encontrados nos livros de resistência dos materiais, fornecem soluções analíticas exatas dos deslocamentos, deformações e tensões para os infinitos pontos que formam uma estrutura. Porém, esse tipo de solução é limitado a casos com geometria simples e condições de carregamento e apoio muito bem “comportados”. Em aplicações reais do dia a dia, frequentemente serão encontradas situações de projeto que envolvem carregamentos e componentes com geometria complexa, tornando inviável e até impossível a análise através das técnicas clássicas. O método de elementos finitos (MEF) é uma técnica de análise numérica que pode ser utilizada para resolver tais problemas, fornecendo uma resposta aproximada e com precisão aceitável para a engenharia.

Conforme Budynas e Nisbett (2011), a análise de elementos finitos pode ser explicada como a discretização do contínuo (infinitos pontos) que forma uma estrutura em finitas subestruturas denominadas de elementos, que serão então conectados por nós. Nos nós são estabelecidas as propriedades elásticas do material e aplicadas as condições de contorno bem como as cargas do projeto. A estrutura de elementos (malha) deve ser refinada suficiente ao ponto que seu comportamento represente de forma fiel o comportamento da peça real.

Existem vários tipos de elementos que podem ser utilizados dependendo do componente que se deseja analisar e da capacidade computacional disponível, sendo que o que diferencia os elementos são os graus de liberdade (DOF) de cada um e o número de nós que os formam. Budynas e Nisbett (2011) explicam que os graus de liberdade são a capacidade do nó de realizar os movimentos de translação e rotação independentes, sendo que cada nó pode ter no máximo seis DOF (três translacionais e três rotacionais). Elementos de superfície como o triangular plano possuem três nós, com dois graus de liberdade cada, e podem ser usados em análises de chapas finas, sob estado plano de tensões. Elementos sólidos como o tetraédrico linear possuem quatro nós, com três graus de liberdade cada, e podem ser utilizados em peças que sofrem um estado triaxial de tensões.

Ainda conforme Budynas e Nisbett (2011), o MEF se integra muito bem ao projeto realizado através de *softwares* CAD (desenho com o auxílio de computador), facilitando a criação do modelo e a geração da malha, que no passado era desenhada manualmente. Uma análise feita pelo MEF através de um *software* é iniciada com a aplicação das cargas, condições de contorno e material ao modelo, por parte do projetista. A malha é então gerada de forma automática, utilizando o elemento e o grau de refinamento escolhido. Neste momento as cargas

e apoios são transferidos para os nós específicos. Durante o processamento, os valores dos deslocamentos desconhecidos para todos os graus de liberdade são calculados, utilizando funções polinomiais e operações matriciais. A partir dos deslocamentos nodais, são determinadas então as tensões e deformações dentro de cada elemento, utilizando técnicas de interpolação. Estes resultados são apresentados pelo *software* na forma de um gradiente de cores, possibilitando ao projetista a visualização do comportamento da estrutura. Cabe ao profissional então interpretar de maneira correta os resultados obtidos.

Conforme Dassault Systèmes (2012), esta parte final de interpretação é considerada a mais difícil, pois é neste momento que o profissional deve fazer a conexão dos dados obtidos no *software* com a teoria da engenharia, formando então conclusões sobre o estudo realizado, onde deve-se levar em conta as suposições, simplificações e erros do modelo matemático idealizado na simulação em relação à peça real.

2.6 TRABALHOS CORRELATOS

Em seu trabalho, Hajdu, Rolník e Švoš (2016) realizaram uma simulação cinemática de um cardan através do *software* CAD/CAE CATIA V5®. Foram avaliadas as acelerações desenvolvidas no eixo de entrada, eixo intermediário e eixo de saída do conjunto, em três situações de desalinhamento das juntas, 15°, 25° e por fim considerando a mudança do ângulo de -40 até 40° durante a operação. O objetivo do estudo foi de confirmar a presença do erro de gimbal através do *software* e comparar os dados obtidos com o equacionamento cinemático mostrado no item 2.2. Nos resultados da simulação, a aceleração presente no eixo central do cardan formou um padrão senoidal, variando duas vezes a cada giro completo do eixo de entrada. A amplitude do padrão senoidal da aceleração aumenta conforme o ângulo de desalinhamento cresce. A aceleração do eixo de entrada e do eixo de saída foi nula em todos os casos, quando o ângulo de desalinhamento das duas juntas foi mantido igual. Com isso a teoria cinemática analítica do erro de gimbal atuando no eixo central do cardan foi comprovada.

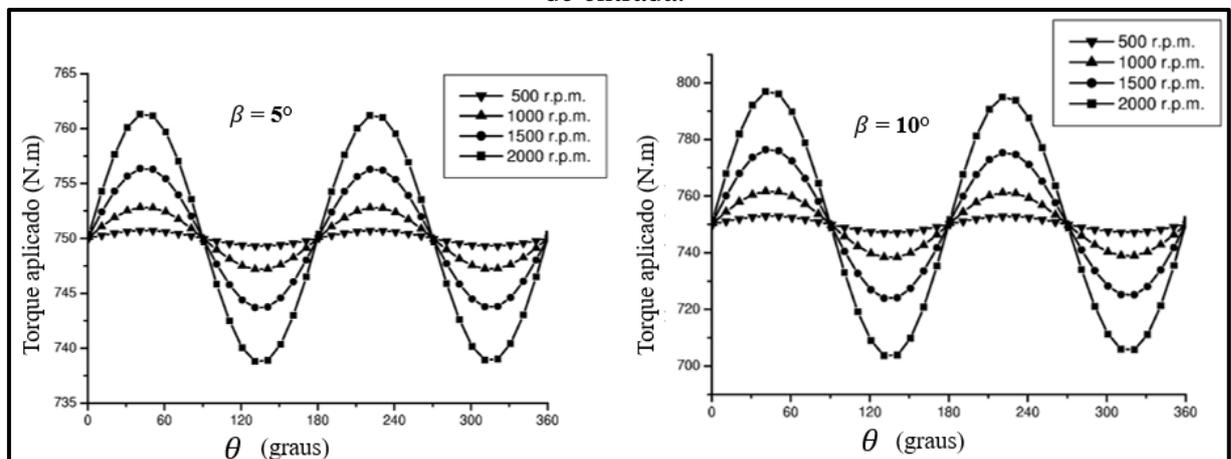
Stojanović *et al.* (2019) também utilizaram o *software* CATIA® em uma análise cinemática de um cardan, com o objetivo de mostrar como o ângulo de desalinhamento da junta universal no eixo de saída influencia na velocidade angular transmitida. Neste caso, o ângulo de desalinhamento (β_1) da junta no eixo de entrada foi mantido em valores constantes, 0° e 15°, e o ângulo de saída (β_2) foi variado entre 15°, 30°, 45° e 60°. Os ângulos mencionados podem ser vistos na Figura 6. Stojanović *et al.* (2019) concluíram que para $\beta_1 = 0^\circ$ ou 15° e $\beta_2 = 15^\circ$,

o deslocamento angular do eixo de saída em função do deslocamento do eixo de entrada pode ser considerado linear. Isso muda quando ângulos maiores são utilizados, no caso de $\beta_1 = 0^\circ$ e $\beta_2 = 45^\circ$, a rotação na saída do cardan forma um padrão senoidal, com picos de velocidade aproximadamente 40% maiores em relação a velocidade de entrada. Para $\beta_1 = 0^\circ$ e $\beta_2 = 60^\circ$ os picos de velocidade são 100% maiores que a velocidade de entrada. Nos casos em que $\beta_1 = 15^\circ$ as amplitudes dos picos de velocidade crescem em torno de 10% em relação aos picos encontrados com $\beta_1 = 0^\circ$.

Biancolini *et al.* (2003) realizaram um estudo onde é proposto um modelo matemático para análise do torque transmitido por um eixo cardan, levando em consideração as forças de inércia geradas pela massa dos componentes submetidas a acelerações. O trabalho também aborda a análise de fadiga, onde é investigada a influência de parâmetros de trabalho (torque, velocidade angular, desalinhamento da junta) na vida prevista para as juntas universais, considerando o critério de falha adaptado da norma ANSI/AGMA 6001-D97.

Para a análise de torque no cardan, Biancolini *et al.* (2003) adotaram a hipótese de velocidade angular de entrada constante. Um torque de reação constante de 750 N.m no eixo de saída do cardan foi considerado. Três gráficos foram montados, considerando os ângulos de desalinhamento das juntas de 5° , 7° e 10° , e mostrando a variação senoidal do torque aplicado em função do deslocamento angular do eixo de entrada (θ), para diferentes valores de velocidade angular (500 rpm até 2000 rpm). Dois dos gráficos são apresentados na Figura 11. Nota-se que quanto maior for a rotação, maior será a amplitude da curva senoide que descreve o torque. A amplitude também aumenta conforme o ângulo de desalinhamento vai crescendo, isso pode ser visto comparando os dois gráficos.

Figura 11 - Torque aplicado versus posição angular e diferentes velocidades angulares do eixo de entrada.



Fonte: adaptado de Biancolini *et al.* (2003).

Para obter as tensões atuantes no cardan, Biancolini *et al.* (2003) realizaram análises de elementos finitos, utilizando elementos tetraédricos sólidos para a geração da malha. O material considerado para todo o conjunto é equivalente ao aço SAE 9840, com tensão de escoamento de 850 MPa e limite de resistência à fadiga para vida infinita de 448 MPa, ajustado conforme a Equação 19. Parâmetros como velocidade angular (ω), torque transmitido e desalinhamento das juntas universais (β) foram variados entre cada estudo. Com os dados de tensão média (σ_m) e alternada (σ_a) de von Mises, foi possível utilizar o critério de falha apresentado pela norma ANSI/AGMA, onde pode-se obter os fatores de segurança à fadiga (F_{sy}), apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Valores utilizados no cálculo do coeficiente de segurança à fadiga.

ω (rpm)	Torque (N.m)	β (graus)	σ_m (MPa)	σ_a (MPa)	F_{sy}
6000	150	5	23.9	0.60	35.52
6000	150	7	23.9	1.20	35.40
6000	150	10	23.7	1.25	35.26
4000	150	5	15.0	0.45	56.39
4000	150	7	15.0	0.65	56.29
4000	150	10	14.9	1.10	56.49
6000	200	5	26.75	0.75	31.73
6000	200	7	26.8	1.00	31.64
6000	200	10	26.6	2.35	31.46
5000	150	5	18.8	0.40	45.17
5000	150	7	18.7	0.75	45.20
5000	150	10	18.6	1.15	45.27

Fonte: adaptado de Biancolini *et al.* (2003).

Biancolini *et al.* (2003) concluem que a amplitude da variação do torque, considerando os efeitos de inércia, é mais influenciada pela rotação do cardan do que pelo ângulo de desalinhamento das juntas. Os modelos de elementos finitos mostraram que a região de maiores tensões do conjunto foi perto dos furos dos garfos onde são montadas as cruzetas. Através da análise de fadiga, foi concluído que o aumento da rotação influencia mais na redução da vida das juntas do que o aumento do ângulo de desalinhamento ou do torque transmitido. Isso ocorre pois com o aumento da rotação, existe um aumento do número de ciclos de tensão alternante por unidade de tempo, e isso reduz mais o fator de segurança à fadiga do que o aumento da tensão média gerado por torques maiores.

Šalinić *et al.* (2017) também realizaram um estudo onde foram desenvolvidas equações que relacionam o torque de entrada e o torque de saída em uma junta universal, levando em

consideração as forças de inércia geradas pela massa da cruzeta e do eixo de saída. O objetivo do trabalho era verificar a influência das forças de inércia na transmissão do torque. A junta universal em questão foi avaliada em duas posições angulares do eixo de entrada, sendo que o ângulo de desalinhamento considerado foi de 15°. Forças de atrito foram desconsideradas nos rolamentos. Šalinić *et al.* (2017) abordaram o problema da mesma forma que Biancolini *et al.* (2003), considerando um torque de reação constante na saída de 750 N.m, construindo gráficos que mostraram a variação senoidal de torque de entrada, para diferentes valores de velocidade angular. Ao comparar os dados considerando e desconsiderando as forças de inércia, afirmaram que estas devem ser utilizadas no cálculo quando velocidades angulares elevadas (acima de 500 rpm) forem aplicadas no eixo de entrada, sendo que neste caso contribuem significativamente no aumento da amplitude da curva senoidal que descreve o carregamento. Para rotações abaixo de 500 rpm, o comportamento senoidal do torque com e sem as forças de inércia foi muito semelhante.

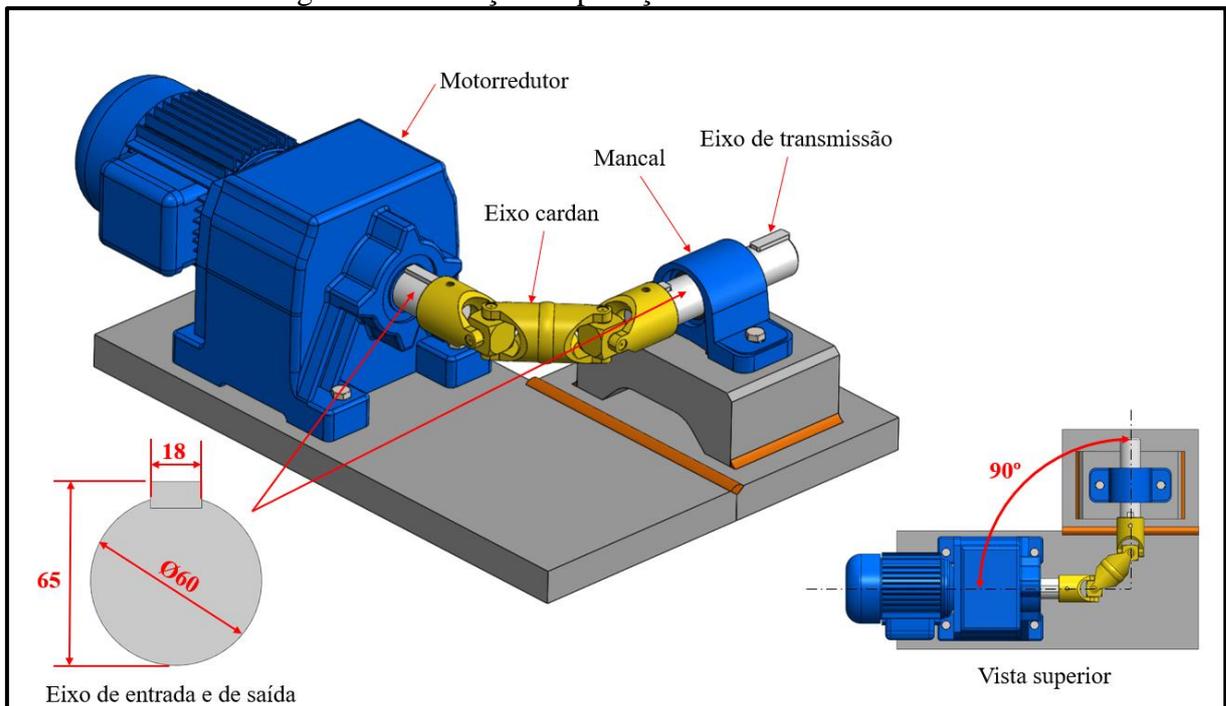
3 MATERIAIS E MÉTODOS

Neste capítulo é descrito o objeto de estudo deste trabalho, sendo apresentadas as condições de contorno consideradas na avaliação estrutural realizada. A metodologia e os recursos utilizados durante o desenvolvimento para a obtenção dos resultados também são apresentadas.

3.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO DA APLICAÇÃO

O modelo de cardan proposto, é utilizado em uma máquina industrial para conformação de perfis metálicos. O cardan transmite o torque e a velocidade angular da saída de um motorreductor para um eixo de transmissão perpendicular junto a um mancal. Um esboço da aplicação é apresentado na Figura 12, onde pode-se verificar que a disposição de montagem adotada para o cardan é a “W”, conforme item 2.1.

Figura 12 - Esboço da aplicação do cardan analisado.



Fonte: o autor (2021).

As condições iniciais consideradas para o desenvolvimento são listadas na sequência:

- a) o ângulo entre o eixo de saída do motorreductor e o eixo de transmissão é de 90°;
- b) o torque máximo na saída do motorreductor é de 1069 N.m;

- c) a rotação máxima na saída do motorreductor é de 133,97 rpm;
- d) o eixo de saída do motorreductor e o eixo de transmissão possuem diâmetro de 60 mm, ambos com chaveta, conforme Figura 12;
- e) o cardan não precisa ter compensação axial de comprimento, mas deve possuir o menor comprimento possível, pois o espaço de montagem dentro da máquina é limitado;
- f) a superfície de contato entre os eixos de diâmetro 60 mm e os flanges do cardan deve ser de no mínimo 45 mm.

Na Tabela 2, são apresentados dados adicionais encontrados para o motorreductor de engrenagens helicoidais modelo WCG20 considerado para a aplicação, conforme pesquisa em WEG Cestari (2021).

Tabela 2 - Dados do motorreductor considerado na aplicação.

Potência nominal do motor	Frequência do motor trifásico	Rotação de entrada do reductor	Rotação do eixo de saída do reductor	Torque efetivo no eixo de saída do reductor	Fator de serviço	Relação de redução do reductor	Código do motorreductor
P_N [kW]	F_m [Hz]	n_1 [rpm]	n_2 [rpm]	$M_{2\ reductor}$ [N.m]	fs	i_{ex}	-
15	60	1750	133,97	1069	2,81	13,06	N08321

Fonte: adaptado de WEG Cestari (2021).

3.2 MODELO DE CARDAN PROPOSTO

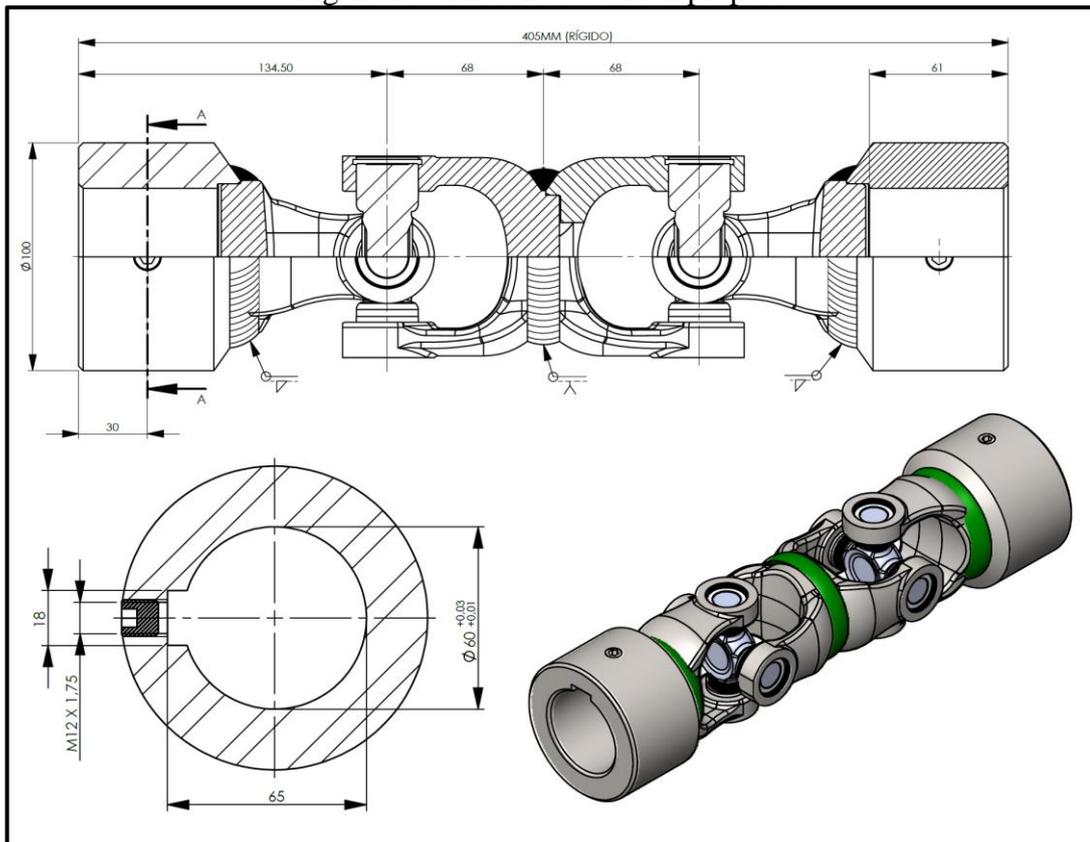
Os componentes que formam o cardan proposto foram escolhidos conforme a série CST 1310 no sistema de classificação de peças utilizado na empresa com base no torque da aplicação. Essa classe é especificada para torques de até 1100 N.m. Para garantir o menor comprimento possível, o corpo central do cardan foi projetado sem a aplicação do tubo de ligação, sendo assim os garfos internos das duas juntas universais foram unidos por solda, caracterizando um cardan do tipo rígido.

As cruzetas que formam o cardan foram consideradas como adquiridas prontas de fabricantes especializados como Spicer obedecendo a série estipulada. A condição do ângulo de desalinhamento de 45° para cada junta universal direcionou o projeto ao uso de um garfo especial para aplicações industriais, feito de aço forjado com aproximadamente 0,40% em peso de carbono em sua composição. Esse modelo de garfo foi utilizado tanto para o corpo central quanto para os garfos de entrada e de saída do conjunto. Os flanges de acoplamento com

chaveta, que conectam o cardan junto ao motorreductor e ao eixo de transmissão foram projetadas considerando o material SAE 1045 usinado.

O modelo tridimensional do cardan proposto assim como os dimensionais básicos resultantes são mostrados na Figura 13.

Figura 13 - Modelo de cardan proposto.



Fonte: o autor (2022).

As propriedades mecânicas do aço utilizado nos garfos do cardan foram consideradas conforme Tabela 3. Além disso, foram realizadas também medições de dureza Brinell (HB) em um garfo conforme o especificado em projeto, com o objetivo de comparar os resultados com os dados encontrados na literatura.

Tabela 3 - Propriedades mecânicas do aço SAE 1040 forjado.

Classificação AISI/SAE	Descrição	Dureza HB	Limite de Escoamento S_y [MPa]	Resistência de tração S_{ut} [MPa]	Módulo de elasticidade E [GPa]	Coefficiente de resistência à fadiga $\sigma'f$ [MPa]	Expoente de resistência à fadiga b
1040	Tal como forjado	225	355	620	200	1540	-0,14

Fonte: adaptado de ASM International (1993).

3.3 ANÁLISE CINEMÁTICA E ESTRUTURAL DO CARDAN PROPOSTO

Utilizando os conceitos apresentados por Seherr-Thoss, Schmelz e Aucktor (2010) no item 2.2, foi realizada a análise cinemática dos componentes do cardan, onde foram obtidos os deslocamentos, velocidades e acelerações angulares para o corpo central do conjunto. Para isso as Equações 1, 2 e 5 foram aplicadas, considerando o deslocamento angular do eixo de entrada (θ) de 0° até 360° , em intervalos de 5° . Os dados encontrados foram empregados na montagem de gráficos, onde um padrão senoidal de variação de velocidade e de aceleração foi formado, com dois picos a cada rotação completa.

Ainda utilizando os conceitos de Seherr-Thoss, Schmelz e Aucktor (2010) apresentados no item 2.3.1, os torques máximos e mínimos atuantes no corpo central do cardan foram calculados. Com os dados de velocidade angular (ω_2) obtidos anteriormente, um gráfico da variação de torque (M_2) no corpo central também foi montado, considerando que a transmissão de potência (Pot) seja constante entre o eixo de entrada e o de saída do cardan, conforme Equação 20. A potência utilizada no cálculo foi de 15 kW, transmitida pelo motorreductor, conforme Tabela 2.

$$Pot = M_2 \omega_2 [W] \quad (20)$$

3.4 VERIFICAÇÃO DA ROTAÇÃO CRÍTICA EM FUNÇÃO DO COMPRIMENTO DO CARDAN PROPOSTO

Utilizando os conceitos apresentados no item 2.3.2, a rotação crítica ($n_{kr\ maciço}$) do cardan em função do seu comprimento para o primeiro modo de vibração foi verificada. A análise se deu através da aplicação da Equação 15, onde o diâmetro do eixo maciço do corpo central (d) utilizado foi de 77 mm, medido na região da solda entre os dois garfos centrais conforme Figura 13, e o comprimento do corpo central medido entre centros das cruzetas (L) utilizado foi de 136 mm.

Aplicando a Equação 17, obteve-se também o valor da rotação máxima permitida ($n_{max\ permitida}$) para o cardan, conforme margem de segurança abaixo da rotação crítica indicada pelos fabricantes em seus catálogos. Para prevenir vibrações indesejadas causadas pelos torques secundários descritos no item 2.3.1, a rotação da aplicação estudada de 133,97 rpm, deve ser menor que o valor de $n_{max\ permitida}$ calculado.

3.5 VERIFICAÇÃO DOS TORQUES DE INÉRCIA EM FUNÇÃO DA VARIAÇÃO DA ACELERAÇÃO ANGULAR NO CORPO CENTRAL DO CARDAN

Os dados de aceleração angular cíclica que ocorre no corpo central do cardan, obtidos na análise cinemática, foram empregados na Equação 18 onde pode-se verificar os valores dos torques de inércia (M_α) produzidos, conforme item 2.3.3. O valor do momento de inércia de massa (J) considerado para o corpo central foi de $2,10 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$, obtido através do *software* de desenho CAD, em torno do eixo longitudinal que passa pelo centro de massa do conjunto.

Os dados de torque de inércia, calculados de 0° até 360° , em intervalos de 5° , foram então somados aos dados de torque (M_2) calculados na etapa anterior, com isso, pode-se verificar a influência desses no torque cíclico que ocorre no corpo central.

3.6 ANÁLISE DE ELEMENTOS FINITOS DO CARDAN PROPOSTO

Com o auxílio do módulo Simulation, componente do *software* CAD SolidWorks®, foram realizadas análises lineares estáticas de elementos finitos, com o objetivo de se obter as tensões normais máximas (tensões principais $P1$) produzidas pelos torques máximos e mínimos atuantes no corpo central do cardan.

As propriedades do material considerado no modelo seguiram os dados da Tabela 3. As condições de contorno consideradas na análise são mostradas na Figura 14, onde, as setas verdes indicam a região de fixação do modelo, no eixo longitudinal da peça, restringindo os movimentos de translação em todos os eixos permitindo somente a rotação em torno do eixo “Y”. As setas roxas indicam as regiões de aplicação das forças, sendo estas, as faces internas dos olhais onde as cruzetas seriam montadas. A magnitude das forças foi calculada de forma que estas gerem um torque de mesmo valor que torques máximos e mínimos calculados na análise cinemática, considerando um braço de alavanca de $h = 74 \text{ mm}$, conforme mostrado na Figura 14. Em uma das extremidades as forças foram posicionadas de forma a gerar um torque no sentido horário, já na outra, o torque foi produzido no sentido contrário. O tipo de elemento finito utilizado na construção da malha foi o tetraédrico parabólico (ou tetraédrico sólido de segunda ordem), que possui dez nós, sendo que cada nó possui três graus de liberdade, conforme Dassault Systèmes (2012).

A malha construída possuía 272.660 elementos tetraedros, totalizando 395.890 nós analisados. Cada elemento possuía aproximadamente 2 mm de aresta. Para a geração da malha,

também foi utilizado um recurso do software de refinamento dos elementos em regiões do modelo com curvatura, sendo que nessas regiões, o maior número de elementos possibilita um resultado mais preciso. Nas áreas de refinamento, os elementos possuíam aresta de 0,4 mm.

Figura 14 - Condições de contorno utilizadas nas análises de elementos finitos.



Fonte: o autor (2022).

Com o gradiente de tensões principais fornecido pela análise, a região com as maiores tensões foi verificada, sendo esta, localizada logo abaixo do olhal de montagem das “orelhas” do garfo junto a cruzeta. Valores de tensão foram lidos em diversos nós da área e a média destes valores foi calculada, obtendo-se assim a tensão máxima (σ_{max}) correspondente ao maior torque e a tensão mínima (σ_{min}) correspondente ao menor torque.

3.7 ANÁLISE DE FADIGA DO CARDAN PROPOSTO

Para a realização da estimativa de vida do cardan analisado, o limite corrigido de resistência à fadiga (S_e) do material SAE 1040 forjado foi estimado utilizando a Equação 19, o valor calculado foi de 119 MPa. O limite de resistência à tração (S_{ut}) considerado para o material foi de 620 MPa, conforme Tabela 3. Os fatores de correção aplicados no cálculo foram

o de acabamento superficial da peça (k_a) de 0,453, considerando superfície forjada, e o fator de tamanho de peça (k_b) de 0,849, considerando o diâmetro equivalente da seção transversal de maiores tensões nos garfos do corpo central.

A tensão máxima (σ_{max}) obtida na análise de elementos finitos superou o limite de escoamento do material. Diante disso, o método de Dowling para materiais dúcteis foi aplicado, conforme Dowling (2013). O fato de o modelo ter apresentado tensões mais elevadas que o escoamento do material em determinadas regiões consideradas como concentradores de tensão, não foi tratado de maneira que o corpo como um todo estaria falhando, mas sim como um início de escoamento localizado. É nessas regiões que a nucleação das trincas por fadiga e o seu crescimento são mais prováveis.

As tensões σ_{max} e σ_{min} obtidas na análise de elementos finitos foram consideradas como tensões correspondentes a um fator de concentração de tensão (k_f) igual a 1,5. Esse valor foi atribuído tendo-se como base as análises realizadas no mesmo modelo tridimensional redesenhado com geometria simplificada, reduzindo os concentradores de tensão. Com isso, a tensão média ($\sigma_{m,o}$) sem considerar k_f foi calculada e então corrigida com o fator de concentração de tensão de Dowling (k_{fm}), obtido conforme Equação 21.

$$k_{fm} = \frac{S_y - k_f \sigma_{a,o}}{|\sigma_{m,o}|} \rightarrow \text{Se } K_f |\sigma_{max,o}| > S_y \quad (21)$$

onde: S_y é o limite de escoamento do material [MPa];

$k_f \sigma_{a,o}$ corresponde a tensão alternante calculada com σ_{max} e σ_{min} [MPa];

$\sigma_{m,o}$ é a tensão média calculada sem considerar k_f [MPa];

$K_f |\sigma_{max,o}|$ corresponde ao valor de σ_{max} [MPa].

O valor obtido para a tensão média (σ_m) do carregamento senoidal após a correção com k_{fm} , é menor que o valor que seria obtido calculando o mesmo com os valores resultantes das análises numéricas. Já a tensão alternante (σ_a), foi calculada utilizando os valores de σ_{max} e σ_{min} . De certa forma, pode-se interpretar que com a aplicação do método de Dowling, a tensão máxima foi limitada para o escoamento do material (355 MPa) e a tensão mínima foi ajustada para manter a amplitude do carregamento.

Na sequência, o coeficiente de segurança à fadiga (F_{sy}) foi obtido utilizando o critério de falha de Goodman modificado, para a região analisada, conforme Equação 22. Esse critério

foi escolhido pois ele é usualmente aplicado em projetos de peças sujeitas a tensões médias em adição a alternantes, sendo considerado conservador, conforme Norton (2013).

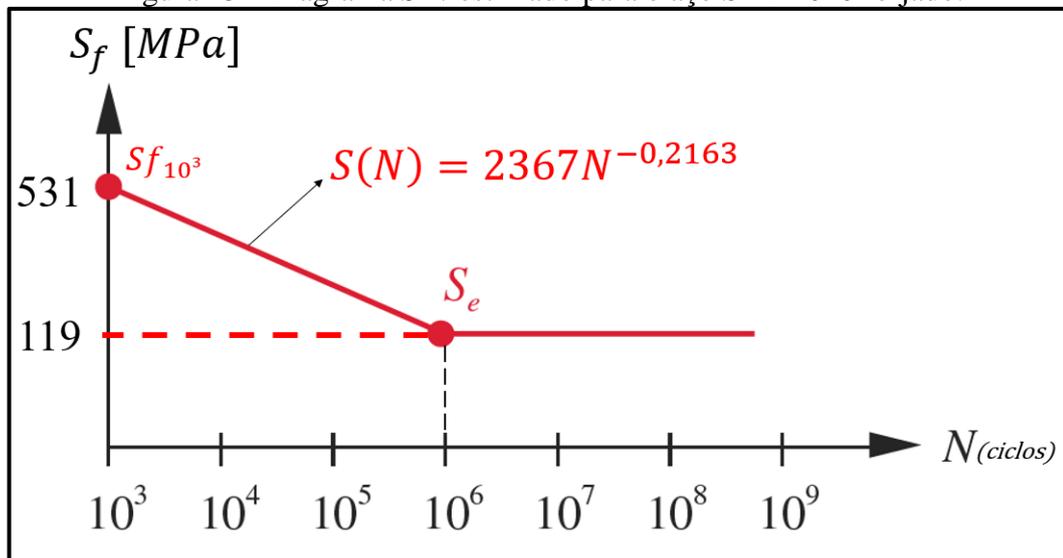
$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = \frac{1}{F_{sy}} \quad (22)$$

Para a estimativa do número de ciclos de tensão (N) que o cardan iria resistir, a resistência à fadiga para 10^3 ciclos (Sf_{10^3}) do material foi calculada, utilizando a Equação 23, conforme Budynas e Nisbett (2011). O valor resultante foi de 531 MPa. Os dados de $\sigma'f$ e b foram utilizados conforme Tabela 3.

$$Sf_{10^3} = \sigma'f(2 \cdot 10^3)^b \quad (23)$$

O diagrama $S-N$ estimado para o material também foi construído, sendo então obtida a equação da reta que liga Sf_{10^3} e S_e , conforme mostrado na Figura 15.

Figura 15 - Diagrama $S-N$ estimado para o aço SAE 1040 forjado.



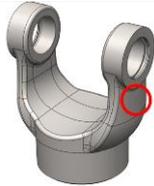
Fonte: o autor (2022).

4 RESULTADOS

4.1 MEDIÇÃO DE DUREZA NO GARFO

A medição de dureza Brinell (HB) foi realizada em um garfo conforme o especificado no projeto, na região logo abaixo do olhal de montagem junto a cruzeta, sendo esta, uma das regiões mais críticas conforme as análises de elementos finitos. Os dados de dureza encontrados bem como uma imagem com a região de medição demarcada, são mostrados na Tabela 4,

Tabela 4 - Resultados das medições de dureza Brinell (HB) do garfo.

Medição	Dureza [HB]	Dureza média [HB]	Imagem do garfo verificado
1	162	157,2	
2	162		
3	153		
4	156		
5	153		

Fonte: o autor (2022).

A dureza média verificada ficou 30% menor em comparação com a dureza do material SAE 1040 forjado disponibilizada na literatura, de 225 HB. Isso indica que os limites de resistência reais do material podem ser menores que os apresentados na Tabela 3.

4.2 VARIAÇÃO DA VELOCIDADE E ACELERAÇÃO ANGULAR NO CORPO CENTRAL

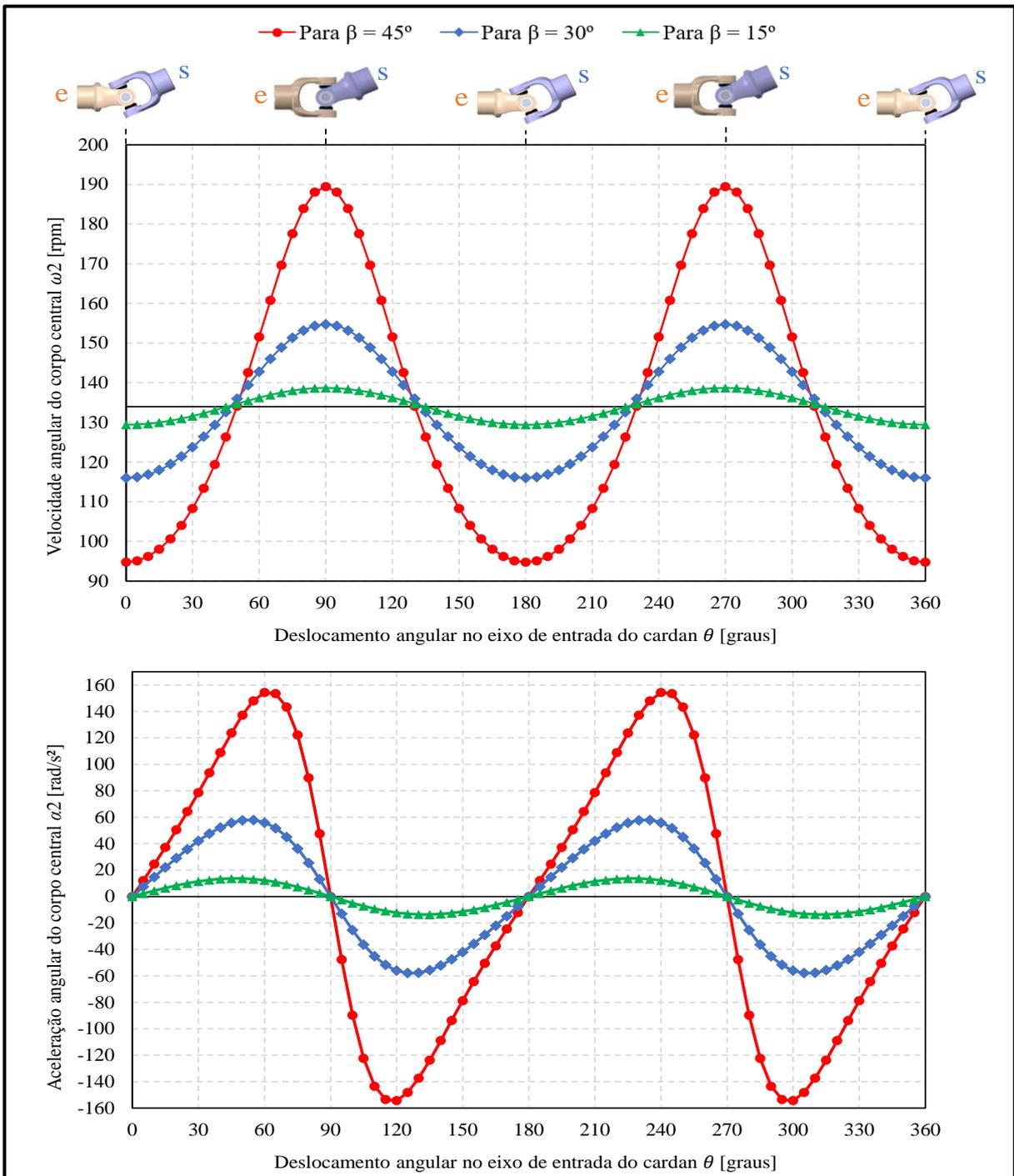
A análise cinemática feita no corpo central do cardan revelou um padrão senoidal de comportamento da velocidade e da aceleração angular. Os picos de velocidade foram de 189,46 rpm, 41,4% maiores que a rotação no garfo de entrada do cardan, de 133,97 rpm, e ocorrem quando a cruzeta está no plano perpendicular em relação ao garfo de entrada. Já as velocidades mínimas verificadas foram de 94,73 rpm, 29,3% menores que a velocidade no garfo de entrada, ocorrendo quando a cruzeta está no plano perpendicular em relação ao corpo central. Estes resultados conferem com a teoria apresentada por Seherr-Thoss, Schmelz e Aucktor (2010) e mostrada na Figura 5.

Na Figura 16 são mostrados os padrões senoidais formados com os dados obtidos de velocidade e de aceleração angular em função do deslocamento angular do eixo de entrada (θ)

em uma rotação completa do cardan, para um ângulo de desalinhamento (β) de 45° . Nestes mesmos gráficos estão representados também os padrões formados quando os ângulos de desalinhamento são 15° e 30° , evidenciando a influência de β no comportamento do conjunto.

A maior velocidade angular para $\beta=15^\circ$ foi de 138,70 rpm, representando uma amplificação de 3,5% em relação a rotação de entrada. Já para $\beta=30^\circ$, o pico foi de 154,70 rpm, representando uma amplificação de 15,5%.

Figura 16 - Velocidade angular (ω_2) e aceleração angular (α_2) do corpo central do cardan para $\beta = 15^\circ, 30^\circ$ e 45° em função de θ .



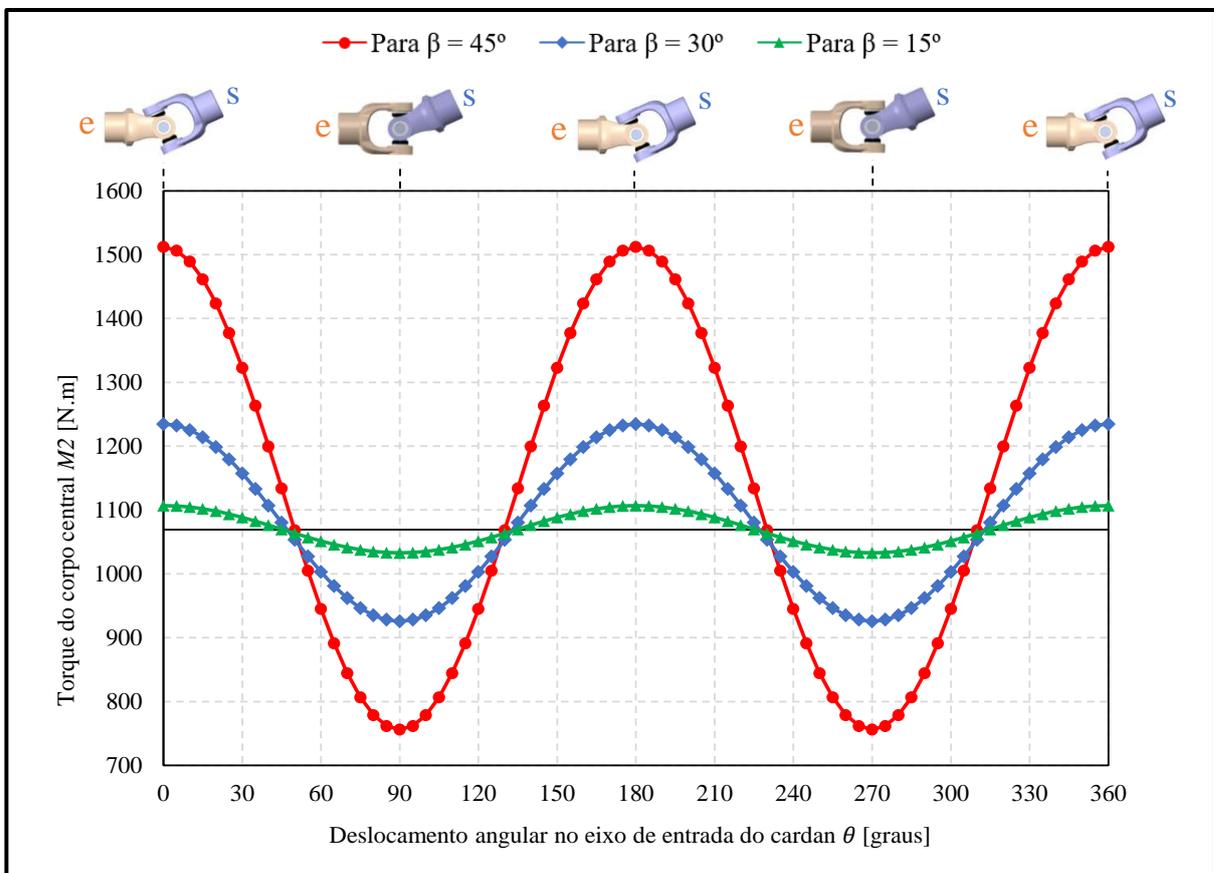
Fonte: o autor (2022).

Tanto para a velocidade quanto para a aceleração angular, nota-se que os valores correspondentes aos picos crescem de maneira exponencial quanto maior for o valor de β . As amplitudes dos picos máximos e mínimos da aceleração angular são iguais, diferente do que acontece com a velocidade angular. Os valores máximos de aceleração angular não coincidem com os da velocidade angular, sendo que para $\beta=45^\circ$ a máxima aceleração ocorre para $\theta=60^\circ$ já para $\beta=15^\circ$, a máxima aceleração ocorre em $\theta=45^\circ$.

4.3 VARIAÇÃO DO TORQUE NO CORPO CENTRAL

A Figura 17 mostra o comportamento do torque no corpo central do cardan em função do deslocamento angular do eixo de entrada (θ) em uma rotação completa do conjunto. Novamente um padrão senoidal foi formado, os maiores torques foram verificados nas posições de menor velocidade angular mostradas na análise cinemática. Os valores dos torques no corpo central para ângulos de desalinhamento são 15° e 30° também podem ser visualizados.

Figura 17 - Torque (M_2) no corpo central do cardan para $\beta = 15^\circ$, 30° e 45° em função de θ .



Fonte: o autor (2022).

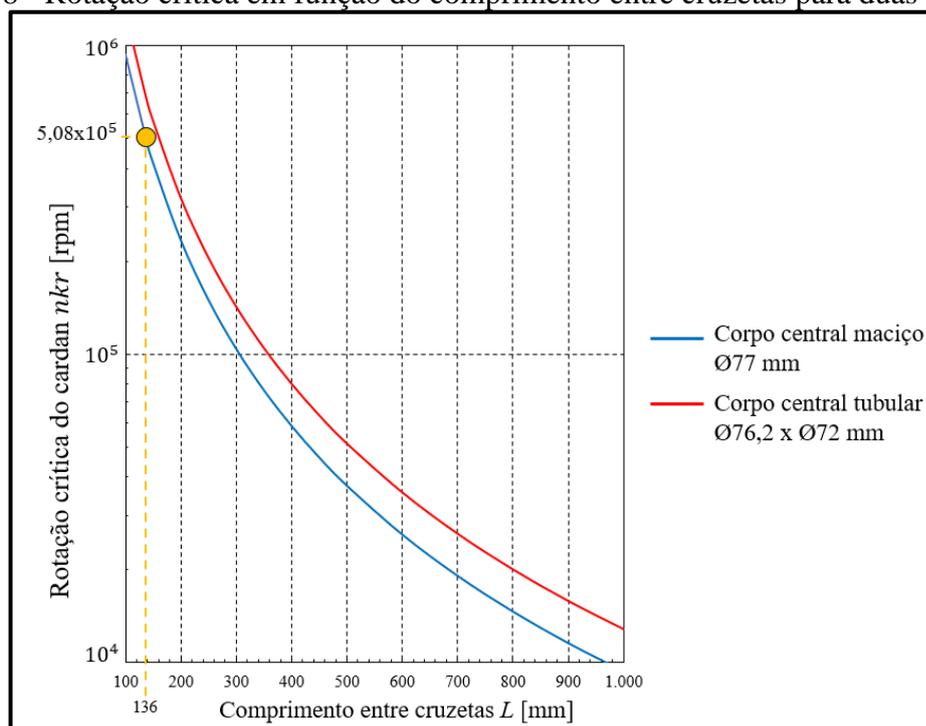
Da mesma forma que com a velocidade angular, o torque máximo de 1512 N.m é 41,4% maior que o torque de entrada aplicado no cardan, de 1069 N.m, porém ocorre quando a cruzeta está no plano perpendicular em relação ao corpo central. Já o torque mínimo é 29,3% menor em relação ao torque de entrada, resultando em 756 N.m, sendo que nesta situação a cruzeta está no plano perpendicular em relação ao garfo de entrada.

4.4 ROTAÇÃO CRÍTICA DO CARDAN

A rotação crítica ($n_{kr\ maciço}$) de flexão calculada para o primeiro modo de vibração do cardan foi de 508×10^3 rpm. Utilizando a margem de segurança indicada pelos fabricantes a rotação máxima permitida ($n_{max\ permitida}$) calculada foi de 381×10^3 rpm. A rotação da aplicação analisada, que é de 133,97 rpm, está bem distante da máxima rotação permitida.

Na Figura 18, é possível fazer a comparação entre as rotações críticas (n_{kr}) em função do comprimento entre cruzetas (L), para um cardan com corpo central maciço de diâmetro 77 mm como o analisado neste trabalho e para um cardan com corpo central tubular de diâmetro externo 76,2 mm e diâmetro interno 72 mm, que é o tubo usualmente aplicado para a série CST 1310. Nota-se que a velocidade crítica decresce exponencialmente conforme o comprimento L aumenta. A velocidade crítica obtida para o cardan em análise também é demarcada sobre o gráfico.

Figura 18 - Rotação crítica em função do comprimento entre cruzetas para duas situações.



Fonte: o autor (2022).

O elevado valor da $n_{max\ permitida}$ pode ser explicado pelo fato de o cardan proposto ter um comprimento considerado pequeno para sua série. Isso faz o conjunto possuir uma alta rigidez à flexão causada pelos torques secundários, prevenindo a excitação do primeiro modo de vibração do conjunto. Na maioria das aplicações, o corpo central dos cardans será tubular e irá possuir comprimento acima de 500 mm.

4.5 INFLUÊNCIA DOS TORQUES DE INÉRCIA NO CORPO CENTRAL

A Tabela 5 mostra os valores do torque resultante ($M_{2\ res}$) no corpo central do cardan considerando os torques de inércia (M_{α}) produzidos pela variação das acelerações apresentadas no item 4.2. Os torques são listados em função das posições angulares (θ) específicas do eixo de entrada. Nesta mesma tabela são apresentados valores do torque no corpo central sem considerar os torques de inércia.

Tabela 5 - Valores do torque no corpo central do cardan com e sem considerar M_{α} .

Posição angular do eixo de entrada	Torque sem considerar M_{α}	Torque resultante considerando M_{α}
θ [graus]	M_2 [N.m]	$M_{2\ res}$ [N.m]
0	1512,06	1512,06
60	945,04	945,36
120	945,04	944,72
180	1512,06	1512,06
240	945,04	945,36
300	945,04	944,72
360	1512,06	1512,06

Fonte: o autor (2022).

O maior valor encontrado para M_{α} foi de 0,32 N.m, ocorrendo quando a aceleração angular (α_2) do corpo central é máxima, ou seja, em $\theta=60^{\circ}=240^{\circ}$, conforme Figura 16. Importante ressaltar que esses valores máximos de M_{α} não coincidem com as posições angulares onde os maiores valores de torque (1512 N.m) amplificado pelo erro de gimbal ocorrem, que são em $\theta=0=180^{\circ}$, conforme Figura 17.

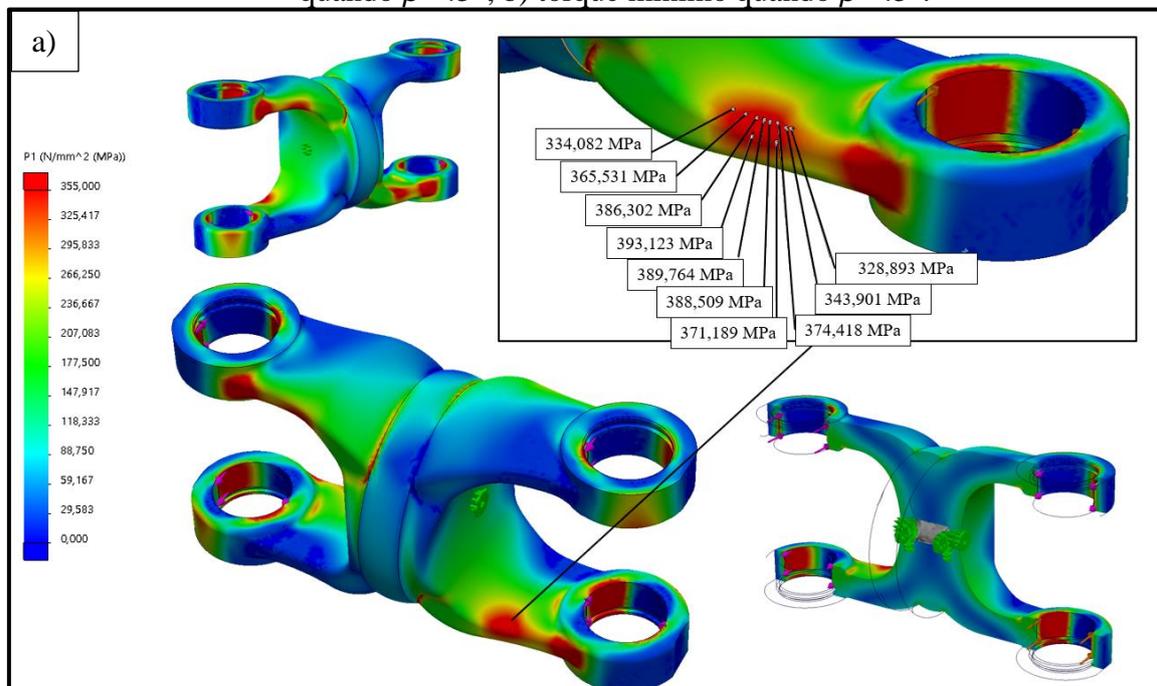
A influência de M_{α} no torque do corpo central do cardan pode ser considerada desprezível pois os valores de torque com e sem considerar M_{α} são praticamente os mesmos. Isso pode ser explicado pois as velocidades angulares consideradas neste estudo são menores

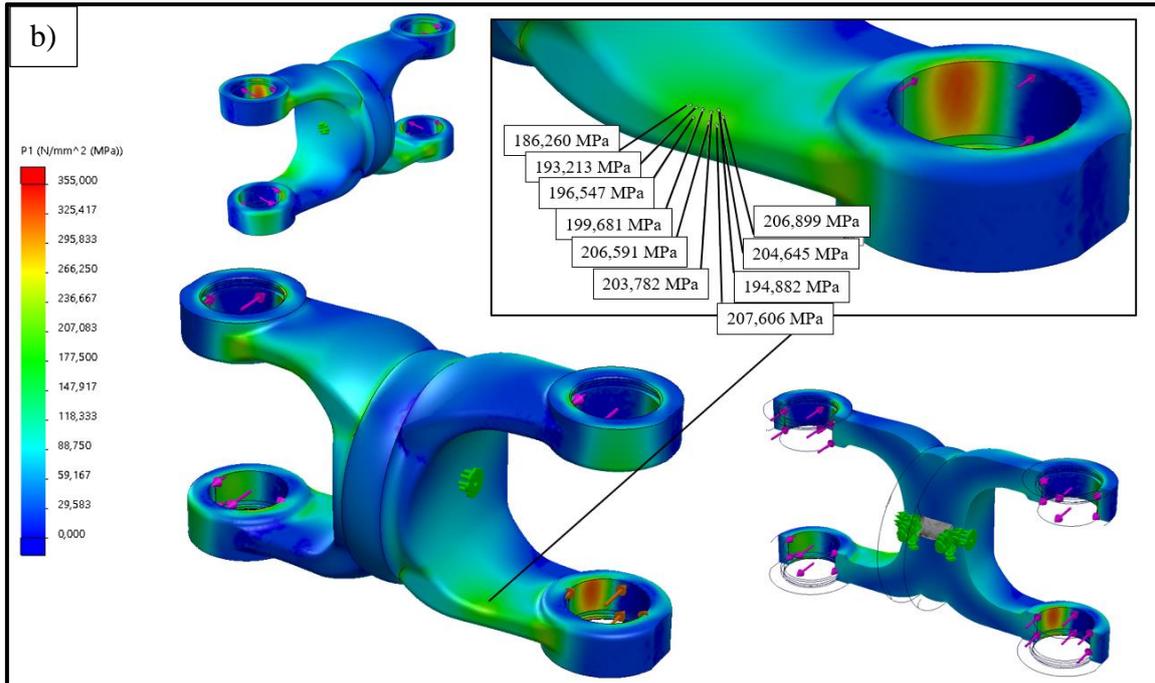
que 500 rpm. Conforme o estudo realizado por Šalinić *et al.* (2017) e descrito no item 2.6, os torques de inércia só contribuem significativamente no aumento da amplitude da curva senoidal em rotações acima de 500 rpm.

4.6 RESULTADOS DA ANÁLISE LINEAR ESTÁTICA DE ELEMENTOS FINITOS

Na Figura 19 são apresentados os gradientes de tensões normais máximas (tensões principais $P1$) correspondentes ao maior torque (1512 N.m) e ao menor torque (756 N.m) no corpo central do cardan. A magnitude das forças aplicadas para a situação de maior torque foi de 20,4 kN, já para o menor torque, foi de 10,2 kN. Na figura, os valores de tensão lidos na região escolhida para análise também são mostrados. A σ_{max} obtida pela média dos valores foi de 368 MPa, superando o limite de escoamento (S_y) do material de 355 MPa. Este resultado deve ser interpretado com cuidado, pois foi obtido somente pelo fato do tipo de análise que está sendo feita ser linear, ou seja, obedece a proporcionalidade estabelecida pela lei de Hooke entre a tensão e a deformação mesmo para tensões acima do escoamento do material. Já a σ_{min} calculada foi de 200 MPa.

Figura 19 - Gradiente de tensões principais $P1$ no corpo central para: a) torque máximo quando $\beta=45^\circ$; b) torque mínimo quando $\beta=45^\circ$.





Fonte: o autor (2022).

Análises de elementos finitos com as mesmas condições de contorno também foram realizadas considerando os torques máximos e mínimos produzidos quando $\beta=15^\circ$ e 30° . Para o primeiro σ_{max} foi de 311 MPa e σ_{min} foi de 285 MPa. Já para o segundo, σ_{max} foi de 337 MPa e σ_{min} foi de 253 MPa. Importante ressaltar que para $\beta = 15^\circ$ e 30° a tensão máxima não excede o limite de escoamento do material como acontece em $\beta = 45^\circ$.

4.7 VIDA ESTIMADA PARA O CARDAN

Na Tabela 6 são apresentados os valores para a tensão média (σ_m) e alternante (σ_a) calculadas para os carregamentos cíclicos no corpo central do cardan quando $\beta=15^\circ$, 30° e 45° , considerando a correção de σ_m com o método de Dowling mencionado no item 3.7, para o início do escoamento localizado. O valor de k_{fm} calculado também é mostrado para o caso de $\beta = 45^\circ$. Para $\beta = 15^\circ$ e 30° , os valores de k_{fm} são iguais aos de k_f , pois $\sigma_{max} < S_y$, conforme método de Dowling.

Tabela 6 - Valores da tensão média e alternante no corpo central para $\beta=15^\circ$, 30° e 45° .

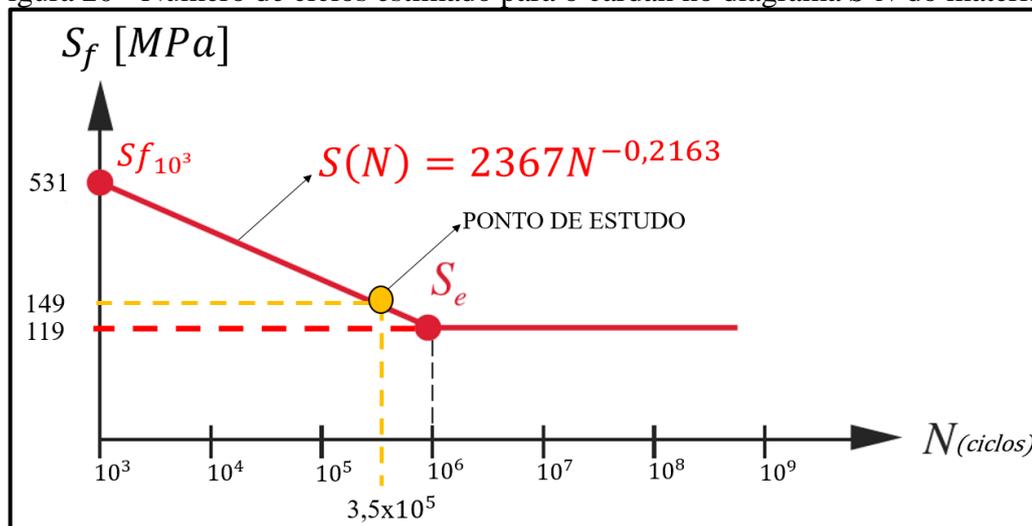
	$\beta=15^\circ$	$\beta=30^\circ$	$\beta=45^\circ$
Tensão média (σ_m) [MPa]	298	295	271
Tensão alternante (σ_a) [MPa]	13	42	84
Fator de concentração de tensão de Dowling (k_{fm})	1,500	1,500	1,431

Fonte: o autor (2022).

Comparando-se os dados da Tabela 6, percebe-se que à medida que β cresce, a σ_m reduz, porém a σ_a aumenta. O aumento de σ_a ocorre a uma taxa muito maior do que σ_m reduz. Para $\beta = 45^\circ$ a soma de σ_m e de σ_a resulta em 355 MPa, que é o limite de escoamento do material, já para $\beta = 15^\circ$ e 30° , a soma de σ_m e de σ_a resulta na σ_{max} .

O coeficiente de segurança à fadiga (F_{sy}) foi calculado através do critério de falha de Goodman modificado conforme Equação 22. O valor obtido foi de 0,87 quando $\beta=45^\circ$. Como $F_{sy} < 1$, pode-se estimar que a vida do cardan terá um valor menor do que 10^6 ciclos de tensão. Para $\beta=15^\circ$ e 30° , os valores de F_{sy} obtidos foram de 1,70 e 1,21, respectivamente.

Utilizando a equação da curva de vida construída para o material conforme Figura 15, o número de ciclos de tensão (N) calculado para o corpo central do cardan foi de aproximadamente $3,5 \times 10^5$ ciclos quando $\beta=45^\circ$. Como cada rotação do cardan representa dois ciclos de tensão e considerando que o cardan será utilizado a uma rotação de 133,97 rpm, a vida estimada para o cardan, com base na fadiga sofrida pelo corpo central devido as tensões máximas e mínimas produzidas pelo erro de gimbal, foi de 1323 minutos, ou então, aproximadamente 22 horas. Na Figura 20 o ponto de estudo é mostrado sobre diagrama $S-N$ montado para o material.

Figura 20 - Número de ciclos estimado para o cardan no diagrama $S-N$ do material.

Fonte: o autor (2022).

5 CONCLUSÃO

Os objetivos iniciais propostos neste estudo foram concluídos com sucesso. A vida estimada para o cardan, de aproximadamente 22 horas quando $\beta=45^\circ$, pode ser interpretada como curta, porém evidencia como o aumento do desalinhamento das juntas universais impacta na redução da vida dos componentes. Esse comparativo entre desalinhamentos pode ser feito também para a análise cinemática e de torque.

A aplicação de cardans em condições de desalinhamento como $\beta=45^\circ$ é algo incomum, quando o projeto exige um ângulo desta magnitude, uma análise detalhada deve ser conduzida, pois, embora a geometria dos garfos das juntas possibilite que o ângulo β seja atingido, pode ser que componentes do corpo central como a luva, ponteira ou tubo estejam falhando devido ao erro de gimbal. A rotação da aplicação nessas condições mais extremas de desalinhamento deve ser verificada, sendo ela o fator que mais contribui na redução de vida do conjunto, por aumentar a taxa com que a tensão alternante ocorre, conforme conclusões obtidas Biancolini *et al.* (2003) em seu estudo. Os fabricantes de cardans geralmente limitam a velocidade de operação dos cardans em 500 rpm nas situações em que as juntas estão desalinhadas em ângulos maiores que 35° , como pode-se visualizar no gráfico do Anexo A. Para casos de grande desalinhamento ($\beta > 35^\circ$) e rotações maiores que 500 rpm as juntas homocinéticas são indicadas.

Durante a execução deste trabalho, um modelo real do cardan proposto foi construído e encontra-se em funcionamento. Até o momento, o conjunto real não apresentou falhas, sendo este um fato contraditório se comparado com as 22 horas de vida estimadas. Porém, deve-se ressaltar que as condições de uso reais podem ser menos críticas do que as aqui especificadas, logo, as tensões obtidas pelo escoamento local do garfo devido aos concentradores de tensão podem não ser tão elevadas na realidade, com isso a vida é prolongada.

O modelo matemático utilizado para as análises de elementos finitos buscou interpretar da maneira mais fiel possível as condições ao qual o corpo central do cardan estará sendo submetido na realidade. Conforme visto nos artigos consultados, existem diversas formas de fixar o corpo e aplicar as cargas, simulando a condição real, cabendo então ao engenheiro julgar a maneira mais confiável de se obter os dados de tensão. Neste trabalho optou-se por validar o modelo matemático através de cálculos analíticos de tensão cisalhante gerada pelo torque, ou seja, análises de elementos finitos como as realizadas para o corpo central do cardan, foram conduzidas em um corpo central redesenhado de forma cilíndrica e alongada, para evitar a influência dos concentradores de tensão no resultado. Na sequência as tensões cisalhantes

produzidas na parte cilíndrica foram comparadas com os resultados obtidos analiticamente. O valor obtido numericamente atingiu 94% de proximidade ao valor obtido analiticamente.

A região crítica onde as tensões foram analisadas, localizada logo abaixo do olhal de montagem com a cruzeta, é comumente a região onde as fraturas ocorrem em casos reais de quebras de cardans e é a mesma região que Biancolini *et al.* (2003) verificou em seu trabalho. De certa forma, pode-se interpretar que quando o giro é transmitido pelos componentes, a cruzeta tenta flexionar as orelhas do garfo até que o giro dos rolamentos de agulha possibilite o deslocamento angular.

Por fim, a análise de fadiga em componentes como os cardans é de grande importância. A precisão deste tipo de análise depende de diversos fatores, como propriedades do material consideradas, forças que irão agir no conjunto e acuracidade do modelo matemático utilizado na obtenção das tensões resultantes. Embora os resultados obtidos sejam sempre estimativas de vida, é possível sim que através desses dados o projeto seja melhorado e falhas sejam prevenidas.

6 TRABALHOS FUTUROS

São descritas na sequência sugestões de técnicas de análise que podem melhorar a precisão dos resultados encontrados neste trabalho:

- a) desenvolvimento de um modelo matemático com condições de contorno que representem melhor nas análises de elementos finitos os esforços sofridos pelo cardan, podendo-se ainda utilizar *softwares* que prevejam a mudança rápida das cargas ao longo do tempo, em módulos de análise dinâmicos, o que não pode ser feito com o Simulation;
- b) analisar a fadiga através do método da vida sob deformação, que é uma análise mais detalhada da deformação plástica em regiões localizadas, como a região crítica do garfo do corpo central estudada neste trabalho;
- c) a fadiga pode ser analisada também de forma numérica, utilizando *softwares* específicos como fe-safe, n-code, femfat, onde uma comparação poderia ser feita entre dados obtidos e os resultados deste trabalho;
- d) realizar uma análise não linear de elementos finitos, ou seja, considerar que a rigidez da estrutura do cardan irá variar conforme as cargas forem agindo nos corpos do conjunto. O comportamento das tensões e das deformações não seria tratado de maneira proporcional, técnicas numéricas incrementais e iterativas teriam então que ser utilizadas para então se obter o valor das tensões. A análise não linear poderia ainda estar associada à calibração do modelo com base na curva de tensão-deformação experimental do material estudado para os garfos do cardan.

REFERÊNCIAS

- ALVES FILHO, Avelino. **Elementos Finitos: A base da tecnologia CAE**. 6. ed. São Paulo: Érica, 2013.
- ALVES FILHO, Avelino. **Elementos Finitos: A base da tecnologia CAE / análise dinâmica**. 2. ed. São Paulo: Érica, 2008.
- ASM INTERNATIONAL. **ASM Metals Reference Book**. 3. ed. [S.L.]: M.L. Bauccio, 1993.
- BIANCOLINI, M.E. *et al.* Dynamic, mechanical efficiency, and fatigue analysis of the double Cardan homokinetic joint. **International Journal Of Vehicle Design**, Roma, v. 32, n. 3/4, p. 231, 2003. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1504/ijvd.2003.003559>>. Acesso em: 16 out. 2021.
- BUDYNAS, Richard G.; NISBETT, J. Keith. **Elementos de máquina de Shigley: projeto de engenharia mecânica**. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.
- DANA GWB (Alemanha). **Eixos cardan para aplicações industriais**. Essen: Dana GWB, 2013. Catálogo.
- DASSAULT SYSTÈMES (EUA). **SolidWorks Simulation: Training**. Waltham: Dassault Systèmes Solidworks Corporation, 2012. Apostila.
- DOWLING, Norman E.. **Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue**. 4. ed. Harlow: Pearson, 2013.
- ELBE GROUP (Alemanha). **Complete Range Product Catalog: Cardan and double joints**. Bietigheim-Bissingen: Elbe Group, 2020. Catálogo. Disponível em: <https://www.elbe-group.de/files-elbe-group/EN_KAT_ElsoElbe_2020.pdf>. Acesso em: 28 ago. 2021.
- HAJDU, Štefan; ROLNÍK, Ladislav; ŠVOŠ, Juraj. Kinematics Simulation of the Cardan Shaft for Investigation of the Cardan Error in Catia V5. **Research Papers Faculty Of Materials Science And Technology Slovak University Of Technology**, Bratislava, v. 24, n. 39, p. 159-166, 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1515/rput-2016-0031>>. Acesso em: 17 out. 2021.
- MAINA (Itália). **Universal Shafts**. Asti: Carrer, 2009. Catálogo.
- NORTON, Robert L. **Cinemática e dinâmica dos mecanismos**. Porto Alegre: Bookman, 2010.
- NORTON, Robert L. **Projeto de máquinas: uma abordagem integrada**. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- PALMA, Pietro *et al.* Fatigue assessment of universal cardan joint based on laboratory specimen tests. In: 52° SEMINÁRIO DE LAMINAÇÃO, 52., 2017, Rio de Janeiro. **Anais do Seminário de Laminação e Conformação**. Rio de Janeiro: Editora Blucher, 2017. p. 396-408. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/279495194>>. Acesso em: 12 set. 2021.
- RAO, Singiresu S. **Vibrações Mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

ŠALINIĆ, Slaviša *et al.* On the torque transmission by a Cardan-Hooke joint. **Fme Transactions**, Kraljevo, v. 45, n. 1, p. 117-121, 2017. Centre for Evaluation in Education and Science (CEON/CEES). Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.5937/fmet1701117s>>. Acesso em: 16 out. 2021.

SCLATER, Neil. **Mechanisms and Mechanical Devices**: sourcebook. 5. ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 2011.

SEHERR-THOSS, Hans Christoph; SCHMELZ, Friedrich; AUCKTOR, Erich. **Universal Joints and Driveshafts**: analysis, design, applications. 2. ed. Berlin: Springer, 2010.

SOUZA, André Cristiano de. **Análise da falha do suporte de mancal de um eixo cardan utilizado num veículo pesado**. 2014. 145 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2014.

SPICER, Dana Albarus S.A. Indústria e Comércio Divisão. **Eixos Cardan Industriais**: catálogo técnico. São Paulo: Dana Albarus S.A. Indústria e Comércio Divisão Spicer, 1998. Catálogo.

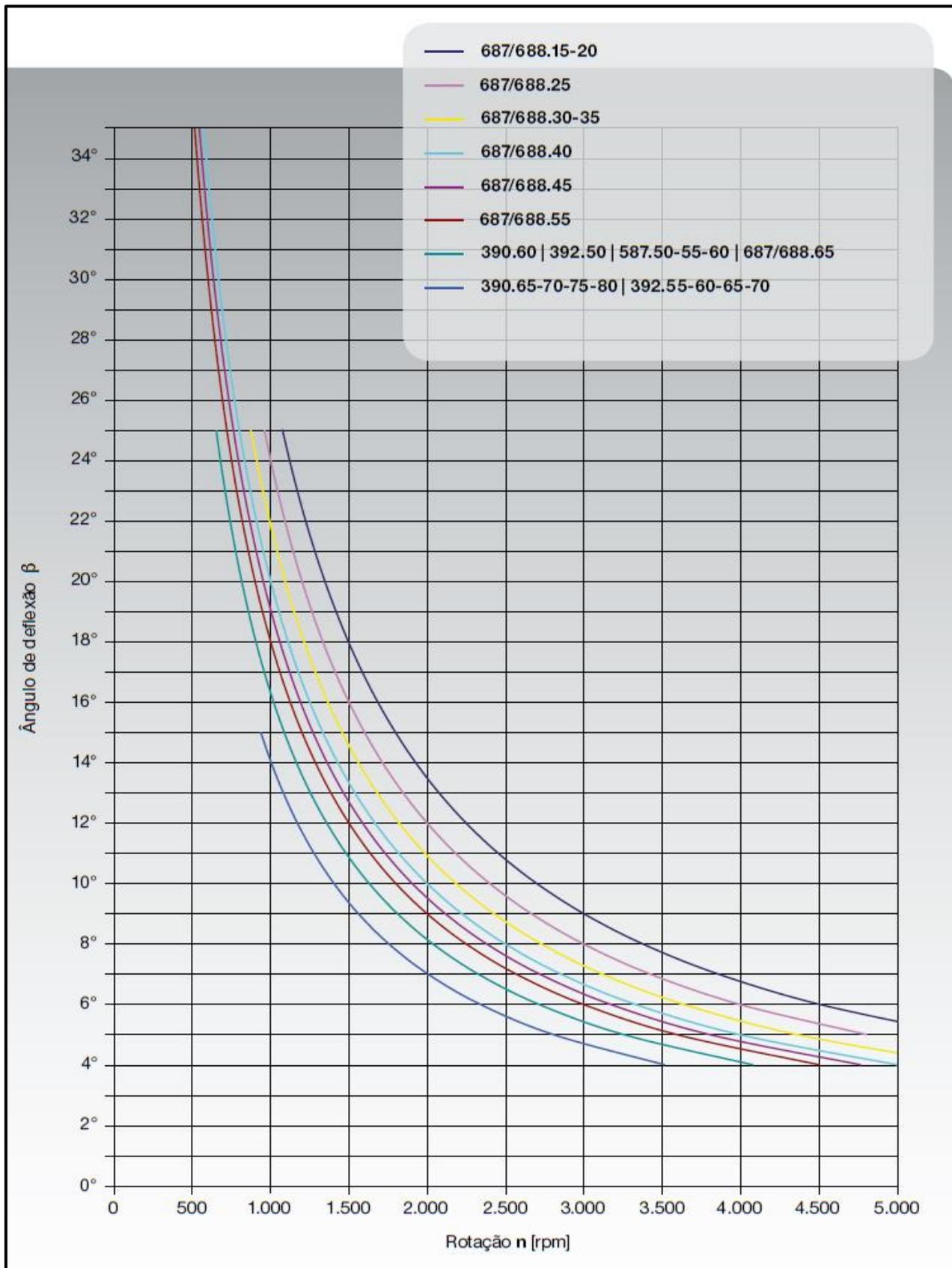
STOJANOVIĆ, Nadica *et al.* The influence of the axis positions of the double cardan joint on the kinematic characteristics. **Tractors And Power Machines**, Kragujevac, v. 24, n. 1/3, p. 58-64, 2019. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/337898650>>. Acesso em: 17 out. 2021.

VESALI, Farzad; REZVANI, Mohammad Ali; KASHFI, Mohammad. Dynamics of universal joints, its failures and some propositions for practically improving its performance. **Journal Of Mechanical Science And Technology**, Tehran, v. 26, n. 8, p. 2439-2449, 2012. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s12206-012-0622-1>>. Acesso em: 12 set. 2021.

VOITH GROUP (Alemanha). **Eixos Cardan de Alto Desempenho**: Produtos, Engenharia, Serviços. Heidenheim: Voith Group, 2020. Catálogo.

WEG CESTARI (Brasil). **Motorreductores WCG20**. Monte Alto: WEG Cestari, 2021. Catálogo.

ANEXO A – GRÁFICO RELACIONANDO O ÂNGULO DE DESALINHAMENTO DAS JUNTAS β COM A ROTAÇÃO n DO CARDAN PARA DIVERSOS MODELOS GWB



Fonte: Dana GWB (2013).