UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL

CASSIANO SCOTT PUHL

NÚMEROS COMPLEXOS: INTERAÇÃO E APRENDIZAGEM

CAXIAS DO SUL
2016

CASSIANO SCOTT PUHL

NÚMEROS COMPLEXOS:
INTERAÇÃO E APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Caxias do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Isolda Gianni de Lima
Coorientador: Prof. Dr. Francisco Catelli

CAXIAS DO SUL

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Universidade de Caxias do Sul
UCS - BICE - Processamento Técnico

P978n Puhl, Cassiano Scott, 1990-
Números complexos : interação e aprendizagem / Cassiano Scott Puhl. – 2016.
243 f. : il. ; 30 cm

Apresenta bibliografia.
Dissertação (Mestrado) – Universidade de Caxias do Sul, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, 2016.
Orientadora: Profa. Dra. Isolda Gianni de Lima ; Coorientador: Prof. Dr. Francisco Catelli.

1. Matemática - Educação. 2. Números complexos. 3. Aprendizagem. I. Título.

CDU 2. ed.: 37.016:51

Índice para o catálogo sistemático:

1. Matemática - Educação	37.016:51
2. Números complexos	511.14
3. Aprendizagem	37.013

Catalogação na fonte elaborada pela bibliotecária
Ana Guimarães Pereira – CRB 10/1460

Números complexos: interação e aprendizagem

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Caxias do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Caxias do Sul, 14 de março de 2016.

Banca Examinadora:

Prof[a]. Dr[a]. Isolda Gianni de Lima (orientadora)
Universidade de Caxias do Sul

Prof. Dr. Francisco Catelli (coorientador)
Universidade de Caxias do Sul

Prof[a]. Dr[a]. Liane Ludwig Loder
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof[a]. Dr[a]. Raquel Milani
Universidade Federal do Rio Grande

Prof[a]. Me. Ivete Ana Schmitz Booth
Universidade de Caxias do Sul

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por estar sempre me guiando nas escolhas profissionais e pessoais, dando-me entusiasmo e força, para concluir esta importante etapa de minha formação profissional. Em especial, agradeço a um anjo da guarda que me protege todos os dias, desde que soube da minha existência no seu ventre, minha falecida mãe Maria Laçalete Scott Puhl.

Agradeço aos meus pais, Paulino Puhl e Fátima Scott Puhl, por terem me ensinado a viver com simplicidade, dignidade, respeito e amor, além de sempre estarem ao meu lado, incentivando-me à contínua busca de aperfeiçoamentos dos meus conhecimentos.

Agradeço à minha namorada, Paloma Neuschrank, que me acompanhou durante toda esta caminhada, com carinho, amor e palavras de incentivo, sem esquecer-se das inúmeras correções ortográficas realizadas, dos artigos escritos para as disciplinas do Mestrado ou para eventos científicos.

Agradeço à professora Isolda Gianni de Lima, orientadora, amiga e companheira nesta caminhada. Uma excelente pessoa que acreditou no meu projeto e no meu potencial, guiando-me, motivando e aperfeiçoando as práticas docentes. Certamente, sem seu olhar crítico, construtivo e reflexivo, não teria obtido estes resultados no meu trabalho.

Agradeço ao professor Francisco Catelli, sua paciência e seus ensinamentos, sempre estando disposto a auxiliar no aperfeiçoamento do objeto de aprendizagem.

Agradeço aos professores do Mestrado no Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Caxias do Sul, os conhecimentos compartilhados.

Agradeço aos colegas de Mestrado, os conhecimentos compartilhados, as trocas de experiências, a colaboração e o incentivo perante as dificuldades encontradas nesta caminhada. Em especial, à Vanessa Cristina Rech Viganó, que foi parceira de estudos e produções nas disciplinas e na participação em eventos científicos.

Agradeço à Escola Estadual de Ensino Médio Bernardo Petry, o acolhimento e a viabilização da aplicação deste trabalho.

Agradeço, também, a todos que contribuíram de alguma forma para a criação deste produto de pesquisa, em especial, aos professores da banca de qualificação e aos da defesa, que proporcionaram momentos ricos de discussão e de aprendizagens.

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se uma pesquisa em Educação Matemática, que consistiu no desenvolvimento de um objeto de aprendizagem virtual (OA), para ser potencialmente significativo, com uma rota de aprendizagem planejada para compreender e operar com os números complexos. Este recurso digital foi construído com base em pesquisas realizadas com professores do Ensino Básico e do Ensino Superior, leitura de trabalhos científicos, participação em eventos de Educação Matemática e uma perspectiva própria de estratégias para a aprendizagem de números complexos. Para a pesquisa e a construção dos materiais seguiram-se fundamentos da teoria da aprendizagem significativa, da minuta do Programa Ensino Médio Inovador e de estudos voltados à criação de objetos de aprendizagem para a sala de aula. Com esta perspectiva, realizou-se uma pesquisa-ação, sendo objeto de estudo a própria sala de aula, buscando responder as seguintes questões: O OA construído tem potencial como recurso de aprendizagem dos números complexos? A rota de aprendizagem construída incentivou o estudo e promoveu a aprendizagem significativa dos números complexos? A proposta construída foi aplicada em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, no decorrer do terceiro trimestre de 2014. Como método para se construir os resultados utilizou-se a triangulação, que consiste em considerar diversos procedimentos de coleta de dados, visando qualificar a análise e os resultados da pesquisa. As avaliações do OA e dos processos de aprendizagem dos estudantes ocorreram de forma simultânea. A análise qualitativa dos dados, oriundos de diversos instrumentos (questionários, registros fotográficos e o diário de bordo) revelou que foi alcançado o principal objetivo, o de utilizar o OA, numa rota de aprendizagem potencialmente significativa, para promover a compreensão de conceitos sobre números complexos. Os resultados foram positivos em relação à proposta pedagógica, que integra o OA e a rota de aprendizagem, pois com esses recursos foi possível envolver os estudantes em um ambiente reflexivo, em que foram agentes na sua aprendizagem. Com isso, construiu-se um material que pode ser qualificado como potencialmente significativo, com estratégia ativa para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Aprendizagem ativa e significativa. Objetos de Aprendizagem. Rota de aprendizagem. Números complexos.

ABSTRACT

This work presents a research in Mathematical Education, which consisted in the development of a virtual learning object (LO), to be potentially significant, with a learning route, planned to understand and to operate with complex numbers. This digital resource was constructed based on researches with Elementary Education teachers and Higher Education professors, scientific works reading, participation in Mathematical Education events and a self-perspective strategy for complex numbers learning. This author followed the significant learning theory ground works, the *Programa Ensino Médio Inovador* draft and studies aimed at the LO creation toward the classroom to the research and the materials construction. From this perspective, a research-action happened, aim at the study of each chosen classroom, answering the following questions: Does the constructed LO have potential as learning resource of complex numbers? Did the constructed learning route stimulate the study and promote the significant learning of the complex numbers? The constructed proposal was applied in a group from High School 2014 third trimester. As method for building search results, it was in use triangulation that is to consider several data collection procedures taking aim at to characterize the analysis and the research's results. The LO ratings and the students learning processes occurred from simultaneous form. The data qualitative analysis arising from different instruments (questionnaires, photographic registers and log-book) revealed that the main objective was reached using the LO, in a significant potentially learning route to promote the concepts understanding on complex numbers. The results were positive in relation to the pedagogic proposal that integrates the LO and the learning route, because using these pedagogical resources, students was involved in a reflexive environment, where they were agents of their learning. Therewith, a material that can be qualified as potentially significant was constructed, with active strategy to the development of significant learning.

Keywords: Active and significant learning. Learning objects. Learning routes. Complex numbers.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Merlot	*Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching*
OA	Objeto de aprendizagem
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PPGECiMa	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
TICs	Tecnologias de Informação e Comunicação
UCS	Universidade de Caxias do Sul
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Ulbra	Universidade Luterana do Brasil
Unisinos	Universidade do Vale do Rio dos Sinos

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O sistema educacional brasileiro está sendo revisto, através do Programa Ensino Médio Inovador (BRASIL, 2014) e do Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio (BRASIL, 2013d), em que o ensino tradicional vem perdendo força para as tendências construtivas. A ruptura com o ensino tradicional já deveria ter acontecido, porém, somente agora, com os altos índices de reprovação e de evasão (IBGE, 2012), o governo federal tomou providências para mudar a epistemologia escolar.

Tais programas visam melhorar a qualidade de educação e modificar as práticas educacionais presentes nas escolas brasileiras. Para que isto ocorra, foi dada uma ênfase às metodologias construtivistas, sugerindo estratégias em que o estudante seja sujeito ativo no processo de aprendizagem. Além deste aspecto, surge a necessidade de se trabalhar de forma interdisciplinar, ou seja, buscando projetos que integrem algumas disciplinas escolares, ou de áreas de conhecimento, de uma forma que elas se completem. As mudanças pretendidas têm o objetivo de oferecer aos jovens condições de desenvolvimento de habilidades e conhecimentos necessários para que possam enfrentar a realidade atual em que estão inseridos. Este processo de transformação não ocorre instantaneamente, nem é simples. Por consequência, enquanto o ambiente educacional não se adapta ao contexto de construção de conhecimentos, a educação perde espaço e até o sentido para alguns estudantes.

Segundo Vasconcellos (2001), quanto mais o professor estudar, quanto melhor preparar as aulas e pô-las em conformidade com as condições para a aprendizagem do estudante, mais facilmente acompanhará as suas ideias; provocará mais respostas e mais perguntas; mais fácil será o processo de aprendizagem. O estudante demonstrando interesse em aprender é um dos elementos principais para se desenvolver a aprendizagem significativa e, consequentemente, diminuir as taxas de reprovação e evasão. Antes de detalhar o que é a aprendizagem significativa, realiza-se uma breve reflexão sobre o porquê de a escola estar passando por essas transformações.

Antigamente, a escola tinha o objetivo de formar pessoas com um conhecimento vasto, especialistas em determinado assunto. Mas, com a evolução da tecnologia, principalmente da internet, equipamentos como: *laptops*, *tablets*, *smartphones* e similares tornaram o acesso ao conhecimento mais fácil, substituindo a função social da escola tradicional. (MORETTO, 2007). “Talvez pudéssemos justificar este comportamento da escola, pois naquele tempo não existiam computadores para guardar estes dados e disponibilizá-los rapidamente. Mas hoje parece que isso não se justifica mais.” (MORETTO, 2007, p. 76). A sociedade contemporânea clama por cidadãos críticos, criativos que saibam lidar com problemas sociais e também que conheçam seus direitos e deveres para o bem próprio, para com quem convivem e para a sociedade. Assim, a escola deve repensar o seu objetivo.

Nesta direção, o ensino precisa se constituir como um processo educativo interdisciplinar e significativo, contribuindo para formar estudantes críticos e criativos. Para que isto ocorra, é preciso repensar as práticas pedagógicas, as estratégias utilizadas e buscar novos recursos que atualizem e inovem os processos de aprendizagem. Com estas ações reflexivas e de estudo, cresce a possibilidade de criar um ambiente escolar que favoreça a construção de conhecimentos de uma forma ativa e significativa. Desta forma, o papel do professor é de mediar, de trilhar e de caminhar junto com o estudante neste processo de construção do conhecimento. O professor será um guia que levará o discente a estabelecer conjecturas corretas durante as atividades e interações realizadas no ambiente escolar. Neste contexto, o estudante é um ser ativo no processo de aprendizagem, que não constrói um novo conhecimento, sem ter uma base sólida constituída na sua estrutura cognitiva.

A utilização de recursos digitais, das tecnologias de informação e comunicação (TICs), auxilia o professor a desenvolver o processo de aprendizagem em que o estudante pode se tornar o sujeito nas atividades desenvolvidas e no seu aprendizado. Para utilizar adequadamente recursos tecnológicos, numa perspectiva do Programa Ensino Médio Inovador, cabe ao professor planejar estratégias ativas, que privilegiam a construção do conhecimento, o que vai muito além de expor conteúdos em slides, que, ao contrário, pouco ou nada indica de inovação da ação didática. Os recursos tecnológicos ao ser planejados, organizados ou criados de acordo com as tendências educacionais atuais, podem constituir-se como apoio efetivo no processo de aprendizagem, seja na manipulação de variáveis, na checagem de hipóteses, na construção gráfica, entre outros.

Porém, não é somente o papel do professor, do estudante e da escola que está se transformando; os currículos escolares estão sendo revistos e modificados, sendo um dos objetivos do Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio. Alguns conteúdos, que em anos anteriores eram ensinados, agora nem aparecem nas grades curriculares; não há tempo para construir muitos dos conhecimentos que aparecem nos programas das disciplinas escolares. Visando maximizar o aproveito do tempo para a aprendizagem, os recursos digitais surgem como um meio para romper com o paradigma de espaço e tempo, ampliando os momentos para a construção do conhecimento, e também para acelerar o processo de aprendizagem. (MASINI; PEÑA, 2010).

A matemática, como outras disciplinas, tem sido restringida em termos de aprendizagem de conteúdos escolares. Muito dos assuntos clássicos da matemática básica, devido à restrição da carga horária, não são mais ministrados ou são abordados de forma superficial. O estudo dos números complexos, por exemplo, está sendo deixado de lado por boa parte dos professores do Ensino Médio, como mostram as pesquisas de Batista (2004) e de Mello e Santos (2005). E quando este assunto é abordado, geralmente é de forma superficial e não é compreendido pelos estudantes, como é mostrado na pesquisa de Nobre (2013). Este não ensinar ou não compreender os números complexos pode acabar refletindo no Ensino Superior, principalmente em cursos como os de Engenharia, que necessitam deste conhecimento na resolução de problemas, em disciplinas cujo foco seja, por exemplo, a eletricidade.

Nesta perspectiva, o **objeto desta pesquisa está relacionado ao desenvolvimento de um recurso digital, potencialmente significativo, num formato diferenciado do que se encontra na bibliografia disponível e consultada, que é a construção de um objeto de aprendizagem (OA) com uma rota de aprendizagem[1] para o estudo de números complexos**. O conjunto dos números complexos consta, em geral, nos programas do 3º ano do Ensino Médio ou, como acontece em algumas escolas, não é estudado. Assim, o OA está sendo construído para servir como recurso de aprendizagem para os estudantes do Ensino Médio.

Além dos fatores citados anteriormente, a escolha do projeto de pesquisa envolveu duas situações específicas. A primeira situação ocorreu durante o curso de graduação em Licenciatura Plena de Matemática, onde obtive o conhecimento desse conjunto dos números complexos. A existência de números com a raiz quadrada negativa chamou-me a atenção e despertou algumas curiosidades, principalmente sobre a unidade imaginária. Na disciplina de Números Complexos e Equações Polinomiais, ocorreu o primeiro contato com este tipo de número, que gerou um pouco de estranheza; porém, durante a disciplina fez-se um estudo histórico, sendo desafiado a criar um plano de aula para se trabalhar a radiciação de números complexos, num contexto geométrico. E, na disciplina Fundamentos dos Processos de Ensino e de Aprendizagem de Matemática, tive novamente um contato mais intenso com este

[1] Rota de aprendizagem é a expressão escolhida para designar, neste trabalho, uma sequência didática. Escolheu-se rota de aprendizagem, pois sugere um caminho que foi trilhado, e que poderia ser modificado em qualquer momento do percurso, ajustando-a aos objetivos de aprendizagem.

conjunto numérico, sendo desafiado a construir um *site*,[2] com algumas curiosidades sobre este tipo de número, como também algumas reflexões sobre o ensino de matemática.

A decisão de utilizar um recurso digital foi uma escolha pessoal, porque desde minha infância sempre fiz cursos de informática e tive certa facilidade de lidar com estes recursos. Antes de ser professor de Matemática, havia trabalhado como professor e instrutor de informática. Pensando em algo desafiador para o mestrado, decidi unir o gosto pela informática e pela arte de ensinar com um conteúdo temido por alguns estudantes, que são os números complexos, tendo o grande objetivo de criar um objeto de aprendizagem em que o estudante pudesse interagir e aprender com os recursos mediadores de ações propostas.

Esse recurso digital foi construído pretendendo desenvolver a autonomia do estudante, fazendo dele um sujeito ativo e reflexivo em todo o processo de aprendizagem. O OA construído não se configura como uma nova proposta pedagógica, mas como um recurso de apoio à aprendizagem ou, por vezes, de uma estratégia de aprendizagem, para construir conhecimento significativo. Durante a escrita desta pesquisa, encontrou-se uma necessidade também de destacar não somente o OA construído, mas também uma rota de aprendizagem.

A construção da rota de aprendizagem foi um processo árduo que demandou muito tempo para ser concretizado e, orientado por muitos estudos e discussões sobre estratégias de aprendizagem, subsunçores[3] dos estudantes e sobre tecnologia, criou-se e testou-se aplicativos construídos no GeoGebra, além de outros *softwares*. Estes esforços tinham o objetivo de criar uma rota de aprendizagem que estivesse de acordo com as modificações proposta às escolas e a professores, pelo Programa Ensino Médio Inovador, e com a teoria de aprendizagem significativa de Ausubel. Deste modo, criou-se um material potencialmente significativo, em que o estudante seja sujeito ativo no processo de construção do conhecimento, instigando-o à curiosidade e à compreensão do significado dos conceitos abordados.

Assim, definiu-se **o tema desta pesquisa e dissertação como Números Complexos: interação e aprendizagem**. O objeto de aprendizagem, com a rota de aprendizagem proposta, foi aplicado aos estudantes do 3ª ano do Ensino Médio Politécnico da Escola Estadual Bernardo Petry de Vale Real/RS, no terceiro trimestre letivo do ano de 2014, tendo como foco a aprendizagem ativa[4] e significativa,[5] mediante a utilização de um OA e de uma rota de

---

[2] Disponível em: <https://sites.google.com/site/matematicacomplexa/>.

[3] Subsunçores é um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo, um conhecimento que o estudante já compreende. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980).

[4] Na aprendizagem ativa, o estudante não deve ser apenas ouvinte de informações, mas se engaja de maneira ativa para compreender, refletindo sobre sua prática e ações em sala de aula, buscando a construção de conhecimentos. (GUDWIN, 2014).

aprendizagem mediada por materiais potencialmente significativos[6] para a construção de conceitos sobre números complexos.

O produto final deste trabalho de pesquisa é, portanto, o OA como um recurso de aprendizagem de números complexos, disponível virtualmente e de acesso gratuito, que integra uma rota de aprendizagem, que foi aplicada e cujos resultados foram analisados neste trabalho. Este estudo será compartilhado com professores e estudantes em formação para a docência, visando divulgar o OA, como também receber sugestões de aperfeiçoamento de profissionais de diversas áreas. O compartilhamento do trabalho ocorrerá, inicialmente, através da dissertação e de eventuais artigos científicos publicados em eventos ou revistas da área da Educação. Além dos artigos científicos, também poderá ser sugerida uma nova rota de aprendizagem, percorrida sem a orientação de um professor, no modelo de um minicurso, para a aprendizagem dos números complexos, como um estudo a distância e utilizando somente o OA.

Diante dessas novas tendências educacionais, que sugerem fortemente a proposição e o desenvolvimento de estratégias de aprendizagem significativa e ativa, pretende-se, no final desta dissertação, responder as seguintes questões: O OA construído tem potencial como recurso de aprendizagem dos números complexos? A rota de aprendizagem construída incentivou o estudo e promoveu a aprendizagem significativa dos números complexos?

No final da dissertação obtiveram-se indícios para qualificar a pesquisa realizada, respondendo os questionamentos. Os dados de análise foram coletados de observações realizadas durante as aulas, anotações no diário de bordo, resultados de atividades e desafios propostos, e de respostas em questionários respondidos pelos estudantes. Adotando a fundamentação de aprendizagem ativa e significativa, foi possível analisar respostas apresentadas pelos estudantes, em questionários e em declarações sobre a aprendizagem de conceitos dos números complexos. Então, neste trabalho, o objeto de estudo é a aprendizagem ativa e significativa de números complexos no Ensino Médio, com o **objetivo geral o de verificar a ocorrência de aprendizagem significativa de conceitos dos números complexos, por meio da utilização de OA numa rota de aprendizagem potencialmente significativa.**

---

[5] Na aprendizagem significativa, o estudante ancora um novo conhecimento em um conhecimento presente na sua estrutura cognitiva. Esse novo conhecimento é compreendido, deixando de ser meras palavras memorizadas, para ter um significado para o estudante. (AUSUBEL, 2003).

[6] O material potencialmente significativo pode ser entendido como uma "tarefa de aprendizagem que pode ser aprendida significativamente, tanto porque é logicamente significativa como porque as idéias relevantes estão presentes na estrutura cognitiva particular de um aprendiz." (AUSUBEL; NOVAK; HANESSIAN, 1980, p. 525). E considerar a tarefa logicamente significativa, implica abordar aspectos mais gerais antes que os específicos, de maneira não arbitrária e não literal a uma estrutura cognitiva apropriada. (MOREIRA, 2011c).

Os **objetivos específicos** que constituíram a pesquisa são:

- **fundamentar a rota de aprendizagem e a construção do OA com teorias de aprendizagem construtivistas, em consonância com o Programa Ensino Médio Inovador;**
- **criar um ambiente virtual, reflexivo de aprendizagem, no qual o estudante poderá interagir e construir o conhecimento dos números complexos;**
- **elaborar e aplicar uma rota de aprendizagem potencialmente significativa como uma estratégia de aprendizagem ativa, autônoma e significativa de conceitos dos números complexos;**
- **analisar o potencial de aprendizagem do OA, como também da rota de aprendizagem que foi aplicada;**
- **organizar um texto compreensível aos estudantes de Ensino Médio sobre algumas aplicações dos números complexos.**

A partir desses objetivos estabelecidos, a dissertação está organizada em alguns tópicos, buscando indícios da concretização deles. O trabalho está estruturado com oito seções, em que se disserta sobre os estudos, a pesquisa desenvolvida e as conclusões, conforme a exposição a seguir:

Neste texto da introdução, apresenta-se a justificativa do tema, descrevendo o problema de pesquisa e os objetivos a serem alcançados.

Na segunda seção, *O que é o novo Ensino Médio?*, contextualiza-se o atual Ensino Médio proposto pelo Programa Ensino Médio Inovador e pelo Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio.

Na continuidade, como terceira seção, *Mas por que mudar a metodologia?*, dialoga-se sobre a aprendizagem ativa e significativa, a interdisciplinaridade e a importância dos planejamentos didáticos.

Na quarta seção, *E como ficam as tecnologias na escola?*, descreve-se o uso das tecnologias na área da educação, os procedimentos e as preocupações a ser consideradas na construção de um objeto de aprendizagem. Desta forma, finaliza-se as seções que compõem a fundamentação teórica da pesquisa.

Na quinta seção, *Por onde trilhamos*, apresenta-se dados das pesquisas realizadas com professores do Ensino Médio. Essas pesquisas aconteceram logo no início dos estudos como forma de conhecer as estratégias trabalhadas, os tópicos estudados em sala de aula, o tempo destinado ao conteúdo e também se os professores utilizavam algum recurso digital.

Abordou-se, na sequência, o processo de construção do OA, como também os recursos utilizados. Ali, também apresenta-se o tipo de pesquisa, a metodologia que foi utilizada, juntamente com uma descrição de como a mesma foi realizada.

Na sexta seção, *Construção feita! E você, pronto para conhecer o OA?*, detalham-se os espaços de ambientes disponíveis no OA. Todos os ambientes desenvolvidos tiveram uma motivação especial para sua criação, alguns de reflexões didáticas, e outros de conversas informais com professores do Ensino Médio e do Ensino Superior. Assim, justifica-se a criação de cada espaço para, no final, construir um recurso digital potencialmente significativo.

Na sétima seção, *Frutos deste estudo*, procedeu-se à análise dos resultados obtidos e dos recursos que dão visibilidades ao alcance dos objetivos almejados. A triangulação de diversos métodos é um meio utilizado para qualificar a pesquisa, como também para mostrar os objetivos que conseguimos atingir. Entre os recursos utilizados para a análise estão as entrevistas, os questionários, as observações e o diário de bordo.

Nas conclusões, retornar-se com o objetivo geral, refletindo sobre o OA e a rota de aprendizagem sugerida, e se constroem respostas para as questões da pesquisa; apresenta-se o parecer próprio sobre a caminhada, os percalços, os sucessos e toda a aprendizagem. Por fim, declara-se a intenção de ampliar e aprimorar o OA em estudos futuros. Seguindo as seções, apresenta-se as referências bibliográficas utilizadas para a realização deste trabalho e os anexos.

2 O QUE É O NOVO ENSINO MÉDIO?

Muitas escolas, ditas tradicionais, são vistas como instituições de reprodução de conhecimentos, em que o aluno se torna um ser alienado e repetidor, incorporando um perfil medíocre de cidadão, que não pensa sobre suas ações, somente reproduz a classe dominante. (BECKER, 2001). Este pensamento vem de longa data, e é – infelizmente – ainda bastante atual. Becker (2001, p. 43) se questionava: "Será que nós queremos continuar com essa pedagogia, com essa didática, ou será que nós temos de virar a mesa de uma vez por todas?".

Fica evidente que não se quer mais formar este tipo de estudante; que é necessário mudar este paradigma educacional. Muitas ideias, projetos e providências são considerados na tentativa de rever o processo educacional. Assim é, por exemplo, a iniciativa do governo ao criar o Programa Ensino Médio Inovador, que visa a "disseminação da cultura de um currículo dinâmico, flexível e que atenda às demandas da sociedade contemporânea". (BRASIL, 2014, p. 10).

O papel da escola deve ser novo. Ela não deve mais preparar reprodutores de conhecimentos, em geral, sem significado, mas "preparar atores transformadores de sociedade. Nessa linha de pensamento, formulamos o princípio: uma função social da escola é ajudar a formar gerentes de informações e não meros acumuladores de dados". (MORETTO, 2007, p. 67).

Assim, a escola deve se preparar para desenvolver os conteúdos de forma diferente, em que o estudante se torne sujeito deste processo de aprendizagem e que compreenda o significado do conteúdo escolar. Visando proporcionar um momento de reflexão e um momento de formação continuada aos professores, o Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio tem como objetivo:

> "Refletir sobre o currículo do Ensino Médio, promovendo o desenvolvimento de práticas educativas efetivas com foco na formação humana integral, conforme apontado nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) é fazer com que o professor reflita e repense a sua prática em sala de aula" (BRASIL, 2013b, p. 20).

Para atingir esse objetivo, fez-se necessário um redesenho curricular, ampliando a carga mínima de horas para três mil horas, dessas seiscentas horas optativas e, ao invés das disciplinas escolares, tem-se áreas de conhecimento. (BRASIL, 2014). As áreas de conhecimento exercem um papel fundamental, solicitando aos estudantes que planejem em conjunto, desenvolvendo os conteúdos de forma interdisciplinar, quando o assunto "conversa" com várias áreas de conhecimento. Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica, no art. 8º, § 1°: “O currículo deve contemplar as quatro áreas de conhecimento, com tratamento metodológico que evidencie a contextualização e a interdisciplinaridade ou outras formas de interação e articulação entre diferentes campos de saberes específicos.” (BRASIL, 2013a, p. 143).

A integração das disciplinas criou quatro áreas de conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias, composta pelas disciplinas de Língua Portuguesa, Língua Estrangeira Moderna, Educação Física e Arte; Matemática e suas Tecnologias, pela disciplina de Matemática; Ciências Humanas e suas Tecnologias, por História, Geografia, Sociologia e Filosofia; Ciências da Natureza e suas Tecnologias, as disciplinas de Biologia, Física e Química; e a ainda a disciplina de Seminário Integrador. (SEDUC, 2011).

O Seminário Integrador reforça a forma intelectual e complexa do estudante, permitindo ser protagonista na aprendizagem dos conteúdos, através da elaboração e execução de projetos de pesquisa. (SEDUC, 2011). Deste modo, este é um recurso utilizado para se conseguir atingir os quatro eixos temáticos – trabalho, ciência, tecnologia e cultura – propostos pelo Ensino Médio Inovador. (BRASIL, 2014).

Os eixos temáticos estão interligados, e as palavras, somente, podem receber diversos sentidos; assim, será definido o que cada eixo temático significa. O trabalho não deve ser compreendido como um ensino voltado para uma profissão específica, mas uma transformação consciente, uma intervenção sobre o mundo, os objetos, as suas mediações no processo de produção da sua existência. O trabalho é uma realização inerente ao ser humano, o que o diferencia dos animais. (BRASIL, 2013c).

A cultura é o ambiente do ser humano, o local onde ocorre o trabalho, formado por crenças, símbolos, conhecimentos, representações e significados que correspondem aos valores éticos, políticos e estéticos, que norteiam as normas de conduta da sociedade. Deste modo, a cultura contém os resultados produzidos e reproduzidos pelo ser humano, através de suas ações transformadoras. (BRASIL, 2013c).

A ciência é o conhecimento sistematizado, de caráter transitório, que busca a compreensão e a transformação da natureza e da sociedade. A ciência, como a cultura, possui o conhecimento de diversas áreas sobre vários fatos históricos e sociais, nos quais a sociedade realiza e vivencia. (BRASIL, 2013c).

A tecnologia é uma coleção de sistemas projetada para a realização de alguma função social; sendo assim, a transformação da ciência em força produtiva ou mediação do conhecimento científico, produz e transforma a realidade física e social do ser humano. A tecnologia não está presente, somente, nos tempos atuais. (BRASIL, 2013c). Segundo Masini e Peña (2010, p. 83): "Cada momento histórico teve seu aparato tecnológico específico que sofreu mudanças com a interferência e os aperfeiçoamentos propostos pelas inovações científicas." Desse modo, alguns recursos simples, como o fogo e a técnica de manufatura artesanal de ferramentas, podem ser considerados grandes conquistas tecnológicas na Pré-História. (MASINI; PEÑA, 2010).

A construção de um currículo integrado[7] é uma forma de contemplar os quatro eixos temáticos, sendo necessária a criação de projetos interdisciplinares. Ao executar projetos que integram mais de uma área de conhecimentos, proporciona-se aos estudantes uma compreensão global do conteúdo estudado. (LÜCK, 2002; PAVIANI, 2008; MORIN, 2004). As questões relativas à interdisciplinaridade serão consideradas na seção quatro. A função do professor, ao propor projetos com um currículo integrado, é o acompanhamento da elaboração e da execução de projetos, tendo como objetivo "possibilitar a compreensão do significado dos conceitos, das razões e dos métodos pelos quais se pode conhecer o real e apropriá-lo, em seu potencial, para o ser humano". (BRASIL, 2013c, p. 26).

Seguindo essas orientações, decidiu-se utilizar uma tendência construtivista, fundamentando a opção pedagógica na aprendizagem significativa de Ausubel.[8]

[7] Segundo BRASIL (2013c): "O currículo integrado organiza o conhecimento e desenvolve o processo de ensino-aprendizagem de forma que os conceitos sejam aprendidos como sistema de relações de uma totalidade concreta que se pretende explicar/compreender." (p. 25).

[8] David Ausubel (1918-2008) nasceu em New York e foi um grande psicólogo da educação.

3 MAS, POR QUE MUDAR A METODOLOGIA?

Conforme já foi relatado, a fundamentação teórica para a criação do OA e da rota de aprendizagem seguiu tendências construtivistas, configuradas em especial na teoria de aprendizagem significativa de Ausubel.

Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 34), "a essência do processo de aprendizagem significativa é que as idéias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal)". O conteúdo a ser aprendido deve se relacionar com conhecimentos já existentes, chamados de subsunçores. O subsunçor é o ponto mais importante no processo de aprendizagem, pois é âncora para novos conhecimentos e ideias. (MOREIRA, 2011b).

O novo conceito é ancorado à estrutura cognitiva, indicando que há uma relação não arbitrária da aprendizagem. (AUSUBEL, 2003). Assim, o conhecimento não se constitui apenas de palavras, regras ou algoritmos. (MOREIRA; MASINI, 2006). Subsunçor é um conhecimento estável na estrutura cognitiva do sujeito que aprende e que permite, por interação, ancorar novos conhecimentos e, ao mesmo tempo, ampliar os que serviram de apoio. Os subsunçores não se referem somente a conceitos ou operações compreendidas pelos estudantes, mas podem ser concepções, construtos, proposições já incorporadas, representações, modelos, enfim conhecimentos prévios especificamente relevantes para a compreensão de novos conhecimentos. (MOREIRA, 2011a).

Ao compreender um conteúdo, o estudante vai além de repetir; usa mais que processos de memória; passa a compreender conceitos e relações entre conceitos, fatos que os envolvem e a refletir sobre eles. Conforme Ausubel (2003), as duas características para o desenvolvimento da aprendizagem significativa são a não arbitrariedade e a substantividade.

A não arbitrariedade significa que o conteúdo não pode ficar solto na mente do estudante, deve estabelecer ligações entre o novo conhecimento com algum que já possua. Este conhecimento que o estudante tem na sua estrutura cognitiva, Ausubel (2003) chama de subsunçor. Assim, o conhecimento do estudante vai ampliando, enriquecendo, construindo ou se reconstruindo, através daquele que ele já possui. Então, o estudante utiliza um conjunto de subsunçores que servem como ancoradouro do novo conhecimento; se houver a construção do conhecimento, os novos conceitos estarão agregados aos subsunçores. Deste modo, o "novo" subsunçor apresentará um nível mais elevado de conhecimento, possibilitando a ancoragem de novos conteúdos. (AUSUBEL, 2003).

A outra característica é a substantividade, é a parte mais desejada pelos estudantes; refere-se a desenvolver uma aprendizagem com sentido, compreendendo o significado do conhecimento, alguma aplicação ou a sua utilidade. Em outras palavras, a substantividade é o significado do conteúdo. Deste modo, para os estudantes, o ensino deixa de ser apenas de palavras, de regras ou de algoritmos, e passa a ter significado. (MOREIRA; MASINI, 2006). Pela experiência profissional, grande parte dos estudantes fazem as perguntas: “Porque vou aprender este conteúdo?” e “Onde vou utilizar isso?” São perguntas que demonstram a necessidades de compreenderem o significado do conhecimento, para aproveitá-lo da melhor forma possível.

Ausubel (2003) contrapõe-se à aprendizagem mecânica, caracterizada pela tentativa de o professor “passar a matéria” aos estudantes, independente do contexto e da verificação e consideração de subsunçores. O professor, se acredita ser o transmissor do conhecimento, acredita, também, que a aprendizagem ocorre, e pode ocorrer, mas se o estudante não se envolver mais do que escutando e copiando, essa aprendizagem é, provavelmente, por memorização, sem significado de conceitos ou de operações que devem ser repetidas pelo estudante num curto prazo, especialmente numa avaliação formal como, por exemplo, no caso de uma prova. (MOREIRA, 2011c). No entanto, em algumas situações, como de um conhecimento completamente novo ou na aprendizagem de um algoritmo, de uma regra operacional, por exemplo, pode ocorrer dos estudantes não terem subsunçores sólidos o suficiente para ancorar a compreensão plena do novo conhecimento. Quando se está neste cenário, de aprendizagem de conceitos inteiramente novos, é justificável, em certa medida, a ocorrência de aprendizagens mecânicas, que através da repetição ou de relação com outras aprendizagens podem tornar-se significativas, estabelecendo uma relação não arbitrária e substantiva com outros conceitos específicos. (AUSUBEL, 2003). Para definir qual tipo de estratégia de aprendizagem proporcionar, em cada nova situação, é necessário averiguar o que os estudantes possuem como subsunçores, o que é possível promover de modo a ampliá-los e que aprendizagens podem ou precisam iniciar como mecânicas, podendo converter-se depois em significativas, e planejar atividades adequadas para o progresso dos estudantes.

Segundo as novas tendências educacionais, o ensino precisa se constituir como um processo educativo interdisciplinar e significativo para os estudantes. (BRASIL, 2014). Deste modo, é necessário aprender o significado dos conteúdos; assim, a aprendizagem mecânica se torna ultrapassada. O cenário educacional atual requer que se proponha uma aprendizagem significativa aos estudantes.

Nesta abordagem, o professor passa a ser um mediador, um orientador na construção do conhecimento, e não um transmissor, como na educação de base mecânica (COLL, 1999; MOREIRA, 2011b). Nesta teoria de aprendizagem, não existe um único sujeito no processo de aprendizagem, tanto o professor quanto o estudante são responsáveis para que ocorra a aprendizagem. Para isto, o diálogo entre professor e aluno, aluno e aluno, aluno e objeto de estudo e professor e objeto de estudo será constante. (COLL, 1999; MOREIRA, 2011b). Somente através de idas e vindas, o professor e o estudante cumprirão o objetivo da aula que é a aprendizagem.

Desta forma, o professor será um mediador na construção do conhecimento, irá promover o diálogo entre aluno e aluno e professor e aluno e, principalmente, incentivando-os a "aprender a aprender", transformando o espaço escolar num ambiente de aprendizagem agradável, inovador, dinâmico e flexível. Com todas essas mudanças, o estudante passa a ser ativo no processo, dialogando, questionando e buscando o conhecimento, ora na interação com os materiais de estudo, que integram também recursos digitais, ora na interação com colegas ou com o professor. Porém, não basta somente seguir essas orientações para desenvolver a aprendizagem significativa, existem outros dois fatores a destacar: a predisposição do estudante em aprender, e o material disponibilizado deve ser potencialmente significativo.

O estudante precisa ter uma predisposição para compreender e aprender. A predisposição não se refere somente à vontade do estudante de aprender, mas, também, de uma disposição mental para a aprendizagem, iniciando pelos subsunçores. A disposição mental refere-se aos subsunçores dos estudantes, conhecimentos prévios especificamente relevantes, que geralmente são um facilitador no processo de aprendizagem significativa. (MOREIRA, 2011a). Se o estudante não possui um subsunçor claro, estável e conciso na sua estrutura cognitiva, a predisposição é afetada pela dificuldade em assimilar os conceitos abordados, atrasando o processo de aprendizagem. Outro elemento que influencia é a relevância que o estudante atribui para o objeto de estudo, além dos fatores sociais e afetivos. Assim, pode-se definir a predisposição como um "esforço deliberado, cognitivo e afetivo, para relacionar de maneira não arbitrária e não literal os novos conhecimentos à estrutura cognitiva". (MOREIRA, 2003a, p. 2).

Assim, a seguinte questão merece reflexão: "É possível orientar alguém que não quer aprender?" Isto é impossível, porque para Ausubel (2003), a aprendizagem significativa somente se efetivará se o estudante tiver vontade de aprender; assim, além de mediador o professor tem a função de motivador, ou seja, deve despertar a sede para a aprendizagem.

Uma forma de motivar os estudantes é através da explanação de aplicações sobre o conteúdo estudado, podendo dar sentido a este assunto.

O material propiciado pelo professor deve ter um potencial significativo, um material bem-elaborado, que o estudante manuseia facilmente e consiga aprender com ele. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). Este material não é para ser copiado e depois repetido em testes de aproveitamento, mas para ser compreendido, para ser reconhecido e aplicado. A função do professor ou do material não é a de transmitir o conhecimento, mas o de guiar o processo, permitindo e favorecendo a construção de conceitos.

Ao elaborar um material potencialmente significativo, é importante tomar alguns cuidados. Ele está baseado, principalmente, nos princípios abordados anteriormente. O material criado deve apresentar substantividade, ou seja, dar sentido ao estudo; através da substantividade, pode-se fazer com que o estudante desenvolva uma predisposição para aprender; e, como foi destacado acima, os subsunçores necessários devem estar disponíveis para ancorar o novo conhecimento.

Se os estudantes não apresentarem os subsunçores, o professor pode propiciar a aprendizagem mecânica ou utilizar um organizador prévio, com este propósito. Segundo Moreira:

> Organizadores prévios são materiais introdutórios apresentados antes do material de aprendizagem em si. É o caso desta introdução: trata-se de um texto inicial, com algumas ideias gerais e um esquema conceitual, que pretende facilitar a aprendizagem significativa das teorias de aprendizagem enfocadas nos textos. (2011b, p. 11).

Completando este pensamento, "os organizadores prévios são úteis para facilitar a aprendizagem na medida em que funcionam como 'pontes cognitivas'". (MOREIRA; MASINI, 2006, p. 21). Quer dizer, o organizador prévio serve como estrutura básica para se alcançar um novo conhecimento. Somente com tal concepção é possível a criação de um material didático potencialmente significativo. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980).

Visando a aprendizagem significativa, Ausubel (2003) propõe a utilização de princípios facilitadores: a diferenciação progressiva, a reconciliação integradora, a organização sequencial e a consolidação. (AUSUBEL, 2003).

A diferenciação progressiva refere-se a uma organização hierárquica do conhecimento, decorrendo de cima para baixo, ou seja, devendo ser apresentados os conceitos gerais desde o início e, depois, desenvolvidos tópicos mais específicos, detalhando e diferenciando o conteúdo estudado. (AUSUBEL, 2003). Segundo Ausubel:

> Esta ordem de apresentação corresponde, presumivelmente, à sequência natural de aquisição de consciência cognitiva e de sofisticação, quando os seres humanos estão expostos, de forma espontânea, quer a uma área de conhecimentos completamente desconhecida, quer a um ramo desconhecido de um conjunto de conhecimentos familiar. (2003, p. 166).

Sendo assim, a diferenciação progressiva pode ser alcançada a partir de sucessivas interações com materiais potencialmente significativos, na assimilação[9] de novos conceitos, fortalecendo os subsunçores para futuras ancoragens. (AUSUBEL, 2003).

Como consequência natural, ao organizar o material pela diferenciação progressiva, os estudantes estabelecem relações entre conceitos, fazendo comparações de diferenças e semelhanças, sendo um processo dinâmico da estrutura cognitiva, denominado por Ausubel como reconciliação integradora. (AUSUBEL, 2003). A reconciliação integradora exerce a apreensão de diferenças, semelhanças ou a resolução de concepções errôneas, do novo conhecimento em relação aos subsunçores dos estudantes. (AUSUBEL, 2003). Assim, com a reconciliação integradora, os subsunçores ganham corpo, pois a estrutura cognitiva do estudante unifica os conceitos semelhantes num único conjunto de subsunçores, permitindo que novos conhecimentos sejam ancorados nesse subsunçor.

A organização sequencial deve ser levada em consideração quando o material potencialmente significativo é construído e proposto aos estudantes, levando em consideração os subsunçores e as relações de dependência entre as matérias estudadas. Muitas vezes, para a compreensão de um conhecimento, é necessário o entendimento de um conceito anteriormente ensinado. Assim, é necessária a ordenação de tópicos coerentes com os subsunçores dos estudantes e a dependência sequencial dos conteúdos. (AUSUBEL, 2003).

A maior vantagem desse princípio consiste na organização de um material, em grau gradativo de dificuldade, que assegure "que cada progresso alcançado na aprendizagem sirva como uma base apropriada e uma função de ancoragem para a aprendizagem e a retenção de itens subsequentes na sequência ordenada". (AUSUBEL, 2003, p. 171).

A consolidação é o último princípio cujo objetivo é a aprendizagem significativa, a compreensão dos conceitos estudados, enriquecendo o conhecimento presente na estrutura cognitiva do estudante. Segundo Ausubel: "A consolidação, como é óbvio, alcança-se através

[9] Segundo Ausubel (2003, p. 106), na "teoria da assimilação está a idéia de que se adquirem os novos significados através da interacção de novas idéias (conhecimentos) potencialmente significativas com proposições e conceitos anteriormente apreendidos. Este processo interactivo resulta numa alteração quer do potencial significado das novas informações, quer do significado dos conceitos ou proposições aos quais estão ancoradas e cria, também, um novo produto ideário que constitui o novo significado para o aprendiz".

da confirmação, correcção e clarificação, no decurso do retorno (feedback), e através da prática diferencial e da revisão, no decurso da exposição repetida, com retorno, ao material de aprendizagem". (2003, p. 172). Para Ausubel (2003), uma maneira de confirmar a consolidação é através de uma avaliação frequente, recebendo um retorno dos estudantes, confirmando, clarificando e corrigindo concepções errôneas de aprendizagem anteriores.

A organização sequencial estabelece uma relação com a consolidação, pois um novo material não deve ser introduzido se a aprendizagem dos subsunçores não for consolidada, ou seja, o conhecimento precedente deve estar claro, estável e organizado na estrutura cognitiva do estudante. (AUSUBEL, 2003). Este princípio ressalta que os subsunçores são as variáveis que mais influenciam a aprendizagem significativa. (MOREIRA; MASINI, 2006). Aliado à aprendizagem significativa, a aprendizagem ativa também é uma tendência educacional, compatível com a aprendizagem significativa. Uma definição da aprendizagem ativa é qualquer processo através do qual o estudante deixa de ser audiência para ser o ator principal do seu processo de aprendizagem. Desta forma, o aluno não é um receptor de informações, mas ele engaja-se de maneira ativa na aprendizagem dos conceitos, focando seus objetivos, que é a construção do conhecimento. (GUDWIN, 2014).

Estas são as características principais que devem ser levadas em consideração para o aluno aprender significativamente e de forma ativa. Este processo, provavelmente, necessita de um tempo maior para ser desenvolvido na sala de aula, pois o professor falará menos e o estudante, sendo sujeito ativo no processo, precisará ler mais, estudar mais, trocar ideias, levantar hipóteses e investigá-las, tornando o processo de assimilação do conteúdo mais lento, no entanto com muito mais chances de propiciar aprendizagens mais duradouras.

No atual cenário educacional, é fundamental considerar também a interdisciplinaridade. A interdisciplinaridade, por si só, é uma palavra que expressa diversos sentimentos aos professores, como: medo, angústia, dúvida. Todos esses sentimentos podem ser explicados, pois sequer há uma definição clara de interdisciplinaridade, e muito menos um método para desenvolver um projeto interdisciplinar. (FAZENDA, 2009). Diversos estudiosos definem o que seria a interdisciplinaridade, mas não conseguem chegar a um consenso. Assim, nesta pesquisa, a interdisciplinaridade é considerada como um conjunto de disciplinas que se encontram de forma irregular e descentrada, para colaborar na solução de um problema comum. (POMBO, 2005).

Para um projeto interdisciplinar, uma disciplina vai colaborar com a outra, buscando auxiliar na compreensão do conteúdo e do fenômeno estudado. Este foi o processo para a construção deste planejamento interdisciplinar, tendo que a "interdisciplinaridade pressupõe a transferência de métodos de uma disciplina para outra. Ultrapassa-as, mas sua finalidade inscreve-se no estudo disciplinar" (AZEVEDO; REIS, 2013, p. 28), ou seja, as disciplinas envolvidas objetivam a investigação e tornam os estudantes cada vez mais capazes de ampliar novos conhecimentos.

Promover ações interdisciplinares no processo de ensinar prevê que o aprendizado não seja conduzido de forma isolada pelo professor, menos ainda, que os conteúdos se reduzam a uma exposição de tópicos. Uma atitude interdisciplinar procura aprofundar o conhecimento, ou também dar significado ao estudo de alguns conteúdos. É uma atitude de reciprocidade que impele à troca e ao diálogo com pares idênticos, com pares anônimos ou consigo mesmo, é uma atitude de desafio perante o novo e desafio de redimensionar o velho. (FAZENDA, 1994).

Assim, ainda conforme Fazenda (1991), são fundamentos para um ensino interdisciplinar: o diálogo do professor com sua prática pedagógica, com seus conhecimentos e com uma autocrítica das suas experiências de ensino. Além disso, a prática da interdisciplinaridade requer a abertura e disposição para a parceria, uma forma de incitar o diálogo com outras fontes de conhecimento e o ingresso em seus universos.

Para a criação do OA e da rota de aprendizagem potencialmente significativa, seguiu-se esses referenciais teóricos. Esse foi um trabalhado árduo, porém, através de momentos de reflexão e de planejamento, conseguiu-se criar esses recursos.

Falar em planejamento, na área da educação, nos remete à importância do professor ao planejar a sua aula; garantir a coerência entre as atividades que vai desenvolver com seus estudantes; os objetivos que pretende alcançar e os momentos avaliativos de aprendizagem. Então, pode-se dizer que a forma de planejar deve focar a relação entre o ensino e a aprendizagem.

Quanto mais estudar o professor, quanto melhor preparar as aulas e colocá-las em conformidade com a predisposição e os subsunçores dos estudantes, mais facilmente acompanhará os conceitos assimilados, provocará mais respostas e perguntas, será mais fácil para o estudante aprender. (VASCONCELLOS, 2001). Visando a formação completa do estudante, o ato de planejar é fundamental para que as aulas transcorram de forma investigativa, permitindo que ele participe do processo de ensino e aprendizagem, pois somente assim se tornará sujeito ativo, crítico, participativo e conseguirá aprender significativamente.

Deste modo, o planejamento deve ser um roteiro flexível com objetivos definidos pelo docente. Por esta razão, todo planejamento procura estabelecer a relação entre a previsibilidade e a surpresa. Deve-se considerar que cada relação sempre terá os componentes da incerteza, da singularidade e de alguns conflitos. (MORETTO, 2012). Sem esta abertura, o estudante não terá a oportunidade de ser sujeito no processo de aprendizagem.

Além de planejar a construção do conhecimento, o professor deve preocupar-se em reconstruir o conhecimento, como uma forma de recuperar os estudantes que não atingiram os objetivos estipulados. Não é possível determinar exatamente quais os conteúdos que serão difíceis de ser construídos pelos estudantes, mas o docente deve deixar um tempo para avaliar e permitir que estes alunos possam buscar auxílio e reconstruir estes conceitos.

Portanto, o planejamento favorece a elaboração de instrumentos de avaliação da aprendizagem, na medida em que estabelece com clareza os objetivos a serem alcançados e que, ao mesmo tempo, permite a sua flexibilização, em função da intervenção do aluno no processo de ensino. (MORETTO, 2012).

Hoje, avaliação no senso comum significa atribuir uma nota, um valor para o conhecimento assimilado pelos alunos, um modelo classificatório e excludente, porém, este não é o verdadeiro significado de avaliação. A avaliação é "um recurso pedagógico útil e necessário para auxiliar cada educador e cada educando na busca e na construção de si mesmo e do seu melhor modo de ser na vida". (LUCKESI, 2000). Deste modo, avaliação é um processo abrangente da existência humana, que implica uma reflexão crítica sobre a prática, no sentido de captar seus avanços, suas resistências, suas dificuldades e possibilitar uma tomada de decisão sobre o que fazer para superar os obstáculos. A avaliação deve ser contínua para que possa cumprir sua função de auxílio ao processo de ensino e aprendizagem.

Avaliar as aprendizagens desenvolvidas pelos estudantes, numa perspectiva transformadora, dialética, libertadora, mediadora, diagnóstica e formativa, requer a intervenção do professor, pois, quando se está avaliando, três aspectos básicos devem ser considerados: o primeiro são os avanços, ou seja, as conquistas dos estudantes que favorecem a autoestima, tanto do professor quanto do aluno, também deve se levar em conta as necessidades que são as lacunas, as dificuldades, os erros e a tomada de consciência para a superação, que é ponto estratégico da intervenção e, por último, as potencialidades em que se desenvolve um olhar mais sensível, para prever até mesmo o que não estava nos objetivos.

O ato de avaliar deve prever, também, a autoavaliação do aluno, que é um processo interno do sujeito, um olhar crítico, reflexivo, consciente sobre o que se faz e quanto se faz, a respeito dos diferentes momentos e das ações da sua atividade cognitiva, ou seja, uma forma de regular a própria aprendizagem identificando os erros de percurso cometidos, procurando soluções alternativas. O desempenho do professor é fundamental no processo de autoavaliação, pois, para que todo este percurso não tenha um sentido superficial, é necessário debater as reflexões de cada estudante e mostrar as dificuldades que passaram despercebidas.

O sujeito constrói o seu conhecimento, consequentemente, constrói também a sua avaliação; dessa forma, ninguém melhor do que o próprio aluno para dizer o que está ou não aprendendo. (SEDUC, 2013, p.17).

Na perspectiva de uma avaliação dialética, libertadora, mediadora, diagnóstica e formativa, o professor, ao planejar sua unidade de ensino, precisa incluir atividades que contemplem aspectos conceituais,[10] procedimentais[11] e atitudinais[12] (ZABALA, 1998), para que assim, consiga acompanhar e avaliar o processo de ensino e aprendizagem do estudante de forma mais ampla.

[10] São os conhecimentos que se referem a fatos, conceitos e princípios. Segundo Zabala (1998), a dimensão conceitual está relacionada à resposta da pergunta: "O que se deve saber?"

[11] São os conhecimentos que se referem a técnicas e métodos. Segundo Zabala (1998), a dimensão conceitual está relacionada à resposta da pergunta: "O que se deve saber fazer?"

[12] São os conhecimentos que abrangem valores, atitudes e normas. Segundo Zabala (1998), a dimensão conceitual está relacionada à resposta da pergunta: "Como se deve ser?"

4 E COMO FICAM AS TECNOLOGIAS NA ESCOLA?

Para dar conta deste contexto, também complexo, surge a possibilidade de usar a tecnologia para promover a aprendizagem com estratégias ativas. Propõe-se a construção e utilização de aplicativos digitais, potencialmente significativos, para estudantes do Ensino Médio.

Assim, cabe destacar a utilização de recursos tecnológicos como apoio a estratégias potencialmente favorecedoras do desenvolvimento de aprendizagens. A tecnologia pode auxiliar, pois permite criar ambientes de aprendizagem que sugerem novas formas de pensar e aprender. (BARIN; BASTOS; MARSHALL, 2013). A escola, como uma instituição social, não pode abrir mão dessas ferramentas de apoio (BRASIL, 2002), fazendo a sua utilização de forma correta, com os objetivos traçados pelo docente. Mas, um processo fundamental para uma boa arquitetura do OA é a transposição informática.

Antes da transposição informática, para uma melhor compreensão, abordar-se-á sobre a transposição didática. Chevallard definiu a transposição didática como “o conjunto de transformações por que passa um saber sábio, a fim de ser ensinado” (CHEVALLARD; JOSHUA, 1991 apud ALMOULOUD, 2007, p. 5), ou seja, é o trabalho realizado para transformar o saber sábio (saber científico) em saber a ensinar, que depois, se tudo correr da forma adequada, transforma-se em saber ensinado. A transposição didática procura deixar o conteúdo compreensível, com sentido para o significado desse conteúdo e para a sua veracidade.

Este é um trabalho árduo para todos os que estão preocupados com a educação, como por exemplo: professores, alunos, pais, órgãos públicos, entre outros. Esta preocupação cria um espaço definido como noosfera, o espaço no qual o sistema didático e o ambiente social interagem entre si. Esse espaço define o funcionamento didático, as práticas e as estratégias aplicadas em sala de aula. (MATOS FILHO et al., 2008).

O professor deve procurar ser criativo para inovar nas suas estratégias de aprendizagem. Desta forma ele conseguirá ensinar os alunos do século XXI, transformando assim os conteúdos em ensináveis, sem esquecer de todo o contexto no qual o aluno está inserido. “Uma transposição didática integrando as reflexões sobre a aprendizagem, além de determinar novos conteúdos e novas formas de ensinar esses conteúdos deve considerar a questão da preparação dos professores para essas novas formas de ensino.” (BELLEMAIN, 2000, p. 200). Nesta perspectiva, o professor deve tomar alguns cuidados para que consiga, efetivamente, fazer uma transposição didática.

Nos tempos atuais, a transposição didática foi complementada por Balacheff (apud BELLEMAIN, 2000), que criou uma extensão da transposição didática, sendo esta a transposição informática. (BELLEMAIN, 2000). A diferença da transposição informática para a didática consiste no fato de que a transformação dos saberes é mediada através da utilização de computadores. Para isto ocorrer, deve-se levar em consideração uma série de fatores, como: didatização, interface gráfica, recursos de *hardware* e o conteúdo a ser ensinado. Além destes fatores, a criação dos aplicativos envolve programação, parte gráfica e planejamento pedagógico. (FERNANDEZ; RIGO, 2012). Essas três competências referidas podem ou não estar presentes em uma mesma pessoa. Mas é necessário que sejam realizadas a contento, de modo a tornar possível a criação e utilização do OA, com potencial para o desenvolvimento da autonomia, propiciando o emprego de estratégias construtivistas e interacionistas.

Nesta perspectiva, a geometria dinâmica e interativa pode ser utilizada pelos professores no processo de construção do conhecimento. Existem vários *softwares* e também objetos de aprendizagem, que podem auxiliar, principalmente, na visualização geométrica, possibilitando a exploração de diferentes situações e a construção de conjecturas que colaboram para dar sentido a ideias e conceitos. Ao construir uma figura geométrica, o estudante tem um ponto de partida. Pode, então, realizar testes transformando-a quantas vezes quiser, em novas experimentações, visando reformar, confirmar ou refutar suas conjecturas. (GRAVINA, 1996).

Segundo Zorzan (2007, p 88), com apoio da tecnologia, aprender matemática tem mais sentido, especialmente quando o propósito for "estimular a curiosidade, a imaginação, a comunicação, a construção de diferentes caminhos para a resolução de problemas e o desenvolvimento das capacidades: cognitiva, afetiva, moral e social". A tecnologia vem para auxiliar o professor a avançar na direção desse objetivo pedagógico.

Nesta perspectiva, a criação e utilização de objetos de aprendizagem (OA), com potencial para o desenvolvimento da autonomia, colaboram propiciando o emprego de estratégias construtivistas e interacionistas. Não existe uma definição aceita mundialmente de objeto de aprendizagem. Dentre vários conceitos de OA, um que aparece com frequência em comunicações científicas, é "qualquer recurso digital que possa ser reutilizado para dar suporte à aprendizagem". (WILEY, 2000, p. 3). Não se trata de nova proposta pedagógica, mas de um recurso de apoio à aprendizagem ou, por vezes, de uma estratégia de aprendizagem, para construir conhecimento significativo e os saberes dos jovens. Como objeto digital, esse recurso possui características como: reutilização, flexibilidade, acessibilidade, fragmentação, dinamização, armazenamento de dados e a interoperabilidade.

Visando avaliar essas características, qualificando o OA, foi utilizado um instrumento de avaliação ao longo do experimento do projeto e também depois da aplicação do OA, como recurso para a sala de aula. Assim, aperfeiçoamentos foram realizados durante a execução da pesquisa.

O processo de avaliação do OA seguiu uma avaliação apresentada por Tarouco (2004), em que os estudantes que utilizam o OA recebem formulários para avaliar aspectos pedagógicos e técnicos referentes à qualidade de conteúdo, usabilidade e potencial, como ferramenta de ensino. Nesta avaliação, Tarouco utiliza um modelo reconhecido mundialmente, o sistema *Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching* (Merlot).[13] Para facilitar a avaliação, Tarouco sugere a utilização da escala[14] EDUCAUSE 2001, que serve para agilizar a avaliação e obter dados mais precisos.

Para a qualidade de conteúdo do OA foram avaliados os seguintes itens: OA apresenta informações precisas; OA inclui quantidade adequada de material; OA demonstra um conceito-base, e OA resume bem os conceitos.

Sobre a usabilidade do OA foram avaliadas as seguintes características: é fácil andar pelo ambiente; o ambiente tem instruções claras de uso; o ambiente é motivador; o ambiente é visualmente atraente; o ambiente é interativo; a linguagem é adequada e sem erros ortográficos, e a linguagem matemática é adequada e sem erros.

Em relação ao OA, como ferramenta de ensino, foram avaliados os seguintes critérios: identifica objetivos de aprendizagem; reforça conceitos progressivamente; demonstra relações entre conceitos; fundamenta conceitos prévios, e é eficiente (pode-se aprender muito em curto período de tempo).

[13] Disponível em: <www.merlot.org>. Acesso em 5 fev. 2016.

[14] O método de avaliação por escala consiste em atribuir uma nota de um a cinco aos critérios estabelecidos. Na escala proposta, a nota um representa discordar totalmente, dois é discordar, três significa não concordar nem discordar, quatro é concordar, cinco é para concordar totalmente e a opção sem resposta indica que o item não foi avaliado.

5 POR ONDE TRILHAMOS?

A decisão da escolha metodológica para a pesquisa é uma tarefa complexa: seguir a linha quantitativa ou qualitativa? As duas linhas de pesquisa possuem características distintas. A pesquisa quantitativa realiza um estudo de variáveis, independente[15] e dependente,[16] numa relação de causa e consequência no contexto do fenômeno estudado. (BORTONI-RICARDO, 2008), propondo, inclusive, uma análise estatística, quando necessário, para verificar as hipóteses do problema de pesquisa. (MOREIRA, 2003b). Já a pesquisa qualitativa não se propõe a testar e comprovar hipóteses, mas procura compreender o fenômeno estudado no contexto social inserido, através da elaboração de asserções,[17] que correspondam aos objetivos do projeto de pesquisa. (BORTONI-RICARDO, 2008).

Antigamente, a pesquisa qualitativa não era considerada plenamente científica, mas hoje já não existe um padrão de cientificidade universalmente aceito. A pesquisa quantitativa em ensino e aprendizagem, ancorada em princípios filosóficos positivistas ou empiristas, tem sofrido uma carga esmagadora de contestações. (THIOLLENT, 2004). Segundo Thiollent (2004, p. 23), “reduzir a ciência a um procedimento de processamento de dados quantificados corresponde a um ponto de vista criticado e ultrapassado, até mesmo em alguns setores das ciências da natureza”.

Desta forma, a abordagem da pesquisa realizada foi predominantemente qualitativa, sendo esse um método de análise que valoriza mais o processo do que os resultados finais. (BORBA; ARAÚJO, 2013; BORTONI-RICARDO, 2008). A pesquisa realizada inseriu-se em diversos ambientes de aprendizagem do contexto escolar e analisou-se a eficiência de uma rota de aprendizagem construída, visando desenvolver uma aprendizagem ativa e significativa. Ao analisar a pesquisa qualitativamente, deixou-se aberto um espaço para fazer uma análise, uma reflexão sobre a rota de aprendizagem. (BORTONI-RICARDO, 2008). A análise tem como objetivo aperfeiçoar a rota de aprendizagem construída, reforçando os aspectos positivos e identificando melhorias de outros que não foram favoráveis segundo avaliações, concepções e pareceres apontados pelos participantes da pesquisa.

---

[15] Variáveis independentes são condições ou características que o experimentador manipula em sua tentativa de determinar sua relação com os fenômenos observados. (BEST, 1970, p. 143 apud MOREIRA, 2003a, p. 107).

[16] Variáveis dependentes são condições ou características que aparecem, desaparecem ou mudam quando o experimentador introduz, remove ou muda variáveis independentes. (BEST, 1970, p. 143 apud MOREIRA, 2003a, p. 107).

[17] A asserção é um enunciado afirmativo, no qual o pesquisador antecipa os desvelamentos que a pesquisa poderá trazer. (BORTONI-RICARDO, 2008, p. 53).

Na rota de aprendizagem considerada, tem-se um componente centralizador das ações e atividades propostas, que consta nas análises com destaque e atenção especiais, e que se refere ao objeto de aprendizagem (OA): “Números Complexos: interação e aprendizagem”. Para avaliar e qualificar o OA como um recurso digital e virtual de aprendizagem, foi utilizado o sistema Merlot, que é um modelo aplicado mundialmente, como é sugerido por Tarouco (2004). Para a pesquisa, adaptou-se o modelo sugerido, alterando alguns critérios de avaliação, procurando eliminar aspectos repetitivos e adequando a linguagem ao perfil dos estudantes que avaliaram o OA.

Para facilitar a avaliação de um OA e obter dados mais precisos, Tarouco sugere a utilização de uma escala. Dificilmente se conseguiria fazer uma pesquisa sem utilizar métodos quantitativos, mas o objetivo não é utilizar os dados quantitativos para validar o OA, mas para identificar dados de maior ou menor frequência na consideração dos aspectos analisados. Segundo Demo (2001, p. 9), “toda pesquisa qualitativa só tem a ganhar se cuidar também de suas ilações quantitativas, ou, melhor dizendo, se souber aliar-se favoravelmente a métodos quantitativos”. Assim, visando complementar a pesquisa qualitativa, também foram utilizados dados quantitativos representativos de frequência de pareceres, porcentagem de ideias em comum na avaliação do OA; no levantamento e na análise dos subsunçores; no desempenho em questões de verificação de aprendizagem, estes, sim, aspectos utilizados para qualificar o OA e a rota de aprendizagem. Dessa forma, utilizou-se uma estatística descritiva, que “tem por finalidade descrever o conjunto de dados que se dispõe e o faz através das tabulações e representações numéricas ou gráficas. Procura sumariar, sintetizar, reduzir, de modo a tornar manipulável, as propriedades de uma massa de dados”. (MOREIRA, 2003b, p. 13).

A pesquisa qualitativa vem ao encontro das práticas educacionais sugeridas, atualmente, pelo Programa Ensino Médio Inovador (BRASIL, 2014) e do Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio (BRASIL, 2013d), pois não se restringe somente a resultados finais; pesquisar na área da educação precisa ser uma ação proponente e investigativa mais abrangente. (MOREIRA, 2009). Segundo Borba e Araújo (2013, p. 19), “nos principais periódicos de pesquisa em Educação Matemática, permite dizer que a pesquisa quantitativa está em declínio”, confirmando essa tendência da análise qualitativa na área da educação, na sala de aula, comprovando que o mais importante está em analisar o processo de aprendizagem. O foco desta pesquisa foi a compreensão de fenômenos da sala de aula, em especial, dos que se referem ao processo de aprendizagem dos estudantes.

A pesquisa qualitativa na área da educação tem o objetivo de construir e aperfeiçoar a didática, o ambiente escolar e os espaços de aprendizagem dos estudantes. (BORTONI-

RICARDO, 2008). O cenário educacional, em nível nacional, está passando por reformulações orientadas pelo Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio (BRASIL, 2013c), sendo um dos seus objetivos fazer com que o professor reflita e repense sua prática em sala de aula. Ao refletir, e estando aberto a novas ideias e conceitos, o professor deixa de ser somente um profissional da educação, ele se torna um professor-pesquisador. (BORTONI-RICARDO, 2008).

A experiência profissional e os fundamentos presentes no Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio vêm mostrando que é este o perfil do professor que deve estar presente nas escolas: um professor preocupado com sua didática, com seus métodos, com seus meios de avaliação e, principalmente, com avaliação processual, e não somente com resultados estanques (BRASIL, 2013b). Esse perfil, também, é uma decorrência natural dos princípios preconizados pela pesquisa qualitativa. (BORBA; ARAÚJO, 2013).

Dificilmente será encontrada uma definição de pesquisa qualitativa, que seja aceita pela maioria dos pesquisadores. (GIBBS, 2009). No contexto desta pesquisa, os princípios qualitativos orientadores preveem uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, em que o foco foi o processo e o significado dos fenômenos. (SILVA; MENEZES, 2001). E o processo em questão, nesta pesquisa, é o da aprendizagem dos estudantes que lhes permitirá a compreensão do conteúdo estudado. E essa compreensão, quando se concretiza, o faz a partir de elementos de sentido, peculiares a cada estudante. Quer dizer, o sentido que cada estudante dá a um determinado conteúdo é próprio daquele estudante e do contexto no qual ele está inserido.

Não há como negar que construir uma rota de aprendizagem em consonância com a pesquisa qualitativa e o Programa Ensino Médio Inovador não é tarefa simples, mas esse ideal foi exaustivamente perseguido ao longo de todo o trabalho; por conta disso, a construção de uma rota de aprendizagem com a utilização de um OA, visou, em todos os momentos, proporcionar a aprendizagem ativa e significativa do conteúdo estudado. Assim, nos próximos parágrafos são relatadas, de forma breve, algumas etapas, alguns estudos que se fez para a construção do OA e da rota de aprendizagem.

O percurso dos estudos e da pesquisa envolveu a investigação sobre as estratégias utilizadas em sala de aula e sobre se e como os professores entendem acontecer a aprendizagem dos números complexos no decorrer do Ensino Médio. Inicialmente, fez-se uma revisão bibliográfica; a partir dela, foram encontrados alguns trabalhos, mostrando que o estudo dos números complexos está sendo deixado de lado por boa parte dos professores, como indicam, por exemplo, as pesquisas de Batista (2004) e Mello e Santos (2005). Mesmo quando esse conteúdo é abordado, é de forma superficial, e não parece levar os estudantes a um aprendizado efetivo, como é indicado na pesquisa de Nobre (2013). Outros trabalhos destacam o significado geométrico dos números complexos (REIS NETO, 2009; OLIVEIRA, 2010); o contexto histórico (ROSA, 1998; SANTOS, 2008b) e uma proposta metodológica de aprendizagem significativa. (ARAÚJO, 2006).

Propostas didáticas foram construídas e testadas em diversos estudos, como os que foram citados, porém, nosso objetivo não era somente construir e aplicar uma proposta didática, mas também criar um recurso virtual, um objeto de aprendizagem (OA). Esse OA, de acordo com a expectativa do autor, deveria apresentar uma estratégia ativa de aprendizagem, promovendo a interação do estudante com o objeto de conhecimento, a partir da manipulação de aplicativos digitais. Ao longo do processo, questionamentos foram cuidadosamente elaborados com a intenção de orientar o pensamento e a investigação, propiciando ao estudante a construção sistemática de significados e conceitos.

Existem alguns trabalhos que envolvem a construção de aplicativos para o estudo de números complexos como, por exemplo, Investigando em C[18] (BATISTA et al., 2009), do Instituto Federal Fluminense, Números Complexos,[19] da Universidade de Coimbra e Números Complexos,[20] da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS); esses trabalhos propõem o estudo dos números complexos, a partir da utilização de aplicativos desenvolvidos no *software* GeoGebra.

Percebe-se que tais aplicativos podem ser úteis para desenvolver uma aprendizagem significativa, mas, dependem da intervenção do professor. No que se propõe, ousa-se um pouco mais com aplicativos, no sentido de criar um ambiente reflexivo, em que o estudante poderia aprender de forma mais autônoma, mas também na sala de aula, como um recurso de apoio à aprendizagem. A partir desses objetivos adicionais, criou-se um conjunto de aplicativos do GeoGebra para o estudo de números complexos.

Os aplicativos referidos acima são predominantemente ancorados em texto e representações gráficas; não há assim, um interesse explícito em atrair os estudantes, dando a eles novas visões do seu quotidiano a partir dos números complexos. Essa constatação serviu de inspiração para a criação de um personagem, batizando com o nome de Radiceler

---

[18] Disponível em: <http://www.es.iff.edu.br/softmat/projetotic/portaltic/applets/numeros-complexos>. Acesso em: 5 fev. 2016.
[19] Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEII/P%C3%A1gina.html>. Acesso em: 5 fev. 2016.
[20] Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/numeros_complexos/>. Acesso em: 5 fev. 2016.

Tarcauchy,[21] conhecido como Radice. Este personagem é como um agente nos aplicativos, que conversa com os estudantes, questionando-os, desafiando-os e dando algumas dicas e informações para prosseguirem nas atividades. Esta construção tecnológica foi um processo árduo e complexo, em que se colocou no lugar do estudante, para pensar a melhor forma e linguagem, com as quais poderia expressar-se para facilitar a interação com o OA e a aprendizagem.

A importância dos aplicativos é evidente para o OA; porém, para conhecer os assuntos mais difíceis de serem compreendidos, foi realizada pesquisa com professores do Ensino Médio, por meio de um questionário (Apêndice A), para saber como o conteúdo era trabalhado, que tópicos eram estudados em sala de aula, o tempo destinado a este conteúdo e também se os professores utilizavam algum recurso digital. Novamente, o propósito não foi o de fazer um estudo estatístico sobre as perguntas, mas o de procurar compreender e integrar alguns elementos na construção do OA. A amostra, 20 professores, não teve uma representatividade numérica considerável, pois foram encontradas algumas dificuldades na realização da pesquisa com docentes, pois alguns não retornaram os contatos, ou marcavam um encontro e não compareciam. Mas, Demo (2001) nos lembra, a representatividade estatística pode ser substituída pela relevância e qualidade da informação. De fato, essa pesquisa inicial foi fundamental para a criação do OA, bem como na elaboração da rota de aprendizagem. Os resultados foram utilizados na identificação dos tópicos importantes para o desenho e a criação do OA. Desta forma, criou-se um OA com potencial de suprir as dificuldades e necessidades apresentadas pelos professores participantes da pesquisa.

Um dos problemas apontados, na utilização de métodos qualitativos, foi a não aceitação da pesquisa qualitativa como um método científico (DEMO, 2001; FLICK, 2009), devido ao fato de o pesquisador poder manipular e controlar o grupo da amostra, escolhendo os professores ou estudantes que participarão da pesquisa. Para estar de acordo com o recomendado, entrou-se em contato com professores de diversas localidades, através de *e-mail* de escolas, redes sociais, entre outros recursos, para garantir que a amostragem fosse o mais aleatória possível, como se aplica na pesquisa qualitativa. (FLICK, 2009).

A pesquisa foi realizada com 14 professores da escola pública, cinco da rede particular e um da escola técnica. Desses docentes de diversas localidades do Brasil, tem-se

[21] O nome Radice foi construído com uma pesquisa sobre o desenvolvimento histórico dos números complexos, desde a sua origem, como números “sofisticados”, até a sua consolidação como conjunto numérico. Desta forma, com o nome Radice homenageiam-se alguns matemáticos que contribuíram para esse desenvolvimento, como: Niccolò Tartaglia, Leonhard Euler e Augustin-Louis Cauchy; e cujo, o início do nome,Radic, deve-se ao símbolo de radical, que caracteriza o personagem.

que o conteúdo de números complexos está presente na maioria dos Planos Políticos-Pedagógicos, em 18 escolas (90%)[22], sendo ensinado por 19 professores (95%). Considerando ainda a relevância deste conteúdo no Ensino Médio, 17 professores (85%) discordam da seguinte afirmação: "O ensino dos números complexos não é necessário, pois os alunos podem estudar na Universidade". Somente um professor concorda com esta afirmação, e dois não concordam nem discordam.

Quanto a questão referente à forma de abordar o conteúdo, as respostas foram diversas, mas o que prevalece é a resolução de equações de 2º grau, com o discriminante negativo. Seguindo as sugestões dos PCN (BRASIL, 2006), nove professores fazem o resgate histórico, explicando aos estudantes o porquê da criação deste conjunto numérico. Alguns docentes ainda preferem utilizar a explanação ou a pesquisa extraclasse sobre o conteúdo. Algo que surpreendeu positivamente foi o registro de um professor, em que ele disse que mostra a possível relação existente entre os números complexos e os vetores, utilizando um OA disponível em phet.colorado.edu – aspecto semelhante ao OA que se criou inicialmente.

Quando analisadas as questões que envolvem os tópicos estudados, percebeu-se que não existe uma uniformidade, sendo que alguns ensinam até as operações mais complexas, como radiciação e potenciação; outros até forma trigonométrica, ou restringiam-se as operações básicas; por fim, alguns se limitam à resolução de equações de 2º grau com discriminante negativo.

Ao entrar no assunto interdisciplinaridade, tem-se relatos que vão aos extremos. Segundo Fazenda (2009), este é um assunto complexo que requer muito estudo para poder compreender e fazer uma prática interdisciplinar. Pela experiência, ninguém nega a importância de realizar um estudo interdisciplinar, porém isto requer um conhecimento expressivo sobre a situação estudada.

Entre as respostas dadas sobre este assunto, a maioria colocou que cita alguma aplicação dos números complexos, seja na eletricidade, seja na construção civil. Mas, as ideias divergentes, expostas por dois professores, representam muito bem o cenário da educação brasileira. Enquanto um deles argumenta que "o estudo dos números complexos, de modo geral, está bastante dissociado de aplicações práticas e nem os livros didáticos enfatizam muito esse aspecto. Então fica um pouco difícil essa abordagem", outro afirma que é possível e comenta: "Uma aplicação interdisciplinar que os alunos gostam demais é envolver a solução dos números complexos em circuitos elétricos de corrente alternada".

[22] Conforme referido acima, as estatísticas apresentadas são descritivas, e não serão usadas para a extração de inferências de qualquer tipo (como seria o caso se a pesquisa fosse quantitativa).

Desta forma, estes dois relatos, completamente contrários, motivaram a criação de um espaço de aprendizagem com aplicações dos números complexos. A decisão final pela criação deste espaço ocorreu depois de se ter o conhecimento da sequência didática de Santos (2008a), aspecto que será abordado a seguir.

Mesmo não existindo uniformidade nos tópicos estudados, quando considerados os conteúdos nos quais os estudantes apresentam mais dificuldade, destacam-se dois tópicos: a forma trigonométrica e a unidade imaginária. Deste modo, teve-se conhecimento dos conteúdos que deveriam ter uma atenção especial no OA, principalmente, a unidade imaginária.

Quando abordados sobre a possibilidade da utilização de um material de apoio para os estudantes construírem os conceitos mais importes sobre os números complexos, ninguém se opôs à criação desse recurso, e um professor ainda argumentou: "Acho que seria muito bom possuir material de apoio, pois existe pouco material nesta área, e os livros didáticos do Ensino Médio consideram, apenas, os conceitos algébricos básicos". Esta resposta positiva, sobre o recurso de apoio, deu ânimo para a criação do OA. A certeza que este recurso seria utilizado por outros professores veio através da fala de um deles, que diz: "Acho importante esse conteúdo por ser um conhecimento de significado na matemática, mas da forma como geralmente o trabalhamos não adquire muito sentido para o aluno; seria importante podermos trabalhá-lo de um modo mais interessante e significativo".

Terminando a pesquisa, solicitou-se aos professores: Quais são as características que eles buscam num recurso digital para ser utilizado em suas aulas. As respostas estão indicadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Características de um recurso digital que os professores consideram relevantes

Característica do recurso	Quantidade de professores	Porcentagem
Dinamicidade	15	75%
Construções geométricas	14	70%
Acessibilidade	14	70%
Aspecto lúdico	12	60%
Aspectos históricos	12	60%
Operações algébricas	11	55%
Exercícios	11	55%

Fonte: Dados da pesquisa.

Com esta variedade de respostas, percebeu-se que o OA não iria abranger todas as características assinaladas pelos professores. Desta forma, procurando desenvolver um OA com as características informadas pelos professores, decidiu-se aprimorar o recurso com novos ambientes de aprendizagem.

A ampliação do OA, com novos espaços, acabou gerando a necessidade de se ter um repositório digital de hipermídias, aplicativos digitais e um correio eletrônico. Não se encontrou outra solução senão a criação de um *site*. O *software* utilizado para a criação do *site* foi o *Web Acappella* 4, tendo como provedor do *site* a extensão *hol.es*, que é gratuita. Além do *site*, utilizaram-se outros repositórios digitais, como: o Dropbox para exercícios de aprendizagem, o GeoGebraTube para os aplicativos construídos no GeoGebra, o Youtube para os vídeos e o Google para salvar imagens e textos que foram utilizados na criação do *site* e também na criação de um formulário eletrônico, em formato de um questionário. Encontrou-se muita dificuldade, principalmente, na incorporação dos aplicativos construídos no GeoGebra, pois não abriam em qualquer computador. Assim, procurou-se ajuda com programadores que não conseguiram resolver o problema, somente após entrar em contato com a equipe do GeoGebra é que parte dos problemas foram solucionados.

Além dessa dificuldade, o GeoGebra utiliza o programa Java para rodar os aplicativos. O Java, periodicamente, precisa de uma atualização que, para os leigos da computação, não é um procedimento trivial. Desta forma, deparou-se com a necessidade de criar um espaço de apoio tecnológico, em que são propostas soluções para alguns problemas recorrentes.

No decorrer do mestrado, em conversas com professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECiMa), com outros professores na Universidade de Caxias do Sul (UCS) e com a participação em congressos na área da educação em Engenharia e em Matemática, ficou clara a necessidade e a importância da criação de mais dois espaços de aprendizagem: um sobre a calculadora e outro com foco na teoria.

O conteúdo de números complexos, geralmente, é abordado no terceiro ano do Ensino Médio. Da experiência profissional, estes estudantes dão uma importância especial para o Vestibular. Assim, pensou-se em criar um espaço com questões de Vestibular de algumas instituições. Para isto, realizou-se um levantamento em provas de Vestibular do período 2007-2013, para selecionar questões que envolvessem números complexos. Para este trabalho, foram selecionadas universidades federais do Brasil, a Universidade de Caxias do Sul (UCS), a Universidade do Vale do Rio dos Sinos (Unisinos) e a Universidade Luterana do

Brasil (Ulbra). Com isso, consta no OA o Espaço do Vestibulando com um banco de questões, as que se conseguiu integrar até o momento, para que os usuários possam ampliar seu conhecimento.

No decorrer de uma disciplina do mestrado, estudou-se a teoria da aprendizagem significativa e também uma sequência didática, desenhada para essa teoria por Santos (2008a). O autor elaborou sete etapas para desenvolver a aprendizagem significativa, e uma delas consiste, especificamente, em dar sentido ao estudo, através de alguma situação real, em que o conteúdo é aplicado. Assim, fez-se uma pesquisa bibliografia sobre a aplicação dos números complexos e do que se encontrou, constatou-se não serem materiais de fácil compreensão para os estudantes de Ensino Médio.

Buscando vencer esta dificuldade, inicialmente, buscou-se o auxílio de professores de Física da UCS, para construir e escrever um texto didático compreensível para os estudantes. Estudou-se sobre aerodinâmica, procurando compreender a formação dos perfis da asa e os elementos que geram a força de sustentação dos aviões. Teve-se acesso a algoritmos do programa do MatLab, que geram perfis de asas, como também conversou-se com o professor responsável pelo AeroDesign da UCS, que auxiliou na compreensão de diversos conceitos da aerodinâmica. Em outra situação, contatou-se com professores, também da UCS, que auxiliaram na compreensão da análise de circuitos de corrente alternada, nos quais os números complexos representam os elementos capacitivos e indutivos do sistema.

Essas duas aplicações foram importantes para dar sentido ao estudo dos números complexos e fazer uma ligação entre Física e Matemática, construindo um estudo interdisciplinar, com o cuidado especial de transcrever as situações numa linguagem compreensível para estudantes do Ensino Médio.

Além dessas aplicações envolvendo a área da Física, fez-se um estudo sobre os Fractais e se descobriu que algumas dessas figuras são geradas através de funções complexas. Mesmo sem aprofundar este estudo, devido a sua complexidade para estudantes de Ensino Médio, o mesmo foi igualmente importante para criar um espaço de aprendizagem relevante do OA.

Na qualidade de recurso digital, possível de ser transformado em qualquer tempo, o OA continua sendo aprimorado, especialmente com base em melhorias sugeridas pelos estudantes que o utilizaram, como também pode ser ampliado com novos tópicos ou com o aprimoramento dos ambientes de aprendizagem construídos. Desta forma, formou-se a estrutura do OA que se tinha em mente criar. A descrição detalhada deste recurso potencialmente significativo está disponível na seção seis.

Porém, não basta ter um recurso potencialmente significativo, se o professor não utilizar uma estratégia adequada para desenvolver a aprendizagem dos conceitos. (AUSUBEL, 2003). Com este propósito, foi construída uma rota de aprendizagem que estivesse de acordo com o Programa Ensino Médio Inovador (BRASIL, 2014) e da teoria da Aprendizagem Significativa. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980).

A rota de aprendizagem (Apêndice B) construída foi aplicada e, com as análises, buscou-se indícios sobre as asserções do projeto de pesquisa. (BORTONI-RICARDO, 2008). Participaram desta pesquisa, avaliando o OA e realizando a rota de aprendizagem, uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, da Escola Estadual de Ensino Médio Bernardo Petry, de Vale Real. Cabe ressaltar que esta é a primeira experiência do autor desta dissertação, trabalhando com uma turma desse nível, ensinando os números complexos.

Inicialmente, a rota de aprendizagem tinha duração de um mês de aulas, tendo em cada semana quatro períodos semanais, de cinquenta minutos. Porém, o projeto iniciou em meados de outubro, encerrando somente em dezembro, com o término das aulas. No decorrer das aulas, surgiram alguns percalços, que atrapalharam a sequência das aulas. Um deles foi a participação em eventos, promovidos pelo município ou pela escola (cerca de quatro períodos); outro diz respeito aos problemas tecnológicos do laboratório de informática da escola.

A turma foi composta por 18 estudantes. Dos 18 estudantes, 15 são também trabalhadores, exercendo alguma função em mercados, escolas de Educação Infantil, escritórios de contabilidade, atelier de costura e com seus pais, na lavoura. Desde o início da aplicação do projeto, tinha-se o conhecimento dessa realidade e que, devido ao cansaço pelo trabalho ou mesmo por desinteresse, alguns poderiam não fazer algumas atividades. Porém, todos se envolveram, e acredita-se que foi por força da estratégia proposta. Tem-se a convicção de que o empenho de alguns estudantes superou as expectativas, pois mesmo os que não tinham o hábito de se envolver nos estudos persistiram interagindo com o OA e na realização das tarefas de aprendizagem.

Falando em qualificar a pesquisa, segundo alguns estudiosos (DEMO, 2001; FLICK, 2009), este é um dos problemas apontados ao se realizar a pesquisa qualitativa. Então, como comprovar a qualidade de uma pesquisa qualitativa? Segundo Flick, isto “só é possível se os pesquisadores abrirem espaço para a diversidade no que estudam – se levarem em conta os casos desviantes em sua análise e evitarem exclusão prematura ou negligência dessa diversidade”. (FLICK, 2009, p. 55). Nesta pesquisa, essa questão foi contornada com a utilização de diversos métodos e instrumentos para coletar dados, como: informações qualitativas e quantitativas, entrevistas, questionários, mídias, diálogos informais, diário de bordo e observações. (BORTONI-RICARDO, 2008; FLICK, 2009). Para a utilização de relatos, observações e ações dos estudantes na sala de aula, eles assinaram um termo de consentimento (Apêndice K), permitindo a utilização de imagens, de relatos e de registros nos instrumentos de avaliação.

Na utilização de diferentes métodos, surge uma forma muito utilizada para qualificar a pesquisa qualitativa e relacionar métodos qualitativos e quantitativos, a triangulação. (FLICK, 2009). Há diversos conceitos de triangulação. (FLICK, 2009). Segundo Denzin (apud DUARTE, 2009), existem quatro tipos de triangulação: de dados, do investigador, teórica e metodológica.

Na triangulação de dados utilizam-se diversas fontes – pesquisas que aconteceram em locais e tempos variados e com indivíduos diferentes – que podem servir para estabelecer um paralelo, uma comparação, para validar a pesquisa. (DUARTE, 2009). Na triangulação do investigador, pode haver diferentes pesquisadores, com o mesmo objeto de estudo, que utilizam os mesmos instrumentos para coletar dados, que ao serem comparados produzem o resultado da pesquisa. (DUARTE, 2009). Na triangulação teórica, diferentes teorias são utilizadas para fundamentar uma pesquisa e para analisar e compreender um conjunto de dados, com perspectivas variadas, conforme cada teoria utilizada. (DUARTE, 2009).

Nesta pesquisa foi escolhida à triangulação metodológica que consiste na utilização de vários e distintos instrumentos para estudar um determinado problema de investigação (BORBA; ARAÚJO, 2013; DUARTE, 2009), com o objetivo de evitar distorções em função de um único instrumento, e colocando-os em confronto ou em análises complementares para a validação da pesquisa. (DUARTE, 2009; GÜNTHER, 2006).

Talvez pareça estranho não falar em validar a pesquisa qualitativa, mas estudiosos afirmam que só é possível qualificá-la. (FLICK, 2009). E, para isso, a triangulação tem "a função de contribuir para mais embasar mais os dados e a interpretação". (FLICK, 2009, p. 68). Ao utilizar diferentes métodos para qualificar a pesquisa, não se pode ter a pretensão de encontrar resultados iguais. (FLICK, 2009). Ao contrário, a utilização de diferentes métodos propõe diversas interpretações e perspectivas sobre o objeto de estudo, numa perspectiva interpretativa, que busca a compreensão do objeto de estudo e não sua validação. (GIBBS, 2009). A triangulação busca recursos que se complementem para uma análise adequada dos resultados. Segundo Flick (2009), ao se utilizar diversos métodos, as soluções não serão iguais, mas devem levar para resultados que convergem ou que se complementem entre si. Segundo Borba e Araújo (2013), a utilização de diferentes métodos não é para julgar um procedimento como certo ou errado, mas para aumentar a confiabilidade da pesquisa, como também, a sua qualidade.

Com base nestas considerações, no caso desta pesquisa, utilizou-se diferentes instrumentos de coleta de dados, buscando, assim, uma descrição densa da realidade estudada. (FAZENDA, 2010). “A ideia básica nesse caso é que usar mais de um método abrirá várias perspectivas para promover a qualidade na pesquisa qualitativa comparada ao estudo de um único método.” (FLINK, 2009, p. 78). O significado empregado ao método consiste nos instrumentos utilizados para qualificar a pesquisa. Segundo Bortoni-Rircado (2008), com diferentes métodos é possível comparar concordâncias ou discrepâncias por diferentes perspectivas e construir uma justificativa plausível para organizar e validar a pesquisa. Em relação à pesquisa desenvolvida, os instrumentos utilizados foram: revisão literária, entrevistas, questionários, diálogo informal, diário de bordo, observações diretas e fotografias.

A revisão literária foi o primeiro recurso utilizado, quando se buscou pesquisas desenvolvidas sobre os números complexos. Além das pesquisas, pode-se acrescentar todo o estudo que foi feito para realizar a construção do OA e as rotas de aprendizagem. As entrevistas foram utilizadas com professores do Ensino Médio para conhecer a forma como eram desenvolvidas as aulas sobre os números complexos. Utilizaram-se questionários para: tentar mapear os subsunçores dos estudantes, para identificar as possibilidades e as potencialidades do OA como um recurso de aprendizagem, para identificar a compreensão do conteúdo pelos estudantes e para compreender a colaboração da rota de aprendizagem aplicada. Como já foi anunciado, em alguns questionários, utilizou-se o método de escala para avaliar o OA e obter dados mais precisos. Assim, o procedimento foi qualitativo, aliado a um recurso quantitativo. Segundo Flick (2009, p. 133), a “triangulação de um procedimento aberto (qualitativo) com um método padronizado (quantitativo) mostra a validade de declarações coletadas usando o segundo método”. O diálogo informal consistiu em conversas com os professores universitários, alguns do PPGECiMa e com outros professores em eventos científicos.

Outro problema apontado por Bortoni-Ricardo (2008), em realizar-se uma pesquisa no campo educacional, no qual o professor é pesquisador, é a necessidade de conciliar atividades de docência com atividades de pesquisa. Para dar conta dessa necessidade, o autor sugere a utilização de um diário de bordo, que preserva memórias e aspectos, por vezes, não pensados antecipadamente, além de oferecer subsídios para o seu julgamento, por parte de outrem ou do próprio pesquisador. (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNAJDER, 1999). O diário foi utilizado, então, para descrever as aulas desenvolvidas e as condutas dos estudantes, ao realizarem as atividades de aprendizagem. Paralelamente ao diário de bordo, tem-se a observação direta do objeto de estudo. Assim, foi possível fazer alguns registros, como fotografias dos estudantes durante algumas atividades em sala de aula, ao utilizarem o OA.

Quanto ao delineamento, optou-se pela pesquisa-ação. Na pesquisa-ação, o pesquisador está inserido no contexto estudado, em que, além de observar, compreender os fenômenos estudados, ele intervém, provocando mudanças, em algum grau. Este delineamento vem sendo utilizado frequentemente em estudos da área da educação. (THIOLLENT, 2004). Segundo Borba e Araújo:

> A denominação pesquisa-ação tem sido utilizada com frequência para fazer referência a uma modalidade de pesquisa de intervenção na prática. A pesquisa-ação, nesse sentido, é um processo investigativo de intervenção em que caminham juntas prática investigativa, prática reflexiva e prática educativa. Ou seja, a prática educativa, ao ser investigada, produz compreensões e orientações que são imediatamente utilizadas na transformação dessa mesma prática, gerando novas situações de investigação. (2013, p. 77).

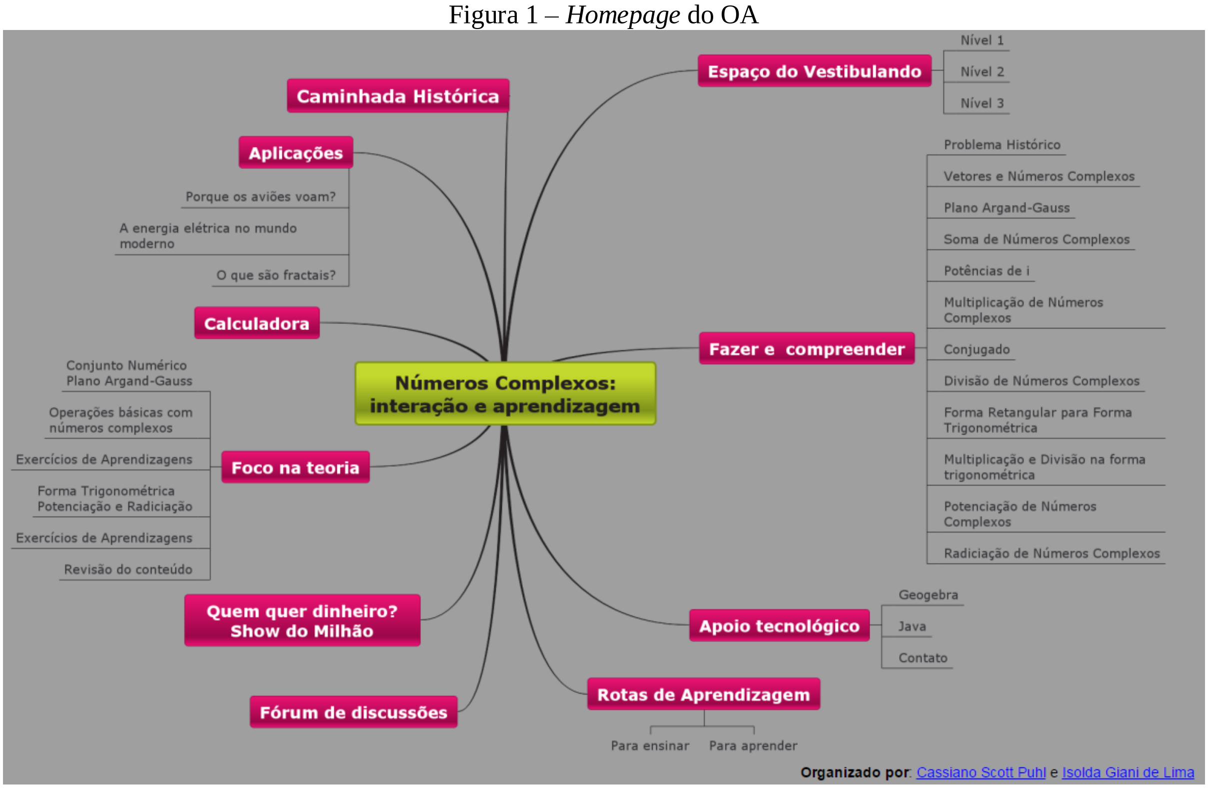
No campo educacional, ao estudar o processo de aprendizagem, o professor exerce a função de pesquisador, mas, durante a realização das atividades, podem surgir diversos fatores não previstos no planejamento, que podem fazer com que a aula tome outro rumo, cabendo ao professor-pesquisador conduzir esse caminho novo. Ao planejar uma aula, o professor levanta asserções sobre o conhecimento dos estudantes e determina ações para os objetivos que pretende promover, e o mesmo ocorre ao planejar uma pesquisa, ainda mais tratando-se de uma pesquisa-ação. Segundo Borba e Araújo (2013), o principal momento da pesquisa-ação ocorre quando o pesquisador pesquisa, ou reflete, sobre a sua própria prática, intervindo nas ações, como é o papel de um professor-pesquisador. (BORTONI-RICARDO, 2008).

Deste modo, a pesquisa-ação e a triangulação são procedimentos congruentes. Assim, a abordagem qualitativa, a triangulação e a pesquisa-ação estão entrelaçadas, através dos diversos procedimentos utilizados para avaliar as ações, as questões e os objetivos no planejamento desta pesquisa.

6 CONSTRUÇÃO FEITA, PRONTO PARA CONHECER O OA?

Depois de muito estudo e dedicação, "finalizando" o OA, como um recurso potencialmente significativo. Escreveu-se *finalizando* entre aspas, pois o OA é um *site* que, certamente, estará em contínuo processo de aprimoramento. Como mencionado anteriormente, este recurso foi criado, levando em consideração teorias de aprendizagem ativa e significativa e as orientações do Programa Ensino Médio Inovador. Deste modo, criou-se um ambiente dinâmico, agradável e dialógico para os estudantes aprenderem números complexos.

Figura 1 – *Homepage* do OA



Fonte: Elaborada pelo autor.

O *site* tem como título o mesmo desta pesquisa, "Números Complexos: interação e aprendizagem", disponível em <http://www.matematicacomplexa.hol.es>. A Figura 1 é a atual página de entrada desse ambiente, onde estão destacados os espaços de aprendizagem do OA, que são: Caminhada histórica, Espaço do vestibulando, Fazer e compreender, Apoio tecnológico, Rotas de aprendizagem, Quem quer dinheiro? Show do Milhão, Foco na teoria, Calculadora, Aplicações, e Fórum de discussões.

Cada espaço de aprendizagem foi desenvolvido pensando na diversidade dos estudantes que estão presentes em salas de aulas, principalmente em relação aos subsunçores, ao interesse pessoal por determinado assunto e ao desejo de aprender. Uma característica do OA é permitir que o estudante escolha por quais ambientes quer passar, conforme o seu interesse e a sua forma de aprender. Assim, os estudantes encontrarão ambientes de aprendizagem para fazer leituras, resolver exercícios, assistir a vídeos, realizar atividades lúdicas, interagir e construir conhecimento.

Na sequência desta seção, será destacada a importância de cada espaço de aprendizagem construído.

6.1 Caminhada histórica

A "Caminhada histórica" é um ambiente estruturado como uma linha do tempo, apresentando os matemáticos que contribuíram para a formalização da teoria dos números complexos. Como todos os outros conjuntos numéricos, o conjunto desses números foi uma construção humana, demorou séculos para ser concretizada, com a contribuição de diferentes matemáticos de diversas nacionalidades. Assim, argumentou-se que a Matemática, por meio dos seus temas, é um conhecimento vasto, com o que já se tem, mas que é dinâmico, como qualquer ciência, e está sempre em construção.

Nesta parte do OA, tem-se como objetivo mostrar o processo de construção humana desenvolvido na elaboração da teoria dos números complexos, em que os interessados podem navegar lendo, compreendendo as informações apresentadas e construindo um conhecimento amplo sobre o assunto. Inicialmente, o ambiente disponibilizava uma linha do tempo adaptada da dissertação de Araújo (2006). Depois, pensando no envolvimento dos estudantes na aplicação da rota de aprendizagem na escola, decidiu-se fazer com que o estudante, além de ser um sujeito ativo no processo de aprender, participasse da construção do OA.

Os estudantes foram responsáveis pela escrita de textos sobre os matemáticos e seus feitos, considerados fundamentais para o desenvolvimento dos números complexos, dentre os quais, encontram-se: Girolamo Cardano, Raphael Bombelli, Albert Girard, Gottfried Wilhelm Leibniz, Abraham de Moivre, Leonhard Euler, Caspar Wessel, Jean Robert Argand, Carl Friederich Gauss e Agustin Cuchy. A elaboração de cada um desses textos ocorreu de forma colaborativa, em duplas de estudantes.

Escrever um texto sobre um conhecimento completamente novo não é uma tarefa simples. Assim, não se poderia deixar de acompanhar os estudantes, como é previsto na função do professor, nas tendências construtivistas (BECKER, 2001; COLL, 1999; MOREIRA, 2011b), que foi guiar e orientar a elaboração dos textos, como um mediador na construção do conhecimento e da escrita. Para desempenhar essa função, fez-se uma leitura preliminar do texto a ser publicado no *site*, analisando e sugerindo acréscimos e aperfeiçoamentos a cada uma das produções. Após algumas trocas de *e-mail*, com idas e vindas dos textos, estes estão presentes no ambiente de aprendizagem. Se, você leitor, tiver interesse em conhecer as produções dos estudantes, é só passar no OA (http://www.matematicacomplexa.hol.es) e acessar "Caminhada histórica".

6.2 Espaço do vestibulando

No "Espaço do vestibulando", consta uma coletânea de questões sobre números complexos, que foi preparada a partir de uma pesquisa em provas de vestibular de universidades federais do Brasil e de outras que se destacam na oferta de cursos da área das Ciências Exatas e Tecnologia, do Estado do Rio Grande do Sul, como, por exemplo: a UCS, a Unisinos e a Ulbra. Esta busca de questões foi realizada na internet e foi um trabalho árduo e demorado, pois foi realizado um levantamento em provas de vestibular do período 2007-2013, para selecionar questões que envolvessem números complexos, sendo encontradas mais de cem.[23] Com isso consta, no "Espaço do vestibulando", um banco de questões com as que se conseguiu integrar até o momento.

A motivação ou justificativa para a criação deste espaço refere-se, principalmente, ao fato de que o estudo de números complexos, geralmente, acontece no terceiro ano do Ensino Médio. Dada a experiência profissional, os estudantes dessa série dão uma importância especial para o Vestibular. Assim, pensou-se em criar um espaço com questões de Vestibular, visando prepará-los, também, para essa prova, bem como desenvolver novas aprendizagens.

O "Espaço do vestibulando" é um ambiente construindo para os alunos interessados em ampliar o que foi visto em aula; é um espaço para estudantes que querem mais, que são mais curiosos e que se sentem motivados por desafios. Este tipo de aluno "tem grande interesse em aprender sobre novos acontecimentos ou fenômenos científicos, inclusive sobre aqueles que não aparecem nos livros didáticos". (POZO; CRESPO, 2009, p. 44). Ele prefere seguir sua própria iniciativa, investigar, descobrir, estudar de forma autônoma e prática. Provavelmente, os estudantes que circularão neste ambiente terão uma predisposição para aprender, um elemento essencial para que ocorra a aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2003; AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980; MOREIRA, 2011b; MOREIRA, 2011c) e

[23] Todas as questões estão salvas num arquivo do Word, porém elas não estão catalogadas nem organizadas. Caso tenha interesse em acessar todas as questões, disponibiliza-se o *link*: <https://drive.google.com/file/d/0B2UrtxV6c7-ARS1hU1lBdzhBeXc/view?usp=sharing>.

poderão ampliar seu conhecimento gradativamente. Essa preocupação em organizar o material em grau de dificuldade é um dos princípios programáticos facilitadores da aprendizagem significativa, a organização sequencial. (AUSUBEL, 2003).

Sempre com o propósito de desenvolver um material potencialmente significativo, as questões foram categorizadas em três níveis: fácil (nível 1), médio (nível 2) e difícil (nível 3), como forma de orientar os percursos, de acordo com a necessidade ou o interesse dos estudantes. No nível 1, encontram-se questões sobre conceitos básicos como: operações básicas, representação geométrica na forma algébrica, comparação de números complexos e raízes complexas.

Compreendidos os conceitos iniciais, o estudante pode passar para nível 2, em que tem questões que envolvem a forma trigonométrica dos números complexos, a multiplicação, a divisão e as transformações do número complexo, da forma algébrica para a trigonométrica e vice-versa.

No último nível, o terceiro, estão questões com um grau maior de complexidade; são utilizados os conceitos da forma trigonométrica para resolver questões que envolvem a fórmula de De Moivre em cálculos de radiciação e potenciação de números complexos. Além dessas, outras questões se referem à decomposição de polinômios, um conteúdo, geralmente, estudado após os números complexos. Passando por este nível, resolvendo corretamente as questões, o estudante terá um conhecimento avançado sobre números complexos, dando indícios de ter incorporado na sua estrutura cognitiva conceitos explorados nos três níveis de dificuldade.

Ao resolver as questões, progressivamente, os estudantes utilizam o conhecimento da etapa anterior; assim, eles deverão compreender os conceitos envolvidos para avançar nos níveis, aplicando os subsunçores, gradativamente, em diversos contextos ou aplicações dos números complexos. Deste modo, o estudante pode acompanhar sua aprendizagem, de forma contínua, através da resolução das questões dos respectivos níveis, sendo uma evidência da aprendizagem do conteúdo estudado.

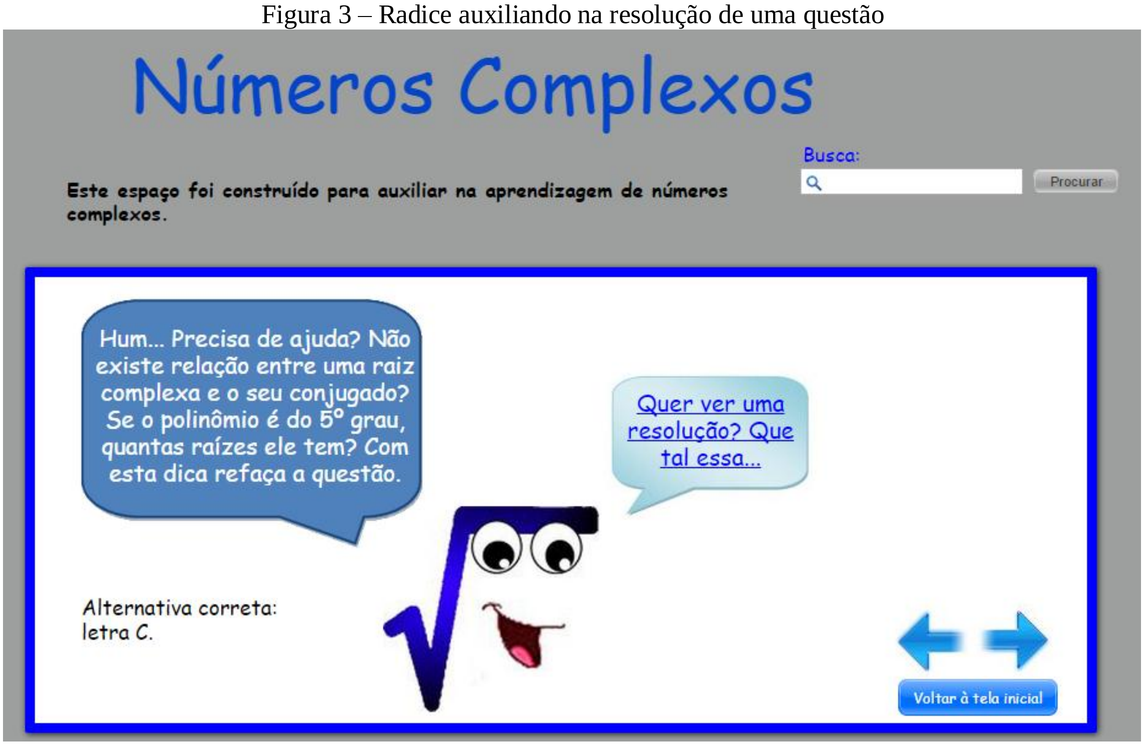
Para enriquecer e animar a presença neste ambiente, contou-se com o Radice, com a função para acompanhar o aprendizado do estudante. O Radice desempenha um papel fundamental, foi parceiro do professor, por vezes assumindo o seu papel, estimulando e orientando o estudante para a aprendizagem. Vamos ver como o Radice desempenha este papel?

Figura 2 – Radice instigando o estudante a resolver as questões do nível 1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao entrar num nível de dificuldade, são apresentadas algumas questões de Vestibular e o Radice está aí para estimular o estudante. Ver Figura 2. O estudante tem a liberdade para escolher a questão, que é, então, lançada para ser resolvida.

Figura 3 – Radice auxiliando na resolução de uma questão



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao resolver a questão, o estudante pode avançar e ver a resposta correta. Caso o estudante erre, o Radice entra novamente em ação. Segundo Polya e Araújo (1977, p. 1), “se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável de trabalho”. Assim, o docente procura compreender o que se passa na cabeça do aluno ou pensar nos conceitos estruturantes para a resolução de tal problema, neste caso, a questão de Vestibular. Uma alternativa é fazer com que o aluno reflita, pense numa forma correta de resolver. Assim, o Radice, ao invés de solucionar a questão, faz algumas perguntas (Figura 3), fazendo-o refletir sobre os meios de resolução. Se, mesmo assim, o estudante não acertar, ele tem acesso ao gabarito e a uma explicação da resolução.

Diferentemente da linha do tempo, este espaço está baseado na epistemologia relacional (BECKER, 2001), pois além de ter acesso ao gabarito, se o estudante não acertar, poderá retornar ao problema e terá uma dica, para que identifique erros ou verifique os conceitos imprescindíveis, para retomar a resolução. Se ainda assim não acertar a questão, terá acesso, então, a uma proposta de resolução.

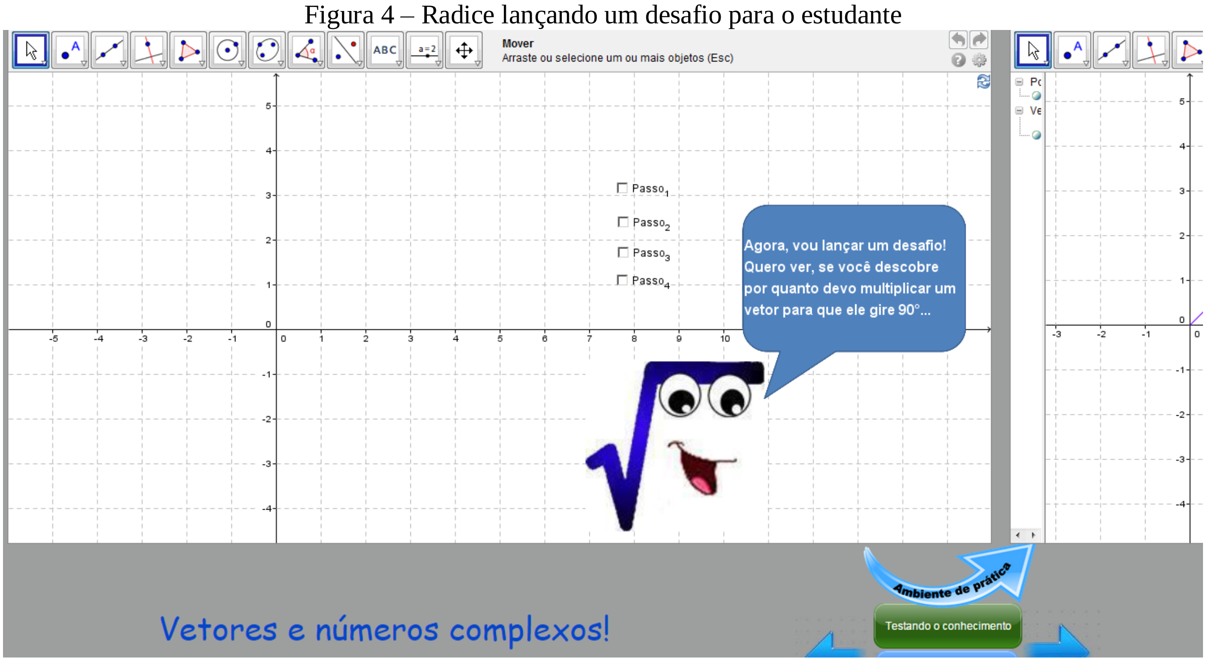
Desta forma, existe um processo contínuo, rompendo com o paradigma da mera reprodução, em que o erro é algo banido, não podendo acontecer. (MORETTO, 2007; MORIN, 2004). Ao contrário, o erro é do ser humano, faz parte do seu desenvolvimento cognitivo e serve como um meio de reflexão e crescimento pessoal. (BECKER, 2001). Nesta perspectiva, Hoffmann (2006, p. 48) afirma que os “erros representam momentos tão ou mais significativos que os acertos, à medida que levam à autocorreção, à tomada de consciência, à tentativa de superação”. Por isso, o ambiente é reflexivo, e o estudante é ativo mentalmente no processo de aprendizagem, podendo, assim, tornar-se um material potencialmente significativo.

6.3 Fazer e compreender

No ambiente de aprendizagem “Fazer e compreender”, tem-se uma sequência de aplicativos construídos no GeoGebra, potencialmente significativo para a aprendizagem de números complexos. O GeoGebra é um *software* livre, que reúne recursos para processar geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos variados, sendo utilizado em multiplataformas. Neste espaço, seguiu-se uma rota de trabalho metodológica parecida com a que foi realizada pelas professoras Azambuja, Silveira e Gonçalvez (2004). O que diferencia as propostas é que a deste projeto tem como base a construção de conceitos utilizando aplicativos digitais, mas, da mesma forma, com o propósito maior de promover aprendizagens significativas.

Inicialmente, através de perguntas, pretendeu-se levar o aluno a perceber que os números reais são insuficientes para a realização de algumas operações matemáticas. Cabe destacar que não iniciou com a resolução de equações de 2º grau. Ao invés disso, iniciou-se o estudo de números complexos através da abordagem geométrica, tendo os vetores[24] como subsunçores, para que o estudante perceba a necessidade de um novo tipo de número, o número complexo, como foi realizado por Spinelli (2009). Segundo Dante (2008), os números complexos estão associados a vetores, com origem do sistema cartesiano e com extremidade num ponto identificado como o número complexo. (DANTE, 2008). Ao trabalhar com a forma geométrica do número complexo, nossa prática foi enriquecida, em especial pela colocação em segundo plano de uma visão puramente formal e algebrizante (CARNEIRO, 2004; SPINELLI, 2009).

Figura 4 – Radice lançando um desafio para o estudante



Fonte: Elaborada pelo autor.

Desta forma, contemplou-se um estudo interdisciplinar, como prevê a minuta do Programa Ensino Médio Inovador. (BRASIL, 2014). Neste estudo, utilizaram-se vetores, geralmente estudados, e com grande aplicação, na Física do primeiro ano do Ensino Médio, para dar suporte à construção do conhecimento em matemática. Essa relação com a Física e, de certo modo, com aplicações práticas, colabora para se ter um ambiente potencialmente

[24] Vetores são estudados, geralmente, na disciplina de Física, do primeiro ano do Ensino Médio.

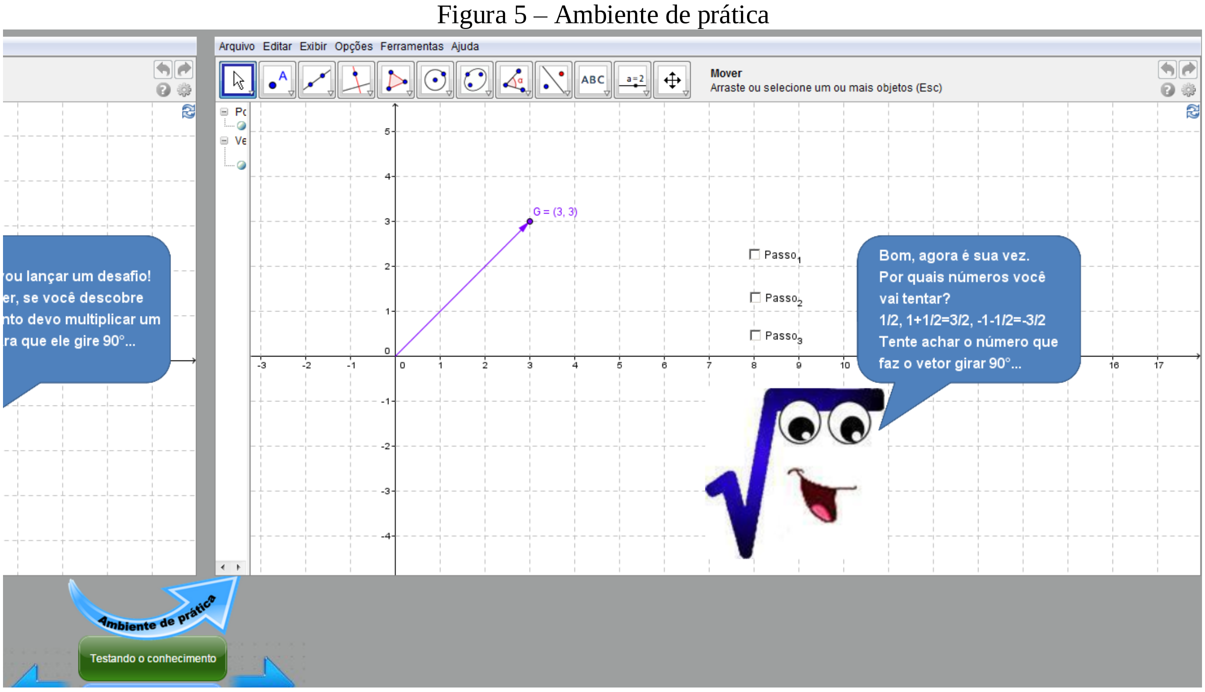
significativo, permitindo que o estudante incorpore o conhecimento novo em conceitos estruturantes presentes na sua estrutura cognitiva.

Neste ambiente, tem-se o objetivo de fazer com que o estudante reflita, analise, construa e teste conjecturas, através da sua interação com os aplicativos. Ou seja, espera-se ter criado aplicativos potencialmente significativos, com os quais os estudantes possam construir conhecimento na interação, sendo sujeitos ativos no processo de aprendizagem.

Assim, no ambiente “Fazer e compreender”, há três recursos importantes que o estudante pode utilizar, para construir o conhecimento sobre os números complexos: a interação com o Radice, o ambiente de prática e o link testando o conhecimento.

A interação com o Radice acontece, já na primeira janela, num aplicativo construído no GeoGebra, em que, através de perguntas, pretendeu-se fazer com que os estudantes obtivessem certo nível de conhecimento sobre os números complexos, ou que estabelecessem algumas conjecturas. Nesses aplicativos, o Radice orienta a conversa, fazendo o estudante refletir sobre alguns conhecimentos necessários para a aprendizagem dos números complexos, ver Figura 4. Além de o estudante participar ativamente e de refletir sobre os tópicos abordados, ele tem a liberdade de manipular os vetores e utilizar os recursos disponíveis no GeoGebra.

Figura 5 – Ambiente de prática



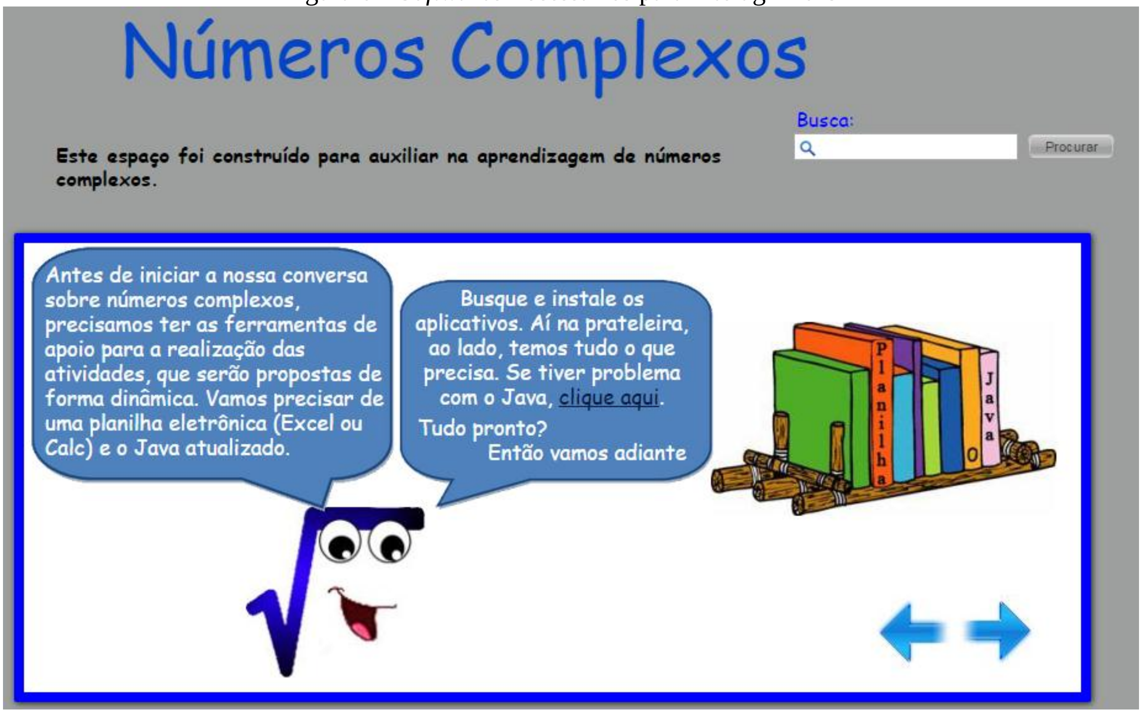
Fonte: Elaborada pelo autor.

Pensando num estudante ativo e autônomo, criou-se um ambiente de prática: um aplicativo do GeoGebra, que fica ao lado do mencionado anteriormente, sendo desenvolvido para testes e análises de algumas conjecturas, como também para utilizar o conhecimento anterior. O Radice, também nesse espaço, dá sugestões ou incentiva o estudante a testar conjecturas e realizar as construções sugeridas de forma ativa e dinâmica (Figura 5).

Por fim, o espaço “Fazer e compreender” integrou o recurso “Testando o conhecimento” (botão verde, da Figura 5). Ao clicar neste botão, o estudante pode fazer o *download* de uma planilha eletrônica com perguntas sobre os tópicos abordados nos aplicativos do GeoGebra. Essas perguntas tem o objetivo de dar indícios ao estudante de que ele está compreendendo o conteúdo. Não foi priorizado aqui o grande número de atividades, mas sim perguntas sobre conceitos estruturantes dos números complexos.

Para que o estudante usufrua de todos os recursos disponíveis deste ambiente de aprendizagem, é necessário que ele tenha instalado uma planilha eletrônica e o Java. Caso não possua, nas primeiras janelas deste ambiente, o Radice disponibiliza *links* para o *download* dos dois *softwares* (Figura 6).

Figura 6 – *Softwares* necessários para interagir no OA



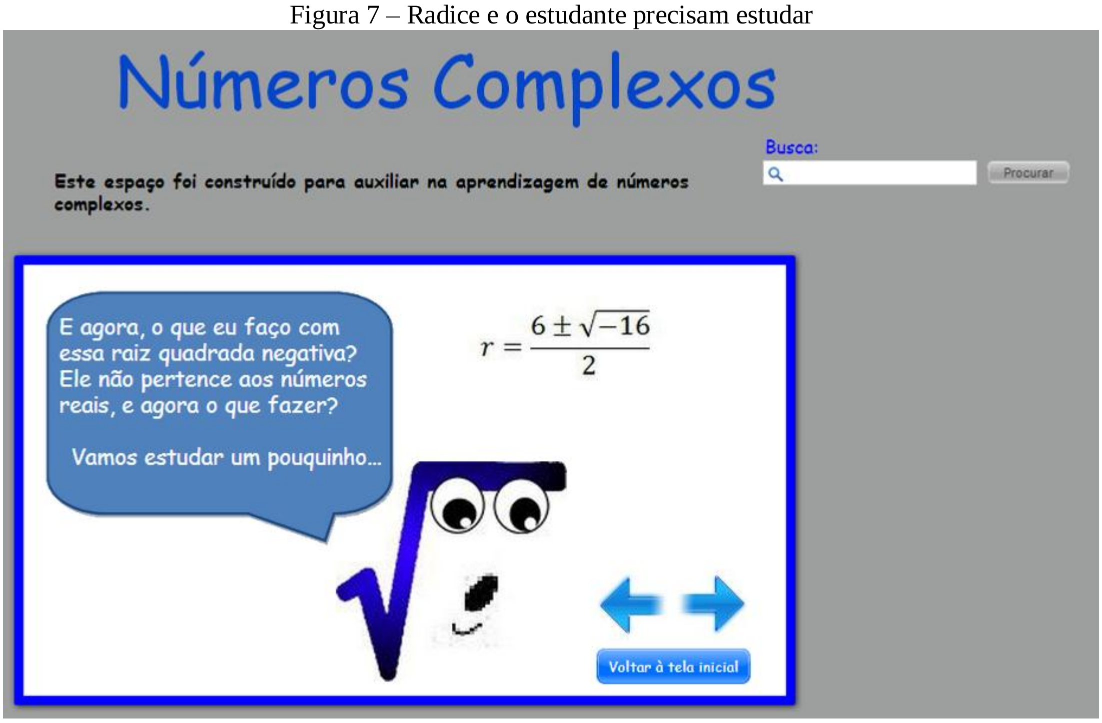
Fonte: Elaborada pelo autor.

Além dos aplicativos do GeoGebra e do *link* “Testando o conhecimento”, tem-se um ambiente chamado “Problema histórico”. Não se deixaria de construir uma atividade que envolvesse os aspectos históricos dos números complexos, pois os PCN destacam que “devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber: $x^2 + 1 = 0$”

(BRASIL, 2006, p. 71). No espaço “Problema histórico”, Radice desafia os estudantes e propõe outra equação, diferente da proposta pelos PCN. O “espírito” desse desafio é o mesmo que animava os matemáticos, por volta de 1550, prática essa (de desafiar-se) que era comum à época. O desafio proposto pelo Radice é: “Diga dois números cuja soma é 6, e a multiplicação é 13”, um problema parecido com o que Cardano teria resolvido, como: dividir o número 10 em duas partes cujo produto seja 40. (PINTO JÚNIOR, 2009; SANTOS, 2013; MILIES, 2003). Desta forma, introduziu-se a história dos números complexos, no qual Radice e o estudante enfrentam alguns dos problemas que os matemáticos daquela época, também, enfrentaram.

O estudante pode colocar-se no lugar de um matemático, compreendendo e passando pelos mesmos sentimentos; assim, a “utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos”. (BRASIL, 2006, p. 86). Nas interações com o Radice, este estimula que o estudante acompanhe e faça alguns cálculos.

Figura 7 – Radice e o estudante precisam estudar



Fonte: Elaborada pelo autor.

Avançando no aplicativo, os estudantes chegam à resolução do problema, encontrando um número complexo. Mas, Radice propõe, ainda mais, que o estudante comprove o resultado, como foi feito por Cardano, ressaltando o processo histórico do desenvolvimento dos números complexos (PINTO JÚNIOR, 2009; SANTOS, 2013; NOBRE, 2013; MILIES, 2003).

Ao criar este espaço de aprendizagem, tem-se o objetivo de proporcionar um ambiente reflexivo, para que o estudante compreenda os conceitos e elementos estruturantes dos números complexos, como também as operações com esses números, de forma significativa e ativa. Assim, essa sequência de aplicativos visa modificar a prática do professor, oferecendo uma alternativa diferente de explanar sobre conceitos e operações com números complexos. Neste ambiente, o estudante conta com o apoio do Radice, que desempenha o papel de professor questionador, fazendo-o refletir sobre alguns aspectos importantes dos números complexos.

6.4 Apoio tecnológico

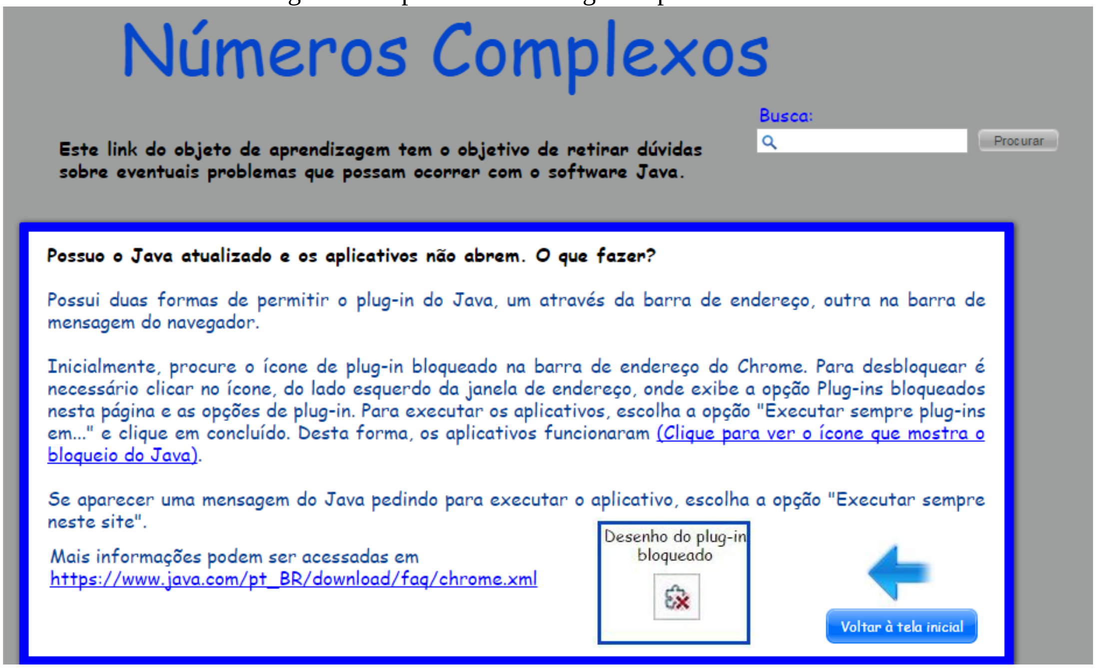
O ambiente "Apoio tecnológico" foi criado em função de algumas dificuldades encontradas com o GeoGebra, pois utiliza o programa Java, para rodar os aplicativos. E o Java, correntemente, precisa de uma atualização que, para quem não tem familiaridade com computação, não é um procedimento trivial. Assim, são propostas soluções para alguns problemas recorrentes.

Além disso, foram levados em consideração alguns critérios recomendados na criação de objetos de aprendizagem, para ser considerado um recurso pedagógico. (KRATZ et al., 2007). Segundo Monteiro et al. (2006, p. 396), um ambiente de apoio tecnológico é um espaço "fundamental em qualquer animação de caráter pedagógico, pois fornece instruções de uso e respostas às dúvidas mais frequentes dos usuários".

Desta forma, além do Java, criou-se um espaço em que se disponibilizou uma apostila explicando cada uma das ferramentas do GeoGebra, como, também, um formulário para entrar em contato conosco, sobre qualquer problema ou dúvida que o usuário venha a ter ao utilizar o OA.

A participação ativa dos estudantes, em alguns testes realizados durante a construção do OA foi especialmente decisiva, para o aperfeiçoamento desse ambiente. No ambiente de ajuda do Java, por exemplo, não se tinha uma página listando os problemas recorrentes, o que fazia com que os estudantes tivessem que olhar todos os problemas, à procura do seu. De tal modo, eles perderiam um tempo considerável para, talvez, não encontrarem a solução do seu problema. Criou-se, então, uma página listando os problemas para os quais já há uma solução. Outra sugestão dada pelos estudantes foi a de utilizar imagens para complementar as explicações textuais, e para auxiliar na resolução dos problemas possíveis de acontecer (Figura 8).

Figura 8 – Aprimoramento sugerido pelos estudantes



Fonte: Elaborada pelo autor.

O espaço “Apoio tecnológico” é, então, um recurso construído para agilizar a solução de questões tecnológicas e, com isso, não desviar o estudante do foco da aprendizagem de números complexos.

6.5 Rotas de aprendizagem

“Rotas de aprendizagem” são caminhos que podem ser seguidos dentro do OA e, como em todo planejamento, são percursos sugeridos e, na condição de possíveis rotas, outras podem ser percorridas ou sugeridas por professores ou criadas pelos estudantes. Este ambiente oportuniza possibilidades de planejamento aos professores, apontando caminhos para desenvolver as aulas sobre números complexos, da forma que entendem ser a mais adequada.

Neste ambiente, destacam-se dois tipos de rota: para aprender e para ensinar. As rotas para aprender são caminhos a serem seguidos pelos estudantes que querem ou precisam compreender os elementos ou as operações envolvendo números complexos, sem o aporte de um professor. Neste espaço, está presente uma rota de aprendizagem, que foi construída e utilizada pelos estudantes do Ensino Médio que participaram desta pesquisa. Nessa rota utilizada, seguiram-se primeiro os conceitos algébricos, depois as operações e, por fim, a forma trigonométrica dos números complexos.

As rotas para ensinar são sequências didáticas sugeridas para professores, com um destaque especial para a rota de aprendizagem que foi utilizada com os estudantes do Ensino Médio, e que está sendo analisada nesta pesquisa. Essa rota de aprendizagem apresenta os seguintes itens: o que o estudante será capaz de aprender, o conteúdo, a duração da atividade, os conhecimentos prévios requeridos para as aprendizagens propostas, as estratégias e os recursos da aula, a avaliação e os anexos.

O professor deve se sentir à vontade para alterar as rotas de aprendizagem, conforme achar conveniente. Pois é sua função planejar, criando um roteiro flexível, permitindo que o estudante seja ativo no processo de aprendizagem e com os objetivos definidos. (MORETTO, 2012). Cabe ressaltar que a avaliação, nessa rota de aprendizagem, está adaptada com critérios atualmente propostos para as escolas públicas do Rio Grande do Sul, segundo recomenda a Proposta Pedagógica do Ensino Médio Politécnico. (SEDUC, 2011).

A avaliação é "um recurso pedagógico útil e necessário para auxiliar cada educador e cada educando na busca e na construção de si mesmo e do seu melhor modo de ser na vida". (LUCKESI, 2000). Desta forma, ao invés de serem utilizadas notas, os professores atribuem conceitos aos estudantes, procurando constituir a avaliação como um processo com funções diagnóstica, formativa e somativa. (BRASIL, 2013a).

Este é um espaço que pode ser aprimorado, principalmente com a disponibilização de mais algumas rotas de aprendizagem, sequências didáticas construídas ou sugeridas por usuários do OA.

6.6 Quem quer dinheiro? Show do Milhão

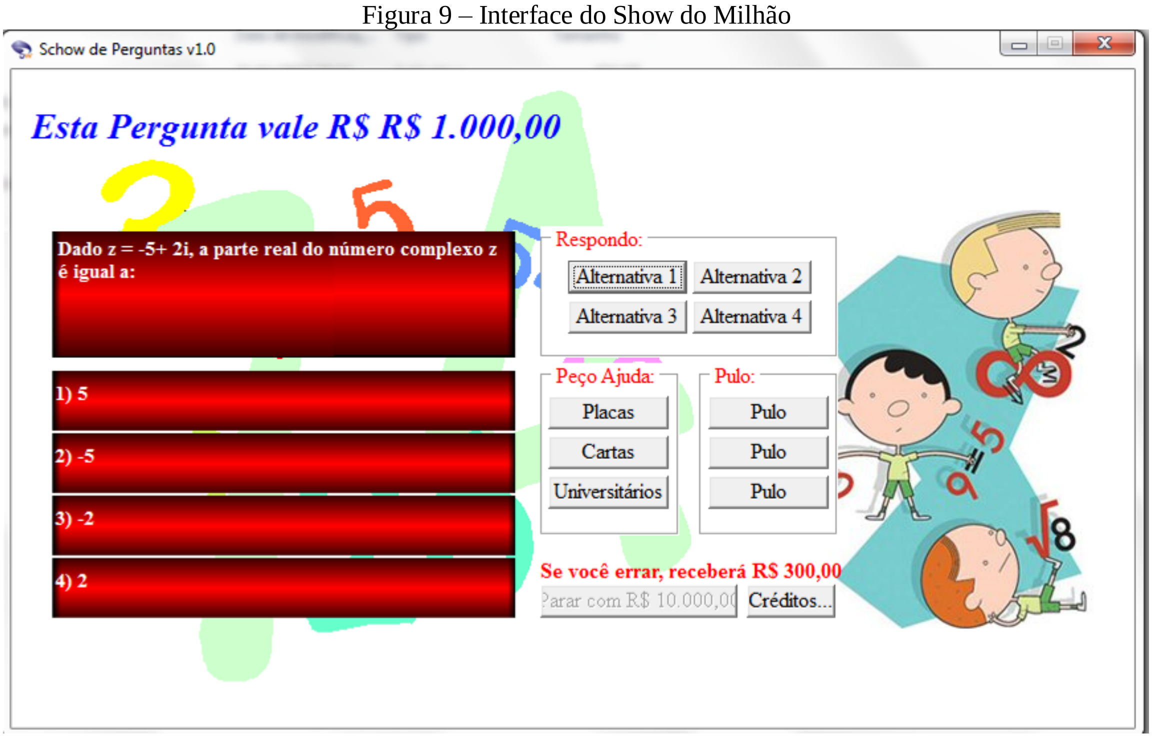
"Quem quer dinheiro?" é uma expressão bastante conhecida e sugere o lúdico. Para desafiar e estimular os estudantes, criou-se um "Show do Milhão" alusivo a um programa da televisão brasileira, com perguntas sobre números complexos. Teve-se acesso a este aplicativo num minicurso proposto no Fórum das Licenciaturas da UCS, pela professora Franciele Menin. A versão utilizada no minicurso envolvia cálculos de proporcionalidades; assim nosso trabalho foi criar e alterar o banco de dados,[25] (Apêndice C).

[25] O banco de dados se refere às questões que estão presentes no jogo. Caso haja interesse em acessar o banco de dados completo, está disponível em: <https://docs.google.com/document/d/1beNMyczKkUhHt0lJ_vMsRo4fIT6aZs5eOL6ygAyI3fU/edit?usp=sharing>.

Segundo Prata e Nascimento (2007, p. 107), “atividades pedagógicas digitais devem evidenciar os aspectos lúdicos, de interação e de experimentação que deveriam estar presentes em qualquer processo de aprendizagem significativa”. Procurando desenvolver um OA em consonância com os autores, não se poderia deixar de lado a sensação do lúdico, do divertimento e da competição sadia, para conquistar o prêmio máximo. Na Figura 9, pode-se observar que o jogo apresenta as mesmas possibilidades daquele apresentado na televisão (pular, cartas, universitários e placas).

No Show do Milhão do OA, seguiu-se um princípio facilitador da aprendizagem significativa: a organização sequencial, em que as questões foram ordenadas em grau gradativo de dificuldade; assim existem quatro níveis de dificuldades. Inicialmente, tem-se rodadas de perguntas simples (valendo de 1 mil a 5 mil) sobre a parte algébrica do número complexo e a unidade imaginária i; na segunda parte (valendo de 10 mil a 50 mil), as questões envolvem operações com números complexos na forma algébrica; na parte final das rodadas de perguntas (valendo de 100 mil a 500 mil), as questões se referem à forma trigonométrica. A pergunta final (de 1 milhão) apresenta uma expressão envolvendo diferentes operações e transformações, nas formas de representação de números complexos.

Figura 9 – Interface do Show do Milhão

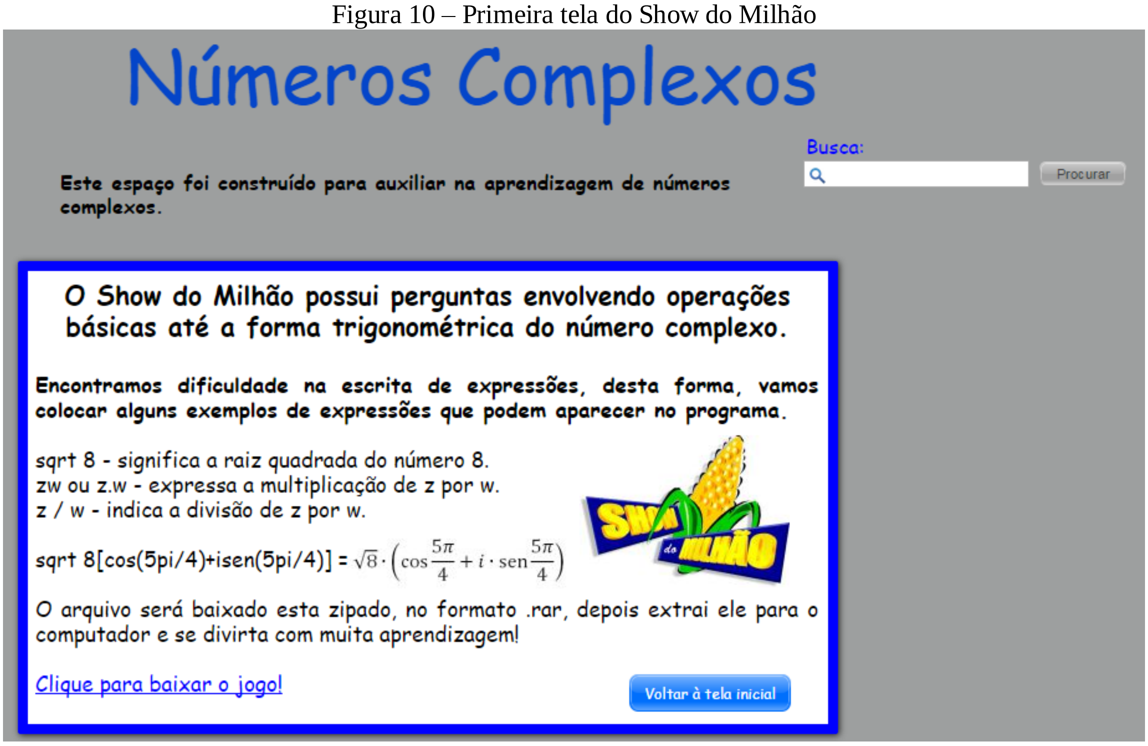


Fonte: Elaborada pelo autor.

O banco de dados do Show do Milhão possui perguntas que foram selecionadas e adaptadas de diferentes livros didáticos e da internet, aproximando assim o texto didático da escola e propiciando a resolução de exercícios com dinamismo e o incentivo de um desafio, para chegar à pergunta que vale um milhão, cujo prêmio é caricaturado na forma de uma grande espiga de milho. Em cada rodada do jogo, as perguntas são apresentadas por nível de dificuldade, mas escolhidas de forma aleatória. Assim, procurou-se criar um banco de questões consideravelmente grande para evitar a repetição de questões.

O Show do Milhão não abrange todas as operações com os números complexos, como, por exemplo: potenciação e radiciação. Optou-se por não utilizar essas operações, pois o seu maior significado está no sentido geométrico, e o aplicativo não suporta imagens nem símbolos matemáticos. Este aspecto é apresentado antes mesmo de o jogo ser baixado (Figura 10), e foi um fator limitante que encontramos para a construção de um jogo mais competitivo e desafiador.

Figura 10 – Primeira tela do Show do Milhão



Fonte: Elaborada pelo autor.

O jogo está disponível pelo OA, mas habita um repositório virtual do Dropbox. Para baixar o arquivo não é preciso nenhum tipo de cadastrado, basta ter um *software* que abre arquivos compactados no formato RAR, como, por exemplo: WinRar. Deste modo, este recurso foi planejado e criado para ser um ambiente diferenciado, atrativo e lúdico de aprendizagem. Quer tentar ganhar um milhão? Acesse o Show do Milhão do OA.

6.7 Foco na teoria

No ambiente de aprendizagem “Foco na teoria”, são apresentados os conceitos formais da teoria dos números complexos. Este ambiente foi criado após um diálogo com professores num evento da área de Educação em Matemática. Eles sugeriram agregar este espaço para que o estudante tenha mais um recurso para desenvolver a aprendizagem dos números complexos.

Inicialmente, tinha-se a pretensão de escrever, ou transcrever o conhecimento formal dos livros didáticos. Porém, vendo o quão trabalhoso seria, optou-se por pesquisar e selecionar recursos virtuais já disponíveis na internet. Além do conhecimento formal, foram disponibilizados alguns exercícios de aprendizagem sobre números complexos, retirados de livros didáticos ou de *sites* da internet.

Deste modo, neste ambiente estão propostos os conceitos que são encontrados nos livros didáticos, mas com a preocupação de ajudar na construção das ideias e desenvolver aprendizagens significativas. Este ambiente tem uma ligação direta com o espaço “Fazer e compreender”, pois, ao percorrer esse espaço, o estudante poderá ter dúvidas e fazer conjecturas que podem ser comparadas com definições e conceitos formais. O objetivo deste espaço é, então, apresentar o conhecimento formal para os estudantes.

6.8 Calculadora

Em “Calculadora”, são propostas formas de como operar com números complexos em calculadoras científicas, e também para realizar transformações entre as formas cartesiana e trigonométrica. Usaram-se manuais de duas calculadoras, Casio e HP, usualmente utilizadas por estudantes do Ensino Médio ou de cursos de Engenharia. Assim, agregaram-se, ao OA, vídeos explicativos e disponibilizados no YouTube, de como se opera com números complexos nessas calculadoras.

A motivação para a criação deste espaço ocorreu durante um congresso na área de Educação em Engenharia. Numa conversa informal com um professor da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), falou-se sobre o OA que se pretendia construir e sobre os espaços que estavam sendo planejados. Então, o professor declarou que muitos acadêmicos de Engenharia apresentam dificuldade de operar com números complexos, como também desconhecem que as calculadoras HP fazem essas operações. Deste modo, o OA poderia servir também para auxiliar esses estudantes.

Visando a aprendizagem significativa, seria insuficiente disponibilizar formas de operar com números complexos em calculadoras. Ao acessar esse espaço, sugere-se que o estudante passe antes por outros ambientes de aprendizagem, como o “Fazer e compreender”. O objetivo principal é promover uma aprendizagem significativa, procurando gerar, primeiro, compreensão e significados, para depois, se houver interesse, dar boas dicas de resolução rápida. Criou-se este espaço principalmente para os estudantes de Engenharia, que utilizam a calculadora HP, para que se aprimorem em efetuar operações com números complexos também com este recurso.

6.9 Aplicações

Os números complexos permitiram avanços nos estudos em algumas áreas da Física. Provavelmente, sem esses números, não teríamos os sofisticados computadores, os aviões de alto desempenho, os braços mecânicos, que respondem aos estímulos do cérebro, e toda a parte da Física Quântica e de eletricidade já desenvolvida. Assim, os números complexos podem ser considerados um dos mais poderosos conteúdos da Matemática (STEWART, 2013).

No ambiente “Aplicações”, são apresentadas algumas situações em que os números complexos estão presentes no mundo real, descrevendo-as em linguagem compreensível para os estudantes de Ensino Médio. Tais situações foram pesquisadas e construídas, com a colaboração de professores universitários e de cursos técnicos, que sugeriram bibliografia em que se pode encontrar aplicações que auxiliam para dar substantividade ao conteúdo. Além da bibliografia, aconteceram vários encontros com professores universitários, para, também o professor, ampliar e compreender conceitos de Física e Matemática envolvidos em tais aplicações. Assim, buscou-se mostrar aplicações dos números complexos, como forma de auxiliar os estudantes a darem sentido para o seu estudo, principalmente, para aqueles que querem saber onde esse conhecimento é aplicando. Criar esse espaço de aprendizagem contempla uma das sete etapas do método de Santos (2008a), de dar sentido ao conteúdo para desenvolver-se a aprendizagem significativa.

O objetivo desta unidade é mostrar como os números complexos estão inseridos, pelo menos indiretamente, no dia a dia dos alunos e de qualquer pessoa. Os aviões e a energia elétrica, presente em nossa casa, por exemplo, fazem parte do mundo dos estudantes. A importância de buscar essas aplicações decorre do fato de que é voltado aos estudantes de Matemática e Ciências; para esse público, é importante, decisivo até, que exista, em algum momento, alguma conexão do que está sendo estudado com o "mundo real". Essa é uma condição para que a aprendizagem do estudante seja de fato significativa. (SANTOS, 2008a). O esforço para produzir textos potencialmente significativos se justifica: as aplicações com este tipo de número são difíceis de ser compreendidas, sendo, geralmente, abordadas no Ensino Superior, nas áreas de Física, Matemática ou Engenharias.

A aplicação do número complexo no meio social destaca que este número não é somente um objeto teórico na Matemática, mas que está presente também em alguns conteúdos de Física, aproximando o caráter interdisciplinar proposto pelo Programa Ensino Médio Inovador e do Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio. Os estudos desenvolvidos geraram a criação de dois espaços com conceitos da Física, a análise de corrente alternada[26] e a força de sustentação do avião, e um sobre fractais.

Existem outras aplicações dos números complexos, como: biomecânica, computação gráfica e jogos digitais, na própria matemática (SANTOS, 2013), na astronomia, na cartografia (VASSALLO NETO, 2014) e nos sinais e sistemas. (SILVA, 2009). Estes enfoques necessitam de estudos aprofundados, o que não é alcançável neste projeto de pesquisa; porém é um aperfeiçoamento futuro pretendido para o OA, ampliando o contexto da aplicação dos números complexos.

Dado que este trabalho é voltado ao ensino e à aprendizagem dos números complexos, cabe uma reflexão de cunho didático-pedagógico. O porquê de escrever um texto como este já foi mencionado no início: trata-se de produzir um material que seja "potencialmente significativo", e esse objetivo é perseguido através da busca de aplicações que reflitam, pelo menos em parte, o mundo real dos estudantes. Mas, além dessa busca por aplicações concretas, também é importante refletir, brevemente, a respeito do perfil dos estudantes que leem textos como este. Cada estudante tem seu "estilo" próprio.

Segundo Pozo e Crespo (2009, p. 44), há quatro estilos de alunos do ponto de vista da motivação para as ciências: o curioso, o que busca conhecimento, o sociável e o que busca êxito. O curioso, geralmente, "tem grande interesse em aprender sobre novos acontecimentos ou fenômenos científicos, inclusive sobre aqueles que não aparecem nos livros didáticos. [...] prefere seguir sua própria iniciativa, investigar, descobrir, trabalhar de forma prática". Esse

---

[26] A utilização de números complexos facilita a análise de circuitos elétricos, possibilitando a análise gráfica de circuitos com elementos armazenadores de energia, tais como capacitores e indutores. Nesse caso, principalmente, para os estudantes de curso superior, cabe salientar que os elementos capacitores e indutores não são vetores, mas sim, fasores. Segundo Halliday, Resnick e Walker (2012, p. 132): "Um fasor é um vetor, de módulo igual à amplitude da onda, que gira em torno da origem com velocidade angular igual à frequência angular da onda." Apesar de os autores referirem-se à fasores como "vetores" girantes, isto é, uma espécie de vetor, não um vetor da forma como a Física o define e utiliza.

aluno frequentemente rejeita, não gosta do ensino praticado com a pura explanação do professor. (POZO; CRESPO, 2009). O texto aqui apresentado, certamente, atenderia, pelo menos em parte, às demandas desse “estudante curioso”. Uma atenção maior a estudantes com esse perfil passa pela construção de um ambiente de aprendizagem propício, no qual o estudante tenha espaço para se manifestar, perguntar, sugerir e propor.

O estudante que busca conhecimento também encontrará desafios à altura de suas expectativas neste texto: como foi visto, a Matemática e a Física, envolvidas no estudo da aerodinâmica, são sofisticadas e um aprofundamento se faz à custa de bastante esforço, estudo e trocas de conhecimento com professores de outras áreas de conhecimento. Desta forma, desenvolvendo-se um estudo interdisciplinar, pois, segundo Fazenda (2009, p. 22): “A interdisciplinaridade pode ser compreendida como sendo um ato de troca, de reciprocidade entre as disciplinas ou ciências – ou melhor, de áreas do conhecimento.” Uma atitude interdisciplinar procura aprofundar o conhecimento, ou também dar significado ao estudo de alguns conteúdos. É uma atitude de reciprocidade que impele à troca e ao diálogo com pares idênticos, com pares anônimos ou consigo mesmo; é uma atitude de desafio perante o novo e desafio de redimensionar o velho. (FAZENDA, 2009). Quem “busca conhecimento” certamente se sentirá desafiado.

No que diz respeito à relação social, o que foi dito a respeito do estudante curioso pode ser retomado aqui: o ambiente de aprendizagem deve ser construído de forma que as interações entre os grupos sejam percebidas, destacadas e incentivadas. O conhecimento construído pelos estudantes contém uma parcela absolutamente não desprezível de participação do coletivo, no qual ele se insere, e é de longa data que esse aspecto é destacado por teóricos como Vygostky (apud MOREIRA, 2011b), dizendo que a interação social, entre alunos ou aluno-sociedade, é “origem e motor da aprendizagem e do desenvolvimento intelectual. O sujeito não é resultado apenas de seu aparato biológico, mas de suas interações, de sua história e da forma como o mundo é representado em sua cultura”. (MOREIRA, 2011b, p. 211). Então, independentemente do estilo de aprendizagem de cada estudante, a relação social deve ser um aspecto da atenção do professor que gerencia o ambiente de aprendizagem.

Por fim, é possível afirmar que, numa certa medida, todos buscam êxito. Para aqueles estudantes, cujo estilo de aprendizagem faz que esse aspecto predomine, é talvez ainda mais importante propiciar um ambiente de aprendizagem socialmente rico. Num cenário ideal, esse estudante perceberia que o êxito pessoal – desejável e lícito – deve muito à contribuição dos pares. (POZO; CRESPO, 2009). Essa relativização da importância do êxito pessoal certamente contribuirá para a formação de cidadãos melhor integrados em seu meio e por consequência, mais felizes. Quer ver as aplicações? Estão disponíveis no Apêndice D.

6.10 Fórum de discussões

O "Fórum de discussões" foi o último ambiente de aprendizado criado no OA. Este ambiente de aprendizagem permite que diversos estudantes exponham suas dúvidas, sendo auxiliados por professores ou por estudantes. Essa troca de experiências cria um ambiente propício para a construção do conhecimento sobre números complexos.

A motivação para o desenvolvimento deste espaço foi devido à da colocação de dois estudantes numa avaliação. Quando perguntados sobre o que faltava no *site* para facilitar a compreensão dos conteúdos, um estudante respondeu: "Talvez algum tópico com as dúvidas mais simples e frequentes", e outro colocou: "Uma forma de avaliação opcional do *site* por meio de um *script* ou algo do gênero, para que outras pessoas possam indicar suas dúvidas". As palavras, tópico e *script*, empregadas pelos estudantes, foram interpretadas como um ambiente de troca de conhecimento, para desenvolver a capacidade de argumentação do estudante e a sua aprendizagem.

Após algumas discussões, refletiu-se e pesquisou-se, encontrando um recurso para a criação de um fórum,[27] em que qualquer estudante pode postar suas dúvidas e ajudar outros colegas com as dúvidas alheias. Este fórum está hospedado no provedor forumeiros.com, disponível em: <http://matematicacomplexa.forumeiros.com/>.

Desta forma, com esses ambientes procurou-se criar e disponibilizar um ambiente virtual potencialmente significativo para a aprendizagem dos números complexos. A aplicação do OA com uma rota de aprendizagem foi um momento preciosíssimo, quando se trouxe alguns indícios, comprovando que os objetivos foram alcançados. A seguir, apresenta-se a análise e a avaliação da rota de aprendizagem construída e da qualificação do OA, como um recurso digital e virtual de aprendizagem.

[27] Segundo Masini e Peña (2010, p.97), o fórum é uma ferramenta "assíncrona, para promoção de discussões, desde uma conversa cujo único intuito é promover a participação informal no curso on-line, até temas mais elaborados e específicos do curso, construção e aprofundamento de um tema de forma coletiva, e para comunicações da coordenação e tutoria sobre tema específico".

7 FRUTOS DESTE ESTUDO

Nesta seção encontram-se não somente os dados da pesquisa, mas, também, a análise, as discussões e os resultados. Antes de proceder à análise dos dados, apresenta-se, outra vez, o perfil dos estudantes que interagiram e aprenderam com o OA e com a rota de aprendizagem planejada. Participou desta pesquisa uma turma de 18 estudantes do terceiro ano do Ensino Médio, da Escola Estadual de Ensino Médio Bernardo Petry destes, 15 são também trabalhadores, exercendo alguma função em mercados, escolas de Educação Infantil, escritórios de contabilidade, atelier de costura ou na lavoura, com seus pais.

Esta realidade não foi novidade quando se iniciou a parte aplicada do projeto. Tinha-se consciência de que, devido ao cansaço pelo trabalho, ou mesmo por desinteresse, alguns estudantes poderiam não fazer algumas das atividades propostas. No entanto, esta foi uma primeira e boa novidade: todos se envolveram, e credita-se a este fato a estratégia de aprendizagem proposta. Observou-se que o empenho de alguns estudantes superou o que se tinha de expectativa, pois, mesmo os que não tinham o hábito de se envolver com os estudos, persistiram interagindo com o OA e na realização da maioria das tarefas de aprendizagem.

Ao construir o OA, buscou-se promover a aprendizagem significativa sobre números complexos, planejando uma rota de aprendizagem potencialmente significativa. Utilizaram-se diversos procedimentos, como recomenda o método da triangulação numa pesquisa qualitativa, a fim de obter indícios para qualificar a pesquisa. Tais procedimentos englobaram instrumentos como: questionários, registros em fotografias, diário de bordo e observações diretas. Os questionários abrangeram as avaliações sobre as aprendizagens e sobre todos os ambientes do OA.

Os instrumentos de avaliação de aprendizagens foram propostas com questões sobre conceitos básicos, nas quais buscou-se evidências de aprendizagem significativa (captação de significado, compreensão, capacidade de explicar, de aplicar o conhecimento, para resolver situações-problema), analisando se os objetivos estabelecidos, na rota de aprendizagem, foram atingidos de forma progressiva. (MOREIRA, 2011c). Além dessas avaliações, também se integrou um questionário padrão, para que os estudantes avaliassem o OA, adaptando ao ambiente criado um modelo sugerido por Tarouco (2004). As fotografias foram reveladoras de como os estudantes se portaram ao realizar as atividades e em momentos de reflexão ocorridos em sala de aula. Assim, ao examinar os dados, também como triangulação, usando várias formas para interpretar o que revelam, pretende-se avaliar se os objetivos da pesquisa foram alcançados.

Ao investigar a própria prática docente, não se integra apenas a categoria de pesquisadores, mas de professores pesquisadores (BORTONI-RICARDO, 2008) e, como tal, a intervenção na sala de aula implicou todo o andamento da pesquisa. Assim sendo, agora na análise, os relatos não estão isentos dessa implicação; são, ao contrário, um instrumento fundamental de uma interpretação própria, seja das observações diretas. seja o que se registrou no diário de bordo, importante para qualificar a pesquisa. Segundo Bortoni-Ricardo:

> O pesquisador não é um relator passivo e sim um agente ativo na construção do mundo. Em outras palavras, o pesquisador nas ciências sociais, incluindo aí a pesquisa educacional, é parte do mundo social que pesquisa. Ele age nesse mundo social e é também capaz de refletir sobre si mesmo e sobre as ações como objetos de pesquisa nesse mundo. (2008, p. 59).

Para a elaboração das análises, optou-se por seguir o mesmo percurso da rota proposta como estratégias de aprendizagem, reunindo e interpretando os fatos, as ações decorrentes do que foi planejado no OA e para as aulas, descortinando e interpretando os resultados à luz do referencial teórico. Deste modo, nesta seção, busca-se construir argumentos para qualificar o OA e a rota de aprendizagem, como materiais potencialmente significativos, como também para evidenciar aspectos de aprendizagens significativas sobre o campo conceitual dos números complexos. Segundo Moreira (2011b, p. 46): “a aprendizagem significativa é progressiva, o domínio de um campo conceitual é progressivo, por isso, a ênfase em evidências, não em comportamentos finais”.

Assim, propõe-se a análise, primeiramente, das condições de aprendizagem sobre números complexos, para depois avaliar o OA, como recurso de apoio à aprendizagem, nas subseções seguintes.

7.1 Evidências de aprendizagem significativa

Para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa, existem dois fatores primordiais: os subsunçores e a predisposição para aprender. (AUSUBEL, 2003). Os subsunçores são essenciais para servir de ancoradouro a novos conceitos. Num processo em que se espera que ocorra a aprendizagem significativa, é necessário ter em mente que o estudante nunca é uma tábula rasa; que o processo de aprendizagem não se inicia do zero, e que ele, estudante, é um ser dotado de conhecimentos que servirão de âncora para a aprendizagem de novos conceitos. Mas, para que o conhecimento sirva de âncora, deve estar bem definido, claro e compreensível para o estudante, consolidado na sua estrutura cognitiva.

(AUSUBEL, 2003). Na realidade, em Matemática, é muito comum que os estudantes não tenham essas condições prévias de pronto. Por isso, entende-se a pertinência e o sentido da afirmação de que o estudante, partindo dessas condições prévias, ampliará este conhecimento com a reconstrução de ideias ou com novos conceitos, através de dois processos que ocorrem nas estruturas cognitivas dos estudantes: a diferenciação progressiva[28] e a reconciliação integradora.[29]

A predisposição refere-se ao estudante estar disposto a aprender, cognitiva e fisicamente de forma ativa. Cognitivamente, pois os estudantes devem possuir os subsunçores necessários para aprender de forma significativa, e de forma ativa, porque deverão esforçar-se e dedicar-se aos estudos para compreenderem os conceitos, envolvendo-se com a realização das atividades.

Assim, na primeira aula sobre números complexos, procurou-se verificar se os estudantes possuíam os subsunçores dos quais necessitariam: conceitos sobre vetores, representação de um vetor no plano e operações básicas com vetores, especialmente, a multiplicação de um vetor por um escalar. Para fazer tal verificação, cada estudante respondeu, individualmente, um questionário (Apêndice E) com questões envolvendo vetores.

Os estudantes empenharam-se na resolução das questões; porém, queriam perguntar sobre o que não sabiam ou não lembravam. Mas, devido à importância de que cada um expressasse, nesta primeira aula, o que sabia, foi explicado aos estudantes que as questões não seriam discutidas naquele momento e que cada um deveria respondê-las individualmente. A inquietação dos estudantes demonstrava que tinham uma predisposição para (re)aprender o conteúdo, característica fundamental para uma aprendizagem significativa. (AUSUBEL, 2003).

O grande número de indagações e as respostas que deram às questões, como foi comprovado ao analisar os questionários respondidos, mostraram a necessidade de se dar mais atenção ao conteúdo de vetores. A maioria dos estudantes mostrou algum conhecimento, principalmente, ao reconhecer um vetor como um par ordenado e que possui: módulo, sentido e direção. Na primeira questão, buscou-se avaliar o conceito de módulo, direção e sentido. Todos os estudantes identificaram corretamente o módulo; porém, 14 estudantes (78%)

---

[28] A diferenciação progressiva refere-se a uma organização hierárquica do conhecimento, devendo ser apresentados os conceitos gerais desde o início, e depois desenvolvidos tópicos mais específicos, detalhando e diferenciando o conteúdo estudado. (AUSUBEL, 2003).

[29] A reconciliação integradora exerce a apreensão de diferenças, semelhanças ou a resolução de concepções errôneas do novo conhecimento, em relação aos subsunçores. (AUSUBEL, 2003).

trocaram o significado de sentido e direção, e somente três (17%) acertaram completamente a questão.

A segunda questão consistia no reconhecimento de vetor como par ordenado. A maioria dos estudantes, 17 (89%), identificou todos os vetores, e somente um estudante trocou a representação de dois vetores.

Em relação às operações com vetores, os resultados foram insatisfatórios. A maioria dos estudantes (72%) não soube efetuar nenhuma das operações indicadas; dois estudantes (11%) efetuaram corretamente a multiplicação de vetor por um escalar, e dois (11%) resolveram algumas multiplicações e adições corretamente. Para uma discussão sobre lacunas e defasagens em relação a esses conceitos, os estudantes trabalharam em duplas ou em trios, de modo que os que fizeram corretamente as questões relataram e explicaram aos colegas como efetuaram as operações e, segundo os estudantes da classe, essa integração foi suficiente para compreenderem e recordarem cada uma das operações.

Esse questionário foi organizado de forma que atendesse os princípios facilitadores: a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora. Inicialmente, abordaram-se os aspectos gerais sobre os vetores (a definição de um vetor), avançando gradativamente nas especificidades (respectivamente, representação geométrica e operações com vetores), como propõe o processo de diferenciação progressiva. Além desse processo, tem-se a reconciliação integradora, em que ao retomar as questões, foi-se retomando e relacionando cada um dos conceitos abordados.

Anunciando o que viria pela frente, e para averiguar o sentido que dariam a uma raiz quadrada de número negativo, colocou-se em discussão a questão: “Temos que $\sqrt{9}$ é 3, correto? Sabem dizer por quê? Logo explicaram que $3 \cdot 3 = 9$. Agora, qual é o resultado de $\sqrt{-9}$?” Cerca de metade da turma (56%) marcou que desconhecia esse número; destes, dois estudantes disseram que esse número não existia, por isso marcaram essa alternativa. As alternativas assinaladas, como resposta para $\sqrt{-9}$ foram: 3 (17%), 1/3 (17%) e -1/3 (6%). Essa questão trouxe inquietações, desequilibrou cognitivamente os estudantes; por isso, avançou-se no questionamento, promovendo uma reflexão sobre cada uma das alternativas, procurando saber mais sobre o que pensavam, desempenhando o papel de professor questionador e, ao mesmo tempo, de professor-pesquisador.

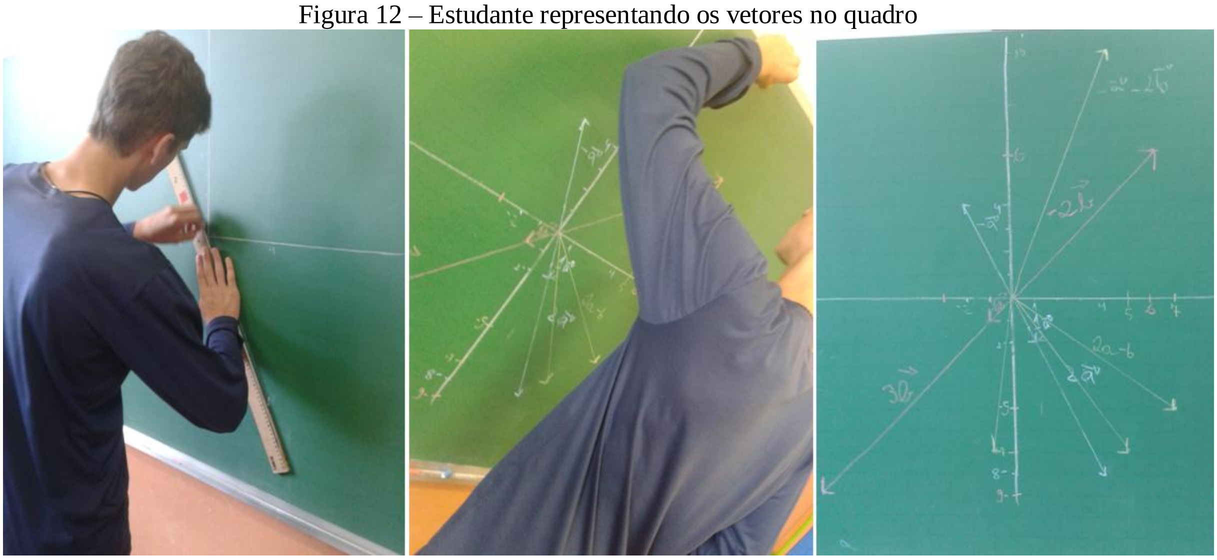
A afirmação de dois estudantes sobre a inexistência do número $\sqrt{-9}$ foi a que mais desestabilizou. Muitos não conheciam ou não compreendiam que este número, simplesmente, não pertence ao conjunto dos números reais. Com esses dados e pela interação em classe, compreendeu-se ser importante providenciar um organizador prévio, para que todos os estudantes ampliassem o entendimento sobre conceitos básicos de vetores e a existência de outros números que não são números reais, como conhecimentos prévios importantes, subsunçores, para ancorar o estudo dos números complexos. Com esse propósito, foi elaborada uma atividade lúdica, inspirada no jogo da Batalha Naval (Apêndice F).

Figura 11 – Grupos discutindo os valores dos vetores iniciais

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao receberem o desafio, o ânimo e a expectativa deixaram os estudantes em alvoroço e, ao jogarem a Batalha Naval (Figura 11), percebeu-se que a inquietação, assim como a disposição para a aprendizagem, estava presente. As equipes analisaram as opções possíveis, procurando sempre dificultar a ação do grupo adversário.

Figura 12 – Estudante representando os vetores no quadro



Fonte: Elaborada pelo autor.

Durante a atividade, todas as equipes jogaram para ganhar; participaram ativamente das discussões e das construções realizadas no quadro (Figura 12), sendo sujeitos ativos e mostrando predisposição para aprender.

Depois da Batalha Naval, os estudantes retomaram as questões do questionário inicial. Os resultados encontrados mostram uma evolução na turma. Em relação à primeira questão, que envolvia a definição de um vetor, 17 deles (94%) expressaram corretamente o significado de módulo, porém os estudantes continuaram trocando o que significava sentido e direção. Falha nossa! Esta diferenciação não havia sido incluída no organizador prévio.

Em compensação, todos os estudantes acertaram a representação dos vetores; a maioria (89%) deu-se conta das operações com vetores, sendo que um acertou somente as multiplicações, e outro não soube fazer as contas. Neste aspecto, teve-se um grande avanço comparado aos dois (11%) que haviam acertado as multiplicações e algumas adições.

Para esses dois estudantes, que não efetuaram corretamente as operações com vetores, sugeriu-se uma interação entre colegas, para sanar as dúvidas, sugestão acatada pelos estudantes que, na sequência das aulas, demonstraram saber expressar um vetor e realizar operações. Em relação aos estudantes que não compreenderam direção e sentido, foram explicados seus significados e, para melhorar essa diferenciação, o organizador prévio poderia conter alguma situação ou exemplos, o que, provavelmente, teria sido suficiente para que os estudantes entendessem.

Em relação à questão sobre $\sqrt{-9}$, 15 estudantes (83%) responderam corretamente. Com isso, o organizador prévio auxiliou o estabelecimento de uma fonte cognitiva entre o conteúdo defasado e aquele que se pretendia aprender, atualizando subsunçores para servirem de âncora a novas aprendizagens.

A atividade da Batalha Naval exerceu com êxito sua função de organizador prévio, possibilitando aos estudantes desenvolverem uma aprendizagem por descoberta,[30] prevista na introdução do conteúdo de números complexos.

No decorrer da análise, será perceptível o processo de diferenciação progressiva, pois o conteúdo aprendido é considerado subsunçor para uma nova aprendizagem; assim os estudantes vão desenvolvendo a aprendizagem de forma hierárquica. Inicialmente, são estudados os conceitos mais amplos, e posteriormente vão se detalhando e clareando as especificidades. A organização do conhecimento ocorre hierarquicamente na estrutura

[30] Segundo Ausubel (2003, p. 48) “é na aprendizagem por descoberta que o conteúdo principal do que está por aprender não é dado, mas deve ser descoberto de modo independente pelo aprendiz, antes de este o poder interiorizar”.

cognitiva do estudante, e é um processo mais complexo o estudante “juntar” as partes para compreender o todo, do que conhecer o todo e depois ir diferenciando as especificidades. (AUSUBEL, 2003).

Desenvolvida a análise sobre a reconstrução dos subsunçores, foram buscadas evidências de aprendizagem significativa. Para isto, foi realizada uma análise textual discursiva (MORAES, 2011), organizando as respostas dos estudantes em três campos de análise: compreensão de conceitos, execução de operações matemáticas e resolução de situações-problema. Cada campo de análise foi considerado em níveis de aprendizagem, destacando-se, assim, a ocorrência da aprendizagem significativa, da aprendizagem mecânica e da não aprendizagem.

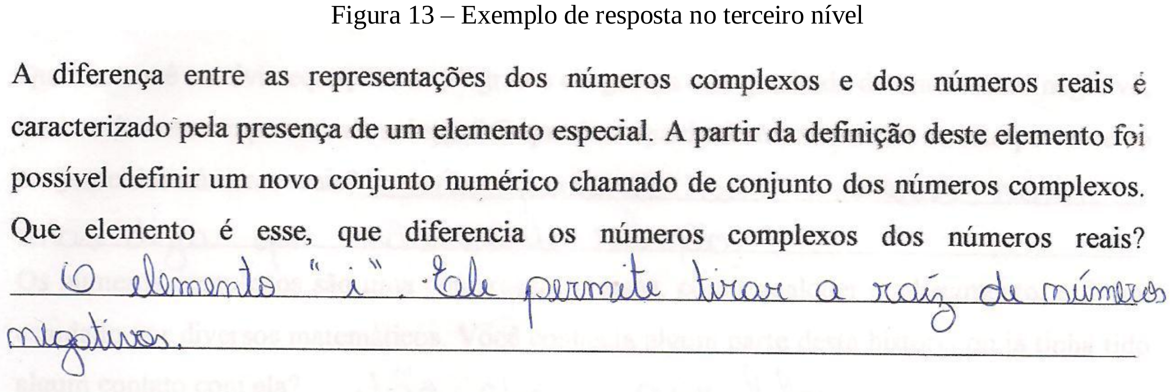
No campo de análise *compreensão de conceitos,* buscou-se evidências de que os estudantes compreenderam o conceito envolvido no estudo dos números complexos. Para uma diferenciação de graus de compreensão, foram criados três níveis: no primeiro nível, entende-se o estudante que não traduz o conceito, que não soube explicá-lo nem descrevê-lo ou deixou de realizar a atividade. Este nível expressa que o estudante não desenvolveu nenhum grau de aprendizagem. Uma das causas pode ser a falta de subsunçores ou a falta da predisposição em aprender e, até mesmo, que os materiais não foram potencialmente significativos. Felizmente, durante a aplicação da rota de aprendizagem, este nível foi o que teve menos incidências, quase não aparecendo.

Num grau ascendente de aprendizagem, o segundo nível indica que o estudante apresenta ou relata o conceito formal, mas sem expressá-lo com as próprias palavras. Assim, este estudante está em processo para a aprendizagem significativa. Como afirma Moreira (2011b), a aprendizagem significativa é progressiva, e esse estudante desenvolveu uma aprendizagem mecânica que, com futuras interações, poderá tornar-se uma aprendizagem significativa. Nesse nível, está o estudante que não conseguiu consolidar ou compreender os conceitos estudados.

E o último nível indica que o estudante consegue expressar, com suas palavras e seus pensamentos, o conceito abordado, demonstrando que compreendeu e que soube explicar. O estudante que atingir este nível demonstra fortes indícios de que desenvolveu uma aprendizagem significativa. Nesse nível, procurou-se aspectos da teoria da aprendizagem significativa, como a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.

Como se observa na Figura 13, ao se questionar sobre o que diferencia um número complexo dos números reais, obteve-se respostas em dois níveis do campo de análise *compreensão de conceitos*. Na Figura 13, mostra-se o extrato de um estudante que compreendeu o que diferencia os números complexos dos números reais, que são as raízes quadradas de números negativos; mesmo expressando esta constatação como “raiz quadrada de números negativos”, o estudante expôs seu pensamento escrevendo com suas palavras, mostrando indícios de ter compreendido este conceito. Analisando as respostas dos estudantes, foram encontrados 16 estudantes (89%) nesta categoria.

Figura 13 – Exemplo de resposta no terceiro nível


A diferença entre as representações dos números complexos e dos números reais é caracterizado pela presença de um elemento especial. A partir da definição deste elemento foi possível definir um novo conjunto numérico chamado de conjunto dos números complexos. Que elemento é esse, que diferencia os números complexos dos números reais?

O elemento "i". Ele permite tirar a raiz de números negativos.

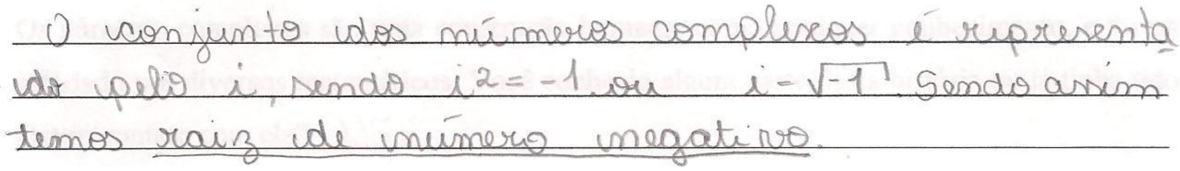
Fonte: Elaborada pelo autor.

O processo de reconciliação integradora foi constatado enquanto os estudantes interagiam com OA, quando receberam um desafio do Radice: encontrar um número que multiplicado por um vetor, resultasse num vetor rotacionado em 90 graus. Esse aspecto será abordado a seguir; neste momento, o objetivo é apresentar os campos de análise e os diferentes níveis, mostrando a diferença de um para o outro.

Outra situação pode ser constatada na Figura 14, em que se ilustra que o estudante não conseguiu expressar-se com suas palavras; parece ter buscado uma definição de números complexos. Nessa categoria, estiveram dois estudantes (11%). Esse extrato revela indícios de uma aprendizagem mecânica, porém, que está em progressão, especialmente, pelo grifo que aparece em “raiz de número negativo”, que seria, provavelmente, o que o estudante pensava como resposta; porém, sem conseguir, ainda, expressar-se claramente. Se houve a busca de informações que auxiliassem na composição da resposta, o estudante manifestou interesse pelo conteúdo e mostrou predisposição em aprender.

A escola, atualmente, tem o objetivo de formar cidadãos críticos e reflexivos para uma sociedade em constante transformação. (VASCONCELLOS, 2001). Num passado, não distante, os professores cobravam a definição formal do conteúdo ou a resolução passo a passo, refletindo numa aprendizagem mecânica. Em algumas situações, a aprendizagem mecânica se faz necessária para, progressivamente, transformar-se em aprendizagem significativa. Quando se tem este caso, o conhecimento adquirido mecanicamente pode servir de âncora para estabelecer ligações com outros conceitos e, em ações de diferenciação progressiva e reconciliação integradora, apoiar a compreensão de novos significados e também dos conhecimentos que foram inicialmente apenas memorizados.

Figura 14 – Exemplo de resposta no segundo nível


O conjunto dos números complexos é representado pelo i, sendo $i^2 = -1$ ou $i = \sqrt{-1}$. Sendo assim temos raiz de número negativo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em relação a essa pergunta, não se encontrou nenhum estudante, no primeiro nível, que não expressasse nada sobre o conceito. Esses dados revelam que o OA auxiliou a desenvolver uma aprendizagem ativa e significativa, fazendo o estudante refletir sobre o conhecimento, num processo de reconciliação integradora. Desta forma, foi proveitoso utilizar o OA para a introdução dos números complexos, alcançando-se o objetivo de criar um ambiente virtual, reflexivo, no qual o estudante pode interagir e construir conhecimento sobre números complexos.

Fazendo um levantamento da categorização realizada, em níveis de compreensão, o primeiro nível teve a menor incidência, ou seja, a maioria da turma desenvolveu os conceitos sobre os números complexos.

No campo de análise *execução de operações matemáticas*, buscou-se evidências de que os estudantes souberam expressar geometricamente um número complexo e realizar operações com esses números expressos nas formas algébrica e trigonométrica. As atividades propostas não foram exercícios com repetição de operações ou de memorização; procurou-se elaborar desafios, visando desenvolver aprendizagens ativas, como indica um dos objetivos da pesquisa. Como instrumentos de produção de dados, foram utilizadas observações e fotografias de estudantes em ação, que permitiram identificar o que diferencia os níveis dessa categoria.

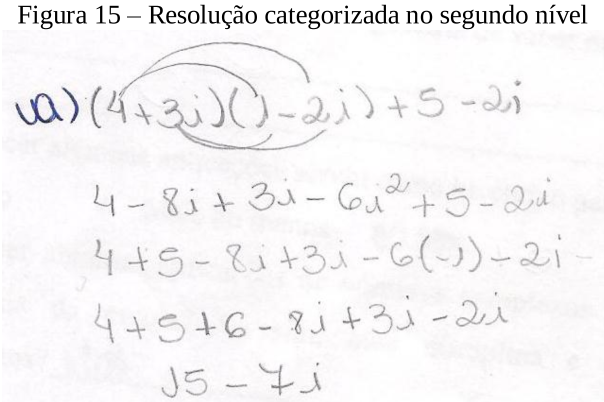
Para uma diferenciação de graus de resolução, foram criados três níveis: no primeiro, como no campo de análise anterior, para estudantes que não conseguiram ou não tentaram resolver as atividades.

O segundo nível é definido como uma exercitação, identificando o estudante que não consolidou a aprendizagem, que está ainda em processo. Nesse nível, as operações são realizadas, por vezes passo a passo, parecendo mais um algoritmo, repetido conforme algum modelo de resolução, mas o estudante ainda não conseguiu justificar as resoluções, explicando-as com uma leitura das linhas que escreveu. Também neste nível estão presentes os estudantes que efetuaram corretamente parte de questões. Nessa etapa, conforme os estudantes interagiram ou, por intervenção do professor, ocorreu a consolidação de propriedades, propiciando o avanço para o terceiro nível, de forma progressiva, como afirma Moreira. (2011c).

No terceiro nível, entende-se que o estudante resolve as operações e demonstra ter se apropriado de propriedades operatórias, sendo que alguns “pulam” etapas na resolução, atendo-se a passos estruturantes. O estudante que atingiu este nível mostra fortes indícios de que desenvolveu uma aprendizagem significativa, com indicativo de que houve consolidação, reconhecida, especialmente, na capacidade de argumentar e justificar a resolução de operações com números complexos.

A seguir, são ilustrados dois exemplos com as devidas justificativas de cada um desses níveis.

Figura 15 – Resolução categorizada no segundo nível

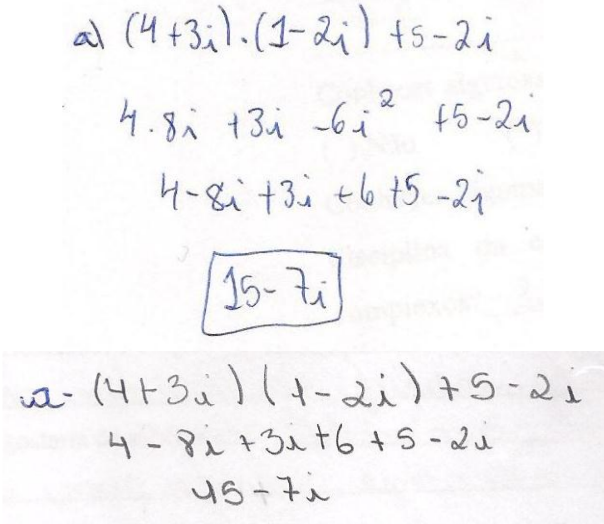


Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 15, observa-se que o estudante resolveu a questão corretamente, passo a passo, aplicando a distributividade, depois usando a equivalência $i^2 = -1$ e, por fim, somando os termos semelhantes. Tem-se aqui uma resolução minuciosa, em que o estudante mostra-se atento às contas realizadas uma a uma, passando por todos os passos, como no desenvolvimento de numa rotina processada linha à linha, segundo uma ordem de comando.

Na Figura 16, verifica-se que o estudante efetua a distributividade e, simultaneamente, usa a equivalência $i^2 = -1$, já realizando a multiplicação. O estudante utiliza as propriedades, mas não julga necessário escrevê-las, indicando que estão consolidadas na sua estrutura cognitiva; assim, ele “pula” etapas, resolvendo as operações de forma mais dinâmica, demonstrando ter assimilado as propriedades e ter desenvolvido uma aprendizagem subordinada.[31] Quando o estudante atinge esse nível, demonstra ter os subsunçores claros e disponíveis para a construção de novos conhecimentos, evidenciando uma predisposição para aprender. Nesse exemplo, os subsunçores ativados foram a soma algébrica e a equivalência $i^2 = -1$, conteúdo recentemente aprendido. Analisando as respostas dos estudantes, foram encontrados nove estudantes (50%) nesta categoria; no segundo, há sete (39%), e o primeiro nível totaliza dois (11%).

Figura 16 – Resolução categorizada no terceiro nível



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, o último campo de análise *situações-problema* compreende atividades que englobam não somente o conhecimento sobre os números complexos, mas também situações em que são aplicados, destacando-se, dentre estas, a análise de circuitos de corrente alternada. Nesse campo de análise, há três níveis: não resolveu, resolveu parcialmente e resolveu corretamente. As atividades que envolvem situações-problema integram a rota de aprendizagem e foram propostas para serem realizadas como tarefa extraclasse. Assim, um dos critérios de análise foi a predisposição para aprender, porque a atividade foi opcional e se envolveram os estudantes que tiveram interesse em ampliar seu conhecimento.

O primeiro nível (não resolveu) indica que os estudantes não realizaram ou não realizaram corretamente a atividade. No segundo nível (resolveu parcialmente) estão os estudantes que se envolveram na resolução, mas que a desenvolveram parcialmente ou

[31] A aprendizagem significativa é dividida em três naturezas: subordinada, superordenada e combinatória. A aprendizagem subordinada ocorre quando um novo conteúdo é assimilado, alterando e ampliando os subsunçores utilizados nesse processo, ou seja, o novo conteúdo é desenvolvido através de um ou mais conhecimentos presentes na estrutura cognitiva do estudante. (AUSUBEL, 2003).

parcialmente correta. E no terceiro nível encontram-se aqueles que utilizaram o conhecimento de números complexos para resolver corretamente as situações-problema[32] propostas.

O estudante que se encontra no terceiro nível tem consolidado o conhecimento das operações básicas de números complexos, pois, sem ter compreendido essas operações não é possível resolver as situações-problema, e muito menos ancorar os novos conhecimentos na sua estrutura cognitiva. Ressalta-se que as situações-problema propostas são atividades de maior complexidade, não são situações utilizadas ou presenciadas no cotidiano nem são estudadas durante o Ensino Médio. Nesse caso, a aprendizagem desenvolvida é de caráter superordenado,[33] pois o estudante aprende conceitos mais abrangentes do que os desenvolvidos durante o período de aula.

Dos 18 estudantes da turma, oito (44%) resolveram questões envolvendo situações-problema, indicando que essas atividades foram potencialmente significativas. Os dados revelam que as atividades motivaram a aprendizagem dos estudantes que se envolveram; estes se mostraram dispostos a ampliar seus conhecimentos, o que é um indício de uma predisposição para a aprendizagem superordenada. Dentre os estudantes que se envolveram nessa atividade, identificou-se dois perfis: um, de estudante empenhado, que realiza as tarefas, que é participativo e interessado em ampliar sua aprendizagem; e outro, de um estudante com muita capacidade cognitiva, mas que, antes deste experimento pedagógico, não desenvolvia e não realizava as tarefas de estudo. A motivação para esse tipo de estudante ocorreu pelas situações-problema, voltadas para a área da engenharia, incentivando as resoluções, que foram encaradas como desafios, por esse tipo de estudante. Muitas vezes, os professores não se preocupam em ampliar o conhecimento de estudantes que mostram condições de avançar, de ir além da média da turma, mostrando condições para um aprofundamento ou extensão de alguns conhecimentos. Com isso em mente, e por acreditar que esses também merecem atenção especial, foram oportunizadas tais atividades, o que é aconselhado por Moreira (2011c), quando se pretende promover a organização de um material potencialmente significativo.

Outro aspecto da aprendizagem significativa, que está presente com ênfase nessas situações é a diferenciação progressiva, pois em contextos do mundo real, como foram consideradas as aplicações, os estudantes partem de um problema de maior inclusão (análise

[32] Exemplo de problema proposto: Uma fonte de tensão, de valor eficaz $220\angle\underline{0^\circ}$, alimenta uma carga de impedância Z = (10+10j) ohm. Calcule a corrente fornecida pela fonte.

[33] A aprendizagem superordenada consiste na assimilação de um conceito mais abrangente, do que a estrutura cognitiva do estudante pode subordinar. Essa aprendizagem ocorre quando a formação de conceitos ou a unificação de proposições se desenvolve, mesmo não tendo os subsunçores necessários ou conflitantes. (MOREIRA, 1997).

de circuito de corrente alternada), para outros mais específicos (entender como ocorre a aplicação dos números complexos).

Explicitados os campos de análise e seus respectivos níveis, segue-se com o diagnóstico do envolvimento e das aprendizagens dos estudantes, quando interagiram com o OA, ao acessarem alguns dos espaços construídos.

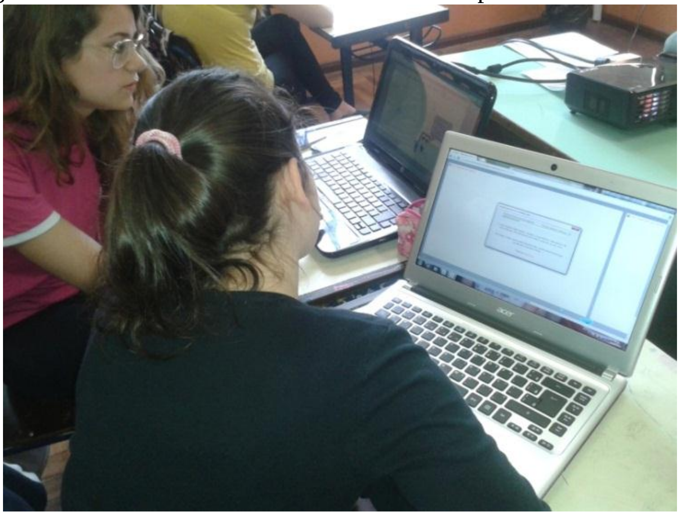
7.2 Diferenciando números reais de números complexos

A rota de aprendizagem foi planejada para iniciar em aspectos gerais dos números complexos, seguindo com conceitos específicos e mais relevantes, e com o princípio da diferenciação progressiva.

Para dar sequência à rota de aprendizagem, foi necessário providenciar os recursos tecnológicos adequados. A escola, onde foi aplicada a prática deste estudo, conta com um laboratório de informática equipado com 20 computadores, dos quais somente seis estavam em funcionamento, além do sistema de internet ser muito lento. Assim, para que os estudantes pudessem acessar o OA em sala de aula, alguns estudantes levaram seus *notebooks* e organizaram-se em duplas, para interagir com o objeto de aprendizagem. Ao aceitarem esta condição, estes estudantes colocaram-se como sujeitos primordiais para o desenvolvimento das aulas e da sua aprendizagem, e colaboradores com a aprendizagem dos colegas, com os quais formaram as duplas. Durante o período de desenvolvimento das atividades planejadas, os estudantes cumpriram o acordo inicial, de levar para a escola os materiais solicitados. Essa responsabilidade apresentada pelos estudantes demonstra a preocupação que tiveram com o andamento das aulas e, consequentemente, com a aprendizagem.

No decorrer das atividades, enfatizaram-se momentos de reflexão e de aprendizado em grupos; o professor realizou as mediações, promovendo troca de conhecimentos e desafiando com questionamentos que suscitavam conjecturas entre as duplas, propiciando aos estudantes que se engajassem como sujeitos ativos na aprendizagem dos conceitos. Observou-se que, atuando juntos, deram conta das atividades. Durante a realização das atividades, os estudantes discutiam sobre o conteúdo abordado, com a intervenção do professor em poucos momentos, aos grupos que solicitavam, atingindo-se assim um dos objetivos, o de aplicar estratégias de aprendizagem ativa, autônoma e significativa de conceitos dos números complexos.

Figura 17 – Estudante instalando o Java e acompanhando uma colega



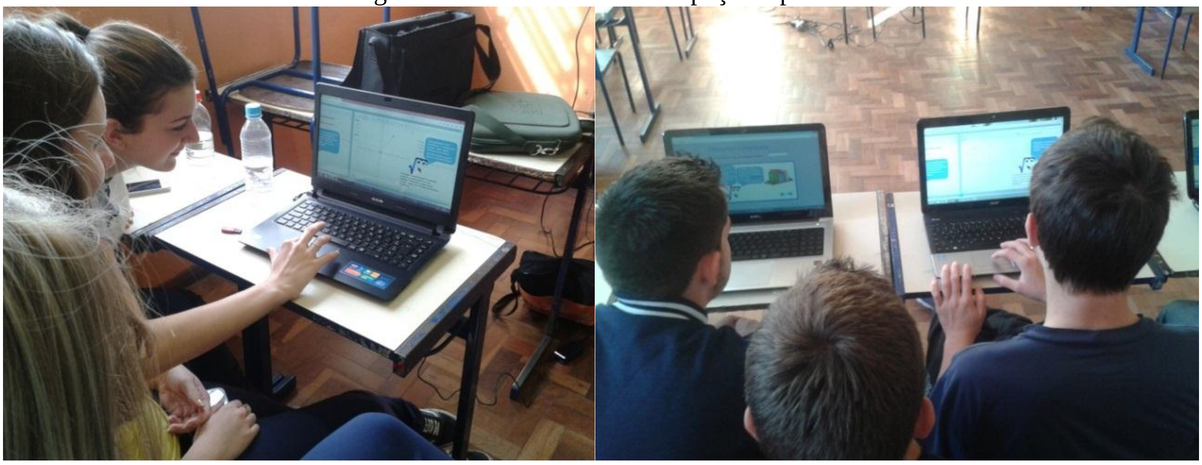
Fonte: Elaborada pelo autor.

Desde o início das aulas, como forma de considerar a avaliação dos estudantes e as necessidades que iam sendo identificadas, deixou-se um espaço para que eles sugerissem aperfeiçoamento ao OA. Os estudantes aceitaram o desafio desta construção coletiva, empenhando-se também na análise desse ambiente virtual de aprendizagem. Devido a alguns problemas técnicos com os aplicativos do GeoGebra, as questões tecnológicas foram as que apareceram em termos de sugestões de melhorias. O OA já possuía o ambiente "Apoio tecnológico", porém os estudantes encontraram dificuldades para compreender e para buscar a solução dos seus problemas.

Desta forma, os estudantes solicitaram um ambiente melhor organizado com acessos aos conteúdos mais facilmente reconhecidos, como um sumário das principais questões para as quais o OA propõe dicas de resolução, como também a utilização de mais imagens para facilitar a visualização. Tais sugestões foram prontamente atendidas, promovendo-se, assim, um aprimoramento no ambiente "Apoio tecnológico". Esse empenho e preocupação dos estudantes enfatizam o sujeito comprometido com o trabalho desenvolvido, ativo no processo e disposto a aprender, características fundamentais para o desenvolvimento da aprendizagem significativa.

No OA desenvolvido, teve-se o objetivo de proporcionar aos estudantes uma aprendizagem mais autônoma, através de ambientes reflexivos, em que cada um pode aprender no seu ritmo, suprindo suas dificuldades e defasagens. Visando este objetivo, criou-se um personagem chamado Radice, que tem o papel de professor, ou seja, de instigar, motivar e desafiar os estudantes para interagirem e ampliarem seus conhecimentos. O personagem Radice não somente desafia os estudantes, mas os acompanha nas suas resoluções, proporcionando respostas detalhadas ou somente passos estruturantes que pode guiá-los.

Figura 18 – Os estudantes no espaço de prática



Fonte: Elaborada pelo autor.

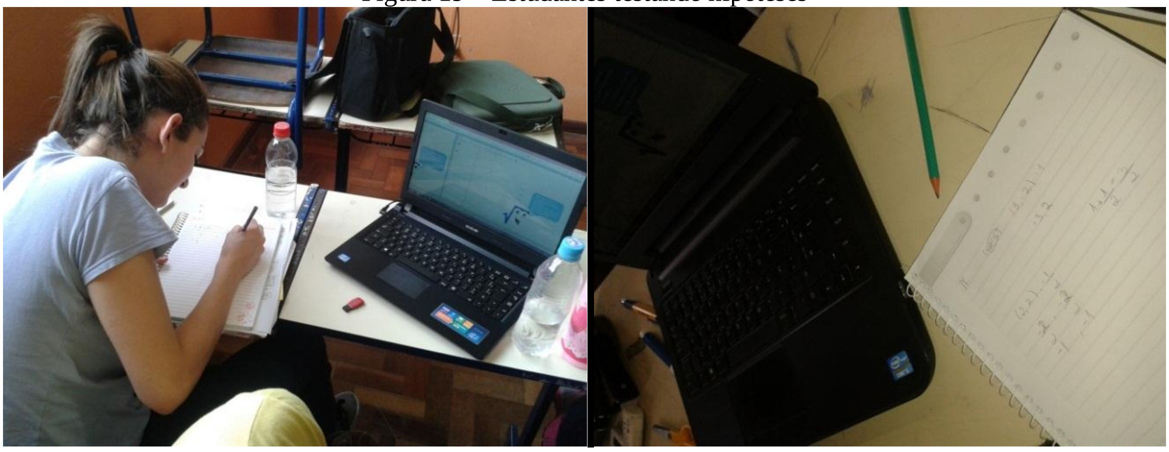
Ao acessar o OA, os estudantes mostravam-se surpresos e animados com a novidade, logo discutindo, interagindo e realizando as atividades propostas pelo Radice, como pode ser observado na Figura 18. No ambiente de prática viveram o momento mais descontraído, principalmente, ao experimentarem a construção de um vetor no plano. Como o *software* era desconhecido, os estudantes precisaram de um tempo de adaptação, mas, com empenho e dedicação, realizaram as atividades, as construções e as interações solicitadas.

O Radice foi criado como um personagem para a aprendizagem, porém não se tinha clareza se conseguiria desempenhar seu papel satisfatoriamente. Para fazer tal avaliação, os estudantes responderam algumas perguntas sobre o papel do Radice no desenvolvimento das atividades com o GeoGebra. Desta forma, foram avaliados dois ambientes de aprendizagem, um em que o Radice apresenta conceitos e definições e outro, em que o estudante pode praticar o conhecimento desenvolvido no primeiro ambiente.

Na avaliação sobre a interação com o Radice tem-se que 11 estudantes (61%) aproveitaram plenamente este ambiente e sete (39%), satisfatoriamente. Radice apresenta informações primordiais, conduzindo os estudantes a desenvolverem o estudo sobre números complexos. Nesse ambiente, o Radice introduz um conceito para que no ambiente de prática, o estudante possa compreender ou consolidar o conhecimento abordado anteriormente. Todos os estudantes mostraram que o Radice foi essencial no desenvolvimento das atividades com os aplicativos, aproveitando-os de forma satisfatória.

E, em relação ao ambiente de prática, que foi o espaço disponível para que os estudantes testassem hipóteses, seis estudantes (33%) avaliaram o ambiente dizendo que foi aproveitado plenamente, 11 (61%), satisfatoriamente, e um (6%) utilizou pouco esse ambiente. Em sala de aula foram presenciadas ações de estudantes interessados, dispostos e atentos às orientações do Radice e também na realização das atividades, como está ilustrado em diversas fotografias, como na Figura 19. Este ambiente exigiu dos estudantes um alto grau de envolvimento, pois somente assim seria possível o desenvolvimento das atividades propostas.

Figura 19 – Estudantes testando hipóteses



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma manipulação inicial com os vetores no GeoGebra foi essencial, pois, visando uma aprendizagem significativa, o conhecimento sobre vetores é um subsunçor necessário para a ancoragem dos números complexos, na estrutura cognitiva dos estudantes. Para iniciar os estudos sobre números complexos, Radice lançou um desafio especial a ser resolvido: dado um vetor qualquer, encontrar um número que, multiplicado por ele, resultasse em outro, que fosse o vetor inicial rotacionado de 90 graus. Motivados pelo desafio, os estudantes levantaram e testaram várias hipóteses, acompanhados pelo Radice e com o caderno, que foi bastante útil para desvendar esse desafio (Figura 19). Os estudantes foram persistentes, procurando encontrar por si mesmos a chave do “mistério”, um forte indício de predisposição para a aprendizagem. Como esta operação era, de fato, novidade para todos, pois percorriam os números reais, não chegaram a uma resposta satisfatória e, rendendo-se às várias tentativas, pediram ajuda, interagindo com o Radice. Foi quando perceberam que tal número não existia no conjunto dos números reais, descobrindo a possibilidade de existência de um novo conjunto numérico.

Como os estudantes não encontraram a solução do desafio, Radice sugeriu que multiplicassem o vetor por um operador “i”, marcando assim um vetor rotacionado em 90°. Radice sugere então multiplicar o vetor encontrado, novamente pelo operador “i”, gerando um vetor rotacionado em 180°, em relação ao vetor original. Multiplicar duas vezes por “i” equivale a uma multiplicação por -1, ou seja, $i^2 = -1$. Com a atividade descrita, surge a identidade da unidade imaginária i como $\sqrt{-1}$. Assim, Radice introduziu os números complexos para os estudantes, apresentando sua definição, após a construção geométrica. Desta forma, Radice proporcionou aos estudantes um conhecimento novo, que culminou no surgimento dos números complexos, numa mediação que resultou em aprendizagem por descoberta.

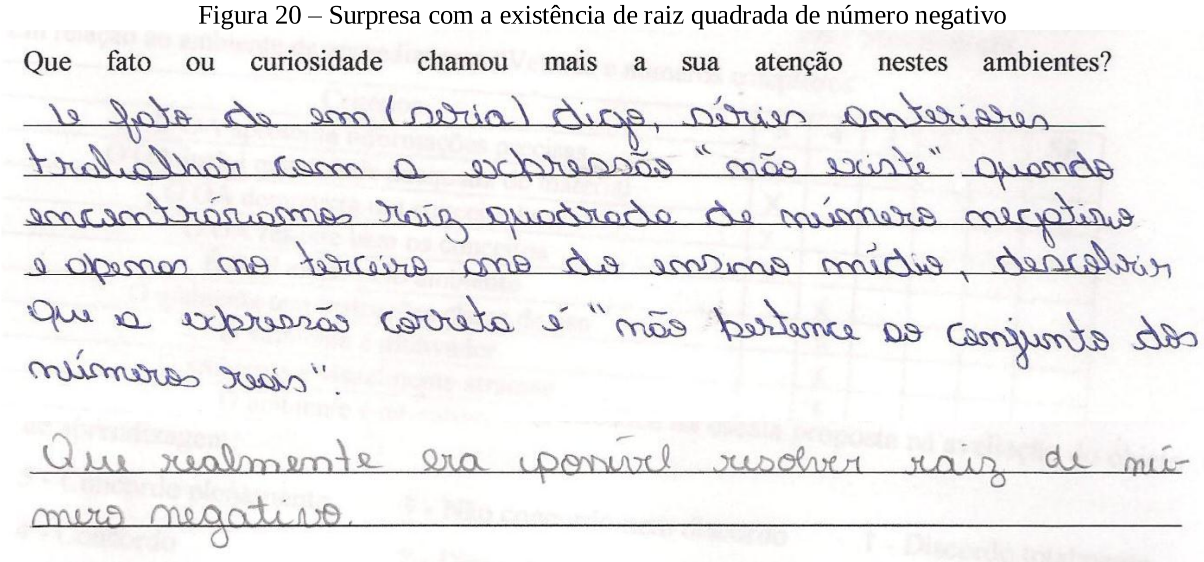
Além de promover a exploração da igualdade $i^2 = -1$, Radice introduziu o sentido da unidade imaginária, como um operador geométrico da multiplicação. O professor nesse processo foi um mediador, circulando pela sala de aula, questionando e estimulando os estudantes a levantarem e testarem hipóteses, auxiliando-os nas construções realizadas no GeoGebra, quando necessário. Nessas atividades de manipulação e construção geométrica, foi perceptível a surpresa dos estudantes diante da realidade, que até aquele momento parecia ser a que tudo o que havia de número cabia no conjunto dos números reais.

As raízes quadradas de números negativas não existiam, não eram consideradas números pelos estudantes. Ao introduzir a unidade imaginária, Radice mexe com o cognitivo dos estudantes, pois um conhecimento consolidado, sobre conjuntos numéricos, começa a ser reconstruído. Alguns estudantes relataram, inclusive, que foram enganados, pois sempre lhes foi dito que, ao se depararem com uma raiz quadrada de número negativo, isso não existia. Parece ter faltado ampliar a ideia de que não existia, dentro do conjunto dos números reais. Por outro lado, por ter sido um fato marcante, este pode ancorar, agora, o novo conhecimento, despertando curiosidade e interesse por este “novo mundo numérico”.

Os relatos são valiosos, pois revelam dificuldades de aprendizagem, concepções que precisam ser reconstruídas e evidências que apontam, na direção de uma aprendizagem significativa. Como recurso didático, é muito comum encontrar docentes que utilizam, predominantemente, aulas expositivas. O que mostraram estas análises é que os estudantes estavam acostumados a dizer que raiz quadrada de número negativo não existe, assim como lhes dizia o professor, mas não tinham a compreensão do sentido desta afirmação, tamanha foi a surpresa que mostraram alguns diante da constatação.

Agora, numa série mais avançada, o estudante, exercendo um papel ativo na aprendizagem, refletindo sobre o conteúdo desenvolvido, compreendeu que era possível resolver raízes quadradas de números negativos. Outro aspecto de destaque foi que o professor não desenvolveu o conteúdo com exposições; ao invés disso procurou atuar fazendo intervenções e chamando para fatos ou ideias principais do conteúdo desenvolvido. Assim, o estudante compreende a fala do professor como instrutiva de aspectos relevantes do conteúdo, prestando atenção e, consequentemente, aumentando a capacidade de assimilação dos conceitos, através da predisposição de aprendizagem.

Figura 20 – Surpresa com a existência de raiz quadrada de número negativo



Que fato ou curiosidade chamou mais a sua atenção nestes ambientes?

O fato de em (séria) digo, séries anteriores trabalhar com a expressão "não existe" quando encontrávamos raiz quadrada de número negativo e apenas no terceiro ano do ensino médio, descobrir que a expressão correta é "não pertence ao conjunto dos números reais".

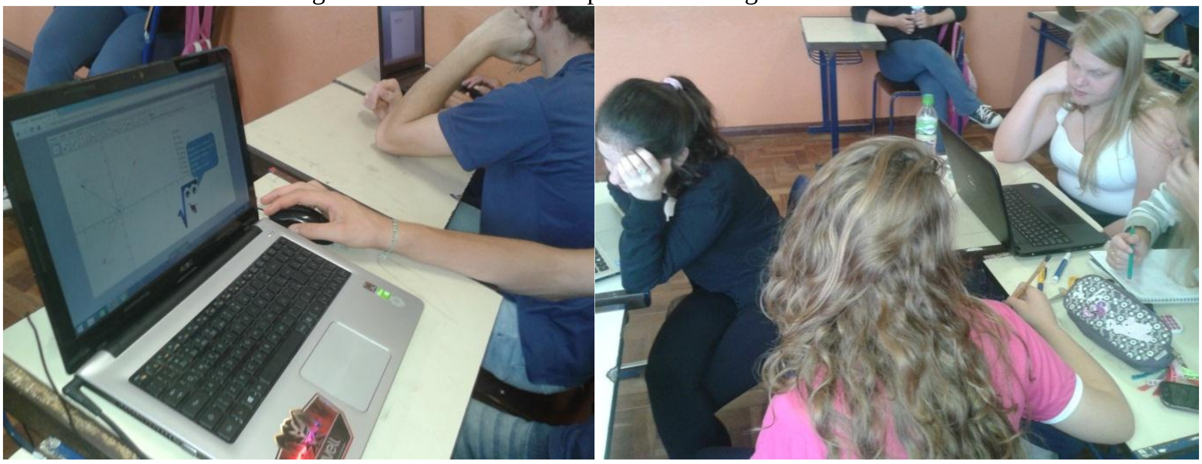
Que realmente era possível resolver raiz de número negativo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

No texto da Figura 20, percebe-se que o fato de sempre ter entendido que não existia esse número chamou a atenção dos estudantes em conhecer a existência de outro tipo de números, além dos números reais, destacando-se a parte que é relatada de que foi "apenas no terceiro ano do ensino médio". Isso mostra que o estudante reconhece a raiz quadrada de números negativos em atividades, mas nunca havia pensado ou mesmo encontrado em algum contexto esse tipo de número. Esse fato acabou despertando a curiosidade dos estudantes, para conhecer mais sobre números complexos.

O Radice cumpriu o papel de desestabilizar a estrutura cognitiva, auxiliando na reconstrução desse conceito, de forma dinâmica e compreensível para os estudantes. E a surpresa dos estudantes, desconfiança no início para alguns, foi um reflexo da predisposição para a aprendizagem, mostrando-se dispostos a reconstruírem o conhecimento que tinham sobre os conjuntos numéricos, num processo de novas ideias e de reformulação de alguns conceitos, que estavam consolidados na estrutura cognitiva.

Figura 21 – Estudantes compreendendo a igualdade $i^2 = -1$



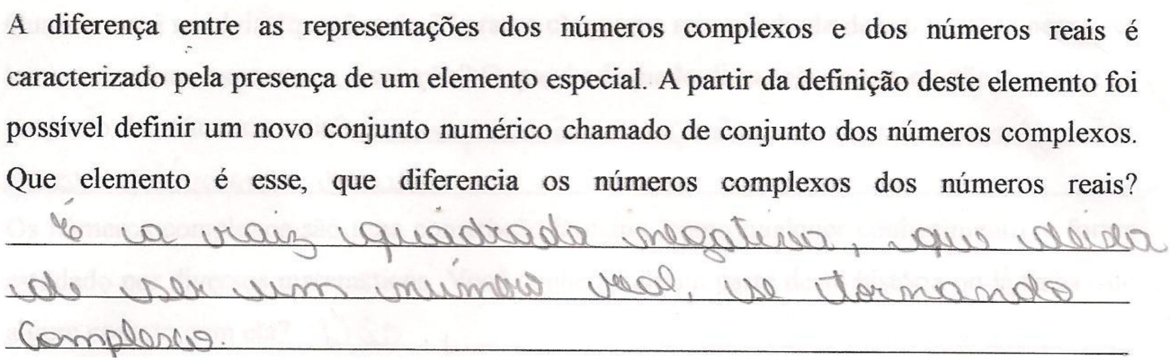
Fonte: Elaborada pelo autor.

Inicialmente, os estudantes estranharam a igualdade $i^2 = -1$, pois partiram de uma concepção prévia de que a raiz quadrada de número negativo não existe; porém, depois de algumas leituras e discussões, saíram satisfeitos com a explicação do Radice. Cabe salientar que a dificuldade na compreensão deste conceito foi apontada na pesquisa realizada com os professores. Antes de organizar o OA e planejar a rota de aprendizagem, foi realizada uma pesquisa com professores que atuam em diferentes níveis de escolaridade, trabalhando com números complexos. Uma das perguntas do questionário foi “O que é mais difícil de ser compreendido e aplicado pelos alunos?”, para a qual obteve-se duas respostas principais: uma voltada à unidade imaginária e sua identidade $i^2 = -1$ e outra em relação à forma trigonométrica dos números complexos. Em relação à unidade imaginária, conceito abordado inicialmente, a maioria dos estudantes não teve maiores dificuldades em reorganizar sua estrutura cognitiva, realizando o processo de superordenação.

O organizador prévio, Batalha Naval, proposto para criar os subsunçores necessários, a multiplicação de um vetor por escalar, para uma aprendizagem significativa sobre números complexos, foi bastante útil, pois os estudantes não apresentaram dificuldade ao realizar as operações sugeridas pelo Radice. As maiores dificuldades surgiram ao manipular as ferramentas do GeoGebra, durante a fase de familiarização com o *software*.

Com o acompanhamento no decorrer da realização das atividades e as poucas intervenções que se fizeram necessárias davam indícios de que os estudantes estavam compreendendo o conceito de unidade imaginária. Buscando comprovar esse resultado, construído por exploração e experimento de conjecturas, utilizou-se um questionário (Apêndice G), para avaliar o potencial do OA, segundo a visão dos estudantes, para o entendimento do conceito de unidade imaginária. Os dados e a correspondente análise desta avaliação seguirão na próxima subseção, em que estarão juntas todas as avaliações dos espaços do OA.

Figura 22 – Exemplo de resposta dada por um estudante



A diferença entre as representações dos números complexos e dos números reais é caracterizado pela presença de um elemento especial. A partir da definição deste elemento foi possível definir um novo conjunto numérico chamado de conjunto dos números complexos. Que elemento é esse, que diferencia os números complexos dos números reais?

É a raiz quadrada negativa, que deixa de ser um número real, se tornando complexo.

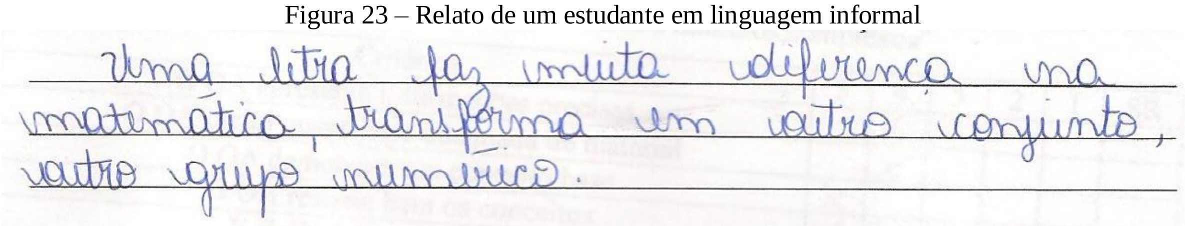
Fonte: Elaborada pelo autor

Ainda no campo conceitual, questionou-se sobre a diferença entre os números reais e os números complexos: 16 estudantes (89%) indicaram que estavam no nível mais elevado, pois souberam explicar sobre essa diferenciação com palavras próprias, como pode ser observado na Figura 22, pois a linguagem utilizada é informal, mostrando um princípio de reconstrução do conceito de conjuntos numéricos, indicando a ampliação desse conhecimento. Durante a assimilação deste conteúdo, os estudantes também forneceram evidências de um subsunçor em reconstrução. Através de questionamentos e reflexões proporcionadas pelo Radice, os estudantes apresentaram, em graus variados, essa reconstrução, e, com subsunçores (vetores e conjuntos numéricos) organizados e estáveis, foi possível fazer a ancoragem dos conceitos de números complexos e unidade imaginária, proporcionando, com isso, uma aprendizagem por descoberta. O que permite afirmar que ocorreu a aprendizagem por descoberta foi o fato de que os estudantes reconheceram um novo número e um novo conjunto numérico (Figura 23) e, como está mostrado na Figura 20, há evidências de que os estudantes não tinham subsunçores disponíveis para ancorar tais conhecimentos, quando declararam que a raiz quadrada de um número negativo simplesmente não existia.

Desta forma, ao interagirem com o Radice, houve uma ampliação no conhecimento, ao “descobrirem” um novo conjunto numérico. O Radice e o professor atuaram juntos, não no sentido de “darem as repostas”, mas incentivando a reflexão e a ação dos estudantes, proporcionando condições para uma aprendizagem mais autônoma e no ritmo de cada dupla, possibilitando, assim, que a maioria conseguisse aprender.

Durante esses momentos de reflexão, foi possível identificar, também, o processo da reconciliação integradora, pois os estudantes souberam expressar e diferenciar o elemento que distinguia o conjunto dos números reais dos complexos. Assim, primeiro descobriram um novo conjunto numérico para, depois, desenvolver os conceitos mais específicos, como o da unidade imaginária, seguindo o princípio facilitador da diferenciação progressiva, que afirma ser mais fácil aprender um pouco do todo para, depois, estudar suas especificidades. (AUSUBEL, 2003).

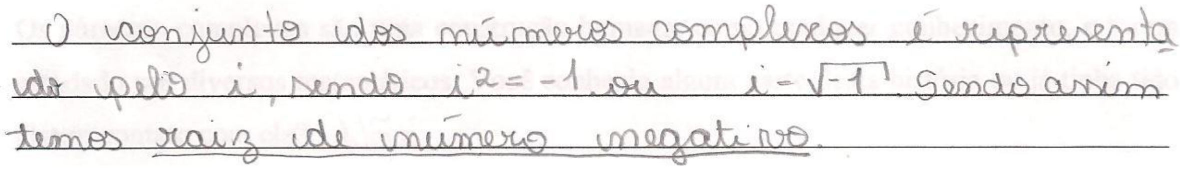
Figura 23 – Relato de um estudante em linguagem informal


Uma litra faz muita diferença na matemática, tranforma um outro conjunto, outro grupo numérico.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Infelizmente, não se atingiu o propósito de gerar sentido e entendimento desses conceitos iniciais e estruturadores de novas aprendizagens para a totalidade da turma; dois estudantes (11%) limitaram-se a reproduzir a definição formal, com o auxílio de um livro didático, como se observa abaixo, na Figura 24. É provável que essa seja uma evidência de que o estudante não tinha ainda completado a reconstrução do conceito de conjuntos numéricos e, consequentemente, não assimilou o conceito de unidade imaginária, impossibilitando a aprendizagem por descoberta. Este relato mostra que o estudante não conseguiu expor seu pensamento com suas palavras, demonstrando que o conhecimento não está consolidado, ou seja, que o processo da reconciliação integradora ainda está ocorrendo. Assim, não tinha clareza na definição do que poderia apresentar sobre a diferença de um número real para um complexo.

Figura 24 – Resposta dada por um estudante

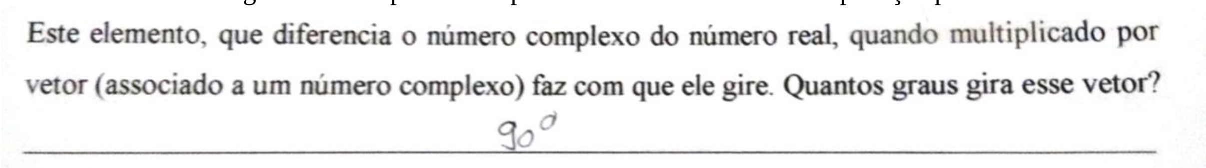

O conjunto dos números complexos é representado pelo i, sendo $i^2 = -1$ ou $i = \sqrt{-1}$. Sendo assim temos raiz de número negativo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados permitem ressaltar a importância que o OA teve no processo da assimilação desses conceitos, desempenhando um papel fundamental na aprendizagem, podendo assim ser avaliado como um recurso potencialmente significativo, especialmente, pelo fato de que nenhum estudante ficou no primeiro nível, o que indicaria que o material não seria potencialmente significativo, pois os estudantes não teriam ampliando seus conhecimentos.

Durante uma interação com o Radice, explanou-se a multiplicação de um vetor por escalar, mostrando que o operador i faz com que o vetor rotacione em 90°, associando um número complexo a um vetor. Desta forma, utilizou-se uma abordagem geométrica para determinar a unidade imaginária, conceito assimilado pela maioria dos estudantes; também para mostrar o significado geométrico da multiplicação de um número complexo pela unidade imaginária. Mesmo sem desenvolver um estudo específico sobre a unidade imaginária e seu significado, como operador na multiplicação, 16 estudantes (89%) souberam definir a relação geométrica, expressando-a corretamente (Figura 25), e somente dois (11%) não traduziram adequadamente o conceito. Mesmo não enfatizando a relação geométrica, houve ótimos resultados (de terceiro nível), indicando que os aplicativos e o Radice auxiliaram na aprendizagem de conceitos gerais, permitindo que fossem ancorados novos conhecimentos mais inclusivos, desenvolvendo assim o processo de reconciliação integradora.

Figura 25 – Resposta dada por um estudante sobre a multiplicação por i


Este elemento, que diferencia o número complexo do número real, quando multiplicado por vetor (associado a um número complexo) faz com que ele gire. Quantos graus gira esse vetor?

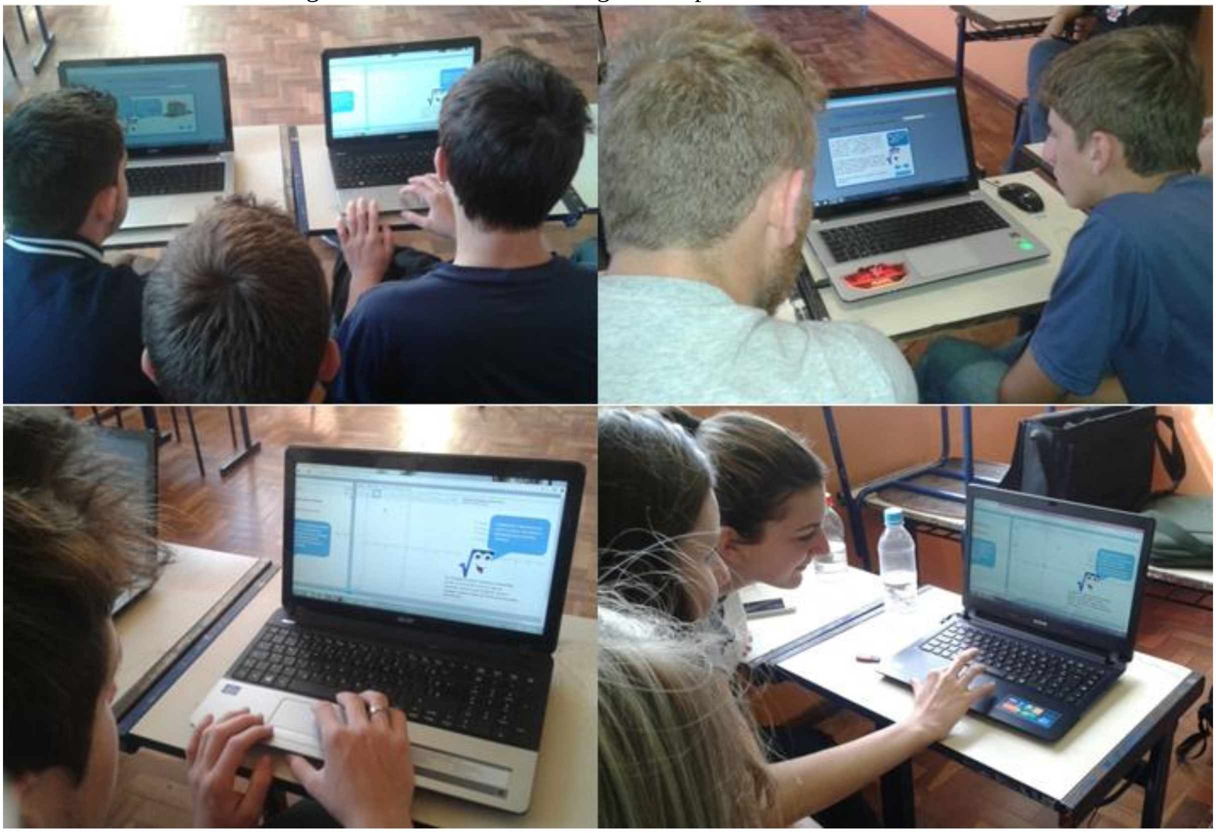
90°

Fonte: Elaborada pelo autor.

O Radice e o professor conseguiram envolver os estudantes, que estiveram concentrados, atentos e reflexivos (Figura 26); foi possível desenvolver o processo de reconciliação integradora e diferenciação progressiva para o sentido geométrico da multiplicação de vetores pela unidade imaginária. Ao ser identificada a unidade imaginária como raiz quadrada de -1, as características desse número começaram a emergir, e os significados assimilados pelos estudantes, de forma hierárquica, começaram a aparecer.

Os dados mostram que o OA serviu como um material potencialmente significativo para a aprendizagem do significado da unidade imaginária, através das manipulações nos aplicativos do GeoGebra (Figura 26); das interações com o Radice e com o professor, pois conseguiram definir corretamente a relação geométrica do número complexo pela unidade imaginária. Os dois estudantes que não conseguiram traduzir o conceito declaram que o vetor (associado a um número complexo) girava 180 graus, em vez de 90 graus. Para auxiliar nesta reconstrução, o professor mediou um diálogo entre os colegas, provocando com reflexões sobre as respostas apresentadas, suprindo lacunas ou defasagens apresentadas.

Figura 26 – Estudantes interagindo e aprendendo com o OA



Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalizando a sequência de aulas desta primeira etapa, foi proposta uma interação no espaço denominado “Problema histórico”. Procurou-se, com este problema, trazer o contexto algébrico de onde se originou uma raiz quadrada de número negativo.

Nesse ambiente, o Radice desafiou os estudantes com o seguinte problema:[34] “Apresente dois números cuja soma é 6, e cuja multiplicação é 13.” Ao receberem o desafio, as duplas começaram a discutir procurando resolvê-lo, depois de tentarem expressar esse desafio na forma de um sistema linear, novamente, mostrando predisposição para aprender. Neste ponto, de retomada do significado e do procedimento para encontrar a solução utilizando um sistema linear, o professor precisou mediar algumas discussões sobre a organização e a resolução de um sistema para dúvidas específicas de alguns estudantes e, atentos também às interações com o Radice, conseguiram calcular as duas raízes da equação de 2º grau, que se apresentou com discriminante negativo, finalizando a resolução do problema.

[34] Em 1545, Girolamo Cardano publicou o livro *Arg Magna* o problema de dividir 10 em duas partes cujo produto fosse igual a 40. A solução do problema era interpretada como se não houvesse solução, devido ao discriminante negativo. Porém, quando a solução era verificada , resultava uma igualdade válida. (VIEIRA, 1999; PINTO JÚNIOR, 2009).

Figura 27 – Estudantes resolvendo o desafio do Radice

Fonte: Elaborada pelo autor.

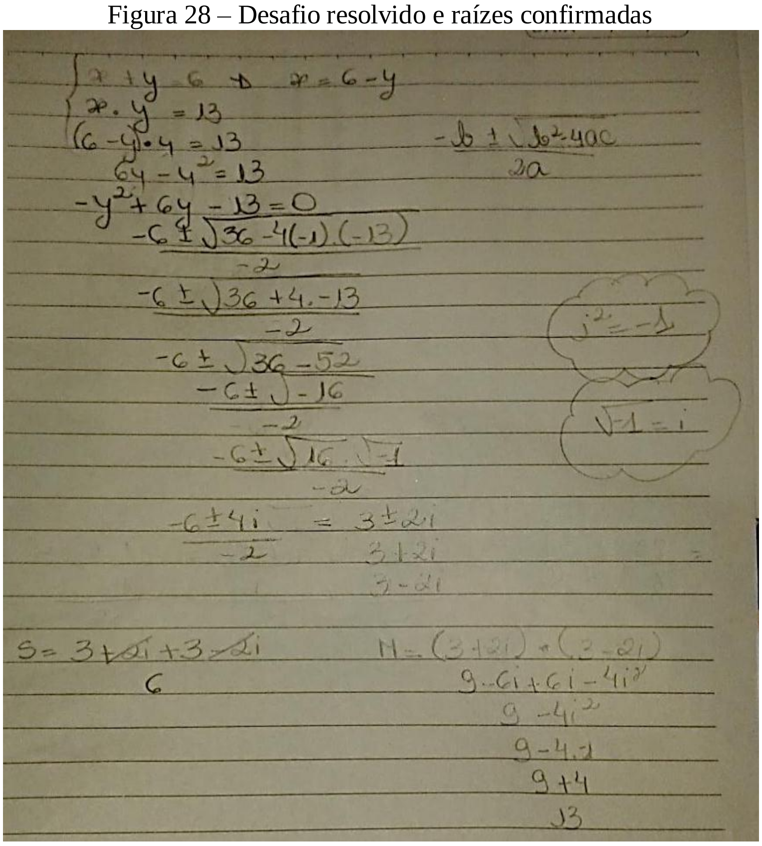
Durante a montagem e resolução do sistema, vários subsunçores foram sendo requisitados: a organização de sistema linear, resolução de equação de 2º grau e propriedades da radiciação. Os subsunçores foram ativados com o auxílio do Radice, e progressivamente os estudantes foram resolvendo o desafio.

Através do processo de reconciliação integradora, os subsunçores foram sendo utilizados e novos significados foram sendo gradualmente agregados, propiciando a ancoragem da resolução de equações de 2º grau com discriminante negativo. Essa pode ser considerada uma evidência de que a aprendizagem subordinada se desenvolveu. Todos os estudantes tinham o conhecimento da resolução de equações de 2° grau e compreendido a definição de unidade imaginária; assim, eles tinham subsunçores para ancorar o novo conhecimento, a resolução dessas equações com discriminante negativo, realizando uma aprendizagem subordinada.

Demonstrando curiosidade e dispostos a compreender tudo desse processo, uma dupla parecia não acreditar na resposta, e questionou: “Esses números são a resposta do desafio?” O fato de os estudantes questionarem demonstra seu envolvimento na resolução do problema, e de estarem atentos à resolução proposta por Radice, aprendendo com ele. Seguindo as recomendações de Polya e Araújo (1977), ao invés de dar boas respostas, seguiu-se fazendo outras e boas perguntas. Então, questionou-se a turma: “Pessoal, que tal conferir? Façam a soma e a multiplicação das soluções: o que devem encontrar?” A turma respondeu, prontamente, seis e treze. Sem demora, todos conferiram a soma, realizando a soma das duas raízes complexas, e encontraram seis. Na multiplicação, aplicaram corretamente a propriedade distributiva, juntaram os semelhantes e alguns “travaram”, pois encontraram a expressão i^2 e não sabiam o que fazer com ela.

Os estudantes não perceberam que poderiam usar a equivalência i² = -1. Alguns procuraram uma forma de seguir na resolução, e propuseram resolver como se fosse outra equação de 2º grau, pois acreditavam que, quando houvesse uma variável elevada ao quadrado, deveriam resolver desta forma. Ao ser proposta essa forma de resolução, os demais estudantes continuaram pensando e observaram: "A gente resolveu uma equação de 2º grau, estamos querendo fazer a prova real que é a substituição na equação. Acho que não é dessa forma." Percebendo que os estudantes não estavam conseguindo dar continuidade, o professor entrou em cena e questionou: "Quanto vale i²?" Essa indagação fez "cair a ficha"; os estudantes, em coro, responderam: "Ah, i² = -1". Assim, os estudantes conseguiram dar continuidade à resolução, fizeram a substituição e calcularam o resultado esperado, treze. Essa situação demonstra que a equivalência i² = -1 ainda não estava consolidada, faltavam atividades em número suficiente para que o estudante pudesse organizar sua estrutura cognitiva e consolidar esse conhecimento.

Figura 28 – Desafio resolvido e raízes confirmadas



Fonte: Elaborada pelo autor

Na resolução do problema, as dificuldades que os estudantes encontraram, provavelmente, foram parecidas com aquelas encontradas por Cardano e Bombelli no século XVI: os resultados eram raízes quadradas de números negativos, objetos estranhos; porém, quando verificavam as soluções, resultava uma igualdade verdadeira; por isso, chamavam essas raízes de sofistas ou sutis. Desta forma, a história dos números complexos emergiu na sala de aula, através de um desafio histórico, como é proposto pelos PCN (BRASIL, 2002), o de uma atividade investigadora, na qual os estudantes puderam sentir as mesmas dificuldades encontradas pelos matemáticos do passado e, com o auxílio do Radice e algumas intervenções do professor, conseguiram resolver o desafio, ampliando seus subsunçores e propiciando o desenvolvimento de uma aprendizagem subordinada.

A satisfação por este "achado histórico" foi expressa pela reação positiva dos estudantes diante do OA. O envolvimento demonstrado, as interações focadas nas discussões e o sucesso que conquistaram, ao serem desafiados diante de um novo conteúdo, são indicativos de que o OA e a rota de aprendizagem podem ser considerados recursos potencialmente significativos. Nesse início de estudo dos números complexos, contempla-se um dos facilitadores da aprendizagem significativa, a diferenciação progressiva, pois se apresenta, em primeiro lugar, as ideias mais gerais e, depois, progressivamente o conteúdo é detalhado e especificado. (AUSUBEL, 2003).

Figura 29 – Raiz quadrada de número negativo

Quando você resolvia equações de 2° grau e chegava a raiz quadrada de um número negativo, lembra de como expressava a solução? O que é adequado dizer, não existe ou não pertence ao conjunto dos números reais? Apenas botava um "Ñ", que eu entendia que não conseguia resolver.
É adequado dizer que não pertence ao conjunto dos números reais.

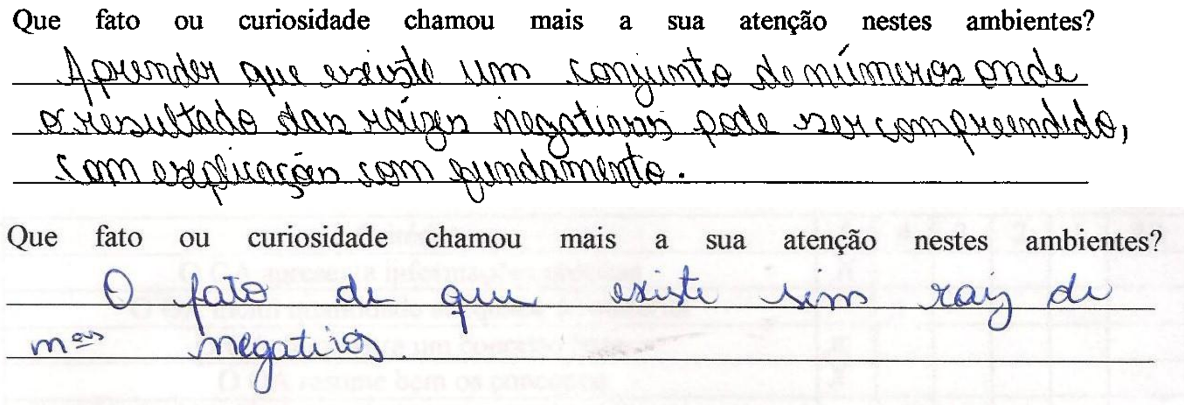
Quando você resolvia equações de 2° grau e chegava a raiz quadrada de um número negativo, lembra de como expressava a solução? O que é adequado dizer, não existe ou não pertence ao conjunto dos números reais? A expressão usada era "Não existe" porém o correto é "Não pertence ao conjunto dos nºs reais".

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com o ambiente "Problema histórico", conseguiu-se superar a concepção da inexistência de solução para um discriminante negativo, numa equação de 2° grau. Na avaliação do OA, em relação a equações de segundo grau, a maioria dos estudantes, 12 (67%), respondeu que, quando encontravam uma raiz quadrada de número negativo (um discriminante negativo numa equação de 2° grau), respondiam *não existe* ou que não era possível resolver a equação; os outros seis (33%) não lembraram como procediam. Os estudantes não tinham a compreensão de que esse número faz parte de um conjunto numérico diferente dos reais, e afirmavam que esse número não existia (Figura 29).

Ao interagir com o OA, e refletindo sobre o assunto, todos os estudantes puderam superar essa concepção, reconhecimento de que a raiz quadrada de número negativo não existe como número real, porém existe como número complexo.

Figura 30 – Comentários dos estudantes sobre o discriminante negativo


Que fato ou curiosidade chamou mais a sua atenção nestes ambientes?

Aprender que existe um conjunto de números onde o resultado das raízes negativas pode ser compreendido, com explicação com fundamento.

Que fato ou curiosidade chamou mais a sua atenção nestes ambientes?

O fato de que existe sim raiz de nºs negativos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A existência de raiz quadrada de número negativo foi o que mais chamou a atenção dos estudantes; para confirmar, se trouxe o relato de dois estudantes (Figura 30). Isso se deve ao processo árduo e complexo, que os estudantes tiveram para reconstruir o conceito de conjuntos numéricos. Os comentários e dados apresentados, anteriormente, mostram que houve a construção do conhecimento, a compreensão e a reconciliação dos novos significados do subsunçor do estudante.

7.3 Ativando os subsunçores nas operações básicas

A consolidação do conceito de unidade imaginária foi fundamental para a sequência das atividades, pois como prevê o processo da diferenciação progressiva, as ideias mais gerais já foram exploradas e, assim, desenvolve-se a compreensão de conceitos mais específicos. Avançando na rota de aprendizagem, os estudantes dedicaram-se a algumas definições, características e às operações básicas com números complexos, em forma de atividades.

Ao construir a rota de aprendizagem, tinha-se a hipótese de que os estudantes não apresentariam dificuldade em identificar as partes real e imaginária de números complexos e, com isso, resolveriam com naturalidade somas, subtrações e multiplicações com esses números, pois apresentariam subsunçores para ancorar tais operações. Para resolver expressões algébricas, são utilizadas estruturas cognitivas que estão ativas, pois, para somar ou subtrair números complexos, soma-se ou subtrai-se os termos semelhantes. Na multiplicação não é diferente, tendo compreendido a igualdade $i^2 = -1$; basta aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma. Esses cálculos envolvem operações que os estudantes recorrentemente realizam desde o Ensino Fundamental. Se houvesse dificuldades, suspeitava-se que seriam na divisão de dois números complexos.

Apostando nessa hipótese, melhor, na presença de estruturas de pensamento para relações e operações algébricas, como subsunçores, planejou-se uma prática similar à da *Peer Instruction*,[35] em que os estudantes levantaram placas indicando respostas corretas a determinadas questões e discutindo-as, em grupos, em caso de divergências ou dificuldades. Mais informações, de como essa prática de aprendizagem ativa foi proposta, estão disponíveis na rota de aprendizagem (Apêndice B).

Os registros desta atividade, para cada questão, estão disponíveis no diário de bordo na aula do dia 11 de novembro (Apêndice H). Assim, a análise apresentada aqui foi organizada em blocos de questões como, por exemplo, o das sete primeiras, que remetem às características básicas de números complexos (partes do número complexo, igualdade entre dois números, representação geométrica, número real e número imaginário puro) e às operações básicas com números complexos. Ao propor essa prática, levou-se em consideração a organização sequencial dos conteúdos, “visto que cada incremento novo de conhecimentos serve como uma função para aprendizagens subsequentes” (AUSUBEL, 2003, p. 171), facilitando assim o processo de construção do conhecimento, da aprendizagem significativa.

Confirmou-se a hipótese inicial! Os estudantes conseguiram resolver as questões, ancorando o novo conhecimento nas estruturas do raciocínio algébrico. Somente duas questões geraram dúvidas, que propiciaram boas e férteis discussões. Em uma delas, alguns estudantes mostraram não ter compreendido o significado de um imaginário puro, identificando-o como 2 + i ao invés de 0 + 2i, justificando pelo fato de que a unidade imaginária estava “sozinha, sem um valor junto”; por isso, seria imaginário puro. Ao

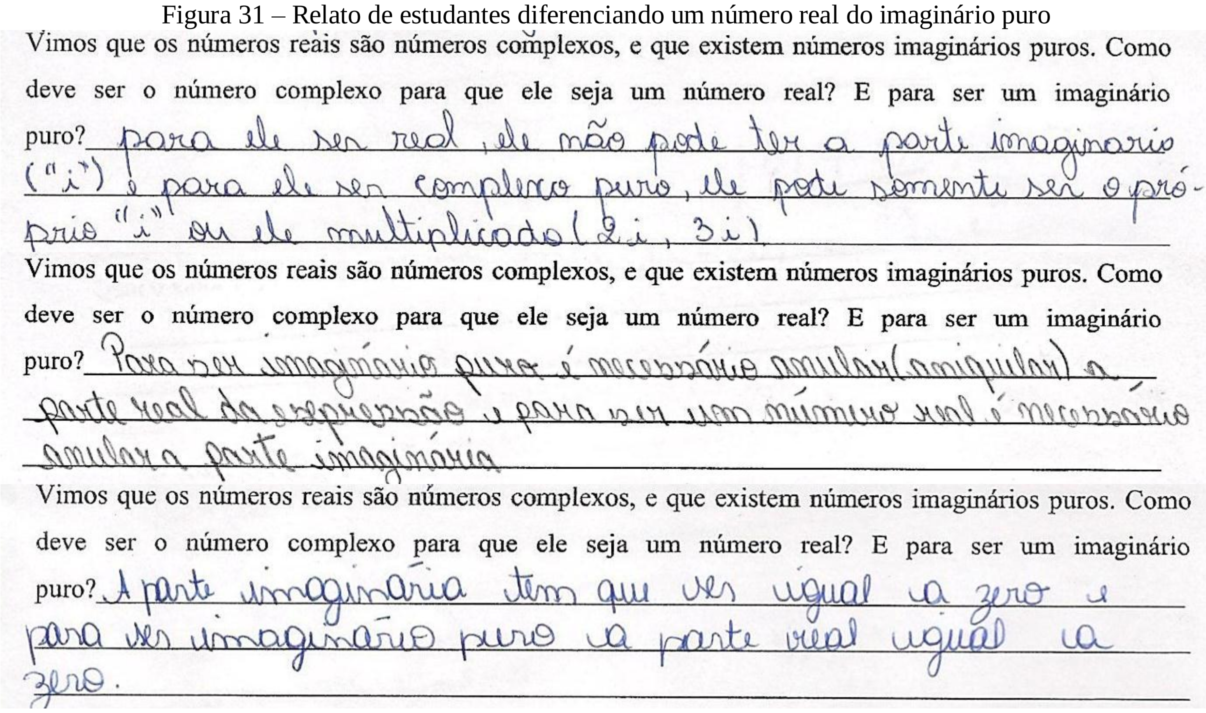
[35] A *Peer Instruction* foi proposta para o Ensino Superior em meados da década de 90 pelo professor Eric Mazur, da Universidade de Harvard (EUA). O objetivo desta estratégia ativa de aprendizagem é propiciar que os alunos reflitam individualmente e, depois, discutam em grupo suas respostas, antes de o professor informar qual é a correta. (MULLER, 2013). Ao discutir com os colegas, os estudantes argumentam em defesa a sua resposta e devem ter certo domínio da teoria para convencer os colegas da sua escolha, num diálogo que promove a compreensão e o aprendizado do tema em questão. Após esta discussão inicial, os pequenos grupos respondem novamente a questão e, se persistirem divergências nas respostas, acontece nova rodada de discussões, mais ampla, em que o professor media o processo. O docente cuidará para que a argumentação certa prevaleça, com questionamentos, dicas ou explicações, se for necessário, orientando e desequilibrando cognitivamente aqueles que não acertaram, para que refaçam seu pensamento e reconstruam o conceito com entendimento.

declararem seus pensamentos, outros estudantes esclareceram a questão. Um perguntou: “Mas, esse número mistura real e imaginário, como vai ser imaginário puro?”, outro argumentou: “Eu entendi que imaginário puro tem somente a parte imaginária; esse aí (2 + i) tem parte real. Ele não pode ser imaginário puro.”

Com estas intervenções, os estudantes pensaram novamente e se convenceram de que um imaginário puro seria o número com parte real zero e com parte imaginária diferente de zero, ou seja, 0 + 2i. No final da discussão, um estudante sintetizou e explicou: “Para se ter imaginário puro é necessário anular a parte real da expressão e para ser um número real é necessário anular a parte imaginária.” Isso foi observado em sala de aula e, para trazer mais evidências da reconstrução desse conceito, aplicou-se um questionário para verificar se o que se observava estava correto. Esse aspecto foi atendido com êxito: todos os estudantes souberam definir as partes dos números complexos (real e imaginário), como também definir um número real e um imaginário puro, com expressões como as que se pode ver na Figura 31.

A troca de ideias, conjecturas e fundamentos teóricos criou um ambiente reflexivo de aprendizagem, proporcionando a reconciliação integradora, pois os estudantes puderam rever seus conceitos, transformando-os de maneira consistente. Para os estudantes que haviam compreendido o conceito, o diálogo também foi importante, pois, ao defenderem ou concordarem com um determinado entendimento (correto, nesse caso) do conceito, consolidaram esse conhecimento na estrutura cognitiva.

Figura 31 – Relato de estudantes diferenciando um número real do imaginário puro



Vimos que os números reais são números complexos, e que existem números imaginários puros. Como deve ser o número complexo para que ele seja um número real? E para ser um imaginário puro? para ele ser real, ele não pode ter a parte imaginario ("i") e para ele ser complexo puro, ele pode somente ser o próprio "i" ou ele multiplicado (2i, 3i)

Vimos que os números reais são números complexos, e que existem números imaginários puros. Como deve ser o número complexo para que ele seja um número real? E para ser um imaginário puro? Para ser imaginário puro é necessário anular (aniquilar) a parte real da expressão e para ser um número real é necessário anular a parte imaginária

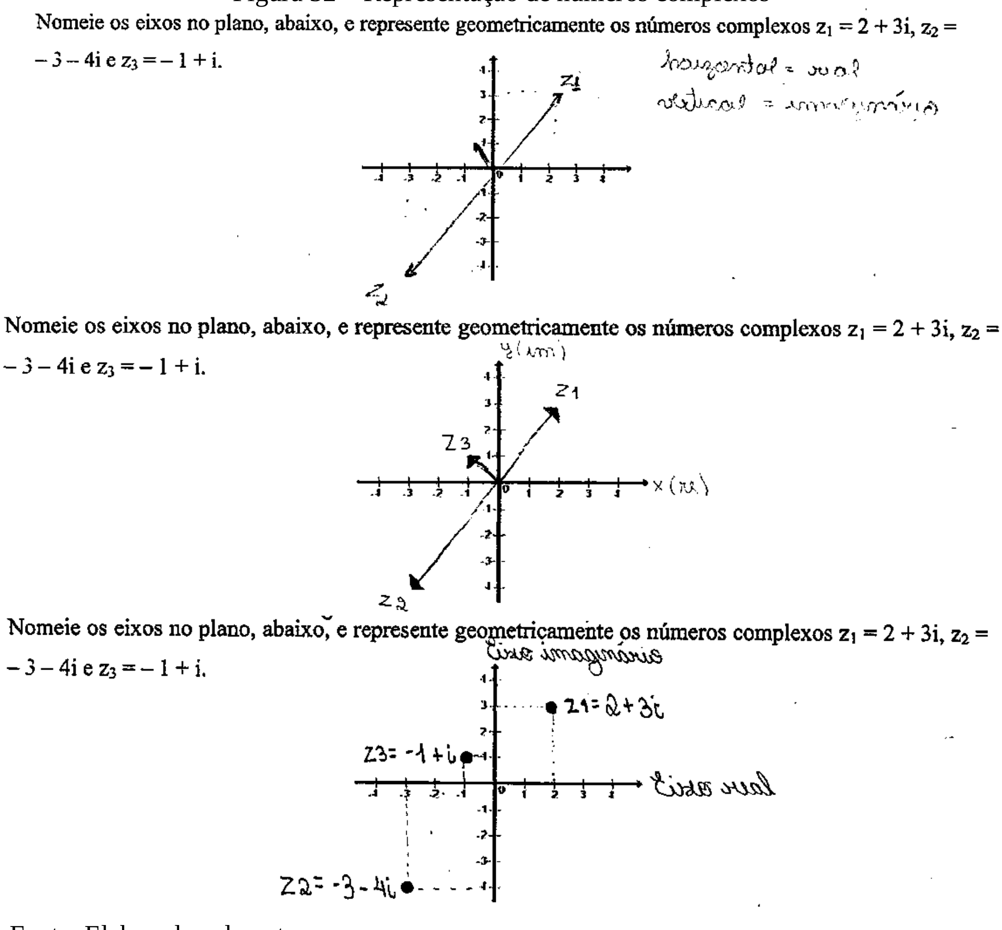
Vimos que os números reais são números complexos, e que existem números imaginários puros. Como deve ser o número complexo para que ele seja um número real? E para ser um imaginário puro? A parte imaginária tem que ser igual a zero e para ser imaginário puro a parte real igual a zero.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os extratos da Figura 31 permitem categorizá-los no maior nível de conhecimento, conforme a categorização proposta, no campo de análise *compreensão de conceitos*, pois os estudantes conseguiram expressar-se, tendo assim fortes indícios de um aprendizado com significado. Ao saber diferenciar um número real de um número complexo, o estudante demonstra saber diferenciar as partes do número complexo, sendo esse um subsunçor para realizar as operações básicas.

Em outra questão, os estudantes não souberam propor os nomes dos eixos do plano de Argand-Gauss. Até aquele momento, nada foi comentado sobre esses eixos, aspecto contornado com uma breve explicação sobre a nomenclatura dos eixos. Nas demais questões, os estudantes não apresentaram dificuldades, quando não acertavam; bastava uma interação com colegas para que, ao repensar, chegassem a conclusões corretas.

Figura 32 – Representação de números complexos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Verificando se os estudantes haviam compreendido o sentido da denominação dos eixos e se sabiam representar números complexos no plano de Argand-Gauss, formulou-se, no questionário, uma questão específica envolvendo tais características. Ao responder o questionário, a maioria dos estudantes (89%) representou corretamente o número complexo; porém, percebeu-se que a reconciliação integradora não estava completa, pois boa parte dos estudantes confundiu a representação de vetor com a de número complexo, como pode ser observado na Figura 32.

Dos 16 estudantes da classe, 13 (81%) associaram um número complexo a um vetor, e somente três (19%) representaram-no como um ponto. No decorrer da rota de aprendizagem, não foi dada ênfase à representação de número complexo, indicando um aspecto falho de aprendizagem proposta. Se, na rota de aprendizagem, houvesse ao menos uma atividade, para acelerar esse processo de reconciliação integradora, provavelmente seria o suficiente para os estudantes distinguirem as representações de número complexo e de um vetor.

Com isso, encerra-se a análise do primeiro bloco, sobre as características básicas de um número complexo e, na sequência, procede-se à análise das questões que envolveram as operações básicas.

A análise das questões do primeiro bloco mostrou indícios de compreensão dos aspectos básicos dos números complexos. Desta forma, os estudantes desenvolveram subsunçores para uma aprendizagem subordinada, sobre as operações básicas com tais números.

Da mesma forma como aconteceu no primeiro bloco, as atividades propostas no segundo renderam boas discussões e um clima favorável à aprendizagem na sala de aula, como se perceber na Figura 33, favorecendo o processo de reconciliação integradora.

Figura 33 – Interação nas discussões das questões

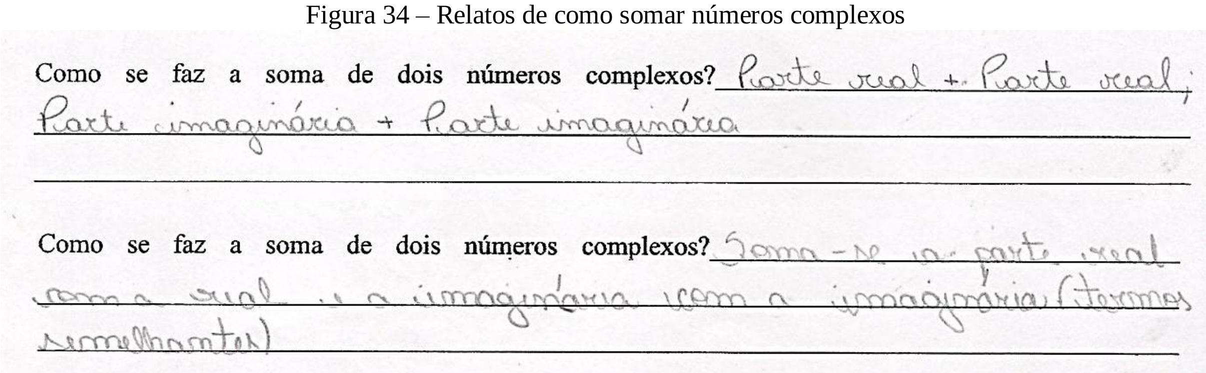
Fonte: Elaborada pelo autor.

Os estudantes deram conta, facilmente, da soma de números complexos, mas na subtração alguns se perderam. O erro mais frequente ocorria na interpretação da expressão z_1

– z_2. A questão a ser resolvida era: “Se $z_1 = 1 - 2i$ e $z_2 = 3 + 4i$, a subtração $z_1 - z_2$ é o número...” Alguns pensaram que somente a parte real do z_2 seria subtraída, argumentando que z_2 não estava entre parênteses para indicar que deveriam subtrair a parte imaginária. Outros contra-argumentavam: “Antes eu somei as partes semelhantes, agora vou subtrair elas, como se z_2 tivesse parênteses. O z_2 é toda a expressão $3 + 4i$, é como se fosse $(3 + 4i)$, por isso seria como se tivesse os parênteses.” Com esta argumentação, em linguagem coloquial, os demais estudantes perceberam que isso tinha sentido lógico e compreenderam a forma correta de resolução.

As discussões proporcionaram momentos de reconstruções na estrutura cognitiva, o que pode ser observado em sala de aula. Quando questionados sobre a forma de se somar números complexos, 16 estudantes (89%) responderam corretamente, expressando-se e apresentando-se, assim, no terceiro nível; somente dois (11%) não responderam. A Figura 34 apresenta extratos dos relatos dos estudantes, quando questionados sobre a soma de números complexos.

Figura 34 – Relatos de como somar números complexos


Como se faz a soma de dois números complexos? Parte real + Parte real; Parte imaginária + Parte imaginária

Como se faz a soma de dois números complexos? Soma-se a parte real com a real e a imaginária com a imaginária (termos semelhantes)

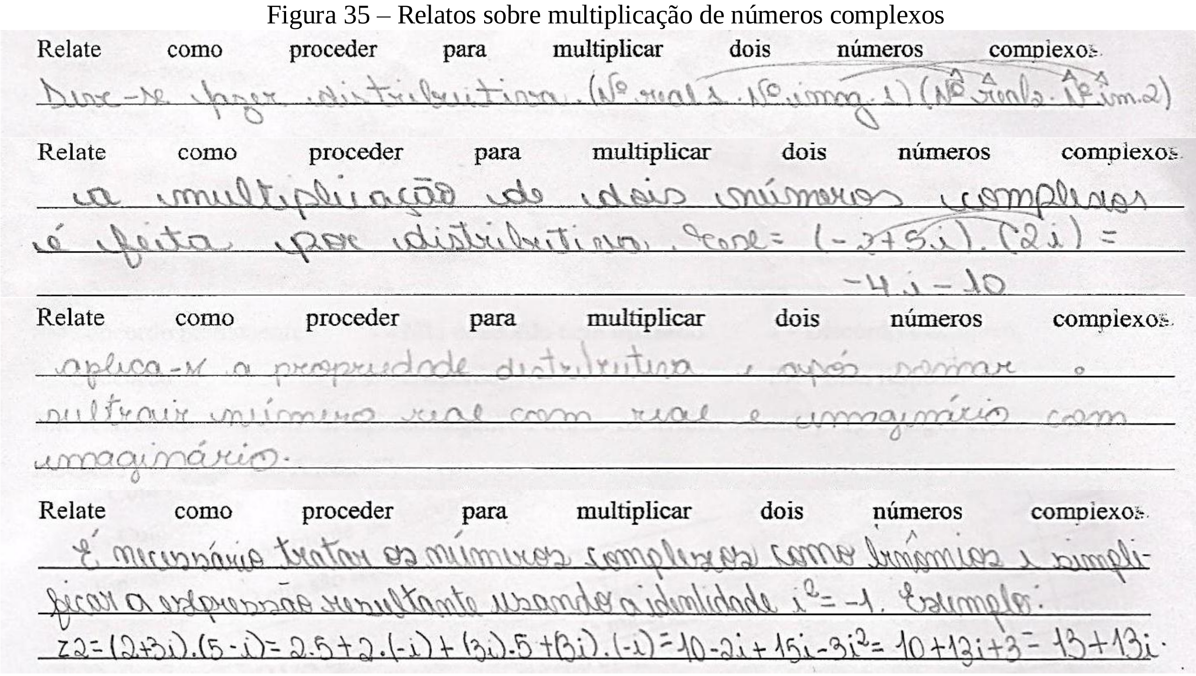
Fonte: Elaborada pelo autor.

Com a multiplicação, por sua vez, provocou-se um “choque” nos estudantes, pois um exclamou: “Meu, que fácil, é muito lógica a resposta!”; porém, 16 (89%) erraram, multiplicando a parte real do primeiro número pela parte real do segundo, e procedendo da mesma forma com a parte imaginária dos dois números, o que foi interpretado como um momento de desatenção. Ao se deparar com a resposta errada, ficaram surpresos e, momentaneamente, intrigados, dando indícios da predisposição para aprender. Sabendo que eles tinham estruturas cognitivas necessárias para tal resolução, foi sugerido que colocassem o cálculo no papel. Pronto, somente escrevendo a conta, alguns já perceberam o erro. Subsunçores em ação! Logo, todos resolveram a multiplicação de forma correta.

No momento de apresentar justificativas para os cálculos realizados, um estudante comentou: “Neste caso temos que fazer a distributiva, não podemos fazer somente com os semelhantes”, e outro complementou: “É necessário tratar os números complexos como binômios e simplificar a expressão resultante usando $i^2 = -1$”. Vale relembrar, aqui, que, na atividade em que deveriam obter as raízes complexas, na equação de 2° grau, alguns estudantes não tinham, ainda, consolidada a identidade $i^2 = -1$. Desta vez, no entanto, percebeu-se que este conhecimento estava consolidado, e os estudantes atingiram, ao menos, o segundo nível, no campo de análise das operações matemáticas. Daí em diante, para efetuar multiplicações, os estudantes resolveram os cálculos no caderno, dando conta da propriedade distributiva. Esses relatos mostram indícios de que ocorreu uma aprendizagem subordinada, pois o novo conteúdo foi compreendido, com o apoio de subsunçores presentes na estrutura cognitiva.

Em uma análise de conceitos, 17 estudantes (94%) souberam expressar-se, explicando como se efetua uma multiplicação de números complexos, e somente um não soube explicar como fazer. A maioria dos estudantes relatou que deveria aplicar a propriedade distributiva, sem mais detalhes, pois as outras operações envolvidas, em consequência da distributiva, são simples e, provavelmente, consolidadas para todos os estudantes. Na Figura 35, pode-se observar algumas formas que os estudantes usaram para expressar como proceder para multiplicar números complexos, evidenciando um conhecimento consolidado, como indica a categoria do terceiro nível.

Figura 35 – Relatos sobre multiplicação de números complexos


Relate como proceder para multiplicar dois números complexos

Deve-se fazer distributiva. (Nº real 1 . Nº imag. 1) (Nº real 2 . Nº im. 2)

Relate como proceder para multiplicar dois números complexos

a multiplicação de dois números complexos é feita por distributiva. Ex: $(-2+5i).(2i) = -4i - 10$

Relate como proceder para multiplicar dois números complexos

aplica-se a propriedade distributiva, após somar e subtrair número real com real e imaginário com imaginário.

Relate como proceder para multiplicar dois números complexos

É necessário tratar os números complexos como binômios e simplificar a expressão resultante usando a identidade $i^2 = -1$. Exemplo:

$z_2 = (2+3i).(5-i) = 2.5 + 2.(-i) + (3i).5 + (3i).(-1) = 10 - 2i + 15i - 3i^2 = 10 + 13i + 3 = 13 + 13i$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas questões de divisão, a turma apresentava sinais de cansaço, mesmo assim seguiu-se com a atividade, aproveitando que estavam, também, atentos, ainda com predisposição para aprender.

A divisão de um número complexo por um número real foi resolvida sem dificuldades pela maioria da turma: 15 estudantes (83%) acertaram. Já na questão de divisão de um número complexo pela unidade imaginária i, ninguém acertou, na primeira tentativa; vários estudantes dividiram as partes semelhantes, ao dividir 2 + 3i por i, dividiram 3i por i, sem alterar a parte real. Logo, perceberam que não estava correto, porém não sabiam como dar continuidade à resolução da questão. Como auxílio para que ativassem subsunçores, foram propostos questionamentos como: "Quanto vale raiz quadrada de -1?" e "O que vocês faziam quando tinham uma raiz no denominador?"

Figura 36 – Estudantes resolvendo individualmente as questões

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com essas perguntas, sete estudantes ativaram os subsunçores, percebendo que deveriam racionalizar o denominador, resolvendo corretamente a questão. A racionalização não é simples de se compreender. Em geral, os estudantes apresentam dificuldades para operar com raízes, pois exige compreensão. Caso tenham aprendido por memorização de alguns casos e práticas de exercícios seguindo modelos de resolução, pouco sobra para reconhecerem e utilizarem, com propriedade, raízes em contextos gerais. Isso seria o mesmo que dizer que tais aprendizagens, se ocorreram, não foram significativas. Houve a necessidade de discussões nos grupos, para que os estudantes relembrassem e alguns aprendessem com seus colegas sobre a racionalização, em que o denominador possui somente uma raiz.

Com isso, os estudantes deram-se conta da questão proposta e todos dividiram números complexos por outro, imaginário puro. Percebendo que o cansaço aumentava, decidiu-se não seguir com a divisão entre dois números complexos, deixando um espaço para que pensassem em como resolver divisões deste tipo, antes da aula seguinte. Na aula seguinte, mesmo não tendo sido solicitado que resolvessem a questão elaborada para esta aprendizagem, dois estudantes, instigados pelo desafio e mostrando predisposição para aprender, tentaram fazer a divisão entre dois números complexos quaisquer, porém, permanecia a unidade imaginária no denominador, indicando que a divisão não estava concluída. Ocorreu que esses estudantes operaram como no caso anterior, racionalizando, como se tivesse somente uma expressão no denominador.

Ao propor a questão em sala de aula, a maior parte dos estudantes não conseguiu resolver a divisão entre dois números complexos, e o professor entrou em cena, explicando e dialogando com os estudantes, de modo a ampliar a diferenciação progressiva sobre raízes e racionalização, auxiliando-os a compreenderem a divisão, num processo de reconciliação integradora, com o mesmo significado da racionalização. Assim, ressignificando esse processo e, ao mesmo tempo, a divisão como a multiplicação dos dois termos da divisão pelo conjugado do termo divisor. E foi, a partir da construção deste entendimento, que se introduziu o termo conjugado de um número complexo. O conjugado de um número complexo é diferente do oposto e, mesmo não tendo aparecido, até então, o conceito de números opostos, a maioria dos estudantes (83%) soube distinguir conjugado e oposto de um número complexo (Figura 37), indicando a presença desse subsunçor e a ocorrência da reconciliação integradora.

Figura 37 – Diferença entre conjugado e oposto de um número complexo

Dividir números complexos é como efetuar a racionalização de denominadores. Escrevemos a divisão como uma fração e multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Qual a diferença entre conjugado e oposto de um número complexo. Explique e apresente o conjugado e o oposto do número -2+5i. (-2-5i) conjugado / +2-5i oposto

Dividir números complexos é como efetuar a racionalização de denominadores. Escrevemos a divisão como uma fração e multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Qual a diferença entre conjugado e oposto de um número complexo. Explique e apresente o conjugado e o oposto do número -2+5i. Conjugado muda apenas a parte imaginária (-2-5i); oposto muda ambas as partes (+2-5i).

Dividir números complexos é como efetuar a racionalização de denominadores. Escrevemos a divisão como uma fração e multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Qual a diferença entre conjugado e oposto de um número complexo. Explique e apresente o conjugado e o oposto do número -2+5i. No caso dos números opostos tanto a parte real quanto imaginária muda para o oposto, no conjugado somente a parte imaginária muda.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com os subsunçores dos estudantes, a prática similar do *Peer Instruction* auxiliou a aceleração do processo de aprendizagem e fez com que os estudantes compreendessem como operar adequadamente com a divisão de números complexos. Caso os estudantes não apresentassem subsunçores suficientes, esses seriam conduzidos ao OA, em que está planejada uma atividade para a aprendizagem destas operações com aplicativos do GeoGebra.

Enquanto os estudantes aprendiam os conceitos dos números complexos, considerando a curiosidade que demonstraram, no início deste estudo, sobre a história e os historiadores que construíram e sistematizaram este conhecimento, eles tinham uma tarefa extra, que consistia em organizar, em duplas, um texto sobre os matemáticos que contribuíram para a evolução da teoria dos números complexos. O texto construído faz parte do ambiente de aprendizagem do OA, denominado “Caminhada Histórica”, em que é apresentado, de forma breve, o que consideraram ser uma contribuição significativa para o desenvolvimento dos números complexos.

Com base neste material, outros estudantes, que interagirem com o OA, poderão ampliar conhecimentos sobre o desenvolvimento histórico desse conjunto numérico e, também este espaço, com o aprimoramento do que já existe e com novas contribuições.

Considerando a predisposição para aprender, cabe ressaltar que todas as duplas realizaram a atividade. Escreveram e aprimoraram os textos, com orientação e sugestões do professor e, como forma de sistematizar, compartilhar e socializar os estudos realizados, elaboraram, coletivamente e em sala de aula, um cartaz em que construíram uma linha do tempo (Figura 38). Desta forma, os estudantes participaram ativa e significativamente da construção do OA, atuando como coadjuvantes da pesquisa desenvolvida.

Figura 38 – Linha do tempo da evolução da teoria dos números complexos

Fonte: Elaborada pelo autor.

Das operações básicas, ainda se tem a potenciação e a radiciação. Essas operações são complexas de ser realizadas na forma algébrica; assim, planejou-se este estudo após a construção da forma trigonométrica de um número complexo. Porém, a exploração algébrica sobre potências da unidade imaginária foi realizada, no espaço “Fazer e compreender” do OA, em que os estudantes interagiram, guiando-se por perguntas do Radice e auxiliados, no que precisaram, também pelo professor.

Sem dificuldades maiores, os estudantes perceberam que, para potências de i, só existem quatro valores possíveis, que formam, repetidamente e na ordem crescente dos expoentes, a sequência 1, i, -1 –i. Analisando os cálculos efetuados conforme propõe o Radice, alguns estudantes conseguiram organizar uma regra para calcular uma potência da unidade imaginária. A regra foi sendo consolidada na estrutura cognitiva, e compartilhada com os demais colegas. Percebe-se que a regra criada foi sendo ancorada na repetição da sequência (1, i, -1 –i), que estava sendo assimilada, e no valor de $i^0 = 1$, que, como perceberam, acontece para potências cujos expoentes são múltiplos de quatro.

Ao serem questionados sobre o valor de i^{17}, responderam i. Perguntados sobre o porquê de ser i, responderam: “Porque com o expoente 16 é i^0, que é 1, daí 17 é o próximo, então é i”. Reforçando a ideia, perguntou-se o valor de i^{30}. Após pensarem um pouco mais, um estudante argumentou: “Se o expoente fosse 28 seria i^0, assim i^{30} é dois depois, que é i^2 e que é -1”. Os estudantes, ainda sem uma formulação, em linguagem matemática, expressavam-se corretamente, como calcular a potência da unidade imaginária, sabendo explicar com argumentos, demonstrando assim um processo ativo de aprendizagem significativa. Ao propor, para todos, individualmente, uma questão, para avaliar o grau de aprendizagem para resolver potências de i, identificou-se haver 15 estudantes (83%) no terceiro nível, ou seja, que responderam corretamente sobre potências de i, e três (17%) que não realizaram a atividade. Estes, quando perguntados sobre o motivo de não terem realizado a tarefa, argumentaram que não tiveram tempo para isso, por estarem trabalhando, e dois deles realizando aulas e provas, para obter a carteira de motorista, não conseguindo, assim, realizar todas as atividades.

Não se pode negar a importância de possibilitar que estudantes realizassem uma prática com operações que já foram estudadas, visando a consolidação dos conhecimentos estudados e, também, para auxiliar os que não compreenderam partes do conteúdo. Para isso, em lugar de passar uma lista clássica com exercícios para serem resolvidos, foi proposto um circuito de questões.[36] Explicações detalhadas de como foi planejada esta estratégia constam na rota de aprendizagem (Apêndice B). Na sala de aula, formaram-se dois grupos, cada um dividido em três subgrupos; e as questões propostas, que envolveram as operações básicas, foram resolvidas pela maioria dos estudantes, e com poucos erros, que ocorreram mais por descuido, como na simplificação de frações ou ao operar com o sinal negativo resultante da substituição de i^2 por -1.

Ao desenvolverem cada questão, os estudantes que realizavam os cálculos no quadro sempre procuraram completar o exercício, para depois solicitar ajuda ao grupo. O auxílio dos colegas foi muito utilizado, algumas vezes para compreender as operações, mas principalmente para confirmar a resposta encontrada. Na Figura 39 observa-se uma dupla de estudantes sendo auxiliada pelo grupo e outra desenvolvendo uma multiplicação. Como se observou também nos cadernos, poucos realizam algumas formas de resolução que dão indícios de um conhecimento mais avançado em compreensão e em desenvolvimento de estruturas de pensamento; alguns ainda percorrem um passo a passo, e outros registram apenas âncoras estruturantes da resolução, mas ambas as duplas resolvendo corretamente a multiplicação entre números complexos.

Figura 39 – Interação entre os grupos no circuito de questões

Fonte: Elaborada pelo autor.

[36] O circuito de questões consiste em uma atividade dinâmica e interativa, nos grupos e coletivamente, em discussões a partir da socialização no quadro. A turma é dividida em grupos, que são divididos em três subgrupos. Os subgrupos têm funções específicas que se alteram durante as rodadas: um subgrupo é responsável por sortear um exercício e resolvê-lo no quadro; outro deve estar preparado para auxiliar quem está no quadro; e por último, um subgrupo resolve o exercício de um grupo adversário, para posteriores e devidos comentários. As rodadas seguem o princípio da organização sequencial, em que o conhecimento da rodada anterior é aplicado, num contexto mais incisivo e com maior complexidade, na rodada seguinte, de modo a promover a consolidação do conhecimento.

Com o passar do tempo, aumentava o nível de dificuldade das questões, tendo as resoluções mais de uma operação a ser realizada. Nas questões sobre potências de i, a dupla do quadro não conseguiu aplicar a regra criada. Porém, discutindo e refletindo com colegas, retomaram a ideia da sequência de valores 1, i, -1, -i, e reconstruíram em pensamento a relação entre os expoentes, consolidando o conhecimento, e resolvendo corretamente expressões com potência de i.

Figura 40 – Estudantes interagindo nos grupos em busca de soluções

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na rodada final do circuito, envolvendo expressões de nível de dificuldade mais elevado, os estudantes, mesmo cansados, estavam mais capacitados a operar em alto nível, e não abandonaram o "barco". Pode-se atribuir essa persistência ao fato de eles estarem mais capacitados a operar em alto nível, sem descartar também a motivação que os animava a prosseguir, talvez exatamente pelo fato de se sentirem mais capacitados e, consequentemente, aptos a resolverem problemas mais complexos. Dedicaram-se duplamente para resolver as expressões, como pode ser observado na Figura 41. Neste final de um bom combate, um dos grupos não simplificou adequadamente uma fração, já o outro foi impecável, acertando todas as questões e corrigindo também, de forma correta, as questões do outro grupo (Figura 42).

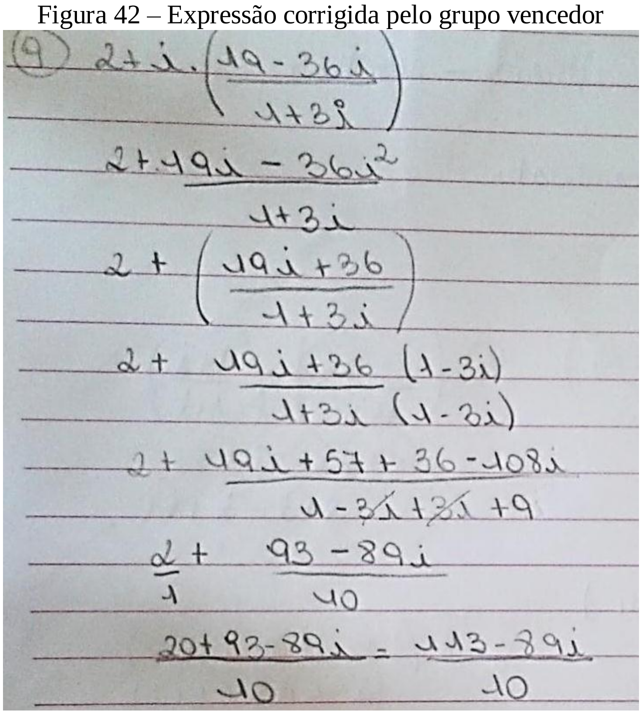
Os estudantes dos dois grupos dedicaram-se com afinco na resolução das atividades, participando ativamente, discutindo e refletindo sobre a busca da solução correta. O alto nível de complexidade das questões, com a resolução correta das operações básicas, indicou que os estudantes dispunham de subsunçores concretizados. Na rota de aprendizagem, poderia ter sido disponibilizada uma lista enorme de atividades, o que demandaria muito mais tempo e com possibilidade de alguns não se envolverem (individualmente) com as resoluções. Preferiu-se o circuito de questões, no qual os estudantes mostraram que sabem operar com os números complexos, e alguns completaram nesta atividade este aprendizado, podendo realizar as atividades de uma forma dinâmica e interativa, pois as questões tinham um grau de dificuldade superior das que estão, geralmente, presentes em livros didáticos.

Figura 41 – Estudantes na última rodada do circuito

Fonte: Elaborada pelo autor.

Além desta atividade em grupos, foi realizada uma avaliação individual. A Figura 43 apresenta uma síntese dos resultados obtidos, com a quantidade de estudantes que acertaram, erraram ou não realizaram as questões que envolviam, respectivamente: forma algébrica, representação geométrica, soma, multiplicação, divisão de números complexos e potência da unidade imaginária.

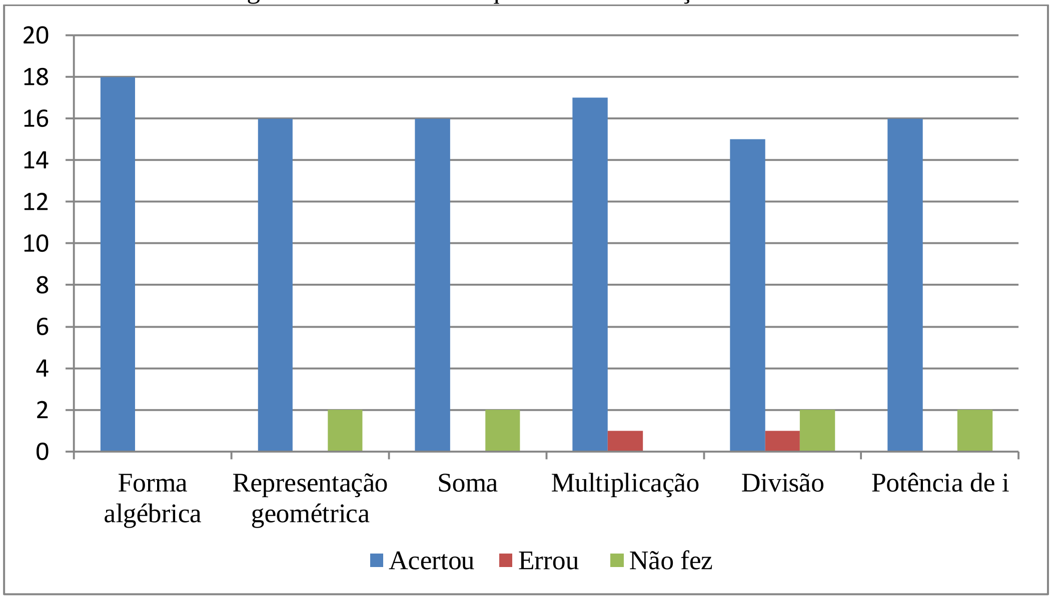
Figura 42 – Expressão corrigida pelo grupo vencedor



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados (Figura 43) apresentam indícios consistentes de que a maioria dos estudantes desenvolveu a aprendizagem subordinada, pois tinham os subsunçores necessários para ancorar o conhecimento das operações básicas, na sua estrutura cognitiva. As discussões e os diálogos em sala de aula foram recursos importantes para acelerar o processo da reconciliação integradora. Assim, quando os estudantes não compreendiam ou não operavam adequadamente, esses recursos permitiram reconstruir corretamente os conceitos envolvidos.

Figura 43 – Acertos das questões da avaliação individual



Fonte: Elaborada pelo autor.

Desta forma, com o circuito de questões e a atividade de avaliação individual, finalizou-se o estudo de uma parte fundamental do conteúdo de números complexos, com a consolidação dos conhecimentos explorados até o momento. Foi possível aos estudantes avançarem no desenvolvimento de atividades mais específicas e inclusivas, organizando o conteúdo hierarquicamente na sua estrutura cognitiva, como propõe o processo de diferenciação progressiva, pois os conceitos mais amplos foram explorados inicialmente e, posteriormente, detalhadas ou clareadas as especificidades, de acordo com as necessidades que foram sendo identificadas.

7.4 A forma trigonométrica do número complexo e suas facilidades

Seguindo as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de números complexos, faltavam somente a potenciação e a radiciação. Essas operações com números complexos, expressos na forma algébrica, são muito complicadas e não são realizadas nessa forma. É necessária aqui a utilização da forma trigonométrica do número complexo, que produz resoluções bastante simplificadas e gerais, possibilitando a realização das operações de radiciação e potenciação de quaisquer números complexos. Para desenvolver o estudo da forma trigonométrica, são necessários alguns subsunçores sobre números complexos, conceitos desenvolvidos em estudos anteriores, e conhecimentos de trigonometria, esses, em geral, de maior dificuldade para os estudantes.

Segundo os professores entrevistados no início do desenvolvimento deste projeto de pesquisa, o próximo tópico de estudos – forma trigonométrica dos números complexos – é o conteúdo mais difícil de ser compreendido pelos estudantes. Para Araújo (2006, p. 70): “A dificuldade do aluno na maioria das vezes refere-se à falta de conhecimento do conteúdo anterior, no caso, a Trigonometria.” Assim, percebe-se que a falta de subsunçores prejudica a aprendizagem de novos conceitos de forma significativa. Cientes dessa dificuldade, também por experiências pedagógicas vivenciadas em outros períodos e a pesquisa de Muniz (2011), planejou-se uma estratégia guiada para os estudantes, envolvendo uma interação com o OA.

A forma trigonométrica do número complexo não pode aparecer do nada para os estudantes. Sugeriu-se, para tal construção, a realização de aplicativos do OA, nas quais os estudantes multiplicaram números complexos, propondo uma análise da relação entre a distância do número complexo até a origem do plano, chamada módulo do número complexo, e da relação entre o ângulo orientado, que vai do semieixo positivo até a semirreta, que parte da origem do plano e que passa no ponto que posiciona o número complexo, o argumento.[37] Os estudantes perceberam que, geometricamente, ao multiplicar dois números complexos obtém-se outro número complexo, cujo módulo é a multiplicação dos módulos, e cujo argumento é a soma dos argumentos dos números que foram multiplicados.

A mesma atividade foi realizada para a divisão de números complexos; daí os estudantes chegaram à conclusão de que, para dividir dois números complexos, deveriam dividir os módulos e subtrair os argumentos. Com isso, os estudantes sentiram-se motivados a encontrar outra forma de representar um número complexo.

Radice acompanhou os estudantes no percurso da transformação da forma algébrica e de um número complexo, $z = a + bi$, na sua forma trigonométrica, $z = p\ (\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$, sendo p o módulo e θ o argumento de z. Ao observar os estudantes, teve-se a impressão que eles compreendiam essa transformação. Porém, na prática, ao sugerir a transformação do

---

[37] “A direção do vetor $\overrightarrow{OP}$ é dada pelo ângulo θ (com $0 \leq \theta \leq 2\pi$), formado pelo vetor e pelo semieixo real positivo, considerado no sentido anti-horário. Para um complexo não-nulo z, o ângulo θ é chamado de **argumento de z**.” (MELLO, 2005, p. 578).

número complexo $z = 3 + 4i$, para a forma trigonométrica, a maioria dos estudantes apresentou dificuldade na determinação do argumento.

Um dos subsunçores necessários estava presente, o Teorema de Pitágoras, que era familiar para todos e foi bem-aplicado, para determinar o módulo do número complexo, mas os estudantes não tinham o conhecimento de como determinar a medida do ângulo, ou seja, não reconheciam que poderiam utilizar alguma das razões trigonométricas. Sem esse subsunçor não era possível avançar nos estudos.

Para suprir esta lacuna, o professor retomou o conceito das razões trigonométricas e explicou aos estudantes como determinar a medida do argumento, conhecida uma razão trigonométrica, com a utilização de uma calculadora.

Pensando no aprimoramento do objeto de aprendizagem, para usuários que não terão auxílio de um professor, os estudantes sugeriram que fosse disponibilizado um vídeo (https://youtu.be/1osBdZiO2uA), em que é apresentado o procedimento explicado pelo professor durante a aula. A preocupação com futuros usuários demonstrou que os estudantes "abraçaram a causa", e estavam empenhados no desenvolvimento do projeto, sendo sujeitos ativos na aprendizagem e na construção do OA, que deixava, aula após aula, de ser um aplicativo do professor e passava a ser um recurso pensado por todos, para a aprendizagem de números complexos.

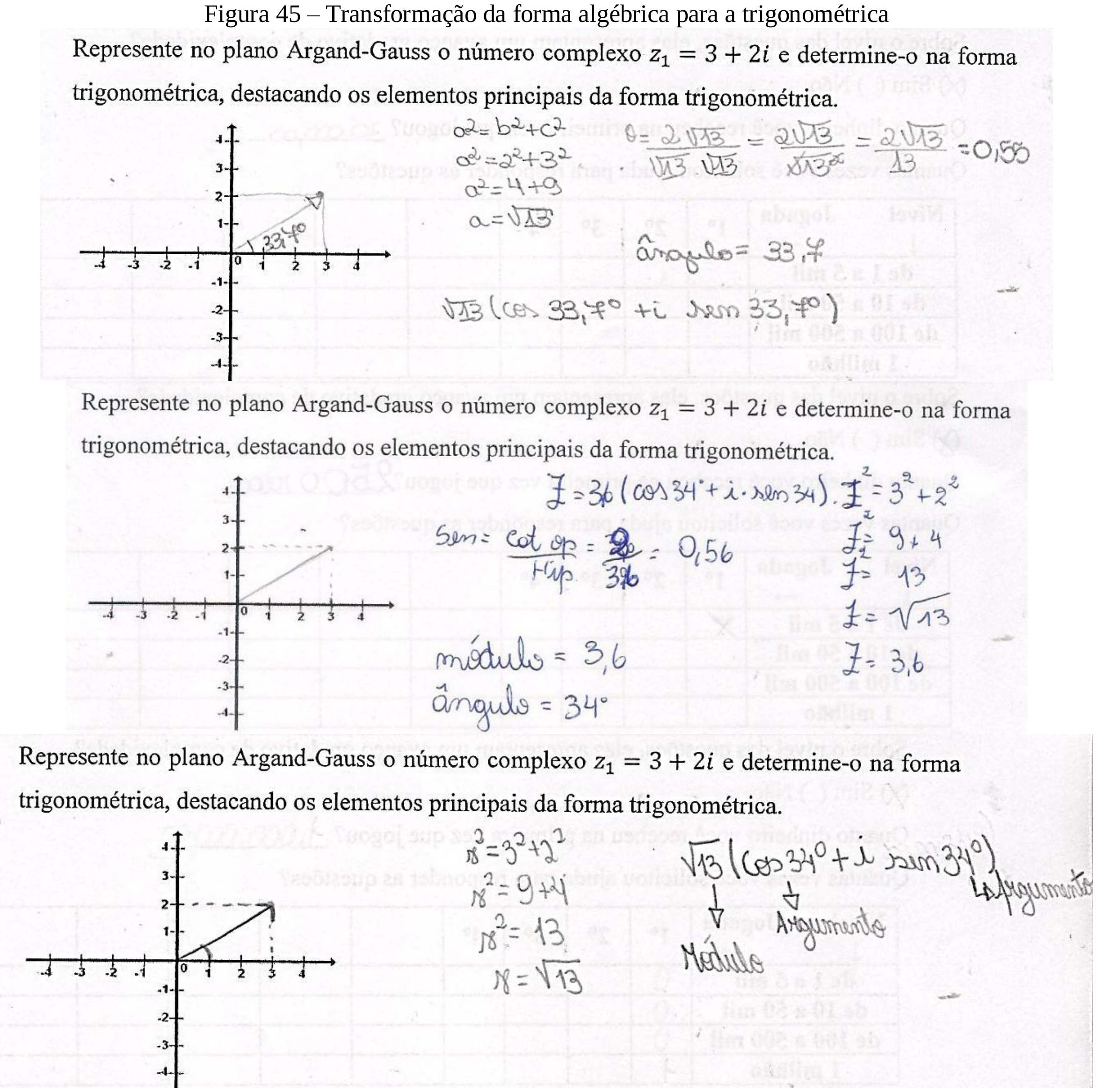
Figura 44 – Estudantes resolvendo exercícios sobre a forma trigonométrica

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em sala de aula, os estudantes mostravam-se dedicados na resolução das atividades (Figura 44). Porém, para alguns persistia a dificuldade na determinação do argumento de um número complexo, principalmente, quando o número complexo não estava localizado no primeiro quadrante. Faltavam subsunçores! A determinação do argumento, com o auxílio da calculadora, estava em dia, porém, faltava analisarem em qual quadrante se encontrava o número.

Numa avaliação individual, observou-se que os estudantes ainda apresentavram lacunas no cálculo do argumento do número complexo; 10 estudantes (56%) souberam transformá-lo da forma algébrica para a trigonométrica, atingindo o terceiro nível em relação ao campo execução de operações matemáticas (Figura 45). Com esses extratos, tem-se indícios de que a aprendizagem subordinada ocorreu para dez estudantes, pois assimilaram o processo de transformação da forma algébrica para a trigonométrica, incorporando, na sua estrutura cognitiva esse novo conhecimento.

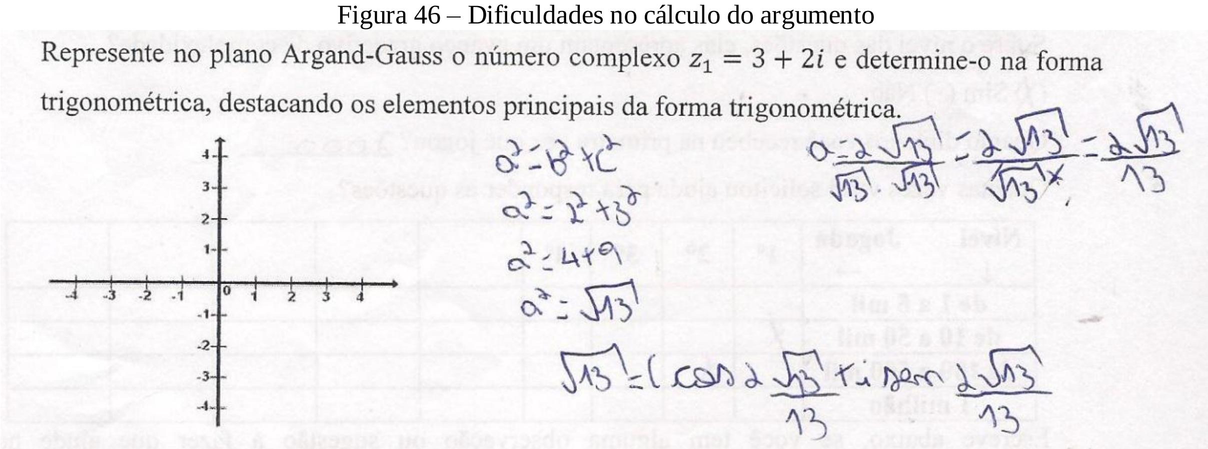
Figura 45 – Transformação da forma algébrica para a trigonométrica



Fonte: Elaborada pelo autor.

Seis estudantes (33%) encontravam corretamente o módulo, porém não o argumento, uma defasagem que persistia no processo de aprendizagem. Assim, esses estudantes realizaram a transformação de forma parcial, e outros dois estudantes (11%) não resolveram essas questões. No caso dos estudantes que erraram o cálculo do argumento, como se observa na Figura 46, percebe-se que não determinaram o ângulo (argumento), mas apenas o valor do seno, não compreendendo que deveriam aplicar a função arco-seno para obter o ângulo. Isso indica a falta de subsunçores, não estava ainda operacional a relação entre um valor de seno e de um correspondente ângulo que tem esse seno. Neste caso, a explanação do professor não foi suficiente, para que se concretizasse a reconciliação integradora.

Figura 46 – Dificuldades no cálculo do argumento

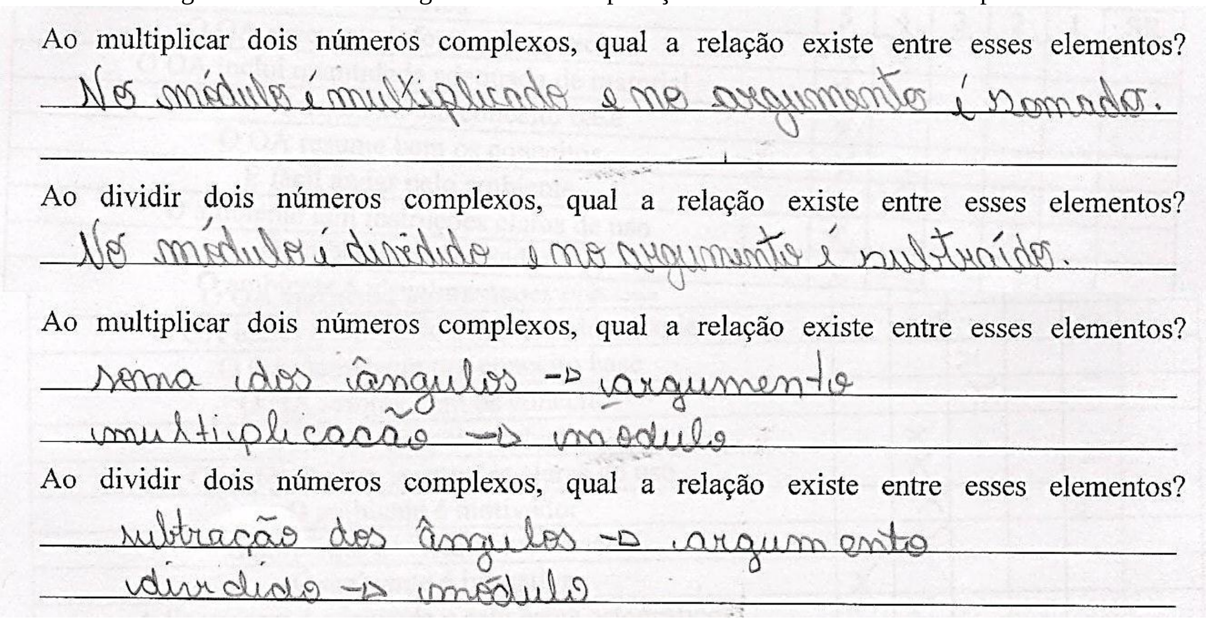


Fonte: Elaborada pelo autor.

A dificuldade observada na transformação da forma algébrica para a trigonométrica não foi encontrada no processo inverso, o de passar da forma trigonométrica para a algébrica. Esta transformação foi facilmente percebida. Dezesseis estudantes (89%) acertaram, e dois (11%) não responderam. As operações que envolvem essa transformação utilizam valores de seno e cosseno, cálculos realizados desde o Ensino Fundamental e de fácil assimilação. Desta forma, estes subsunçores estavam disponíveis na estrutura cognitiva dos estudantes, possibilitando a ancoragem desse conhecimento. Diferentemente do procedimento inverso, em que é necessária a compreensão do ciclo trigonométrico e do processo inverso da determinação das razões trigonométricas.

Outros conceitos, facilmente compreendidos, foram os de módulo e de argumento de um número complexo, nas operações de multiplicação e divisão, como se pode observar na Figura 47. Dezesseis (89%) estudantes efetuaram corretamente a multiplicação e a divisão de números complexos na forma trigonométrica, e dois (11%) não responderam.

Figura 47 – Módulo e argumento na multiplicação e divisão de números complexos



Ao multiplicar dois números complexos, qual a relação existe entre esses elementos?

No módulo é multiplicado e no argumento é somado.

Ao dividir dois números complexos, qual a relação existe entre esses elementos?

No módulo é dividido e no argumento é subtraído.

Ao multiplicar dois números complexos, qual a relação existe entre esses elementos?

soma dos ângulos → argumento

multiplicação → modulo

Ao dividir dois números complexos, qual a relação existe entre esses elementos?

subtração dos ângulos → argumento

dividido → módulo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Realizada a análise das aprendizagens, percebeu-se a necessidade de auxiliar a melhorar o entendimento dessas operações para alguns. Desta forma, foram organizadas duas atividades: uma visando superar lacunas de aprendizagem, aplicada na forma de um jogo de perguntas e respostas; e outra, um desafio para ampliar o significado deste estudo, com exercícios envolvendo situações-problema, propiciando aos estudantes um ambiente de aprendizagem mais rico e complexo, envolvendo-os, inclusive, num contexto interdisciplinar da rota de aprendizagem.

O ensino da Matemática, especialmente no Ensino Médio, envolve conceitos que precisam ser construídos em nível formal de abstração, com sentido lógico para o que significam e para a representação em linguagem simbólica que os expressam. É claro que não se pretende excluir aqui a relação do conhecimento matemático com situações contextualizadas, em aplicações a problemas reais da sociedade e na evolução de outras ciências, ao contrário. Mas, convém ressaltar mais uma vez, essa perspectiva operacional e aplicada da Matemática não prescinde e nem exclui a necessidade do formalismo. A questão aqui é de aprendizado da Matemática (para o estudante a quem se reconhece primeiro como cidadão, e não como um futuro matemático), que não se inicia pelo formalismo, mas que não o exclui nem lhe retira a importância.

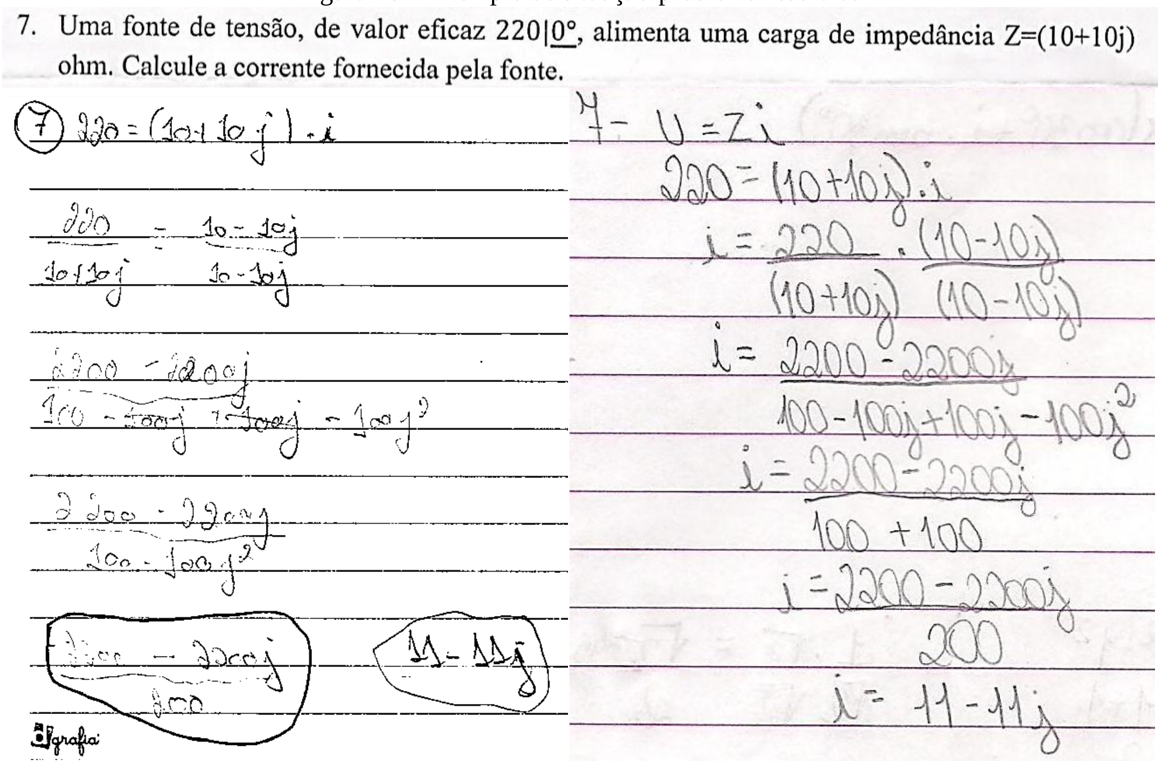
Segundo os PCN, um dos objetivos do Ensino Médio é o “desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo". (BRASIL, 1999, p. 6). Assim, quando for do alcance da compreensão dos estudantes, é também objetivo da Educação Matemática que os estudantes conheçam e relacionem os conceitos em situações contextualizadas, realizando, assim, uma efetiva interdisciplinaridade para uma formação humana mais ampla, não apenas técnica, estabelecendo relação entre teoria e prática no processo de aprendizado. (BRASIL, 1999).

As aplicações que envolvem números complexos não são simples de serem compreendidas. É necessária uma predisposição extra para se consolidar tal aprendizagem. Procurando promover aprendizagens nesta direção, para estudantes interessados em ampliar seu conhecimento, além das questões básicas sobre a forma trigonométrica, foram disponibilizadas, no OA, atividades sobre a análise de circuitos elétricos de corrente alternada. Mesmo estando quase no término das aulas e em período final de avaliações de todas as disciplinas, os estudantes continuaram envolvidos procurando compreender e resolver as atividades propostas, com predisposição para aprender mais. As questões foram sugeridas como atividade extraclasse para todos os estudantes que tinham interesse no assunto e em ampliar seu conhecimento. Dos 18 estudantes da turma, oito (44%) mantiveram-se envolvidos, estudando e aprendendo sobre circuitos elétricos e resolvendo as situações-problema corretamente. Na Figura 48, podem ser observadas duas resoluções apresentadas para um dos problemas sugeridos.

Com essas atividades sobre a análise de circuitos elétricos de corrente alternada, procurou-se cumprir uma das metas dos PCN+ que é a da "investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências". (BRASIL, 2002, p. 113).

Para a resolução destes exercícios, os estudantes precisaram realizar uma pesquisa, procurando aprender os conceitos para a análise de um circuito elétrico. Ao operar corretamente com os números complexos, os estudantes, proponentes de resoluções apresentadas na Figura 48, foram considerados no terceiro nível, no campo de execução de operações matemáticas, como, também, realizaram uma aprendizagem superordenada em relação aos conteúdos de Física envolvidos nessas questões.

Figura 48 – Exemplo de situação-problema resolvida

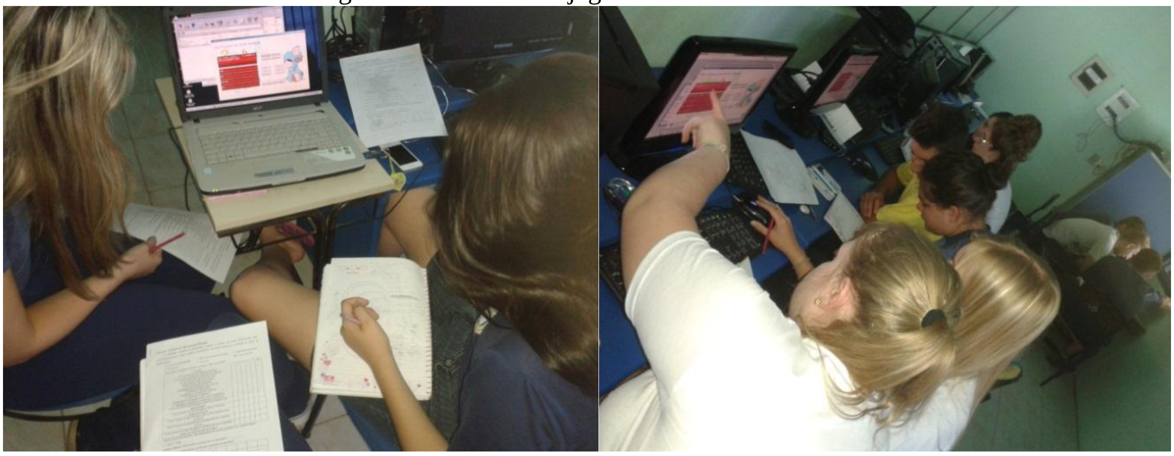


Fonte: Elaborada pelo autor.

Visando consolidar o conhecimento do número complexo, na forma trigonométrica para a maioria dos estudantes, e propiciar um recurso de apoio para preencher a lacuna de aprendizagem, em relação à determinação do argumento de um número complexo, para os estudantes que ainda mostravam dificuldades com este conteúdo, foi proposto o "Show do Milhão", disponível no OA, para ser jogado em duplas. Um recurso lúdico tem potencial para mudar o clima da sala de aula. Estando às vésperas do final de ano, os estudantes apresentavam um cansaço natural, querendo férias, ainda mais estando as principais avaliações já concluídas. Porém, quando se relatou a atividade a ser realizada, o ânimo foi renovado e a ansiedade era visível nas reações dos estudantes. A predisposição em realizar a atividade continuou e aumentou, quando tiveram acesso ao jogo, e todos dedicaram-se com afinco para ganhar o prêmio maior (Figura 49). Alguns estudantes chegaram a comemorar os acertos com gritos de alegria.

Na realização do jogo, os estudantes apontaram alguns erros na escrita das questões, como a palavra *multiplica*, que, ao certo, deveria ser *multiplicação*. Outro erro percebido e apontado por eles foi na palavra *Schow* na interface do jogo. O apontamento das falhas mostrou novamente que os estudantes estavam atentos às perguntas e também preocupados com a qualidade do OA, cuja construção foi um processo árduo e, nesta etapa da pesquisa, o cansaço não era somente dos estudantes.

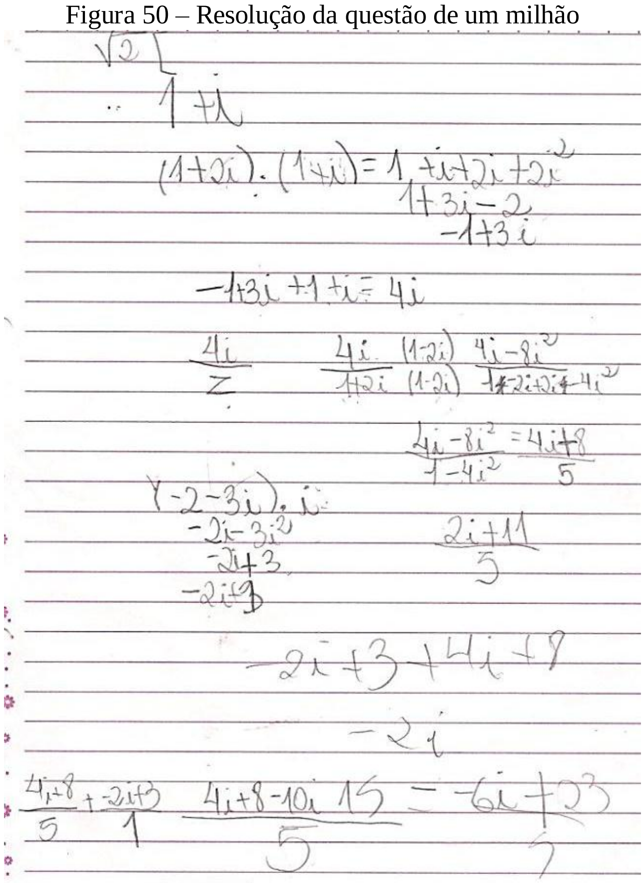
Figura 49 – Estudantes jogando o Show do Milhão



Fonte: Elaborada pelo autor.

Durante o jogo, uma dupla conseguiu chegar à pergunta de maior nível de complexidade. Os estudantes preferiram resolver os cálculos através da forma algébrica, como pode ser observado na Figura 50, em que consta uma resolução correta da questão do prêmio de um milhão. Cabe ressaltar que, por um descuido na construção do *software*, agora já corrigido, os estudantes não encontraram a resposta calculada, retomavam os cálculos mas não descobriam erro na sua resolução.

Figura 50 – Resolução da questão de um milhão

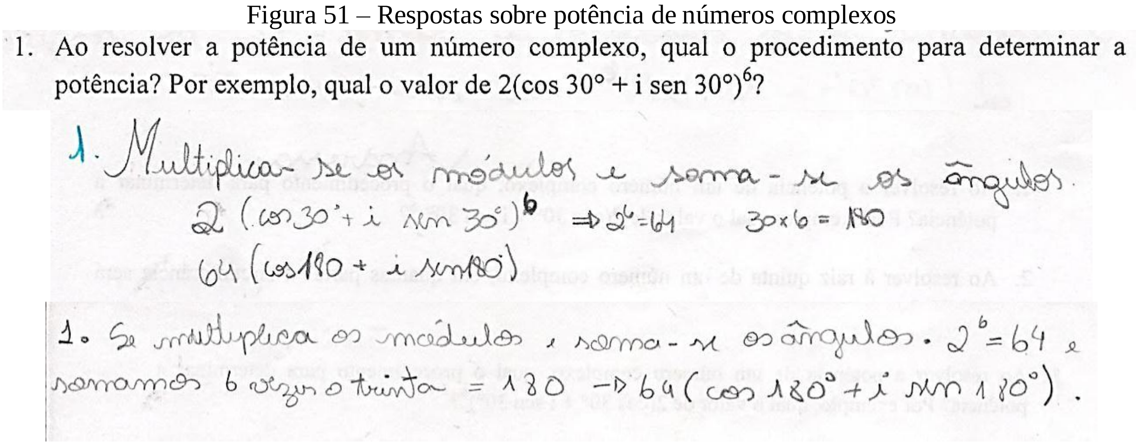


Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstrando ansiedade e, ao mesmo tempo, confiança, chamaram o professor para conferir a resolução. Procurando criar um ambiente reflexivo e para que todos conferissem juntos, inclusive o professor, foi solicitada uma nova revisão, com acompanhamento, discussões e análise coletiva, e não se encontrou nenhum erro, deixando os estudantes extremamente contentes pela conquista do prêmio de “um milhão”. A confiança na resolução demonstrava a consolidação da aprendizagem desses conceitos abordados até aquele momento.

Dando continuidade ao conteúdo, e quase no final do ano letivo, foi introduzido o conceito da radiciação de um número complexo, utilizando o conceito geométrico de divisão de uma circunferência em partes iguais. A potenciação não foi trabalhada especificamente, pois se acreditava que, com a consolidação da multiplicação de números complexos, expressos na forma trigonométrica, os subsunçores dos estudantes dariam conta desta operação, e essa hipótese foi confirmada, pois todos os estudantes souberam expressar em palavras como efetuar a potenciação e a resolveram corretamente (Figura 51).

Figura 51 – Respostas sobre potência de números complexos



1. Ao resolver a potência de um número complexo, qual o procedimento para determinar a potência? Por exemplo, qual o valor de $2(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)^6$?

1. Multiplica-se os módulos e soma-se os ângulos.
$2(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)^6 \Rightarrow 2^6 = 64 \quad 30 \times 6 = 180$
$64(\cos 180 + i \text{ sen } 180)$

1. Se multiplica os módulos, soma-se os ângulos. $2^6 = 64$ e somamos 6 vezes o trinta $= 180 \rightarrow 64(\cos 180° + i \text{ sen } 180°)$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Novamente, para trabalhar a radiciação de números complexos, contou-se com o auxílio do Radice. Nesse dia, os estudantes tinham um semblante de preocupação, pois à noite teriam a apresentação dos projetos desenvolvidos na disciplina de Seminário Integrado. Percebendo a tensão dos estudantes, resolveu-se realizar a atividade em conjunto, quando os estudantes acompanharam e fizeram apontamentos para o professor, no decorrer da interação no aplicativo. Os estudantes conseguiram ótimos resultados, todos souberam descrever como se resolve a raiz enésima de um número complexo e executaram corretamente as operações.

A substituição dos conceitos algébricos por geométricos é um método para motivar os estudantes e apresentar uma aplicação dessa operação. (ROSA, 1998). Segundo Rosa (1998,

p. 78): “Relacionar a radiciação de números complexos com elementos dos polígonos regulares é um trabalho de aplicação desse conteúdo, bastante interessante para o aluno, que, a esta altura, têm a oportunidade de tratar números e geometria entrosadamente.” Ao focar em aspectos geométricos, os estudantes tiveram a oportunidade de, intuitivamente, descobrir uma forma de calcular as raízes enésimas de qualquer número complexo.

Na operação de radiciação é requerida maturidade e uma atenção especial dos estudantes, e foi proposto que seja considerada, como de fato é, como operação inversa da potenciação, assim facilitando a compreensão da forma de processar as raízes. Assim, se na potenciação faz-se potência no módulo, então na radiciação faz-se a raiz no módulo. Se na potenciação faz-se multiplicação no argumento, então na radiciação faz-se divisão no argumento.

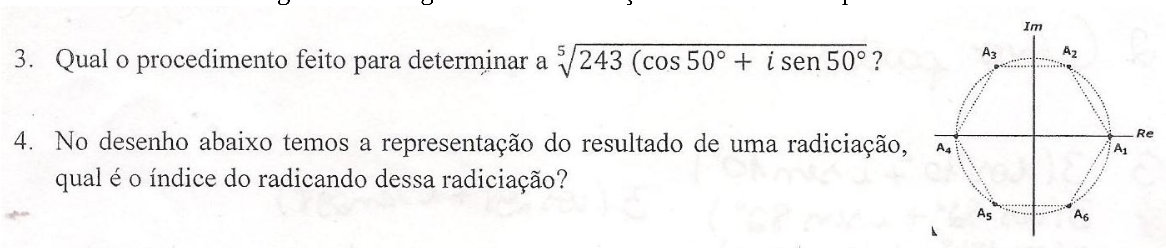
Inicialmente, o Radice desafiou os estudantes a calcularem os valores da raiz quadrada de um número complexo. Sem dúvidas, a forma trigonométrica é a mais adequada para efetuar essa operação; primeiro, extraíram a raiz quadrada do módulo do radicando, calculando o módulo para as duas raízes, sendo que a diferença entre as duas raízes está no argumento. Como o radicando é diferente de zero, Radice sugeriu que desenhassem uma circunferência centrada na origem e com raio igual ao módulo da raiz, pois assim estavam expressas todas as possíveis raízes. Desse modo, as raízes foram expressas por pontos que pertencem à circunferência, faltando calcular o ângulo (argumento) de cada raiz para determinar as soluções e representá-las.

Uma solução é simples de ser encontrada, dividindo o argumento do radicando pelo índice da raiz. A outra solução é o oposto (rotacionado 180° em relação à primeira raiz), geometricamente, da raiz já calculada, ou seja, somando 180° (que é metade de 360°) ao argumento calculado inicialmente. Com a representação das raízes como pontos da circunferência, os estudantes perceberam que as soluções dividem-na em duas partes iguais; assim, os ângulos centrais serão iguais. Este procedimento pode ser realizado para qualquer radical.

Desta forma, os estudantes concluíram que o índice do radical indica a quantidade de partes em que a circunferência será dividida. Ao dividir a circunferência em partes iguais, os argumentos crescem em progressão aritmética, sendo a razão a medida do ângulo central que é determinada pela divisão de 360° pela quantidade de vezes que a circunferência será dividida. Portanto, ao descobrir um argumento e a quantidade de partes em que a circunferência será dividida, consegue-se determinar o ângulo central e calcular os argumentos das outras soluções.

Deste modo, não foi apresentando nenhuma fórmula para os estudantes, com a exploração geométrica, criando conjecturas e analisando-as, descobriram uma forma de extrair raízes enésimas de um número complexo e, somente no final da abordagem geométrica, foi apresentada a 2ª Fórmula de Moivre. Com esta abordagem, teve-se ótimos resultados, porque os estudantes souberam definir a raiz de um número complexo, como, também, determinar o índice do radicando, através da representação geométrica. A Figura 52 mostra algumas perguntas realizadas para os estudantes.

Figura 52 – Pergunta sobre radiciação de números complexos



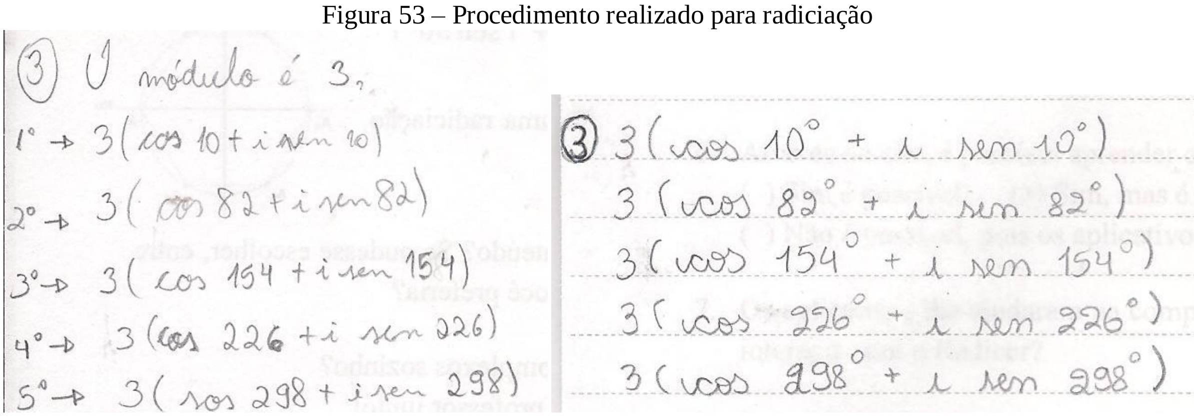
3. Qual o procedimento feito para determinar a $\sqrt[5]{243\,(\cos 50° + \ i\,\mathrm{sen}\,50°)}$?

4. No desenho abaixo temos a representação do resultado de uma radiciação, qual é o índice do radicando dessa radiciação?

Fonte: Elaborada pelo autor.

Todos os estudantes responderam corretamente. Na questão 3, inicialmente, determinaram o módulo resultando em 3. Percebendo que a circunferência seria dividida em cinco partes, dividiram cinquenta por cinco, resultando em dez graus. Os próximos argumentos são resultados de uma progressão aritmética, sendo a razão o ângulo central. Assim, dividiram 360° por 5, resultando em 72°. A Figura 53 ilustra que este foi o procedimento utilizado para determinar as raízes do número complexo.

Figura 53 – Procedimento realizado para radiciação



Fonte: Elaborada pelo autor.

No caso da questão 4, os estudantes souberam definir que o índice do radicando é seis, pois a circunferência está dividida em seis partes iguais. Através das respostas dadas pelos estudantes, há indícios de que a representação geométrica auxiliou na compreensão da radiciação; sem a utilização de uma fórmula, resolveram corretamente a operação. Os subsunçores estavam presentes, o conhecimento sobre os ângulos centrais foi fundamental para a assimilação da radiciação e pôde-se entender que ocorreu o processo de reconciliação integradora, pois foi estabelecida uma relação entre números complexos e polígonos regulares. Desta forma, apresentaram-se fortes indícios de ter ocorrido uma aprendizagem subordinada, em que estes conhecimentos foram relacionados, fazendo uma ancoragem, pois um dependeu do outro para a consolidação na estrutura cognitiva dos estudantes.

Em relação às questões realizadas para avaliar o alcance das aprendizagens, cabe ressaltar que a radiciação foi a operação com maior índice de acertos. Esse resultado pode ser devido ao fato de a avaliação individual ter sido realizada logo após a utilização do OA, mas pode-se também creditar este sucesso à culminância de um processo de aprendizagem significativa. Outro fato que se deve registrar é que, no decorrer da aplicação da rota de aprendizagem, dois estudantes completaram 18 anos de idade, e a ansiedade para adquirir a carteira de habilitação falou mais alto. Assim, esses estudantes ausentaram-se em algumas aulas e não realizaram as atividades no devido tempo, sendo este o motivo da não realização de algumas atividades, como foi considerado no decorrer das análises.

Com isso, encerra-se a análise das evidências de ter-se desenvolvido uma aprendizagem ativa e significativa, iniciando na próxima seção as que devem fornecer evidências de ter-se criado um material potencialmente significativo.

7.5 Evidências do OA como um material potencialmente significativo

Apresentados os indícios de se ter promovido aprendizagens significativas, tem-se ainda outro objetivo para ser averiguado: efetuar uma verificação adicional do OA como potencialmente significativo. Essa análise esteve baseada nas respostas dos estudantes a um questionário sobre os ambientes de aprendizagem. Esse instrumento foi planejado seguindo um modelo de avaliação proposto por Tarouco (2004), no qual foram considerados aspectos pedagógicos e técnicos, utilizando uma escala para a avaliação de cada critério. A escala proposta por esse sistema, para a avaliação do objeto de aprendizagem é: 5 – Concordo plenamente; 4 – Concordo; 3 – Não concordo nem discordo; 2 – Discordo; 1 – Discordo totalmente; e SR – Sem resposta.

Com o formulário respondido pelos estudantes, teve-se o objetivo de avaliar se um estudante, que interage sozinho no OA, sem a presença de um professor, teria condições de construir conhecimentos sobre números complexos. Deste modo, pretendeu-se saber se o estudante poderia aprender de forma autônoma, sem a ajuda de um professor, os conceitos estruturantes. Mesmo assim, esses critérios servem, também, para qualificar o OA, quando utilizado com a orientação do professor, da forma como ocorreu na parte experimental deste projeto de pesquisa.

Os ambientes de aprendizado avaliados foram: “Fazer e compreender”, “Caminhada histórica”, “Aplicações” e "Show do Milhão". Nesta seção não será detalhado o resultado de cada ambiente (disponível no Apêndice L), e o que segue na Tabela 2 é uma avaliação geral do OA, com média dos resultados das avaliações desses ambientes, realizadas pelos estudantes.

Tabela 2 – Avaliação geral do OA

Critérios	5	4	3	2	1	SR*
O OA apresenta informações precisas	45%	44%	5%			6%
O OA inclui quantidade adequada de material	54%	34%	8%			4%
O OA demonstra um conceito-base	53%	35%	7%			5%
O OA resume bem os conceitos	51%	39%	6%			4%
É fácil andar pelo ambiente	54%	35%	5%	2%		4%
O ambiente tem instruções claras de uso	56%	32%	7%	1%		4%
O ambiente é motivador	42%	39%	10%	2%	3%	4%
O ambiente é visualmente atraente	26%	49%	16%	4%		5%
O ambiente é interativo	52%	31%	13%			4%
A linguagem é adequada e sem erros ortográficos	51%	35%	5%	3%	1%	5%
A linguagem matemática é adequada e sem erros	55%	33%	5%	3%		4%
Como recurso de aprendizagem, identifica objetivos de aprendizagem	51%	42%	3%			4%
Como recurso de aprendizagem, reforça conceitos progressivamente	40%	45%	6%	1%		8%
Como recurso de aprendizagem, demonstra relações entre conceitos	38%	49%	7%			6%
Como recurso de aprendizagem, fundamenta em conceitos prévios	36%	41%	16%	1%		6%
Como recurso de aprendizagem, é eficiente (pode-se aprender muito em curto período de tempo)	52%	39%	3%	2%		4%

* Dois estudantes não entregaram o questionário, representando 4% das respostas SR.

Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados da Tabela 2 sugerem que o OA pode ser um recurso potencialmente significativo, pois em todos os itens avaliados, a maioria dos estudantes escolheu *concordo* ou *concordo plenamente*.

Fernandez e Rigo (2012) referem que, para a criação de objetos educacionais, é necessário levar em consideração três fatores: a programação, a parte gráfica e o planejamento pedagógico. A programação do OA não é possível de ser avaliada com este instrumento. Mas, dentre os cinco critérios que foram melhor avaliados, observa-se a relação com os outros dois fatores. Os critérios "o ambiente tem instruções claras de uso", "a linguagem matemática é adequada e sem erros" e "é fácil andar pelo ambiente" podem ser consideradas como *designer* do OA, ou seja, a parte gráfica. Além dessas características, houve destaque também para os critérios "o OA inclui quantidade adequada de material" e "o OA demonstra um conceito-base", qualidades relacionadas com a aprendizagem, ou seja, com o planejamento pedagógico.

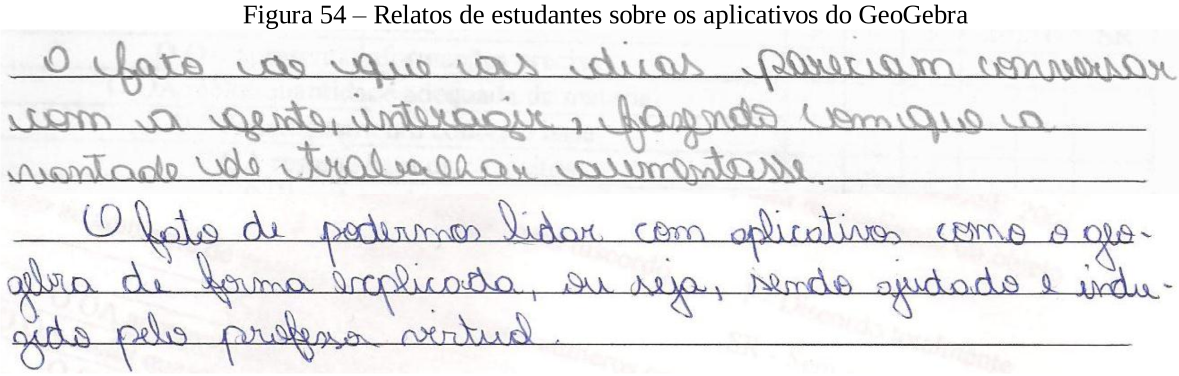
Ao propor o OA, tomou-se atenção especial para a criação de um ambiente de fácil interação e para que se constituísse num espaço de aprendizagem, em que os estudantes pudessem aprender conceitos fundamentais, de forma dinâmica e rápida. Tendo estes critérios como os melhores avaliados, tem-se o sentimento de ter atingido os objetivos almejados para o OA. Todo esforço, estudo e tempo de dedicação para esta criação rendeu bons frutos, como se pretendia!

No entanto, outros critérios não foram tão bem-avaliados, como: "O ambiente é visualmente atraente", "Como recurso de aprendizagem, fundamenta em conceitos prévios" e "Como recurso de aprendizagem, demonstra relações entre conceitos". O primeiro critério refere-se à parte gráfica e, infelizmente, ao construir um OA, sem buscar o apoio de um profissional especializado, ficou difícil conseguir bons índices neste aspecto. Em relação aos outros dois critérios, os dados da pesquisa não contradizem os objetivos almejados na criação dos aplicativos do GeoGebra.

Mesmo levando em consideração os dados apresentados sobre esses critérios, cabe uma reflexão. Os dois critérios abordam relações entre conhecimentos, de conhecimentos ancorados em subsunçores do estudante. Será que o estudante percebeu que existia uma relação entre os conceitos desenvolvidos? Por exemplo, é preciso compreender a unidade imaginária, para aprender sobre os números complexos; somente assim, ele realizará o processo da diferenciação progressiva. E, na análise sobre as aprendizagens, tem-se fortes evidências de que este processo ocorreu. Então, cabe levar uma hipótese! O estudante não percebeu a relação entre os conceitos desenvolvidos, pois o novo conhecimento relaciona-se diretamente com um subsunçor. Desta forma, ao utilizar os aplicativos do GeoGebra, das interações com o Radice e com os colegas, o conceito se consolidava na estrutura cognitiva do estudante, agregando o subsunçor como o processo de reconciliação integradora. Assim, mesmo sendo alguns dos critérios (dois) não tão bem-avaliados, tem-se indícios de que o OA, como recurso de aprendizagem, constitui-se num material potencialmente significativo.

Além da avaliação do OA feita com este instrumento, têm-se relatos de estudantes como fortes indícios de se ter construído um material potencialmente significativo. Em relação ao ambiente "Fazer e compreender", especificamente sobre o espaço "Vetores e Números Complexos", os estudantes o consideraram uma fonte de conhecimento (Figura 54).

Figura 54 – Relatos de estudantes sobre os aplicativos do GeoGebra


O fato de que as dicas pareciam conversar com a gente, interagir, fazendo com que a vontade de trabalhar aumentasse.

O fato de podermos lidar com aplicativos como o geogebra de forma explicada, ou seja, sendo ajudado e induzido pelo professor virtual.

Fonte: Elaborada pelo autor.

No formulário de avaliação do OA, foram realizadas algumas questões sobre a organização do ambiente, o material disponível (textos, vídeos, imagens, aplicativos do GeoGebra, entre outros) e a interação nos diversos espaços de aprendizagem.

Sobre a interação e a compreensão dos conceitos abordados pelo Radice, encontraram-se os seguintes resultados: 13 (72%) estudantes responderam satisfatoriamente e cinco (28%) plenamente. Estes dados mostram que o Radice desempenhou, na visão dos estudantes, um papel fundamental na construção, especialmente, do conceito de unidade imaginária, propiciando interações e promovendo um ambiente reflexivo, que contribuiu para o processo de reconciliação integradora, pois com este aplicativo foi possível ampliar o conhecimento dos conjuntos numéricos e da raiz quadrada de número negativo. Ao relatarem que interagiram, satisfatoriamente e plenamente, os estudantes confirmaram que estiveram dispostos a resolver os desafios e aprender o conteúdo desenvolvido pelo Radice, num ambiente dinâmico e reflexivo, revelando a predisposição dos estudantes para a aprendizagem.

Outro ambiente considerado propício para a aprendizagem pelos estudantes foi o das "Aplicações". Os textos disponíveis foram lidos e os vídeos assistidos com atenção. Assim, quando perguntados sobre a importância de conhecer aplicações dos números complexos, 12 estudantes (67%) destacaram que foi importante e interessante saber sobre as aplicações; e 13 (72%) afirmaram que as aplicações, no mundo real, motivaram para o estudo desses números. Dentre as três aplicações de números complexos que constam no OA, a que mais chamou atenção foi a da força de sustentação de um avião, escolhida por 10 estudantes (56%), três (17%) responderam os fractais e outros três (17%) afirmaram ser os circuitos de corrente alternada a aplicação de destaque, e dois (10%) estudantes não responderam.

Para finalizar, seguem quatro argumentos que permitem confiar que a construção do OA, com a rota de aprendizagem proposta, é um recurso de aprendizagem potencialmente significativo.

> 1°. Iniciou-se o estudo de números complexos com a exploração e a análise de vetores, para fazer surgir a unidade imaginária, como um operador que gira em 90° um vetor não nulo. Vetores é um conteúdo geralmente trabalhado na Física, no primeiro ano do Ensino Médio. Assim, os vetores caracterizam-se como subsunçores.
>
> 2°. O estudante, ao entender a representação geométrica do número complexo, destacando a representação da unidade imaginária, está apto para compreender com mais facilidade conceitos sobre números complexos. Além disso, a unidade imaginária foi significada pelos estudantes, como um número que existe, e perceberam que de imaginário só tem o nome.
>
> 3°. O estudante que utilizou o ambiente de prática procurou aprender e interagir com os tópicos sobre os números complexos, demonstrando predisposição para aprender.
>
> 4°. Além disso, o material pode ser considerado potencialmente significativo, pois contemplou os três itens anteriores: o primeiro item que se refere a não arbitrariedade; o segundo, à substantividade, indicativo de que o estudante deu significado ao novo conhecimento; e o terceiro como indicativo da predisposição. Essas são características fundamentais para se desenvolver um material potencialmente significativo. Sem algum desses itens, possivelmente, a conclusão seria de que o material não seria potencialmente significativo.

Ou seja, tem-se a expectativa de que este recurso seja utilizado e testado por outros professores, como material de apoio na forma de um conjunto de atividades a serem realizadas, numa ou outra rota de aprendizagem. Provavelmente, ao ser aplicado em outra turma, não se tenha os mesmos resultados, pois serão outros estudantes, com outros subsunçores, interesses pessoais e de outra cultura. Segundo Alvez-Mazzotti e Gewandsznajder (1999, p. 181): “Muitas vezes, resultados conflitantes entre pesquisas que focalizam um mesmo tópico são devidos à utilização de diferentes procedimentos, unidades de análise ou populações". Porém, em relação à aprendizagem, aperfeiçoando e ajustando a rota de aprendizagem ao perfil dos estudantes, com o auxílio do OA, os resultados das aprendizagens deverão ser igualmente favoráveis aos que foram apresentados nesta pesquisa.

Com a análise dos resultados e com a proposta do programa Ensino Médio Inovador (BRASIL, 2014), que prevê também novas perspectivas de avaliação, identifica-se que os objetivos de aprendizagem foram atingidos integralmente, ao considerar atentamente o acompanhamento dos processos de aprendizagem, com diferentes instrumentos: questionários, entrevistas, observações e diário de bordo. Deste modo, buscaram-se indícios para dar visibilidade ao potencial de aprendizagem propiciado pelo OA, comprovando que este recurso auxiliou os estudantes a desenvolverem uma aprendizagem ativa e significativa. Desta forma, com a rota de aprendizagem criada, foi possível desenvolver a aprendizagem sobre números complexos, de forma lúdica, desafiadora e significativa.

Portanto, com esses resultados apresentados, com as observações em sala de aula e refletindo sobre a rota de aprendizagem construída, juntamente com os estudantes, tem-se um sentimento fortemente positivo de que foi possível construir um recurso potencialmente significativo, capaz de propiciar aprendizagem de conceitos estruturantes, confirmando, assim, o objetivo geral deste estudo, que era de verificar a ocorrência de aprendizagem significativa de conceitos sobre números complexos, por meio da utilização de OA, numa rota de aprendizagem potencialmente significativa, para promover a aprendizagem dos conceitos de números complexos.

8 CONCLUSÕES

A criação de materiais potencialmente significativos é uma colaboração importante para o contexto educacional, ainda mais, quando são propostos com estratégias ativas num esforço de envolver o estudante na construção do seu conhecimento. Os objetos de aprendizagem, pensados sob um referencial teórico construtivista, auxiliam professores e estudantes, em sala de aula ou em estudos extraclasse. O OA foi uma construção coletiva, que envolveu o professor, estudantes do Ensino Médio e do Ensino Superior e alguns profissionais como técnicos de informática. Durante a construção do OA, teve-se o cuidado de criar um ambiente reflexivo, levando em consideração os subsunçores dos estudantes, e tornando-os, sempre que necessário, e possível, propícios para a aprendizagem significativa.

Neste ambiente de geometria dinâmica, foi feita a introdução ao conceito de número complexo, com o apoio de vetores e com construções geométricas para a representação das operações (soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação) e também para a transformação do número complexo da forma cartesiana para a trigonométrica ou inversamente. Assim, o OA configura-se como um ambiente planejado para ser um recurso potencialmente significativo, no qual os estudantes podem manipular os objetos geométricos e aumentar, assim, significativamente a chance de aprender, compreendendo de fato, pelo menos num nível introdutório, o significado dos conceitos.

Inicialmente, tinha-se como um dos objetivos elaborar e aplicar uma rota de aprendizagem como uma estratégia ativa de aprendizagem, autônoma e significativa, de números complexos. Para a elaboração da rota de aprendizagem, a pesquisa realizada com os professores do Ensino Médio foi fundamental, pois apontaram as principais dificuldades dos estudantes no estudo desses números. Na seção “Frutos deste estudo”, estão os passos do percurso realizado nesta rota, que indicam o alcance do objetivo proposto. Os relatos dos estudantes, os registros do professor e os questionários elaborados para diversas avaliações forneceram dados que confirmam que os estudantes trabalharam ativamente; que estudaram com afinco e que apresentaram evidências sólidas e convincentes de ter compreendido, em diferentes níveis, segundo o caso, os conceitos e as operações com números complexos.

Além dos dados levantados nas avaliações do objeto de aprendizagem, os relatos dos estudantes confirmam o alcance de outro objetivo: o de criar um ambiente virtual, reflexivo de aprendizagem, no qual o estudante pode interagir e construir conhecimento sobre números complexos.

Alguns recortes de falas, em um bate-papo com os estudantes, parecem representar bem o sentimento da turma. No início dos estudos, quando questionados sobre o que chamou a atenção no OA, quanto à forma como entenderam a unidade imaginária, os estudantes deram retornos muito positivos. Um estudante, por exemplo, relata que foi: “A complexidade para se chegar a esta conclusão, mas ao mesmo tempo é fácil de entender quando temos instruções.” Essa transcrição revela o apoio do OA, na mediação do processo, e não apenas como repositório de conteúdos. Outro estudante, sobre o apoio encontrado para estudar, diz: “as dicas pareciam conversar com a gente, interagir, fazendo com que a vontade de trabalhar aumentasse.” Essa transcrição confirma que o OA pode ser considerado um ambiente interativo. Outro, complementando, relatou como destaque: “A ideia em geral do *site* (OA) interativo, seria possível conhecer e aprender os números complexos apenas pelo *site*.”

Cabe destacar o ânimo dos estudantes durante a pesquisa, as suas reações e expressões nas descobertas, nos risos e nas reflexões são indícios de que o OA foi potencialmente significativo. Sem contar, o laço afetivo estabelecido durante a pesquisa, entre o professor e os estudantes, uma relação de respeito e cumplicidade que pode ter interferido, melhorado, duas características fundamentais para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa: a predisposição do estudante e a substantividade do conhecimento estudado.

Os retornos obtidos nas avaliações feitas com os questionários, os relatos e as observações, como os citados acima autorizam afirmar que o potencial do OA, assim como o da rota de aprendizagem aplicada é promissor; e esse era um dos principais alvos dessa pesquisa.

Dentre os objetivos propostos, como organizadores e metas para o OA, a organização de um texto compreensível para os estudantes de Ensino Médio, sobre algumas aplicações de números complexos foi seguramente a etapa que deu mais trabalho. Os textos foram construídos após muito estudo e muito gasto de tempo em elaborações e reelaborações, feitas frequentemente após conversas com professores de Física e de Engenharia; o autor desta pesquisa pode afirmar que ele também teve a necessidade, e mais que isso, a oportunidade de construir conhecimento sobre os princípios físicos envolvidos, na aplicação dos números complexos. Este estudo foi de grande valia, um ganho que merece destaque, pois abre novas possibilidades de pesquisa, num doutoramento futuro, que se pretende fazer em Matemática Aplicada.

Ao retomar os objetivos, percebe-se, com satisfação, que todos foram contemplados, e o foram de modo satisfatório, e é imprescindível reconhecer a importância de ter-se optado, como guia no processo desta construção, por tendências construtivistas, em consonância com o Programa Ensino Médio Inovador e do Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio.

Nos tempos atuais, um grande desafio das escolas é o de formar estudantes críticos e criativos, que se reconheçam como integrantes e detentores de um papel a desempenhar na sociedade em que estão inseridos. Cada prática realizada na escola, cada informação recebida precisa ser compreendida e analisada também pelos estudantes. Os professores não têm mais a função de apresentar os conteúdos, pelo menos não como meras informações a serem retidas pelos estudantes. E é justamente esse papel que foi vislumbrado para o estudante, de ator em vez de espectador, que fez com que cada atividade proposta em sala de aula e cada espaço de aprendizagem do OA, fossem organizados sob o referencial construtivista. Buscou-se, constantemente, fazer com que os estudantes refletissem, discutissem, analisassem e compreendessem o conteúdo, promovendo avanços nas aprendizagens. Como mencionado em diversas ocasiões nesse capítulo e em especial no capítulo anterior, esses avanços foram observados, nas variadas formas de avaliação promovidas, nas respostas e nas opiniões dos estudantes recolhidas nos questionários aplicados.

Deste modo, julga-se ter coletado informações suficientes para responder afirmativamente as perguntas que delinearam esta pesquisa: O OA construído tem potencial como recurso de aprendizagem dos números complexos? A rota de aprendizagem construída estimulou o estudo e a aprendizagem significativa dos números complexos?

O OA foi um recurso de importância fundamental para o desenvolvimento dos estudos, em classe e nas atividades extraclasse, proporcionando momentos de reflexão, discussão e teste de hipóteses, fazendo com que os estudantes interagissem com o Radice, e aprendessem com compreensão. O OA e o Radice foram agentes incentivadores para a construção do conhecimento. De igual importância, a rota de aprendizagem propiciou momentos ricos de estudo, de troca de conhecimento, de discussões e de ajuda mútua, promovendo o estudante como sujeito na construção de conhecimentos.

No que se refere a dificuldades encontradas e que interferiram no andamento das aulas, limitando o aproveitamento do tempo na escola e no ritmo dos estudos, destacam-se as condições, nada favoráveis, do laboratório da escola e da internet, esta muito lenta. Os estudantes deram-se conta destes problemas, levando seu computador de casa para a realização das atividades em sala de aula e no laboratório de informática. Além disso, evoluíram também na prática da paciência, pois problemas de conexão da internet fizeram com que fosse necessário reiniciar o modem todas as vezes que os estudantes acessavam o OA.

A utilização de estratégias arquitetada com atividades potencialmente significativas, animou os estudantes, que se mantiveram com disposição permanente para superar essas dificuldades. O interesse e o envolvimento podem ser percebidos nos registros fotográficos, que revelam, também, momentos de inquietações e participação permanente em sala de aula, e nas falas dos estudantes, que expressam a satisfação por aprender e compreender. Todos são indicativos expressivos de predisposição para a aprendizagem.

Essa reflexão indica a concretização do objetivo geral, que era o de verificar a ocorrência de aprendizagem significativa de conceitos sobre números complexos, por meio da utilização de OA, numa rota de aprendizagem potencialmente significativa para promover a compreensão dos conceitos de números complexos. Deste modo, espera-se ter mostrado a dimensão e a qualidade da pesquisa realizada, bem como do produto final, um objeto de aprendizagem, um recurso virtual de aprendizagem de números complexos, de livre acesso e que integra uma rota de aprendizagem.

As tecnologias são aliadas do professor, ao propiciar estratégias diferenciadas, que podem ser aplicadas em atividades, presenciais ou em estudos a distância, com ou sem a presença de um professor e sempre com o foco na construção do conhecimento. Num futuro não distante, os recursos digitais podem deixar de ser uma ferramenta de apoio, passando a desempenhar um papel fundamental na construção do conhecimento, até mesmo sem a intervenção de um professor. (MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2002). Esta possibilidade foi reconhecida por um estudante, quando declarou que o que chamou a sua atenção no OA foi “o fato de podermos lidar com aplicativos como o GeoGebra de forma explicada, ou seja, sendo ajudado, orientado e conduzido pelo professor virtual”.

Entende-se, neste aspecto, que o OA pode e deve ser aprimorado por estudos futuros, especialmente para ser aproveitado no Ensino Superior. Desde o princípio, tinha-se a intenção de criar um ambiente de aprendizagem, em que o estudante pudesse construir o conhecimento de forma mais autônoma. No decorrer da pesquisa, procurou-se conhecer as defasagens que os estudantes apresentam em relação aos números complexos, no Ensino Superior. Com este propósito, realizou-se entrevistas com professores de Engenharia, que confirmaram esta realidade. Buscando mais indícios dessas defasagens, aplicou-se um questionário para 103 estudantes de Engenharia, que comprovaram o relato dos professores, e 102 dos 103 estudantes entrevistados afirmaram que gostariam de contar com um recurso tecnológico para recuperar conhecimentos sobre números complexos.

Na direção desta possibilidade, compartilharam-se estudos, com algumas publicações em Anais de eventos e em revistas científicas, na área de Educação em Matemática e em

Engenharia (MORALES; PUHL; LIMA, 2013; PUHL, 2013; PUHL; LIMA, 2014a; PUHL; LIMA, 2014b; PUHL; LIMA, 2014c; PUHL; LIMA, 2015), que tiveram como foco divulgar o OA, para ser utilizado como um recurso de apoio para os professores do Ensino Médio ou para suprir as lacunas de aprendizagem dos estudantes de Engenharia.

Para encerrar este relato e como finalização desta dissertação, quer-se compartilhar a certeza de que não basta ter conhecimentos e recursos didáticos para uma boa prática docente, é preciso ter profissionalismo e amor pelo que se faz, dia após dia, na educação. Construir, dialogar, refletir e planejar são ações próprias do professor, e essas ações contribuem para a formação, na sociedade, de uma imagem positiva do professor. Essa dissertação carrega a humilde pretensão de poder atestar, pelo menos em algum grau a seguinte afirmação: as tendências construtivistas podem gerar transformação no cenário educacional; estratégias que promovam a aprendizagem significativa, certamente, estarão na base de algumas dessas transformações.

As altas taxas de reprovação e evasão escolar são indícios de que o sistema educacional está defasado, sendo necessárias novas práticas, novas formas de ensinar e de trabalhar com estudantes. Essas taxas serão melhoradas, com um trabalho em conjunto: sociedade, família e escola. Se cada um desses entes fizer sua parte, a educação estará no caminho correto, formando cidadãos para a sociedade que todos almejam integrar. E o professor possui uma parcela grande de responsabilidade e contribuição a dar para esta transformação.

Para qualificar a educação, o professor não pode impor ao estudante o papel de mero receptor de conhecimentos. É necessário inovar! Propiciar estratégias desafiadoras, considerando os subsunçores, elaborando atividades para que os estudantes construam conhecimentos, sendo assim ativos no processo de aprendizagem. Nesta perspectiva, o conteúdo desenvolvimento poderá ser compreendido e aprendido de forma significativa.

Desta forma, encerro esta etapa da minha formação profissional, tendo plena consciência de que, mais do que professor, devo ser um pesquisador, ou melhor, um professor-pesquisador, cujo objeto de pesquisa é a prática docente em sala de aula. Sinto alegria por concluir esta etapa, sabendo que há muito a aprender e a agregar na minha formação profissional. Contudo, tenho convicção de que aprendi muito neste programa de mestrado, principalmente sobre estratégias de ensino e aprendizagem, estando confiante para estudar, criar, aplicar e compartilhar ideias e experiências em novas atividades potencialmente significativas.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. Didática e concepção de dispositivos informáticos educacionais. **Revista de Informática Aplicada/Journal of Applied Computing**, v. 3, n. 1, 2007.

ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith; GEWANDSZNAJDER, Fernando. **O método nas ciências naturais e sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. 2. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 1999.

ARAÚJO, Nanci Barbosa F. **Números complexos**: uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no ensino médio. 2006. 111f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

AUSUBEL, David Paul. **Aquisição e retenção de conhecimento**: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Paralelo, 2003.

AUSUBEL, David Paul; NOVAK, Joseph Donald; HANESIAN, Helen. **Psicologia Educacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

AZAMBUJA, Cármen Regina Jardim de; SILVEIRA, Francisco Alberto Rheingantz; GONÇALVES, Neda da Silva. Tecnologias síncronas e assíncronas no ensino de cálculo diferencial e integral. In: CURY, Helena Noronha (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: Edipucrs, 2004. p. 225- 243.

AZEVEDO, José Clovis de; REIS, Jonas Tarcísio (Org.). **Reestruturação do Ensino Médio**: pressupostos teóricos e desafios da prática. São Paulo: Fundação Santillana, 2013.

BARIN, Cláudia Smaniotto; BASTOS, Giséli Duarte; MARSHALL, Débora. A elaboração de material didático em ambientes virtuais de ensino-aprendizagem: o desafio da transposição didática. **Renote**, Porto Alegre, v. 11, n. 1, jul. 2013.

BATISTA, Silvia Cristina Freitas et al. Investigando em C: uma unidade de aprendizagem online para estudo de números complexos. **Renote**, v. 7, n. 1, 2009.

BATISTA, Silvia Cristina Freitas. **SoftMat**: um repositório de softwares para matemática do Ensino Médio: um instrumento em prol de posturas mais conscientes na seleção de softwares educacionais. 2004. 186f. Dissertação (Mestrado em Ciências de Engenharia) – Universidade Estadual do Norte Fluminense (Uenf), Campos dos Goytacazes, RJ, 2004.

BECKER, Fernando. **Educação e construção do conhecimento**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

BELLEMAIN, Franck. A transposição informática na engenharia de softwares educativos. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (SIPEM), 1., 2000, Serra Negra, SP. **Anais…** Serra Negra, SP, 2000. p. 198-204, v. 1.

BEST, John W. **Research in education**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1970.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 5.ed. rev. e ampl. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. (Coleção tendências em educação matemática, 9).

BORTONI-RICARDO, Stella Maris. **O professor pesquisador**: introdução à pesquisa qualitativa. São Paulo: Parábola, 2008. (Estratégias de ensino, 8).

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC/SEB/Dicei, 2013a.

BRASIL. Ministério da Educação. **Formação de Professores do Ensino Médio:** avaliação no Ensino Médio. Curitiba: UFPR. 2013b. Disponível em: <http://pactoensinomedio.mec.gov.br/images/pdf/cadernos/web_caderno_6.pdf>. Acesso: 12 jan. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Formação de Professores do Ensino Médio**: áreas de conhecimento e integração curricular. Curitiba: UFPR. 2013c. Disponível em: <http://pactoensinomedio.mec.gov.br/images/pdf/cadernos/web_caderno_4.pdf>. Acesso: 12 jan. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio**. Brasília, DF: MEC/SEB. 2013d. Disponível em: <http://pactoensinomedio.mec.gov.br/images/pdf/pacto_fort_ensino_medio.pdf>. Acesso: 12 jan. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias Brasília: Ministério da Educação, 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PNCEM)**: orientações complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEMT, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. **Programa Ensino Médio Inovador**: documento orientador. Brasília, DF: MEC/SEB. 2014. Disponível em: <http://pactoensinomedio.mec.gov.br/images/pdf/doc_orientador_proemi_2014.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2002.

CARNEIRO, José Paulo. A geometria e o ensino dos números complexos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/15/PA07.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2015.

CHEVALLARD, Yves; JOSHUA, Marie-Albert. **La transposition didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

COLL, César. **O construtivismo na sala de aula**. 6.ed. São Paulo: Ática, 1999.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2008.

DEMO, Pedro. **Pesquisa e informação qualitativa**: aportes metodológicos. Campinas, SP: Papirus, 2001.

DUARTE, Teresa. 2009. A possibilidade da investigação a 3: reflexões sobre triangulação (metodológica). **Cies e-working paper**, Lisboa, n. 60, 2009.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Interdisciplinaridade**: história, teoria e pesquisa. Campinas: Papirus, 1994.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Interdisciplinaridade**: um projeto em parceria. São Paulo: Loyola, 1991.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Metodologia da pesquisa educacional**. 12. ed. São Paulo: Cortez, 2010.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Práticas interdisciplinares na escola**. 11. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

FERNANDEZ, Raquel; RIGO, Sandro José. Avaliação da promoção da aprendizagem em educação a distância, através do uso de um objeto de aprendizagem. **Renote**, Porto Alegre, v. 10, n. 3, dez. 2012.

FLICK, Uwe. **Qualidade na pesquisa qualitativa**. Porto Alegre: Bookman, 2009. (Coleção pesquisa qualitativa).

GIBBS, Graham R. **Análise de dados qualitativos**. Porto Alegre: Bookman, 2009.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., 1996, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte, 1996. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/pdf/maria-alice_geometria-dinamica1996-vii_sbie.pdf>. Acesso em: 6 fev. 2016.

GUDWIN, Ricardo. **Aprendizagem ativa**. Disponível em: <http://faculty.dca.fee.unicamp.br/gudwin/activelearning>. Acesso em: 15 jun. 2014.

GÜNTHER, Hartmut. Pesquisa qualitativa versus pesquisa quantitativa: Esta é a questão? **Revista Psicologia: Teoria e Pesquisa**, Brasília, v. 22, n. 2, p. 201-210, maio/ago. 2006.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física:** Gravitação, Ondas e Termodinâmica. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

HOFFMANN, Jussara Maria Lerch. **Avaliar para promover**: as setas do caminho. 9. ed. Porto Alegre: Mediação, 2006.

IBGE: abandono escolar no Brasil é 3 vezes maior que na Europa. **Terra**. Nov de 2012. Disponível em: <http://noticias.terra.com.br/educacao/ibge-abandono-escolar-no-brasil-e-3-vezes-maior-que-na-europa,9608febb0345b310VgnCLD200000bbcceb0aRCRD.html>. Acesso em: 13 jan. 2014.

KRATZ, Ricardo de Andrade et al. Fábrica de adequação de objetos de aprendizagem. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, v. 15, n. 3, p. 25-38, 2007.

LÜCK, Heloísa. **Pedagogia interdisciplinar**: fundamentos teórico-metodológicos. 10. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da aprendizagem escolar**. 10. ed. São Paulo: Cortez, 2000.

MASINI, Elcie Fortes Salzano; PEÑA, Maria de Los Dolores Jimenez. (Org.). **Aprendendo significativamente**: uma construção colaborativa em ambientes de ensino presencial e virtual. São Paulo: Vetor, 2010.

MATOS FILHO, Maurício A. Saraiva de et al. A transposição didática em Chevallard: as deformações/transformações sofridas pelo conceito de função em sala de aula. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO (EDUCERE), 2008, Curitiba. **Anais...** Curitiba, 2008. p. 1190-1201. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2008/anais/pdf/431_246.pdf>. Acesso em: 6 fev. 2016.

MELLO, José Luiz Pastore. **Matemática**: construção e significado. São Paulo: Moderna, 2005.

MELLO, Sílvio Quintino de; SANTOS, Renato Pires dos. O ensino de matemática e a educação profissional: a aplicabilidade dos números complexos na análise de circuitos elétricos. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 7, n. 2, p. 51-64, jul./dez. 2005.

MILIES, César Polcino. A emergência dos números complexos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 24, p. 5-15, jul. 2003.

MONTEIRO, Bruno de S. et al. Metodologia de desenvolvimento de objetos de aprendizagem com foco na aprendizagem significativa. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., 2006, Brasília. **Anais...** Brasília, 2006. p. 388-397. Disponível em: <http://www.fisica.ufpb.br/~romero/pdf/2006_XVIISBIE.pdf>. Acesso em: 6 fev. 2016.

MORAES, Roque. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. In: MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. **Análise textual discursiva**. 2. ed. Ijuí: Unijuí, 2011. p. 11-46.

MORALES, Andréa Cantarelli; PUHL, Cassiano Scott; LIMA, Isolda Gianni de. Números complexos e corrente alternada: um contexto interdisciplinar. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 41., 2013, Gramado. **Educação na era do conhecimento**. Gramado: UFRGS, 2013. Disponível em: <http://www.fadep.br/engenharia-eletrica/congresso/pdf/117740_1.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2015.

MORAN, José Manuel; MASETTO, Marcos Tarciso; BEHRENS, Marilda Aparecida. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 5. ed. Campinas, SP: Papirus, 2002. (Coleção Papirus educação).

MOREIRA, Marco Antonio. **Aprendizagem significativa**: um conceito subjacente, 1997. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/apsigsubport.pdf>. Acesso em: 17 out. 2015.

MOREIRA, Marco Antonio. Linguagem e aprendizagem significativa. In: ENCONTRO INTERNACIONAL SOBRE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA, 4., 2003, Maragogi. **Anais...** Maragogi, 2003a. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/linguagem.pdf>. Acesso em: 9 fev. 2015.

MOREIRA, Marco Antonio. Pesquisa em ensino: aspectos metodológicos. **Actas del PIDEC: Programa internacional de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias**, v. 5, 2003b. Disponível em: < http://www.if.ufrgs.br/~moreira/pesquisaemensino.pdf>. Acesso: 12 jan. 2015.

MOREIRA, Marco Antonio. **Pesquisa em ensino**: aspectos metodológicos. Subsídios metodológicos para o professor pesquisador em ensino de ciências. Porto Alegre: UFRGS, 2009.

MOREIRA, Marco Antonio. O que é afinal aprendizagem significativa. In: MOREIRA, Marco Antonio. **Aprendizagem significativa:** a teoria e textos complementares. São Paulo: Livraria de Física, 2011a.

MOREIRA, Marco Antonio. **Teorias de aprendizagem**. 2. ed. ampl. São Paulo: EPU, 2011b.

MOREIRA, Marco Antonio. Unidades de enseñanza potencialmente significativas - UEPS. **Aprendizagem Significativa em Revista/Meaningful Learning Review**, Rio Grande do Sul, v. 1, n. 2, p. 43-63, 2011c. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID10/v1_n2_a2011.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2015.

MOREIRA, Marco Antonio; MASINI, Elcie Aparecida Fortes Salzano. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2006.

MORETTO, Vasco Pedro. **Planejamento**: planejando a educação para o desenvolvimento de competências. 8. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

MORETTO, Vasco Pedro. **Prova**: um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas. 7. ed. Rio de Janeiro, RJ: Lamparina, 2007.

MORIN, Edgar. **Os sete saberes necessários à educação do futuro**. 9. ed. São Paulo: Cortez, 2004.

MULLER, Maykon Gonçalves. **Metodologias interativas de ensino na formação de professores de física**: um estudo de caso com o Peer Instruction. 2013. 226f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) – Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/72092>. Acesso em: 6 fev. 2016.

MUNIZ, Rafaela dos Santos Souza. **Coordenadas polares no Ensino Médio**: contribuições para o ensino e a aprendizagem de trigonometria e números complexos. 2011. 114f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Rio de Janeiro, 2011.

NOBRE, Waldek Rocha. **Números complexos e algumas aplicações**. 2013. 54f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/417/2011_00289_WALDEK_ROCHA_NOBRE.pdf?sequence=1>. Acesso em: 15 jan. 2015.

OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino de. **Números complexos:** um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos. 2010. 191f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010.

PAVIANI, Jayme. **Interdisciplinaridade:** conceitos e distinções. 2.ed. rev. Caxias do Sul, RS: Educs, 2008.

PINTO JÚNIOR, Ulício. **A história dos números complexos**: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand. 2009. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/12 Ulicio Pinto.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2015.

POLYA, George; ARAÚJO, Heitor Lisboa de. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

POMBO, Olga. Interdisciplinaridade e integração dos saberes. **LIINC em Revista**, Rio de Janeiro, v.1, n. 1, 2005. Semestral. Disponível em <http://revista.ibict.br/liinc/index.php/liinc/article/view/186/103>. Acesso em: 6 jun. 2016.

POZO, Juan Ignacio; CRESPO, Miguel Ángel Gómez. **A aprendizagem e o ensino de ciências**: do conhecimento cotidiano ao conhecimento científico. 5. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

PRATA, Carmem Lúcia; NASCIMENTO, Anna Christina Aun de Azevedo (Org.). **Objetos de aprendizagem**: uma proposta de recurso pedagógico. Brasília: MEC, Seed, 2007.

PUHL, Cassiano Scott. Números complexos: rumo a uma aprendizagem significativa. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 6., 2013, Canoas. **Anais...** Canoas, 2013. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/927/368>. Acesso em: 20 jan. 2015.

PUHL, Cassiano Scott; LIMA, Isolda Gianni de. From Vectores to the Complex Numbers. In: Active Learning in Engineering Education Workshop, 12., 2014, Caxias do Sul. **Attracting young people to engineering.** Brasília: ABENGE, 2014a. p. 300 – 307. Disponível em: <http://vbaco01.ucs.br/aleEvento/images/files/Proceedings_ALE_2014_final_version.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2015.

PUHL, Cassiano Scott; LIMA, Isolda Gianni de. Interagindo com os números complexos. **Ensino de Ciências e Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro**, Rio de Janeiro, v. 5, n. 2, p. 45-63, jul./dez. 2014b. Semestral. Disponível em: <http://www.latec.ufrj.br/revistas/index.php?journal=ensinodeciencias&page=article&op=view&path;[]=600>. Acesso em: 20 jan. 2015.

PUHL, Cassiano Scott; LIMA, Isolda Gianni de. Na busca de desenvolver uma aprendizagem significativa de números complexos. In: JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2014, Passo Fundo. **Educação Matemática:** o que ensinar? Por que aprender? Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2014c. Disponível em: <http://www.upf.br/jem/images/trabalhos-2014/comunicacao-

cientifica/na_busca_desenvolvimento_aprendizagem_significativa.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2015.

PUHL, Cassiano Scott; LIMA, Isolda Gianni de. Números complexos: um subsunçor para a construção de um novo número. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2015, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre: PUCRS, 2015. Disponível em: <http://ebooks.pucrs.br/edipucrs/anais/anais-do-egem/assets/2015/1587074001.pdf>. Acesso em: 6 fev. 2016.

REIS NETO, Raimundo Martins. **Alternativa metodológica para ensino e aprendizagem de números complexos**: uma experiência com professores e alunos. 2009. 142f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009. Disponível em: <http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_ReisNetoR_1.pdf>. Acesso em: 26 fev. 2014.

ROSA, Mário Servelli. **Números complexos**: uma abordagem histórica para aquisição do conceito. 1998. 170f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1998. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/dissertacao_servelli.pdf>. Acesso em: 6 fev. 2016.

SANTOS, Júlio César Furtado dos. **Aprendizagem significativa:** modalidades de aprendizagem e o papel do professor. Porto Alegre: Mediação, 2008a.

SANTOS, Marcos André dos. **Dos números complexos aos quatérnions**: desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica e aplicações. 2013. 100f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2013. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/705>. Acesso em: 29 jul. 2014.

SANTOS, Robson de Oliveira. **O uso pedagógico de uma sequência didática para a aquisição de algumas ideias relacionadas ao conceito de números complexos.** 2008. 134f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2008b. Disponível em: <http://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/16046>. Acesso em: 6 fev. 2016.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL (Seduc). **Proposta pedagógica para o Ensino Médio Politécnico e Educação Profissional integrada ao Ensino Médio – 2011 – 2014**. Porto Alegre: 2011. Disponível em: <http://www.educacao.rs.gov.br/dados/ens_med_proposta.pdf>. Acesso em: 19 jan. 2015.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL (Seduc). **Regimento Referência das Escolas de Ensino Médio Politécnico da Rede Estadual**. Disponível em:

<http://www.educacao.rs.gov.br/dados/ens_med_regim_padrao_em_Politec_II.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2015.

SILVA, Edna Lúcia da; MENEZES, Estera Muszkat. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação.** 3. ed. rev. atual. Florianópolis: Laboratório de Ensino a Distância da UFSC, 2001.

SILVA, Marco Aurélio Gonçalves da. **Filtros digitais aplicados em sinais de áudio**. 2009. 62f. Monografia (Especialização) – Curso de Ciência da Computação, Departamento de Ciência da Computação, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2009. Disponível em: <http://www.gcg.ufjf.br/pub/doc49.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2014.

SPINELLI, Walter. Nem tudo é abstrato no reino dos complexos. **Seminários de Ensino da Matemática**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2009. Disponível em: <http://www.nilsonmachado.net/sema20091027.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2015.

STEWART, Ian. **17 equações que mudaram o mundo**. São Paulo: Zahar, 2013.

TAROUCO, Liane Margarida Rockenbach. **Avaliação de objetos de aprendizagem**. 2004. Disponível em: <http://penta2.ufrgs.br/edu/objetosaprendizagem/>. Acesso: 20 jan. 2015.

THIOLLENT, Michel. **Metodologia da pesquisa-ação**. 13. ed. São Paulo: Cortez, 2004.

VASCONCELLOS, Celso dos Santos. **Avaliação**: concepção dialética-libertadora do processo de avaliação escolar. 13. ed. São Paulo: Libertad, 2001.

VASSALLO NETO, Rafael. Reflexões sobre o ensino de números complexos. In: JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2014, Passo Fundo. **Anais...** Passo Fundo, 2014. Disponível em: <http://www.upf.br/jem/images/comunicacao-cientifica/refelxoes_o_ensino_de_numeros_complexos.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2014.

VIEIRA, Lúcia Helena da Silva. **Epistemologia dos números complexos**. 1999. 49f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97064/Lucia_Helena_Silva_Vieira.PDF?sequence=1>. Acesso em: 12 fev. 2016.

WILEY, David. **The instructional use of learning objects**. 2000. Disponível em <http://reusability.org/read/>. Acesso: 20 jan. 2015.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998. (Biblioteca Artmed. Fundamentos da educação).

ZORZAN, Adriana Salete Loss. **Ensino-aprendizagem**: algumas tendências na educação matemática. 2007. Disponível em: <http://www.sicoda.fw.uri.br/revistas/artigos/1_7_76.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2014.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO PARA OS PROFESSORES

1. Escola em que trabalha:

( ) Técnica ( ) Pública ( ) Privada

2. Os Números Complexos estão inseridos no Plano Político Pedagógico da escola?

( ) Sim ( ) Não

3. Você ensina os Números Complexos no Ensino Médio?

( ) Sim ( ) Não

4. Como você inicia a explicação sobre Número Complexo?
5. Você trabalha com o contexto histórico dos Números Complexos?

( ) Sim ( ) Não

6. Se sim, de qual forma você aborda a historicidade?
7. Que tópicos você ensina sobre os Números Complexos?
8. Acha possível trabalhar algumas aplicações de Números Complexos?
9. Quanto tempo, em número de aulas é preciso para o estudo de Números Complexos?
10. O que é mais difícil de ser compreendido e aplicado pelos alunos?
11. Você consideraria como uma boa possibilidade a utilização de um material de apoio para os alunos (re)construírem os conceitos mais importantes sobre os Números Complexos?
12. Qual o seu grau de concordância em relação ao ensino dos Números Complexos no Ensino Médio:

	Discorda totalmente	Discorda	Não concorda e não discorda	Concorda	Concorda totalmente	Sem resposta
Mostrar os conceitos algébricos						
Mostrar apenas as aplicações						
Desenvolver a aula com interdisciplinaridade						
O ensino não é						

necessário, pois o conteúdo é simples						
O ensino não é necessário, pois o conteúdo é difícil para os alunos de Ensino Médio						
O ensino não é necessário, pois os alunos podem estudar na Universidade						

13. Você utiliza programas de computadores, softwares de internet ou sites nas suas aulas?

( ) Sim ( ) Não

14. Quais características você busca nos recursos tecnológicos como apoio ao processo de ensino e aprendizagem?

( ) Acessibilidade

( ) Dinamicidade

( ) Lúdico

( ) Operações algébricas

( ) Construção Geométrica (Gráficos)

( ) Historicidade

( ) Exercícios

( ) Outro: _______________

APÊNDICE B – ROTA DE APRENDIZAGEM

PLANO DE AULA 1

O que o aluno poderá aprender com esta aula

- Recordar a forma de expressar e operar com vetores;
- Compreender o significado geométrico da multiplicação pela unidade imaginária;
- Discutir a necessidade da ampliação dos conjuntos numéricos;
- Definir o número complexo como um vetor, cujas extremidades são a origem no sistema de coordenadas cartesiano e num determinado ponto;
- Distinguir o conjunto dos números complexos para os números reais;
- Resolver equações do 2º grau cujas raízes não são reais.
- Narrar a evolução histórica dos principais fatos que envolveram o estudo dos números complexos;
- Julgar se os objetivos de aprendizagem foram alcançados, considerando os critérios que definem os conceitos de avaliação da Escola.

Conteúdos

- Unidade imaginária

Duração da atividade

4 horas-aulas (200 minutos).

Conhecimentos prévios requeridos para as aprendizagens propostas

Conhecimentos sobre vetores, a representação do vetor no plano e operações básicas com vetores, como a multiplicação na forma escalar.

Estratégias e recursos da aula

2 períodos

Inicialmente será proposta uma interação entre professor e estudantes, visando aos subsunçores para a utilização do OA (avaliação disponibilizada no final do plano).

Essa interação visa retomar a soma geométrica de vetores, questionando os alunos sobre a relação entre os vetores somados e o vetor resultante da soma. A partir de diferentes situações de soma de vetores, as propostas de resolução serão apresentadas e no quadro para uma discussão e análise com toda a classe.

O conhecimento que os estudantes podem ter de vetores no Ensino Médio, em geral tem origem em estudos de Física, na identificação e distinção entre grandezas escalares e vetoriais. Ainda assim, para ampliar e aproximar conhecimentos importantes como âncora aos novos conceitos a serem construídos, num segundo momento, os estudantes serão desafiados com o jogo Batalha Naval (jogo disponibilizado no final do plano).

A classe será dividida em dois grupos, A e B, definidos por sorteio. Primeiramente cada equipe prepara sua cartela escolhendo um vetor, no 1° quadrante ($\vec{a},$ equipe A) e outro no 2º quadrante ($\vec{b}$, equipe B). A equipe A deverá marcar os vetores $2\vec{a}, -\vec{a}, \frac{3}{2}\vec{a}$; a equipe B os vetores $3\vec{b}, -2\vec{b}\ e\ \frac{1}{3}\vec{b}.$ Esses vetores serão apresentados no quadro, a ambas as equipes dos vetores que compõe a batalha. Os vetores bases e as combinações desses devem ter coordenadas inteiras e dentro dos limites do sistema cartesiano que receberam. A partir disso inicia-se o jogo, ficando cada equipe com a dupla função de planejar o ataque, ao mesmo tempo em que confere o ataque da equipe adversária. Se algum tiro atingir um vetor, sem ser o tiro certo (extremidade), a equipe deve ser comunicada com alguma dica, por exemplo: "ta quente", "pegou um vetor", etc. Vencerá o jogo, o grupo que acertar todos os vetores com menos jogadas.

Seguindo o clima de desafio, o professor lançará, a ambas as equipes, a jogada "tiro da misericórdia". Para isso, o professor criará uma nova cartela, partindo dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, conforme foram definidos pelas equipes. O jogo acontece da mesma forma, porém, com os vetores: $\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b}, -2\vec{a} + \vec{b}, -\vec{a} - 2\vec{b}\ e\ \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}.$ O jogo iniciará com a equipe vencedora da etapa anterior. Caso haja empate na primeira rodada iniciará esta segunda a equipe que não iniciou a rodada anterior. Cada tiro deve ser dado, anunciando antes o vetor que pretende acertar. Vencerá esta segunda etapa, podendo dar empate, a equipe que acertar a maior quantidade de vetores com menos jogadas. Após a realização do jogo, os alunos serão encaminhados ao laboratório de informática para acessar o objeto de aprendizagem.

Para familiarizar os estudantes com OA, eles são divididos em grupos, onde que cada grupo será responsável para acessar um determinado ambiente, e faz a descrição deste ambiente. Essa interação no OA será de aproximadamente cinco minutos. Para dar continuidade as atividades, os estudantes irão apresentar o que encontraram no ambiente de aprendizagem, sendo que os demais grupos deverão adivinhar o ambiente descrito. Após, os grupos adivinharem o ambiente, o professor mediará a conversa, mostrando o ambiente através de um retroprojetor digital.

A primeira atividade no OA será desenvolvida em duplas, no ambiente "Vetores e Números Complexos". Neste espaço, a cada número complexo estará associado um vetor, para que a unidade imaginária, i, seja compreendida como um operador de rotação no plano.

O professor acompanhará e questionará os estudantes na exploração deste significado, procurando auxiliá-los a perceber que ao multiplicar um número complexo por i, o vetor a ele associado sofre uma rotação de 90º no sentido anti-horário.

Visando dar sentido ao estudo dos números complexos, os estudantes assistirão uma reportagem do Fantástico que apresenta algumas hipóteses sobre a queda do avião, do candidato a presidência Eduardo Campos, disponível em: http://youtu.be/nQYKE0YH33w. Assim, poderia surgir uma pergunta intrigante, "Como os aviões voam?". Após assistir a reportagem e discutirem sobre suas conjecturas, os estudantes serão conduzidos aos espaços de aprendizagem "Porque os aviões voam?" e "A energia elétrica no mundo moderno", que apresentam situações reais em que envolvem números complexos, nas quais é possível identificar um contexto interdisciplinar, entre matemática e física. A turma será dividida pela metade, assim uma parte fará a leitura de uma aplicação e o restante da outra. Terminada a leitura, os estudantes compartilharão aos demais o que compreenderam do texto lido, e o professor, como mediador será o responsável por conduzir as discussões e as aprendizagens.

Ao final das suas interações, apresentações e reflexões, os estudantes responderão algumas questões sobre o ambiente (questionário disponibilizado no final do plano), no sentido de avaliarem as aprendizagens e também, o OA como recurso de aprendizagem, respondendo sobre qualidade do conteúdo e usabilidade.

2 períodos

Depois avaliar o espaço "Vetores e Números Complexos", os estudantes conhecerão o ambiente "Problema histórico".

Antes de interagirem com o ambiente "Problema histórico", o professor, dialogando com os estudantes ressaltará que foram equações de 3º grau que motivaram o estudo dos números complexos, como acontece com equações que eles próprios resolveram, encontrando um número real como solução e as duas outras resultam em raízes quadradas de números negativos. Com o passar dos anos, alguns matemáticos resolveram operar com raízes quadradas de números negativos, como se fossem números quaisquer e verificavam com tais números as equações, da mesma forma como acontece quando uma raiz complexa é substituída na equação de origem, resultando numa igualdade verdadeira.

Ainda nesta aula, os estudantes divididos em grupos pesquisarão sobre os matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento dos números complexos. Os matemáticos a serem pesquisados são: Cardano e Raphael Bombelli; Albert Girard e Leibniz; Abraham de Moivre e Leonhard Euler; Caspar Wessel e Jean_Robert Argand; Carl Friederich Gauss e Agustin Cauchy. Cada grupo pesquisará sobre um matemático e produzirá um cartaz para a construção de uma linha do tempo na sala de aula. Uma das fontes de pesquisa dos alunos estará no OA a "Caminhada Histórica". Além do cartaz, os grupos disponibilizarão um texto sobre os matemáticos que será incorporado no OA, no espaço de aprendizagem "Caminhada Histórica".

No final do trabalho, os alunos avaliarão os ambientes do OA sobre aspectos históricos e sobre o conhecimento adquirido, ao interagir com esses ambientes.

Como tarefa de aprendizagem extraclasse, será solicitado que os estudantes, já conhecendo a unidade imaginária, façam uma leitura complementar, no livro didático, da "Introdução" aos números complexos. Além disso, será solicitada a leitura com registro nos cadernos das ideias principais, sobre: "O conjunto dos números complexos" e a "Forma algébrica dos números complexos". Para os que desejarem, essas leituras podem ser feitas no, espaço "Foco na teoria" do OA. Estas primeiras ideias e operações algébricas são simples, considerando conhecimentos prévios que estão ao alcance da compreensão de todos, pois fazem parte da rotina processual com a qual convivem. Com isso, a próxima aula poderá ser dedicada a um diálogo sobre a unidade imaginária, sobre as partes do número complexo (número real e o imaginário puro) e para uma prática de operações básicas com estes números.

Avaliação

O professor estará atento a perguntas, respostas e comentários dos alunos, de modo a acompanhá-los nas interações com o objeto de aprendizagem, intervindo, quando necessário, para que os objetivos de aprendizagem sejam contemplados. A avaliação da aprendizagem e do objeto de aprendizagem acontecerá por meio do questionário, quando os estudantes responderão perguntas voltadas ao aperfeiçoamento do OA e perguntas relacionadas aos números complexos. Desta forma, identificaremos se os objetivos iniciais foram atingidos.

De acordo com os conceitos de avaliação, atualmente praticados na Escola, será atribuído:

CSA – para os estudantes que interagirem com o OA, estabelecerem uma relação de respeito durante a aula e realizaram as avaliações solicitados sobre o conteúdo aprendido. Sobre o conteúdo, ao responderem os questionários, devem constar a unidade imaginária (que diferencia o número complexo do número real), aspectos da evolução dos números complexos (como uma extensão dos números reais e um estudo que demorou séculos) e a síntese do conteúdo estudado.

CPA – para os estudantes que interagirem com OA, estabelecerem uma relação de respeito durante a aula, mas que não alcançaram todos os conhecimentos previstos para atingir o conceito CSA.

CPA – para os estudantes que não interagirem com OA ou não estabeleceram uma relação de respeito durante a aula, mas que alcançaram todos os conhecimentos previstos para atingir o conceito CSA. CRA – para os estudantes que não interagirem com OA ou não estabelecerem uma relação de respeito durante a aula e que não realizaram a síntese do conteúdo.

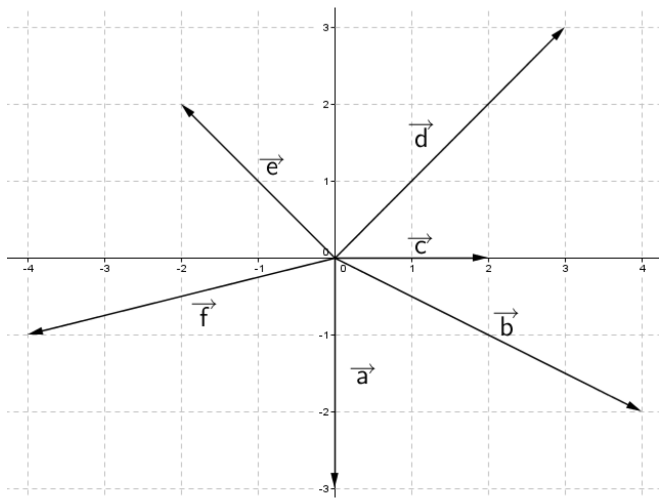
QUESTIONÁRIO PARA ANALISAR OS SUBSUNÇORES DOS ALUNOS

1. Um vetor é representado por uma seta, indicando, uma grandeza vetorial que é caracterizada por possuir módulo ou intensidade, direção e sentido. Assim quando dizemos que a velocidade de uma bola é de 20 m/s, horizontal e para a direita, temos essas três características. Você identifica essas características? Escreva ao lado de cada expressão M se for o módulo, D se for a direção e S se for o sentido.

   ( ) horizontal ( ) 20 ( ) para à direita.

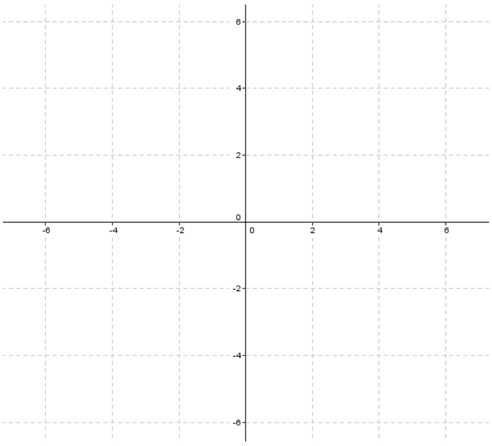
2. Na figura, abaixo, estão representados alguns vetores. No plano cartesiano, se todos os vetores têm origem na origem do sistema, a identificação do vetor é feita pelo ponto que é a sua extremidade. Com isso, ligue cada vetor as suas coordenadas?

$\vec{a}$	(2, 0)
$\vec{b}$	(-4, -1)
$\vec{c}$	(0, -3)
$\vec{d}$	(4, -2)
$\vec{e}$	(-2, 2)
$\vec{f}$	(3, 3)

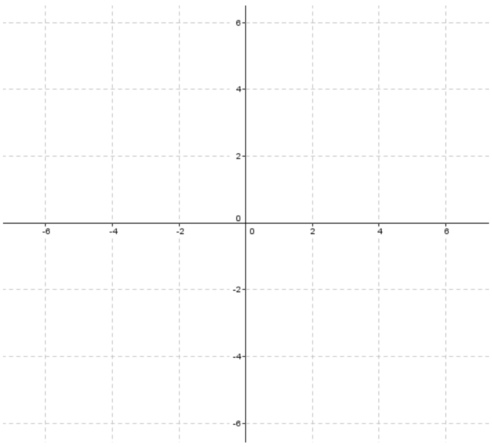


3. Considerando os vetores definidos na questão 2, efetue as operações de vetores indicadas representando geometricamente os vetores dados e o vetor resultante da operação.

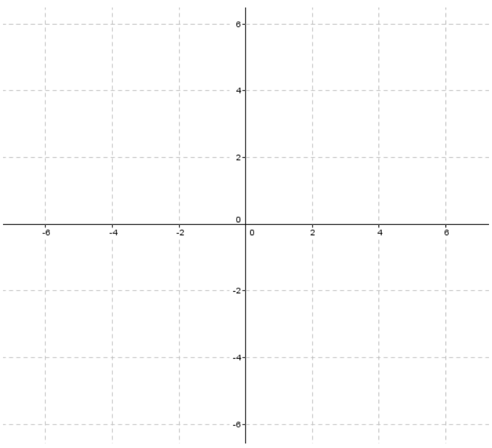
   a. $\vec{f} + \vec{d}$



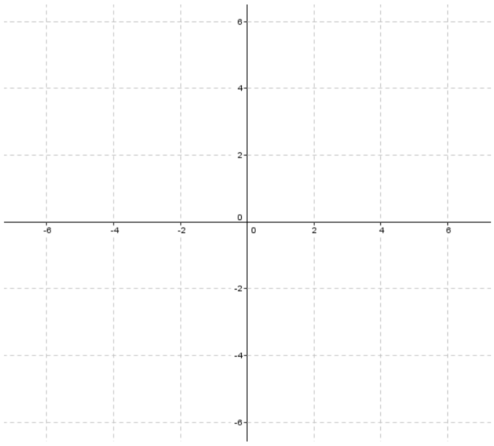
   b. $\vec{a} + \vec{e}$



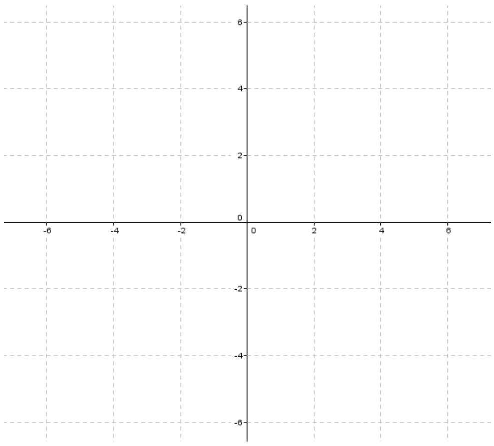
   c. $2\vec{c}$



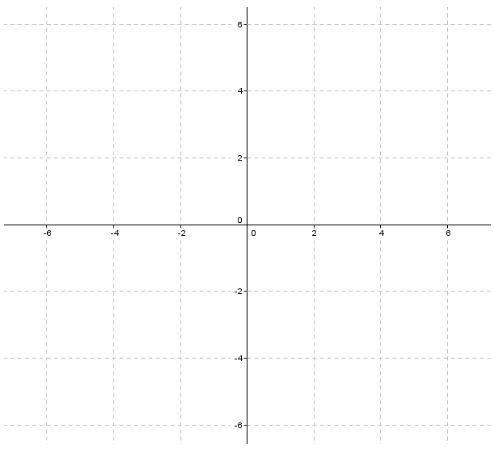
   d. $-1\vec{e}$



   e. $\vec{b} + 2\vec{e}$



   f. $\frac{1}{3}\vec{d} + \vec{a}$



4. Temos que $\sqrt{9}$ é 3, pois $3 \cdot 3 = 9$. Agora, qual é o resultado de $\sqrt{-9}$?

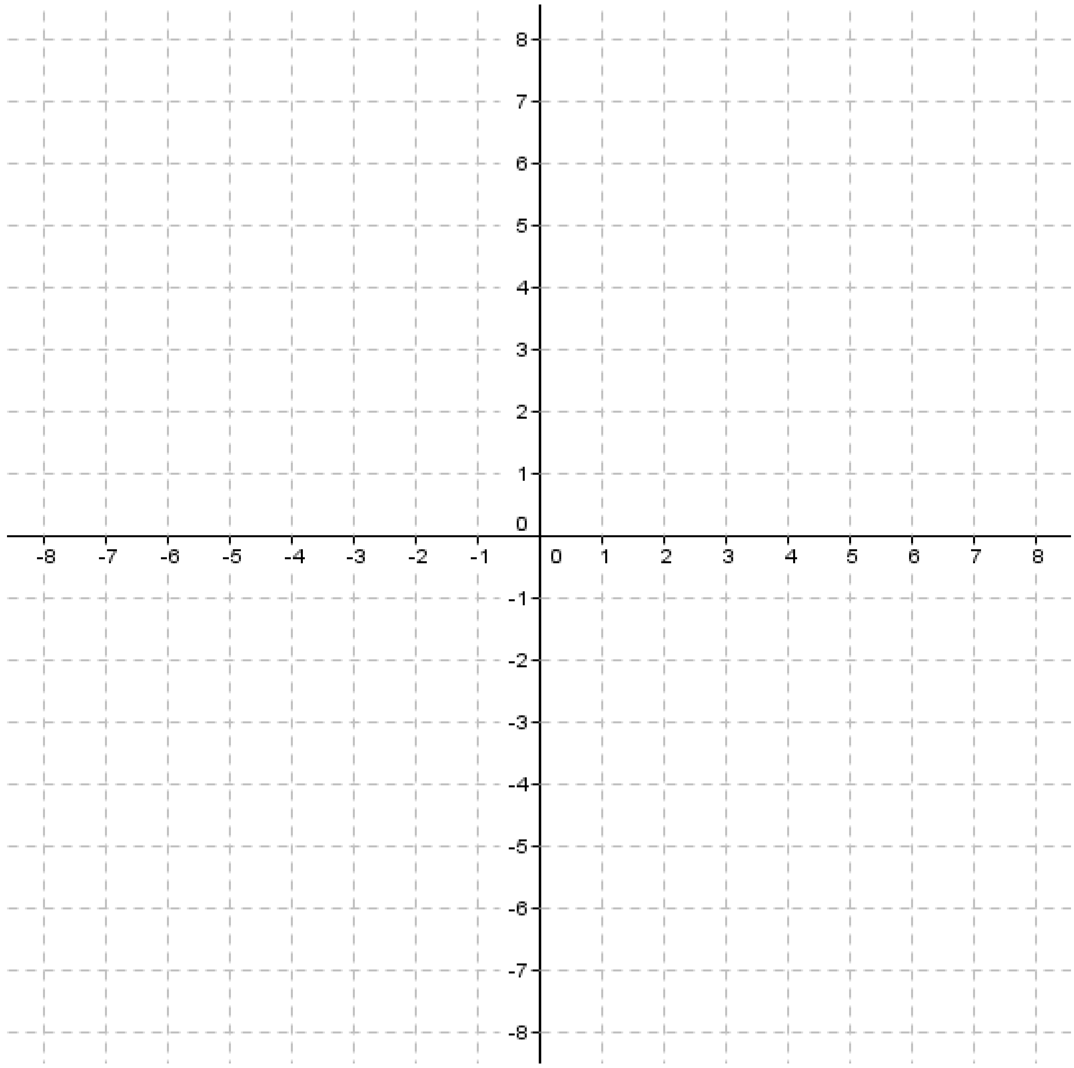
( ) -3 ( ) 3 ( ) $\frac{1}{3}$ ( ) $-\frac{1}{3}$ ( ) desconheço esse número

BATALHA NAVAL

O grupo A vai definir um vetor inicial $\vec{a}$ e vai efetuar as seguintes operações: $2\vec{a}, -\vec{a}\ e\ \frac{1}{2}\vec{a}$.

O grupo B vai definir um vetor inicial $\vec{b}$ e vai efetuar as seguintes operações: $3\vec{b}, -2\vec{b}\ e\ \frac{1}{3}\vec{b}$.

Partindo dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, desenhados em nova cartela. O desafio do "tiro da misericórdia" terá as seguintes operações: $\vec{a}+\vec{b}, 2\vec{a}-\vec{b}, 3\vec{a}+\vec{b}, -2\vec{a}+\vec{b}\ e -\vec{a}-2\vec{b}$.



AVALIAÇÃO DO OBJETO DE APRENDIZAGEM

A avaliação quantitativa (pontuação) seguirá o modelo de escala EDUCAUSE 2001 (www.educause.edu). Abaixo segue os significados da escala proposta na avaliação do objeto de aprendizagem:

5 - Concordo plenamente 3 - Não concordo nem discordo 1 - Discordo totalmente
4 – Concordo 2 - Discordo SR - Sem resposta

Em relação ao ambiente de aprendizagem “Vetores e números complexos”

Critérios	5	4	3	2	1	SR
O OA apresenta informações precisas.						
O OA inclui quantidade adequada de material.						
O OA demonstra um conceito base.						
O OA resume bem os conceitos.						
É fácil andar pelo ambiente.						
O ambiente tem instruções claras de uso.						
O ambiente é motivador.						
O ambiente é visualmente atraente.						
O ambiente é interativo.						
A linguagem é adequada e sem erros ortográficos.						
A linguagem matemática é adequada e sem erros.						
Como recurso de aprendizagem, identifica objetivos de aprendizagem.						
Como recurso de aprendizagem, reforça conceitos progressivamente.						
Como recurso de aprendizagem, demonstra relações entre conceitos.						
Como recurso de aprendizagem, fundamenta em conceitos prévios.						
Como recurso de aprendizagem, é eficiente (pode-se aprender muito em curto período de tempo).						

Atribua um conceito (pouco, satisfatoriamente ou plenamente) para cada uma das perguntas a seguir. Sinta-se a vontade para fazer outras colocações sobre as perguntas. Considerando o objeto de aprendizagem como fonte de conhecimento, você conseguiu interagir e compreender os conceitos apresentados pelo Radice? ___________________________________

Além do Radice, estão presentes neste espaço os aplicativos do Geogebra, você conseguiu utilizá-lo? ____

Fez proveito do espaço de prática? ____

A diferença entre as representações dos números complexos e dos números reais é caracterizado pela presença de um elemento especial. A partir da definição deste elemento foi possível definir um novo conjunto numérico chamado de conjunto dos números complexos. Que elemento é esse, que diferencia os números complexos dos números reais? ____

____

____

Este elemento, que diferencia o número complexo do número real, quando multiplicado por vetor (associado a um número complexo) faz com que ele gire. Quantos graus gira esse vetor?

____

Em relação ao ambiente de aprendizagem “Problema histórico” e “Caminhada Histórica”.

Critérios	5	4	3	2	1	SR
O OA apresenta informações precisas.						
O OA inclui quantidade adequada de material.						
O OA demonstra um conceito base.						
O OA resume bem os conceitos.						
É fácil andar pelo ambiente.						
O ambiente tem instruções claras de uso.						
O ambiente é motivador.						
O ambiente é visualmente atraente.						
O ambiente é interativo.						
A linguagem é adequada e sem erros ortográficos.						
A linguagem matemática é adequada e sem erros.						
Como recurso de aprendizagem, identifica objetivos de aprendizagem.						
Como recurso de aprendizagem, reforça conceitos progressivamente.						
Como recurso de aprendizagem, demonstra relações entre conceitos.						
Como recurso de aprendizagem, fundamenta em conceitos prévios.						
Como recurso de aprendizagem, é eficiente (pode-se aprender muito em curto período de tempo).						

Conseguiste resolver o desafio do Radice sem ajuda? _________ Em qual parte você sentiu dificuldade ou precisou de ajuda? ____

____

____

____

Quando você resolvia equações de 2° grau e chegava a raiz quadrada de um número negativo, lembra de como expressava a solução? O que é adequado dizer, não existe ou não pertence ao conjunto dos números reais? ____

____

Os números complexos são uma construção humana, como qualquer conhecimento, e foi estudado por diversos matemáticos. Você conhecia alguma parte desta história ou já tinha tido algum contato com ela? ____

Que fato ou curiosidade chamou mais a sua atenção nestes ambientes?

____

____

____

____

PLANO DE AULA 2

O que o aluno poderá aprender com esta aula

- Compreender o significado geométrico da multiplicação pela unidade imaginária;
- Identificar as partes de um número complexo (parte real e imaginária);
- Expressar a igualdade entre dois números complexos;
- Interpretar o número real como um número complexo;
- Operar com os números complexos (soma, subtração, multiplicação e divisão);
- Registrar o desenvolvimento do conjunto dos números complexos, como uma construção humana e coletiva;
- Interpretar o significado geométrico do conjugado;
- Julgar se os objetivos de aprendizagem foram alcançados, considerando os critérios que definem os conceitos de avaliação da Escola.

Conteúdos

- Partes do número complexo
- Operações com números complexos

Duração da atividade

6 horas-aulas (300 minutos).

Conhecimentos prévios requeridos para as aprendizagens propostas

Representação de pontos no plano cartesiano para a representação dos números complexos no plano de Argand-Gauss, cálculo algébrico, a propriedade distributiva e racionalização de denominadores.

Estratégias e recursos da aula

2 períodos

No início da aula, os grupos apresentam a pesquisa sobre os matemáticos, compartilhando com os colegas os resultados dos estudos realizados e construindo, colaborativamente, a linha do tempo fixando cartazes nas paredes da sala de aula.

Na continuidade, aproveitando as noções que obtiveram nas pesquisas sobre os matemáticos que se envolveram na história dos números complexos e na leitura sugerida no livro texto ou no OA, os estudantes participarão de uma atividade, inspirada na estratégia do Peer Instruction, numa interação constante entre professor e alunos, alunos e alunos e alunos com o livro e também com o OA.

Inicialmente, o professor lançará perguntas à turma que serão respondidas individualmente, sem que os estudantes tenham conhecimento das respostas dos outros, assim cada estudante receberá cartões coloridos com as alternativas “A”, “B” e “C”. O professor levantará os dados, se o número de acertos for abaixo de 40%, o professor solicitará que os estudantes consultem o OA ou o livro didático. Após isso, a questão é apresentada novamente. Quando o número de acertos for entre 40 e 80% serão formadas duplas para discussão em busca de um consenso para responder novamente a questão. Uma nova questão só é apresentada quando o número de acertos for superior a 80%. Nesse caso, o professor convidará algum estudante para justificar sua resposta, dando continuidade à atividade. O professor poderá intervir em qualquer uma das situações, discutindo com os estudantes a operação envolvida e apresentando novos casos com o mesmo tipo de operação.

As perguntas para esta atividade, com as respectivas alternativas, são as seguintes:

- Um número complexo $z = a + bi$ tem duas partes, quais são elas?

A) a = parte real; b= parte imaginária

B) a = parte maior; b = parte menor

C) a = parte positiva; b = parte negativa

- Quais são as partes real e imaginária do número complexo $z = - 1 + 3i$?

A) $Re(z) = 1; Im(z) = 3$

B) $Re(z) = 3; Im(z) = -1$

C) $Re(z) = -1; Im(z) = 3$

- Qual dos números complexos é também um número real?

A) $z = 0 + 2i$

B) $z = 2 + 0i$

C) $z = 2 + i$

- Qual dos números complexos é imaginário puro?

A) $z = 2 + 0i$

B) $z = 0 + 2i$

C) $z = 2 + i$

- Um número real, representado no plano de Argand-Gauss, será um ponto:

A) do eixo vertical

B) do eixo horizontal

C) de algum quadrante, mas fora dos eixos

- A representação de um número imaginário puro no plano de Argand-Gauss é um ponto:

A) do eixo vertical

B) do eixo horizontal

C) de algum dos quadrante e fora dos eixos

- A igualdade $2 + bi = a – 3i$ é verdadeira quando:

A) $a = 2$ e $b = -3$

B) $a = -3$ e $b = 2$

C) $a = 2$ e $b = 3$

- A soma de $z_1 = 2 – 3i$ com $z_2 = 1 + 4i$ é o número:

A) $z_1 + z_2 = 3 + i$

B) $z_1 + z_2 = 3 + 7i$

C) $z_1 + z_2 = 1 + i$

- Se $z_1 = 1 – 2i$ e $z_2 = 3 + 4i$, a subtração $z_1 – z_2$ é o número:

A) $z_1 - z_2 = -2 + 6i$

B) $z_1 - z_2 = -2 + 2i$

C) $z_1 - z_2 = -2 - 6i$

- Para que igualdade $2 - 3i + a + bi = 3 + i$ seja verdadeira, quais são os valores de a e b?

A) a = -1 e b = -2

B) a = 1 e b = 2

C) a = 1 e b = 4

- Sendo $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 1 + 4i$, ao multiplicar z_1 por z_2 temos:

A) $z_1 \cdot z_2 = 14 + 5i$

B) $z_1 \cdot z_2 = 2 - 12i$

C) $z_1 \cdot z_2 = 5 + 14i$

- Que valores de a e b verificam a igualdade $(5 - 3i)(a + bi) = -13 + i$?

A) a = -1 e b = -2

B) a = -2 e b = -1

C) a = -2 e b = 1

- A divisão de $z_1 = 2 - 4i$ por $z_2 = 2$ é igual a:

A) $\frac{z_1}{z_2} = 1 - 2i$

B) $\frac{z_1}{z_2} = 1 - 4i$

C) $\frac{z_1}{z_2} = -4i$

- O resultado da divisão $\frac{2+3i}{i}$ é igual a:

A) $\frac{2+3i}{i} = 5$

B) $\frac{2+3i}{i} = 3 - 2i$

C) $\frac{2+3i}{i} = -3 - 2i$

- Qual o quociente da divisão de $z_1 = 2 - 8i$ por $z_2 = 2 + 4i$?

A) $\frac{z_1}{z_2} = 1 - 2i$

B) $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{7}{5} - \frac{6}{5}i$

C) $\frac{z_1}{z_2} = -1$

Como apoio na realização da atividade, os estudantes poderão interagir para tirar dúvidas no espaço “Plano Argand-Gauss” do OA. O professor acompanha as interações no OA e orienta para que utilizem o “Espaço de prática” para fazer representações geométricas e tirar dúvidas.

Assim, com esta atividade, os estudantes se envolverão com os conceitos de partes do número complexo, número real como um número complexo, números imaginários puros, a igualdade entre números complexos e as quatro operações básicas: soma, subtração, multiplicação e divisão.

Se a divisão de números complexos causar estranheza, gerando alguma dificuldade de ser compreendida, o professor intervirá, questionando e auxiliando os alunos para a reconstrução do processo da racionalização de denominadores (ampliando um subsunçor). Para isso, caso haja necessidade, o professor discutirá com os alunos alguns casos como:

$$\frac{2+i}{i}=\frac{2+\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=\frac{2\sqrt{-1}-1}{-1}=\frac{-2i+1}{1}=1-2i$$

$$\frac{2+i}{1+i}=\frac{2+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\right)=\frac{2+\sqrt{-1}-2\sqrt{-1}+1}{1+1}=\frac{-\sqrt{-1}+3}{2}=\frac{3-i}{2}$$

Na divisão de números complexos, ao compreendê-la como um processo similar ao de racionalização de denominadores, o professor tem a oportunidade de chamar a atenção dos alunos, dando sentido, para o conjugado de z. “Dado um número complexo z = a + bi, chamamos de conjugado de z, cuja notação é $\bar{z}$, o número complexo $\bar{z}=a-bi$” (MELLO, p. 574, 2005)[1]. “Geometricamente, o conjugado $\bar{z}$ de z é representado pelo simétrico de z em relação ao eixo x” (DANTE, p. 598, 2008)[2].

2 períodos

Ao compreenderem o conjugado de um número complexo, os alunos serão questionados de modo que possam relacionar e distinguir os conceitos de oposto e conjugado. Outra situação onde aparece o conjugado é na resolução de equações polinomiais. Assim, para que assimilem melhor este novo conceito, será proposto aos alunos que resolvam equação como $x^2-2x+2=0$ e $x^3-2x^2+2x=0$, com questões como: Quantas soluções têm cada uma dessas equações? Quais são as raízes de cada uma? Como são as raízes complexas das equações?

---

1 MELLO, José Luiz Pastore. **Matemática**: construção e significado. São Paulo: Moderna, 2005.
2 DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2008. Volume único.

Assim, podemos refletir com os alunos sobre a propriedade das raízes complexas de uma equação polinomial: “se um número complexo z = a + bi, com b $\neq$ 0, é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então o conjugado $\bar{z} = a - bi$, também é raiz dessa equação. [...] As raízes complexas não reais de uma equação algébrica com coeficientes reais ocorrem sempre aos pares” (MELLO, p. 608, 2005).

O estudo de potências de números complexos envolve uma primeira construção que é a das potências de i. Este estudo será desenvolvido com apoio do OA, que propõe analisar a relação entre o expoente e o resultado da potência da unidade imaginária, como um processo recursivo que permite calcular as potências de i para qualquer expoente inteiro. A construção proposta no OA auxiliará os estudantes a perceberem que a potência i^n, com n inteiro positivo, é igual a i^k, sendo k o resto da divisão de n por 4. “Então, para calcular a potência i^n, com $n \in N$, efetuamos a divisão de n por 4 e consideramos o resto dessa divisão como sendo o novo expoente de i” (MELLO, p. 576, 2005). Se o resto for zero, o resultado é 1; se o resto for 1, o resultado é i; se o resto for 2, o resultado é –1; se o resto for 4, o resultado é –i. Esses são os quatro resultados possíveis para a potência da unidade imaginária.

$$i^0 = 1; i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = -i; i^4 = 1; i^5 = i; i^6 = i^2 = -1; i^7 = i^3 = -i;$$

2 períodos

Como um fechamento e prática das operações básicas com números complexos e potências de i, será realizada uma atividade, na forma de circuitos de desafios. A turma será dividida em três equipes e cada uma se envolverá, simultaneamente, com a resolução de duas questões, cada uma valendo quatro pontos. Cada equipe é representada por dois componentes que retiram, às cegas, uma questão do banco de questões e apresentam, no quadro, a sua resolução. Em cada rodada, nova dupla representa a equipe, até que todos os estudantes participem dos cálculos resolvidos no quadro.

Enquanto a dupla resolve no quadro, os demais colegas da equipe têm a tarefa de acompanhar as resoluções: dos parceiros, conferindo-as e preparando-se para auxiliá-los, e de outra equipe adversária, procurando encontrar possíveis erros. Ao resolver no quadro, a dupla poderá solicitar auxílio para sua equipe, uma vez por rodada.

Quando os cálculos das equipes estiverem concluídos, as equipes adversárias se manifestam, confirmando que as resoluções estão corretas ou apontando erros encontrados e, nesse caso, apresentando no quadro a correção sugerida. Assim, todas as resoluções são analisadas e conferidas pelos componentes das equipes. Caso haja divergência, os grupos argumentarão, tentando convencer que o seu resultado é o correto. O professor, que acompanha todo o processo, mediará a discussão, de modo que todas as questões sejam adequadamente resolvidas e compreendidas pelos estudantes da classe. Vencerá o desafio a equipe que conseguir computar maior número de pontos, considerando as questões resolvidas e a análise das resoluções das equipes adversárias.

Para a atividade serão confeccionadas 50 cartelas (cartelas disponibilizadas no final do plano), sendo 12 para cada grupo, com exercícios de soma, subtração, multiplicação, divisão, potências de i e expressões envolvendo números complexos. Cada categoria de questões está representada por cores diferentes. Na categoria 1 (vermelho) serão resolvidas duas questões; na categoria 2 (bordo) será resolvido uma questão; na categoria 3 (azul claro) serão resolvidas duas questões; na categoria 4 (azul) será resolvido uma questão; na categoria 5 (azul escuro) será resolvido uma questão; na categoria 6 (laranja) serão resolvidas duas questões; na categoria 7 (verde) serão realizadas duas questões; na categoria 8 (lilás) será realizada uma questão. Por fim, os alunos responderão uma avaliação do OA (questionário disponibilizado no final do plano), e também nela terão perguntas sobre o conhecimento adquirido durante o acesso a estes ambientes.

Como tarefa de aprendizagem extraclasse, será solicitado que os estudantes, já conhecendo as operações com números complexos, façam uma leitura, no livro ou no espaço “Foco na teoria” do OA, adiantando o novo tópico de estudo que será sobre o “Módulo e representação trigonométrica de um número complexo”. Com estas primeiras ideias, o início da próxima aula poderá ser dedicado a um diálogo, visando ampliar e aprimorar o entendimento sobre a forma trigonométrica, que à partir dos conhecimentos sobre as razões trigonométricas.

Avaliação

O professor estará atento às perguntas, resoluções e comentários dos alunos, de modo a acompanhá-los nas interações, para que os objetivos de aprendizagem sejam contemplados. A avaliação dos conteúdos conceituais acontecerá através da avaliação do objeto de aprendizagem. No questionário, os estudantes responderão perguntas voltadas ao aperfeiçoamento do OA e outras relacionadas aos números complexos. Além disso, serão consideradas, na avaliação, as atividades extraclasse, os cartazes elaborados para a construção da linha tempo sobre a evolução histórica dos números complexos. Desta forma, identificaremos se os objetivos iniciais foram atingidos.

De acordo com os conceitos de avaliação, atualmente praticados na Escola, será atribuído:

CSA – para os estudantes que interagirem com OA, estabelecerem uma relação de respeito durante as aulas e realizaram as atividades solicitadas sobre o conteúdo aprendido e o cartaz da linha do tempo. Sobre o conteúdo, ao responderem os questionários deve constar a identificação de um número real como número complexo, de número imaginário puro e as partes, real e imaginária, de um número complexo, para a realização de cálculos envolvendo soma, subtração multiplicação, divisão de números complexos e potências da unidade imaginária.

CPA – para os estudantes que interagirem com OA, estabelecerem uma relação de respeito durante a aula, realizaram as atividades, mas não alcançaram, ainda, o domínio das operações básicas com números complexos.

CPA – para os estudantes que não interagirem com OA ou não estabelecerem uma relação de respeito durante a aula, mas que realizam, adequadamente, as atividades envolvendo as operações básicas com números complexos.

CRA – para os estudantes que não interagirem com OA, não estabelecerem uma relação de respeito durante a aula e que não realizaram as atividades solicitadas.

LISTA DAS CARTELAS PARA O CIRCUITO DE DESAFIOS

$\boxed{i + (2 - 5i)}$ $\boxed{(1 - 3i) + (-5 + 2i)}$ $\boxed{(2 + 5i) + (3 - 4i)}$

$\boxed{(-2 + 5i) - (3 + 4i)}$ $\boxed{(1 + i) - (1 - i)}$ $\boxed{(2 - 3i) - (-2 + 5i)}$

$\boxed{(-2 + 2i) - (6 - 2i)}$ $\boxed{(2 + 3i) - (4 - i)}$ $\boxed{(-2 - 6i) - (-2 + 5i)}$

$\boxed{2(4 + 1i) - 3(1 + 2i)}$ $\boxed{3(1 + 2i) - 5(2 - 4i)}$ $\boxed{(2 - 5i) - 4(-1 + 3i)}$

$\boxed{-(-2 + 2i) + 2(3 - 2i)}$ $\boxed{(4 + i) - 3(1 - 3i)}$ $\boxed{(-1 - i) - 4(-3 + 5i)}$

$\boxed{(5 + i)(2 - i)}$ $\boxed{(2 + 3i)(3 - 2i)}$ $\boxed{(1 + 3i)(1 + i)}$

$\boxed{(4 - 4i)(3 - 2i)}$ $\boxed{(1 + 4i)(7 - 3i)}$ $\boxed{(2 - 5i)(1 - 3i)}$

$\left(\frac{2-3i}{1-2i}\right)\cdot\left(\frac{1+2i}{1+2i}\right)$

$\left(\frac{2-3i}{1-i}\right)\cdot\left(\frac{1+i}{1+i}\right)$

$\frac{1-i}{i}$

$\frac{1+2i}{1-i}$

$(6-10i)\div(2-2i)$

$\frac{1+i}{i}$

$\frac{2-4i}{1+i}$

$(1-i)\div(2+3i)$

$2+3i+\frac{2-i}{i}$

$i+2\left(\frac{-4+8i}{2i}\right)$

$3+i+3\left(\frac{2+6i}{1+i}\right)$

$4+5i+\frac{4+2i}{2i}$

$2+i\left(\frac{19-36i}{1+3i}\right)$

$-1-2i-3\left(\frac{4-8i}{1+i}\right)$

i^{112}

i^{81}

i^{102}

i^{27}

i^{50}

i^{47}

$i^{21}+2i^{15}+3i$

$i^{31}-5i^{45}+i$

$-i^{12}+4i^{65}+i^{97}$

$\frac{3i^{44}+12i^{33}}{-3i^{50}}$

$\frac{4i^{10}+9i^{63}}{2i^{20}}$

$\frac{6i^{77}+8i^{13}}{-2i^{50}}$

$3(2+4i)+i^{66}$

$-i^{11}-5(2+3i)$

$-i^{10}+2(-2+3i)+i^{55}$

Dado $z_1=2-4i$, $z_2=1+2i$ e $z_3=5+i$. Calcule:
a) $2z_2-3z_3+\frac{z_1}{2}$ b) $-z_1+(z_2+z_3)(z_2-z_1)$

Dado $z_1=3-6i$, $z_2=2+i$ e $z_3=2-i$. Calcule:
a) $3z_2-4z_3-\frac{z_1}{3}$ b) $2z_2+(z_1-z_3)(z_3-z_1)$

Dado $z_1 = 2 - 4i$, $z_2 = 3 + 6i$ e $z_3 = 1 - i$. Calcule:

a) $3z_3 - 4z_2 - \frac{z_1}{2}$ b) $5z_2 + (z_2 - z_1)(z_3 + z_1)$

AVALIAÇÃO DO OBJETO DE APRENDIZAGEM

A avaliação quantitativa (pontuação) seguirá o modelo de escala EDUCAUSE 2001 (www.educause.edu). Segue, abaixo, os significados da escala proposta na avaliação do objeto de aprendizagem:

5 - Concordo plenamente 3 - Não concordo nem discordo 1 - Discordo totalmente

4 – Concordo 2 – Discordo SR - Sem resposta

Em relação ao ambiente de aprendizagem "Porque os aviões voam?", "A energia elétrica no mundo moderno" e "O que são fractais?".

Critérios	5	4	3	2	1	SR
O OA apresenta informações precisas.						
O OA inclui quantidade adequada de material.						
O OA demonstra um conceito base.						
O OA resume bem os conceitos.						
É fácil andar pelo ambiente.						
O ambiente tem instruções claras de uso.						
O ambiente é motivador.						
O ambiente é visualmente atraente.						
O ambiente é interativo.						
A linguagem é adequada e sem erros ortográficos.						
A linguagem matemática é adequada e sem erros.						
Como recurso de aprendizagem, identifica objetivos de aprendizagem.						
Como recurso de aprendizagem, reforça conceitos progressivamente.						
Como recurso de aprendizagem, demonstra relações entre conceitos.						
Como recurso de aprendizagem, fundamenta em conceitos prévios.						
Como recurso de aprendizagem, é eficiente (pode-se aprender muito em curto período de tempo).						

Você achou importante conhecer aplicações dos números complexos em situações reais?

( ) Não ( ) Mais ou menos ( ) Muito importante

Qual a aplicação despertou mais curiosidade? Por quê?

____

___

Sobre qual(is) aplicação(ões) você gostaria de saber mais?

___

___

Conhecer algumas aplicações serviu como incentivo para o estudo dos números complexos?

( ) Não ( ) Mais ou menos ( ) Sim

Conhecer algumas aplicações de números complexos propiciou estabelecer alguma relação com outra disciplina da escola? Se sim, qual disciplina e qual assunto tem relação com os números complexos?___

___

___

___

___

Em relação ao ambiente de aprendizagem "Plano de Argand-Gauss" e "Potências de i".

Critérios	5	4	3	2	1	SR
O OA apresenta informações precisas.						
O OA inclui quantidade adequada de material.						
O OA demonstra um conceito base.						
O OA resume bem os conceitos.						
É fácil andar pelo ambiente.						
O ambiente tem instruções claras de uso.						
O ambiente é motivador.						
O ambiente é visualmente atraente.						
O ambiente é interativo.						
A linguagem é adequada e sem erros ortográficos.						
A linguagem matemática é adequada e sem erros.						
Como recurso de aprendizagem, identifica objetivos de aprendizagem.						
Como recurso de aprendizagem, reforça conceitos progressivamente.						
Como recurso de aprendizagem, demonstra relações entre conceitos.						
Como recurso de aprendizagem, fundamenta em conceitos prévios.						
Como recurso de aprendizagem, é eficiente (pode-se aprender muito em curto período de tempo).						

Os números complexos são divididos em duas partes, quais são elas? ___

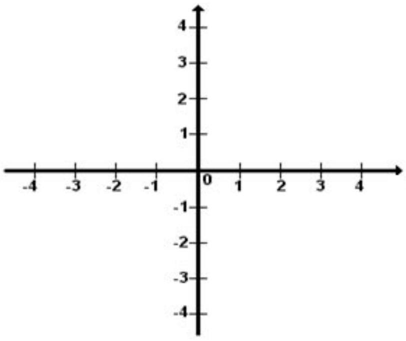
___

Vimos que os números reais são números complexos, e que existem números imaginários puros. Como deve ser o número complexo para que ele seja um número real? E para ser um imaginário puro?____

____

____

Nomeie os eixos no plano, abaixo, e represente geometricamente os números complexos $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -3 - 4i$ e $z_3 = -1 + i$.



Como se faz a soma de dois números complexos?____

____

____

Relate como proceder para multiplicar dois números complexos.

____

____

____

Dividir números complexos é como efetuar a racionalização de denominadores. Escrevemos a divisão como uma fração e multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Qual a diferença entre conjugado e oposto de um número complexo. Explique e apresente o conjugado e o oposto do número -2+5i.____

____

A potência da unidade imaginária ressalta que multiplicar um número complexo por i, é como rotacionar o vetor associado a esse número complexo. Quanto mede o ângulo de rotação e qual o sentido, quando multiplico i por i?____

____

____

____

____

Quais são os possíveis resultados de uma potência de i, sendo o expoente um número inteiro e positivo? ____

____

Qual o valor i^{41}, i^{135} e ainda de i^{1000}?____

____

____

Efetue:

a) $(4+3i)(1-2i)+5-2i$

b) $\frac{4-10i}{-2i}+\frac{45-15i}{3+i}-i^{95}$

Recursos complementares

Para conhecer um pouco mais sobre a história dos números complexos indicamos o vídeo "O sonho não acabou" (http://youtu.be/JlOiio5UZ0w), produção da UNICAMP, Matemática Multimídia. Mais informações podem ser acessadas no link: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1187.

Para quem prefere se aprofundar mais, ou ler sobre o assunto, no link http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euler/complexoshistoria.htm, possui o desenvolvimento dos números complexos, de uma forma mais detalhada.

Além desses recursos, a sugestão de um recurso complementar é a utilização do ambiente "Foco na teoria" do objeto de aprendizagem, onde se apresenta um pouco mais sobre os números complexos. Como também os aplicativos do ambiente "Fazer e compreender" do objeto de aprendizagem, onde se destaca a relação entre a soma de vetores e a soma de números complexos.

PLANO DE AULA 3

O que o aluno poderá aprender com esta aula

- Expressar o número complexo na forma trigonométrica;
- Identificar o módulo e o argumento do número complexo;
- Operar com os números complexos na forma trigonométrica;
- Escolher a forma adequada de operar com números complexos, na forma algébrica ou na trigonométrica;
- Julgar se os objetivos de aprendizagem foram alcançados, considerando os critérios que definem os conceitos de avaliação da Escola.

Conteúdos

- Forma trigonométrica do número complexo.
- Multiplicação e divisão de números complexos, na forma trigonométrica.

Duração da atividade

4 horas-aulas (200 minutos).

Conhecimentos prévios requeridos para as aprendizagens propostas

Conhecimento sobre as relações trigonométricas: seno, cosseno e tangente; e também, do Teorema de Pitágoras.

Estratégias e recursos da aula

2 períodos

Iniciando a aula, os alunos serão desafiados a refletir sobre a complexidade ou não da potenciação e da radiciação envolvendo números complexos. Com potências como: $(1 – 3i)^2$, $(2 + 5i)^3$, $(2 + 3i)^5$ e $(1 - 3i)^{11}$, os estudantes serão questionados sobre qual(is) desses exercícios ele consegue efetuar. Da mesma forma, para raízes como: $\sqrt{2+2i}$ e $\sqrt[6]{3+i}$. Com tais questionamentos pretendemos que os estudantes percebam a dificuldade, ou mesmo impossibilidade, de efetuar as operações deste tipo usando a forma algébrica dos números complexos, e diante disso, sugerir a forma trigonométrica para representar e operar com números complexos, especialmente úteis, para as operações de potenciação e radiciação.

Os estudantes serão encaminhados ao laboratório de informática, onde irão interagir no ambiente de aprendizagem “Forma retangular para a forma trigonométrica”. Neste ambiente, os estudantes descobrirão uma nova forma de representar o número complexo. Na interação com os aplicativos, acredita-se que os estudantes perceberão a relação dos ângulos na multiplicação e na divisão de números complexos. Na sequência iremos construir a forma trigonométrica de qualquer número complexo.

Como retorno ao processo anterior, os estudantes transformarão o número complexo, da forma trigonométrica, para a retangular. Esse processo é mais simples de ser efetuado. Espera-se que os estudantes percebam este fato, e também, que a forma algébrica é mais adequada para executar somas, subtrações e para representar os números complexos no plano; enquanto, a forma trigonométrica é bastante útil para realizar a multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Após a interação com o OA, para uma prática com essas operações, será disponibilizada uma lista de exercícios (Lista disponibilizada no final do plano), envolvendo a transformação da forma retangular para a trigonométrica, e vice-versa. Para a realização dos exercícios, a turma será dividida em duas partes, sendo que alguns transformarão da forma trigonométrica para a algébrica, e outros farão o processo inverso. Depois desse estudo, os estudantes atuarão em duplas, sendo um de cada grupo, formadas para a troca de conhecimento, um auxiliando o outro a fazer todas as atividades.

Como aplicação dos números complexos, utilizando as duas formas de representação, os estudantes resolverão alguns problemas envolvendo a análise de circuitos de corrente elétrica (impedância), num sistema de corrente alternada. Nesses problemas, a forma trigonométrica é apresentada, no contexto da Física, com uma notação específica $Z\underline{\left|\Phi\right.}$, sendo Z o módulo e ϕ o argumento do número complexo. Essa forma é conhecida pelos físicos como forma polar de um número complexo.

Com isso os estudantes conhecerão uma terceira forma de representar os números complexos que é a forma polar, utilizada na análise de circuitos de corrente alternada. Além disso, na Física, é mais comum utilizar j, em lugar de i, para a unidade imaginária. Fato esse justificado pela utilização de i como corrente elétrica.

Para finalizar, será solicitado que os estudantes, já conhecendo a forma trigonométrica do número complexo, façam a leitura, no livro didático, do item: “Representação trigonométrica de um número complexo”. Esta mesma leitura, para quem desejar, pode ser feita no espaço “Foco na teoria” do OA. Após a leitura, os estudantes deverão fazer uma síntese das ideias principais, orientando pelas questões que responderão no instrumento de avaliação (questionário disponibilizado no final do plano).

2 períodos

Como culminância do estudo sobre a forma trigonométrica dos números complexos, será proposto aos estudantes uma atividade lúdica, onde aprimorando os conhecimentos, divertindo-se com o jogo “Show do Milhão”. O jogo será acessado pelo OA. As perguntas foram planejadas de forma variada, considerando as formas de representação e as diversas operações, com exceção da radiciação, em grau crescente de complexidade conforme o estudante avançar no jogo.

As primeiras perguntas (valendo de 1 mil a 5 mil) referem-se a parte algébrica do número complexo e a unidade imaginária i; na segunda parte (valendo de 10 mil a 50 mil), questões que envolvem a operação dos números complexos na forma algébrica; na parte final (valendo de 100 mil a 500 mil), perguntas que envolvem a forma trigonométrica dos números complexos. A pergunta final (de 1 milhão) consiste numa expressão envolvendo diferentes operações e transformações nas formas de representação de números complexos.

Avaliação

O professor estará atento às perguntas, respostas e comentários dos alunos, de modo a acompanhá-los nas interações com o objeto de aprendizagem, e estará atento e agindo, quando necessário, para que os objetivos de aprendizagem sejam contemplados. A avaliação dos conteúdos conceituais acontecerá através da avaliação do objeto de aprendizagem. No questionário, os estudantes responderão perguntas voltadas ao aperfeiçoamento do OA e perguntas relacionadas aos números complexos. Outro aspecto a ser observado é a realização das atividades extraclasse e a lista de exercícios, das operações com os números complexos na forma trigonométrica. Desta forma, identificaremos se os objetivos iniciais foram atingidos.

De acordo com os conceitos de avaliação atualmente praticados na Escola, será atribuído:

CSA para os estudantes que interagirem com o OA, estabelecerem uma relação de respeito durante a aula e realizaram as avaliações solicitadas sobre o conteúdo aprendido. Sobre o conteúdo, ao responderem os questionários, devem mostrar o conhecimento sobre o cálculo do módulo e argumento do número complexo, transformando o número complexo da forma algébrica para a trigonométrica, e vice-versa, efetuando corretamente os cálculos de multiplicação e divisão na forma trigonométrica.

CPA – para os estudantes que interagirem com OA, estabelecerem uma relação de respeito durante a aula, mas que não alcançaram todos os conhecimentos previstos para atingir o conceito CSA.

CPA – para os estudantes que não interagirem com OA ou não estabelecerem uma relação de respeito durante a aula, mas que alcançaram todos os conhecimentos previstos para atingir o conceito CSA.

CRA – para os estudantes que não interagirem com OA, e não estabelecerem uma relação de respeito durante a aula e que não realizaram as atividades solicitadas.

LISTA DE EXERCÍCIOS DE OPERAÇÕES BÁSICAS DE NÚMEROS COMPLEXOS

1. Escreva os seguintes números complexos na forma trigonométrica:
   a. $z_1 = 3i$
   b. $z_2 = 4$

c. $z_3 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

d. $z_4 = -\sqrt{3} + i$

e. $z_5 = -1 - i$

f. $z_6 = \sqrt{3} - 3i$

g. $z_7 = 12,86 + 15,32i$

2. Escreva os seguintes números complexos na forma algébrica:

a. $z_1 = 3(\cos 90° + i \cdot \text{sen } 90°)$

b. $z_2 = 4(\cos 0° + i \cdot \text{sen } 0°)$

c. $z_3 = 2(\cos 45° + i \cdot \text{sen } 45°)$

d. $z_4 = 2(\cos 150° + i \cdot \text{sen } 150°)$

e. $z_5 = \sqrt{2}(\cos 225° + i \cdot \text{sen } 225°)$

f. $z_6 = \sqrt{2}(\cos 300° + i \cdot \text{sen } 300°)$

g. $z_7 = 20(\cos 50° + i \cdot \text{sen } 50°)$

Formando duplas, os estudantes vão analisar e concluir como transformar da forma algébrica para a trigonométrica ou contrário.

1. Escreva um passo a passo de como transformar números complexos da forma algébrica para a trigonométrica, e outro para a transformação da forma trigonométrica para algébrica.
2. Efetue as operações indicadas, avaliando antes em quais situações é mais adequado ou mais simples utilizar a forma algébrica ou a forma trigonométrica.

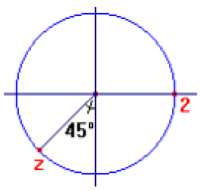
a. $z_1 + z_2$

b. $2z_3 - z_7$

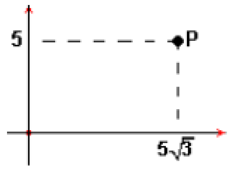
c. z_4 x z_6

d. z_5 / z_6

1. Observando a figura, identifique z na forma trigonométrica e na forma algébrica?



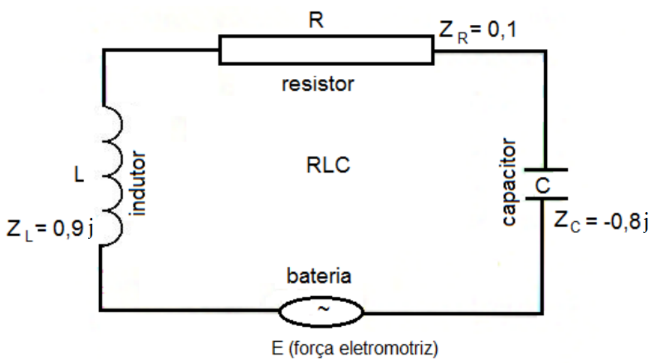
2. Considerando o ponto P representado no gráfico abaixo. Qual é a forma trigonométrica do número complexo z, representado pelo ponto P?



3. Considere $z_1 = -3 + 2i$ e $z_2 = 4 + i$. Qual a soma $z_1 + \bar{z}_2$ na forma trigonométrica?
4. Expresse, na forma trigonométrica, a divisão $\frac{1+i}{i}$.
5. Se $z_1 = \sqrt{3} + i$ e $z_2 = 3 + \sqrt{3}i$, então, quais são os valores do módulo e do argumento de $z_1 \cdot z_2$?
6. Dado $z = 2(\cos 15° + i \cdot \operatorname{sen} 15°)$, determine z^4 na forma algébrica.

Em circuitos de corrente alternada, por exemplo, as instalações elétricas residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos números complexos, o que facilita muito os cálculos. A relação $U = Ri$, estudada na Física do ensino médio e que utiliza dos números reais, torna-se $U = Zi$, em que U é a tensão, Z é a impedância e i é a corrente elétrica. Sendo que essas grandezas passam a ser representadas através de números complexos. Para que não haja confusão entre i, símbolo da corrente elétrica, e i, unidade imaginária, os engenheiros elétricos usam j como unidade imaginária na representação algébrica $a + bj$. Além disso, usam a notação $|w|\underline{|\theta}$ para forma trigonométrica $|w|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ do número complexo w.

7. Uma fonte de tensão, de valor eficaz $220\underline{|0°}$, alimenta uma carga de impedância Z=(10+10j) ohm. Calcule a corrente fornecida pela fonte.
8. Um circuito RLC contém um resistor, um indutor e um capacitor. A medida de resistência de um circuito RLC é chamada de impedância (Z) e é expressa por um número complexo. Num circuito RLC em série, a impedância equivalente (Z_{eq}) é dada por $Z_{eq} = Z_R + Z_L + Z_C$. Sendo o circuito RCL, em série, apresentado na figura abaixo, determine:



a) A impedância equivalente Z_{eq}.

b) A força eletromotriz U, no desenho indicada por E, em volts, quando $I = 20 + 100j$.

c) A corrente I, quando $U = j - 1$.

9. Em um circuito elétrico, a impedância complexa 4 + 3j significa 4Ω de resistência elétrica e 3Ω de reatância indutiva. A medida da impedância é o módulo do número complexo e o ângulo de fase θ tem como tangente a razão da reatância indutiva pela resistência elétrica. Determine a medida da impedância e o ângulo de fase.
10. Formule e resolva um problema, discutindo com seus colegas, que envolve a forma trigonométrica e que ajude a compreender melhor este modo de representar números complexos.

AVALIAÇÃO DO OBJETO DE APRENDIZAGEM

A avaliação quantitativa (pontuação) seguirá o modelo de escala EDUCAUSE 2001 (www.educause.edu). Abaixo segue os significados da escala proposta na avaliação do objeto de aprendizagem:

5 - Concordo plenamente
4 – Concordo
3 - Não concordo nem discordo
2 – Discordo
1 - Discordo totalmente
SR - Sem resposta

Em relação ao ambiente de aprendizagem “Show do Milhão”.

Critérios	5	4	3	2	1	SR
O OA apresenta informações precisas.						
O OA inclui quantidade adequada de material.						
O OA demonstra um conceito base.						
O OA resume bem os conceitos.						
É fácil andar pelo ambiente.						
O ambiente tem instruções claras de uso.						
O ambiente é motivador.						
O ambiente é visualmente atraente.						
O ambiente é interativo.						
A linguagem é adequada e sem erros ortográficos.						
A linguagem matemática é adequada e sem erros.						
Como recurso de aprendizagem, identifica objetivos de aprendizagem.						

Como recurso de aprendizagem, reforça conceitos progressivamente.						
Como recurso de aprendizagem, demonstra relações entre conceitos.						
Como recurso de aprendizagem, fundamenta em conceitos prévios.						
Como recurso de aprendizagem, é eficiente (pode-se aprender muito em curto período de tempo).						

Sobre o nível das questões, elas apresentam um avanço gradativo de complexidade?

( ) Sim ( ) Não.

Quanto dinheiro você recebeu na primeira vez que jogou? ___________

Quantas vezes você solicitou ajuda para responder as questões?

Nível ↓ Jogada →	**1º**	**2º**	**3º**	**4º**					
de 1 a 5 mil									
de 10 a 50 mil									
de 100 a 500 mil									
1 milhão									

Escreve abaixo, se você tem alguma observação ou sugestão a fazer que ajude no aprimoramento da atividade Show do Milhão. ____
____
____
____

Em relação ao ambiente de aprendizagem “Forma retangular para forma trigonométrica”.

Critérios	5	4	3	2	1	SR
O OA apresenta informações precisas,						
O OA inclui quantidade adequada de material,						
O OA demonstra um conceito base,						
O OA resume bem os conceitos,						
É fácil andar pelo ambiente,						
O ambiente tem instruções claras de uso,						
O ambiente é motivador,						
O ambiente é visualmente atraente,						

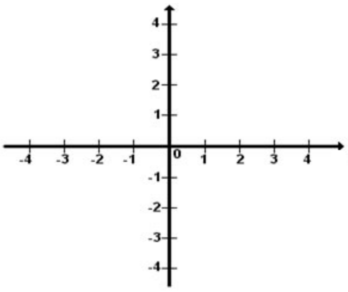
O ambiente é interativo,						
A linguagem é adequada e sem erros ortográficos,						
A linguagem matemática é adequada e sem erros,						
Como recurso de aprendizagem, identifica objetivos de aprendizagem,						
Como recurso de aprendizagem, reforça conceitos progressivamente,						
Como recurso de aprendizagem, demonstra relações entre conceitos,						
Como recurso de aprendizagem, fundamenta em conceitos prévios,						
Como recurso de aprendizagem, é eficiente (pode-se aprender muito em curto período de tempo),						

Além da forma algébrica (a + bi) dos números complexos, existe outra forma de representa-los, que a forma trigonométrica. Que dados são levados em consideração para representar um número complexo na forma trigonométrica? ____

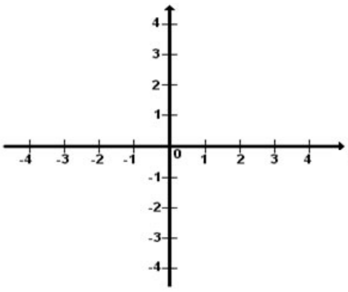
____

____

Represente no plano Argand-Gauss o número complexo $z_1 = 3 + 2i$ e determine-o na forma trigonométrica, destacando os elementos principais da forma trigonométrica.



Represente no plano Argand-Gauss o número complexo $z_2 = 3(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$ na forma algébrica.



Ao multiplicar dois números complexos, qual a relação existe entre esses elementos?

____

____

Ao dividir dois números complexos, qual a relação existe entre esses elementos?

____

____

Caso tenha alguma dica, observação ou sentimento que queira expor, em relação ao espaço de aprendizagem, sinta-se à vontade, pois o espaço de aprendizagem está em fase de construção e suas sugestões são de extrema importância para aprimorar este ambiente.

____

____

____

Recursos complementares

Para conhecer um pouco mais sobre a história dos números complexos indicamos o vídeo "O sonho continua" (http://youtu.be/3GohuvXDlk8), produção da UNICAMP, Matemática Multimídia. Mais informações podem ser acessadas no link: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1187.

Para quem prefere se aprofundar mais, ou ler sobre o assunto, no link http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euler/complexoshistoria.htm, possui o desenvolvimento dos números complexos, de uma forma mais detalhada.

Além desses recursos, a sugestão de um recurso complementar é a utilização do ambiente "Foco na teoria" do objeto de aprendizagem, onde se apresenta um pouco mais sobre os números complexos. Uma sugestão de videoaula http://www.youtube.com/watch?v=wh7CuWNR-S8, do Me salve!

PLANO DE AULA 4

O que o aluno poderá aprender com esta aula

- Efetuar as operações de potenciação e radiciação de números complexos;
- Compreender e representar geometricamente raízes de números complexos;
- Identificar o índice e o radicando de uma raiz cujas soluções estão representadas geometricamente;

- Criar uma rota de aprendizagem para o estudo de números complexos através do OA;
- Julgar se os objetivos de aprendizagem foram alcançados, considerando os critérios que definem os conceitos de avaliação da Escola.

Conteúdos

- Potenciação e radiciação

Duração da atividade

4 horas-aulas (200 minutos).

Conhecimentos prévios requeridos para as aprendizagens propostas

Conhecimentos sobre a forma trigonométrica dos números complexos, medida dos ângulos centrais de polígonos regulares, ângulos congruentes e relação entre as raízes e grau de um polinômio.

Estratégias e recursos da aula

2 períodos

Tendo estudado a multiplicação e divisão na forma trigonométrica, para finalizar o estudo dos números complexos, nessa rota de aprendizagem, faltam ainda as operações de potenciação e radiciação. Para desenvolver essas operações, os estudantes serão levados ao laboratório de informática, onde acessarão o OA, e o ambiente ”Potenciação de Números Complexos” e, posteriormente, o ambiente “Radiciação de Números Complexos”.

Para o entendimento da potenciação, espera-se que os estudantes não apresentem maiores dificuldades, relacionando-a diretamente com a ideia de operar com sucessivas multiplicações. Assim, o estudante deverá perceber a operação que deve efetuar com o módulo e o argumento do número complexo para elevá-lo à determinada potência. O Radice estará acompanhando e auxiliando o estudante, fazendo com que reflita e estabelece algumas conjecturas sobre o algoritmo da potenciação.

Em relação à radiciação, esta é uma operação considera difícil, tanto por estudantes e quanto por professores, mas merece uma atenção diferenciada, pois está presente nos currículos do Ensino Médio nos conteúdos previstos em vestibulares de instituições federais

(DIAS, 2013)[3]. Procurando superar esse desinteresse, o enfoque não será somente nos algoritmos da extração de raízes n-ésimas de números complexos (2° Fórmula de Moivre), mas será dada ênfase maior aos conceitos geométricos.

A substituição dos conceitos algébricos por geométricos é um recurso que temos para motivar os estudantes e apresentar uma aplicação dessa operação (ROSA, 1998)[4]. Segundo Rosa: "Relacionar a radiciação de números complexos com elementos dos polígonos regulares é um trabalho de aplicação desse conteúdo, bastante interessante para o aluno, que, a esta altura, tem a oportunidade de tratar números e geometria entrosadamente" (1998, p. 78). Ao focar em aspectos geométricos, os estudantes terão oportunidade de, intuitivamente, descobrir uma forma de calcular as raízes enésimas de qualquer número complexo.

Desse modo, para a operação de radiciação, é requerida uma atenção especial dos estudantes e será proposto que seja considerada, como de fato é, como operação inversa da potenciação, assim facilitando a compreensão da forma de processar as raízes. Assim, se na potenciação faz-se potência no módulo, então na radiciação faz-se a raiz no módulo. Se na potenciação faz-se multiplicação no argumento, então na radiciação faz-se divisão no argumento.

Inicialmente, os estudantes serão desafiados a calcular os valores da raiz quadrada de um número complexo. O Radice orientará nessa resolução, fazendo com que o estudante descubra uma forma de encontrar essas raízes, considerando a forma trigonométrica dos números complexos. Sem dúvidas, a forma trigonométrica é a mais adequada para efetuar essa operação; primeiro, Radice sugere que se calcule o módulo da raiz, extraindo a raiz quadrada do módulo do radicando. Assim, calculamos o módulo para as duas raízes, o que diferencia uma raiz da outra é o seu argumento. Como ao extrair a raiz enésima de um número complexo, teremos sempre o mesmo módulo, alterando somente o argumento. Como o radicando é diferente de zero, Radice sugere que se desenhe uma circunferência centrada na origem e de raio igual ao módulo da raiz, pois assim, estão expressas todas as possíveis raízes. Desse modo, as raízes serão expressas por pontos que pertencem a circunferência, faltando calcular o ângulo (argumento) de cada raiz para determinar as soluções e representá-las.

Com a representação das raízes como pontos da circunferência, o estudante percebe que as soluções dividem-na em duas partes iguais, assim os ângulos centrais serão iguais.

---

[3] DIAS, Maura Araujo. **Representação geométrica dos Números Complexos**: aplicações e possibilidades didáticas. 2013. 69 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2013.

[4] ROSA, Mário Servelli. **Números Complexos**: Uma abordagem histórica para aquisição do conceito. 1998. 170 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação em Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1998.

Uma solução é simples de ser encontrada, dividindo o argumento do radicando pelo índice da raiz. Deste modo, calculamos o argumento de uma das soluções. Deste modo, conseguimos determinar uma das raízes na sua forma trigonométrica, com o seu módulo e o argumento. A outra solução é o oposto (rotacionado 180° em relação a primeira raiz), geometricamente, da raiz já calculada. Ao representar as soluções de uma raiz quadrada, no plano de Argand-Gauss, é perceptível que circunferência será dividida em duas partes iguais.

De forma intuitiva, Radice orientará para que os estudantes façam o mesmo raciocínio para extrair qualquer raiz de número complexo. Assim, na raiz cúbica teremos três soluções que dividem a circunferência em três partes iguais. O mesmo ocorre para qualquer raiz, sendo o índice do radical a quantidade de partes em que a circunferência será dividida. Ao dividir a circunferência em partes iguais, esperamos que os estudantes percebam que os argumentos crescem em progressão aritmética. Assim, ao descobrir um argumento e a quantidade de partes em que a circunferência será dividida, conseguimos determinar o ângulo central e calcular os argumentos das outras soluções. O módulo sempre será igual para todas as raízes, e para determinar o módulo das raízes é extraída a raiz enésima do radicando, assim temos o módulo para as raízes. Segundo Lima[5]: "Se $r \neq 0$, as imagens dessas raízes são vértices de um polígono regular de n lados inscritos em uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{r}$. Se $r = 0$, é claro que todas as raízes são iguais a 0" (2006, p. 175).

A abordagem da radiciação será essencialmente geométrica, estabelecendo uma relação entre raízes de números complexos com vértices de polígonos regulares, percebendo assim que os argumentos crescem aritmeticamente, conforme o ângulo central do polígono. Essa ideia é sugerida pelo Radice, assim sabendo uma solução fica fácil determinar as outras. Deste modo, não é apresentando nenhuma fórmula para os estudantes, com a exploração geométrica, eles criam conjecturas e analisando-as, descobrirão uma forma de extrair raízes n-ésimas de um número complexo e, somente no final da abordagem geométrica, será apresentada a 2° Fórmula de Moivre.

Realizada essa interação no OA, os estudantes resolverão algumas questões referentes às operações estudadas e responderão algumas questões sobre o OA e a rota de aprendizagem aplicada (Apêndice A).

Caso o professor sinta necessidade, poderá fazer algumas observações na sala de aula e mediar alguns diálogos, fazendo com que o estudante reflita e construa conjecturas corretas.

---

[5] LIMA, Elon Lages. **A matemática do ensino médio**. 6.ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, [2003-2006]. 3 v. (Coleção do professor de matemática ; 13-15).

2 períodos

Finalizando as aulas de números complexos, os estudantes serão incentivados a criar rotas de aprendizagem com a utilização do OA, como também a criação de fractais com o auxílio do professor, para ser disponibilizado junto ao OA.

A rota de aprendizagem a ser desenvolvida pelos estudantes tem como objetivo sugerir uma sequência de etapas ou caminhos para quem quer ou precisa aprender números complexos sem o auxílio de um professor. Para esta atividade, metade da turma vai discutir e analisar os ambientes de aprendizagem, com o propósito de organizar um planejamento para aprender sobre números complexos. Essa rota de aprendizagem será disponibilizada no OA, no "para aprender" do ambiente "Rotas de aprendizagem".

A outra metade da turma vai fazer a atividade de criação de fractais, com o auxílio do professor. No ambiente "O que são fractais?", integrado ao espaço "Aplicações" consta um conjunto de algoritmos para o software MatLab, com os quais é possível criar os fractais: de Newton, Julia e Mandelbrot. O professor acessará o MatLab no seu computador, e fará o download dos algoritmos. Esses algoritmos requerem alguns dados de entrada que devem ser inserido para a criação dos fractais. Os estudantes irão sugerir alguns dados de entrada, gerando os fractais. Após alguns testes, escolherão algumas imagens de fractais para fazer parte do OA. Assim, o professor salvará os dados de entrada, como também, o fractal gerado.

Essas atividades acontecerão simultaneamente, onde após a criação dos fractais e da rota de aprendizagem, os estudantes compartilharão suas produções. Um dos grupos justificará a escolha dos caminhos para a rota de aprendizagem, e outro, relatará algumas conjecturas e relações estabelecidas sobre os fractais gerados e as variáveis de entradas estabelecidas.

Como atividade final, os estudantes serão desafiados a entrar no ambiente "Espaço do Vestibulando" para resolver questões de vestibular sobre números complexos.

Avaliação

O professor estará atento a perguntas, respostas e comentários dos alunos, de modo a acompanhá-los nas interações com o objeto de aprendizagem, intervindo, quando necessário, para que os objetivos de aprendizagem sejam contemplados. A avaliação da aprendizagem e do objeto de aprendizagem acontecerá por meio do questionário, quando os estudantes responderão perguntas voltadas ao aperfeiçoamento do OA e perguntas relacionadas aos números complexos. Desta forma, identificaremos se os objetivos iniciais foram atingidos.

De acordo com os conceitos de avaliação, atualmente praticados na Escola, será atribuído:

CSA – para os estudantes que interagirem com o OA, estabelecerem uma relação de respeito durante a aula e realizarem as avaliações solicitadas sobre o conteúdo aprendido. Sobre o conteúdo, ao responderem os exercícios, devem constar os correspondentes algoritmos para a resolução de potenciação e de radiciação de números complexos.

CPA – para os estudantes que interagirem com OA, estabelecerem uma relação de respeito durante a aula, mas que não demonstraram ter compreendido a forma de resolver a potenciação e a radiciação de números complexos.

CPA – para os estudantes que não interagirem com OA ou não estabelecerem uma relação de respeito durante a aula, mas que demonstraram ter compreendido a forma de resolver a potenciação e a radiciação de números complexos.

CRA – para os estudantes que não interagirem com OA ou não estabelecerem uma relação de respeito durante a aula e que não demonstrem ter aprendido as operações estudadas.

LISTA DE EXERCÍCIOS SOBRE POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

A avaliação quantitativa (pontuação) seguirá o modelo de escala EDUCAUSE 2001 (www.educause.edu). Segue, abaixo, os significados da escala proposta na avaliação do objeto de aprendizagem:

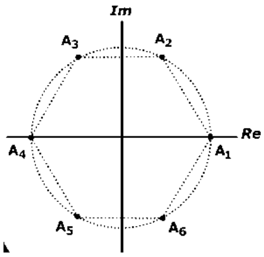
5 - Concordo plenamente	3 - Não concordo nem discordo	1 - Discordo totalmente
4 - Concordo	2 - Discordo	SR - Sem resposta

Em relação ao ambiente de aprendizagem “Potenciação de Números Complexos” e “Radiciação de Números Complexos”.

Critérios	5	4	3	2	1	SR
O OA apresenta informações precisas						
O OA inclui quantidade adequada de material						
O OA demonstra um conceito base						
O OA resume bem os conceitos						
É fácil andar pelo ambiente						
O ambiente tem instruções claras de uso						
O ambiente é motivador						
O ambiente é visualmente atraente						
O ambiente é interativo						

A linguagem é adequada e sem erros ortográficos						
A linguagem matemática é adequada e sem erros						
Como recurso de aprendizagem, identifica objetivos de aprendizagem						
Como recurso de aprendizagem, reforça conceitos progressivamente						
Como recurso de aprendizagem, demonstra relações entre conceitos						
Como recurso de aprendizagem, fundamenta em conceitos prévios						
Como recurso de aprendizagem, é eficiente (pode-se aprender muito em curto período de tempo)						

1. Efetue a seguinte operação: $2(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)^6$ e explique os procedimentos aplicados para encontrar o resultado da potência.
2. Ao resolver à raiz quinta de um número complexo, sabemos os módulos das soluções serão iguais. Determinado o módulo, podemos desenhar uma circunferência de raio igual ao módulo. Ao resolver à raiz quinta, em quantas partes a circunferência será dividida? E qual é o valor do ângulo central, do polígono formado pelas soluções?
3. Qual deve ser o procedimento, como um passo a passo, que se deve realizar para determinar a $\sqrt[5]{243\ (\cos 50° + \ i \,\text{sen}\, 50°}$?
4. No desenho abaixo, temos a representação do resultado de uma radiciação. Qual é o índice da raiz que foi calculada?



5. Sobre números complexos, você acredita ter aprendido o conteúdo? Se pudesse escolher entre ter explicação somente do professor ou interagir somente no site, qual você preferiria?
6. É possível aprender o conteúdo de números complexos somente interagindo no OA?
( ) Sim é possível! ( ) Sim, mas precisa ter também a ajuda do professor.

( ) Não é possível, pois os aplicativos não são claros!

7. Os aplicativos ajudaram na compreensão do conteúdo de números complexos? Conseguiste interagir de forma produtiva com o Radice? Ele ajudou?
8. Sobre o conteúdo dos números complexos, em que assunto(s) você sentiu mais dificuldade? Marque uma ou duas das seguintes opções:

( ) Unidade imaginária ( ) Soma e subtração ( ) Multiplicação ( ) Divisão

( ) Forma trigonométrica ( ) Potenciação ( ) Radiciação

9. Você tem alguma sugestão do que precisa melhorar ou de algo para acrescentar no OA para facilitar a compreensão neste estudo?
10. No site, do que você sentiu falta para melhor compreender o conteúdo de números complexos?
11. Classifique em 1, 2 e 3, por ordem de importância, os espaços de aprendizagem em que você mais aprendeu no OA.

    ( ) Fazer e compreender ( ) Caminhada Histórica ( ) Aplicações

    ( ) Espaço do vestibulando ( ) Apoio tecnológico ( ) Foco na teoria

    ( ) Calculadora ( ) Quem quer dinheiro? Show do Milhão
12. Qual das aplicações de números complexos chamou mais a sua atenção?

    ( ) Fractais ( ) Corrente Alternada ( ) Sustentação do avião
13. Em alguma parte desse estudo que você realizou, sentiu necessidade de ter algum conhecimento de outra disciplina escolar? Se sim, qual?
14. Deixe seu comentário, de como foram as aulas, tendo o site como recurso de aprendizagem.

APÊNDICE C – AMOSTRA DE QUESTÕES DO SHOW DO MILHÃO

Perguntas de 1 a 5 mil, disponibilizadas trinta e três atividades no Show do Milhão. A seguir damos uma amostra do tipo de questão. A resposta em negrito é a correta.

Identifique a parte real e a parte imaginária do número complexo z = 2 + 3i:

Im(z) = 3 e R(z) = 2

Im(z) = 2 e R(z) = 3

Im(z) = 3 e R(z) = 3

Im(z) = 2 e R(z) = 2

Dado z = -3 + i, a parte imaginária do número complexo z é igual a:

3

-3

-1

1

Qual é o número z sabendo que Im(z) = -2 e Re(z) = 3?

z = 3 – 2i

z = -2 + 3i

z = 3 + 2i

z = -3 – 2i

Determine o valor de “a” e “b” para ter a igualdade 4 + 7i + a + bi = 2 + i verdadeira.

a = -2 e b = -6

a = -6 e b = -2

a = 2 e b = 6

a = 2 e b = -6

Resolvendo a equação (2x + 10) + (x^2 – 25)i = 0, conclui-se que x deve ser:

5

-5

5 ou -5

-10

Se o número complexo z = 1 + 2i, o conjugado de z é:

1 – 2i

-1 – 2i

-1 + 2i

2 + i

Perguntas de 10 a 50 mil, disponibilizadas trinta e três atividades no Show do Milhão. A seguir damos uma amostra do tipo de questão.

As raízes da equação $x^2 - 6x + 13 = 0$ são:

3 + 2i e -3 + 2i

3 + 2i e -3 - 2i

-3 + 2i e -3 - 2i

3 + 2i e 3 – 2i

Sejam z = 1 + 3i, w = i e q = -7. A soma de z + w + q é igual a

z + w + q = -6 + 4i

z + w + q = 8 + 4i

z + w + q = -6 + 2i

z + w + q = 6 + 4i

A subtração de z = 1 – 2i com seu conjugado é igual a

2

-4i

4i

0

O produto de z = 2 + 3i por w = 3 + 5i é igual a

z.w = -9 - 19i

z.w = 9 - 19i

z.w = -9 + 19i

z.w = 9 + 19i

O quociente de 15 + 5i por 3 - 4i é igual a

-1 + 3i

1 + 3i

1 – 3i

-1 - 3i

O valor de i^{123} é igual a:

i

1

-1

-i

Perguntas de 100 a 500 mil, disponibilizadas trinta e três atividades no Show do Milhão. A seguir damos uma amostra do tipo de questão.

Calcule o valor de $i^{100} - i^{200}$

0

1 + i

-2

1 - i

Sejam z = 1 + 3i, w = 2 - i e q = -2 + i. O resultado de 2z + w - 3q é igual a

2z + w - 3q = -2 + 8i

2z + w - 3q = 10 + 2i

2z + w - 3q = 6 + 4i

2z + w - 3q = -2 + 2i

O número complexo z = -2 - 2i na forma trigonométrica é igual a

sqrt 8[cos(45°)+isen(45°)]

sqrt 8[cos(225°)+isen(225°)]

2[cos(225°)+isen(225°)]

2[cos(45°)+isen(45°)]

A forma trigonométrica do número complexo z = -2 - 2i possui, respectivamente, módulo e argumento igual a:

2(sqrt 2) e 225°

2 e 225°

2 e 45°

2(sqrt 2) e 45°

Seja o número complexo 4i/(1+i). A forma trigonométrica do quociente possui, respectivamente, módulo e argumento igual a:

4 e 45°

2 (sqrt 2) e 135°

2 (sqrt 2) e 45°

4 e 135°

O produto de z = cos (30°) + i sen (30°) por w = cos (60°) + i sen (60°) é igual a

(sqrt 3) + i

(sqrt 2) + i

1

i

Perguntas de 1 milhão, disponibilizadas seis atividades no Show do Milhão. A seguir damos uma amostra do tipo de questão.

Dados z = 1 + 2i, w = sqrt 2 [cos (45º) + i sen (45°) e q = -2 – 3i. Calcule [(zw + w) / z] + qi

(23 – 6i)/5

(-13 – 9i)/5

(28 – 6i)/5

(2 + 7i)/5

Calcule [(qw + zi) / 3q] + w, sendo z = -2 - 5i, w = 2 (sqrt 2) [cos (45°) + i sen (45°) e q = – 3i.

(29 + 22i)/9

(-7 – 4i)/9

(26 + 29i)/9

(-10 - 7i)/9

APÊNDICE D – TEXTO DO AMBIENTE “APLICAÇÕES”

Porque os aviões voam?

Muitos adultos, quando crianças, deveriam ficar intrigados com a capacidade de um avião voar. É complicado uma criança compreender este fato, considerando que um avião pode ter uma massa aproximada de 250 mil quilogramas. É realmente uma questão intrigante, tanto para a criança, quanto para qualquer pessoa que não conhece os princípios físicos envolvidos. O cenário apresentado parece ser de difícil compreensão, mas alguns conceitos físicos são compreensíveis para os alunos do Ensino Médio.

Existe dois conceitos físicos que fazem o avião ter sustentação, e são fáceis de serem percebidos através de alguns experimentos, sendo algo compreensível para os alunos. Mas, e os números complexos, onde estão nesta história? Calma, primeiro vamos abordar brevemente os aspectos físicos envolvidos e contando um pouco sobre a história da aviação.

Não existe uma aceitação universal de quem teria realizado o primeiro voo, alguns estudiosos dedicam este fato a Alberto Santos Dumont, outros, aos irmãos Wright. O que diferencia os fatos é que o voo de Dumont foi testemunhado por grande público em Paris, em 1906, e cuja aeronave não precisava de nenhum auxílio externo à decolagem; já o dos irmãos Wright teria sido presenciado por poucas pessoas, em 1903, e cuja aeronave exigia a utilização de uma catapulta para decolagem do avião. Desta forma, ele comprovou a possibilidade de voo controlado pelo homem e pilotou o primeiro avião com propulsão própria: 14 Bis (RODRIGUES, 2009).

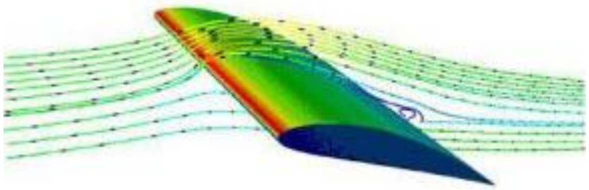
Por volta desta mesma época, Nikolai Yegorovitch Joukowsky, cientista russo, procurava explicar matematicamente como o avião poderia voar, ou seja, explicar a origem da força de sustentação aerodinâmica. Ele desenvolveu seu estudo utilizando a Teoria das Funções Complexas e o Princípio de Bernoulli, sendo conhecido como o fundador da aerodinâmica e hidrodinâmica moderna. Para realizar este estudo, ele utilizou um caso particular da Transformação Conforme[1], a Transformação de Joukowsky, que consiste em utilizar variáveis complexas para transformar figuras geométricas de um plano complexo em figuras totalmente diferente em outro plano. Joukowsky partiu do desenho de um círculo, pois conhecia o comportamento do fluído sobre esta figura, e utilizando transformações

[1] A Transformação Conforme representa uma técnica para resolver problemas com domínios mais complexos que tem sido aplicada com sucesso em diversas áreas da engenharia, como a aerodinâmica (ALMEIDA; PAZOS, 2007).

geométricas, construiu uma curva fechada no plano complexo, tal como o perfil de uma asa de avião[2], cujo resultado é conhecido como aerofólio de Joukowsky.

Um aerofólio escoando em um fluído cria uma diferença de pressão entre as suas partes inferior e superior por causa da diferença da velocidade de escoamento do fluído. Essa diferença de velocidade é ocasionada pelo seu formato especial, a curvatura, e da deflexão (desvio) do ar. A quantidade de sustentação produzida por uma asa depende, em parte, de seu ângulo de ataque, que veremos mais adiante o que significa e de seus dispositivos de alta sustentação. Ao utilizar o perfil de asa, a força de arrastro, que é oposta a direção do avião, será mínima, comparando com outros corpos, como a esfera (SANTOS, 2009).

Figura 1 – Perfil de asa do avião.
Fonte: RODRIGUES, 2009, p. 27.

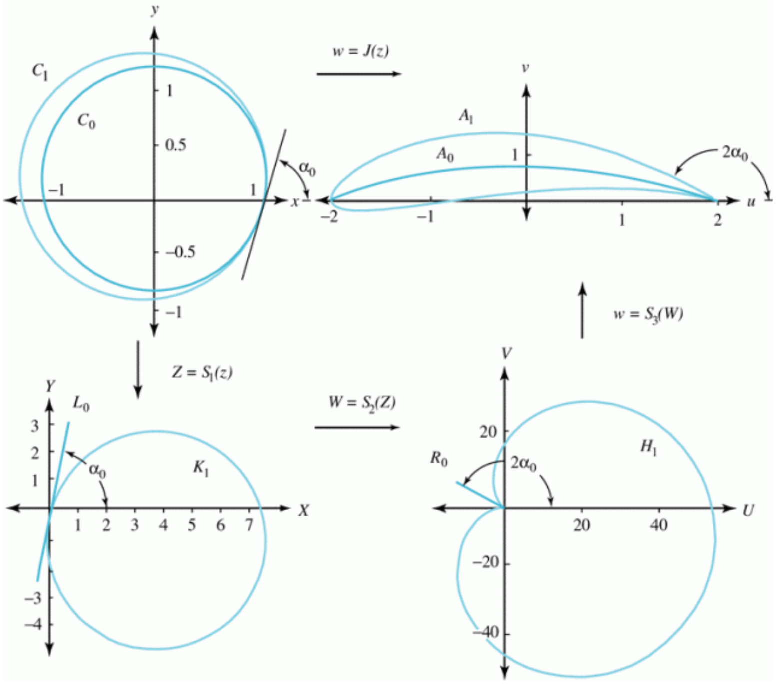


A partir de uma solução matemática, Joukowsky definiu o perfil aerodinâmico que facilita a circulação do fluído em torno da asa do avião, tendo como elementos essenciais uma borda arredondada, superfície dupla (curva ou reta) e uma cauda afiada (borda). Ele criou uma fórmula para transformação de um círculo no plano cartesiano em um perfil de asa no plano Argand-Gauss. A função complexa utilizada é $z = \gamma + \frac{1}{\gamma}$, onde $z = x + iy$. Então, inicialmente temos um círculo deslocado da origem, pois a distância em que ele se encontra deslocado da origem vai alterar a curvatura e a espessura do perfil de asa, como ilustra a Figura 2.

Assim, com a criação do perfil de asa, foi possível realizar uma análise do fluxo de ar em torno da asa, otimizando o desempenho dos aviões. Isto só é possível, pois ao transformar figuras geométricas em outras, utilizando equações complexas, as mesmas equações criam as linhas de fluxo em torno da forma geométrica. Sendo assim,-através do princípio de Bernoulli, é possível analisar a velocidade do ar, passando sob e sobre o perfil de asa. Esse cálculo e aperfeiçoamentos mais realistas foram importantes para o desenvolvimento da aerodinâmica e dos projetos aeronáuticos que temos hoje.

[2] Aerofólio ou perfil de asa é o termo usado para designar as formas das secções em corte da superfície de um planador que produzem sustentação (GALVÃO, 2012).

Figura 2 – Passo-a-passo o resultado da Transformação de Joukowsky.
Fonte: SCIO SCIRE DOMINIUM, 2011.

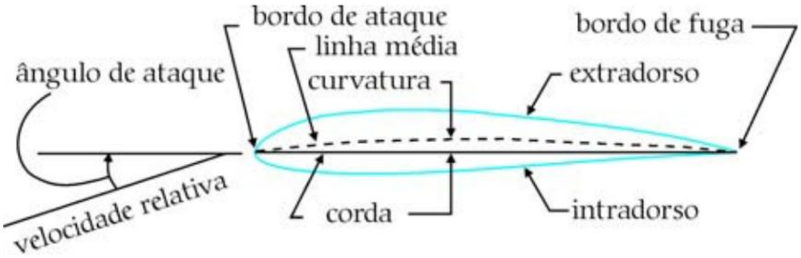


A Figura 2 representa a transformação de Joukowsky, mas conhecendo algumas características geométricas de um perfil aerodinâmico, que serão abordadas abaixo, podemos construir perfis de asa com o auxílio de software gráfico, como o MatLab (caso tenha interesse em ver alguns perfis de asas criados pelo MatLab e para ter acesso ao algoritmo, esta no final do texto). Antes de analisar alguns perfis de asa criados através da transformação de Joukowsky, vamos conhecer algumas características geométricas de um perfil aerodinâmico.

A linha de curvatura (arqueamento) média é a linha que define o ponto médio entre todos os pontos que formam as superfícies superior e inferior do perfil, ou seja, o lugar geométrico da meia espessura do aerofólio ao longo de toda a sua extensão. A corda é o segmento de reta imaginário que liga o bordo de ataque (parte frontal) ao bordo de fuga (parte posterior). A espessura característica do perfil é o valor máximo, medido perpendicularmente à linha da corda. O arqueamento representa a máxima distância que existe entre a linha de arqueamento média e a linha da corda do perfil (EASTLAKE, 2002).

As características geométricas do aerofólio influenciam a força de sustentação gerada pelo aerofólio. O ar que escoa por baixo da asa tem velocidade menor do que o ar que se movimenta sobre a asa. O ar sobre a asa é acelerado exercendo menos pressão, enquanto o ar sob a asa é menos veloz e exerce maior pressão, implicando em uma resultante para cima. A análise da velocidade do ar sobre e sob a asa pode ser visto na figura abaixo. Quanto mais curvadas estiverem as linhas de fluxo de ar, maior é a velocidade. Desta forma, a velocidade maior está na parte de cima do perfil, gerando sustentação.

Figura 3 – Características geométricas de um perfil de asa.
Fonte: EASTLAKE, 2006, p. 53.



Quem explicou esta teoria foi Daniel Bernoulli, com o princípio que leva seu nome, sendo um dos principais conceitos da Aerodinâmica, sua explicação está na conservação da energia. O principio de Bernoulli é definido da seguinte forma: “Se a velocidade de uma partícula de um fluído aumenta enquanto ela escoa ao longo de uma linha de corrente, a pressão dinâmica do fluído deve aumentar e vice-versa”.

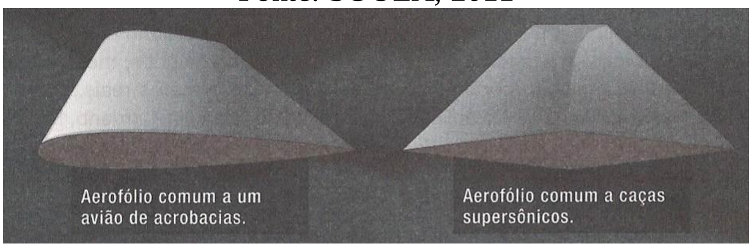
A força de sustentação representa a maior qualidade que uma aeronave possui em comparação com os outros tipos de veículos e define a habilidade de um avião se manter em voo. Basicamente, a força de sustentação é utilizada como forma de vencer o peso da aeronave e assim garantir o voo (RODRIGUES, 2009).

Figura 4 – Análise do fluxo de ar no perfil de asa.
Fonte: BRAZ JÚNIOR, 2006.

Além do princípio de Bernoulli, há outro mecanismo que contribui para a sustentação, consiste em quando o ar bate na parte de baixo do perfil. Assim, existe uma força que impulsiona o perfil para cima, enquanto o ar volta. O perfil aplica uma força para baixo no ar e o ar aplica no perfil uma força de mesma magnitude no sentido de empurrar a perfil para cima. Este mecanismo da força de sustentação é explicado pela terceira lei de Newton, ou seja, para qualquer força de ação aplicada existe uma reação de mesma intensidade, direção e sentido oposto (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012). Tanto a sustentação quanto o arrasto são determinados pelo ângulo de ataque. Outros fatores determinam o comportamento de um voo são o peso e o empuxo da aeronave. (Para saber mais, veja o texto após o algoritmo do MatLab).

Existem alguns métodos disponíveis para analisar os perfis aerodinâmicos, como softwares que utilizam modelos de perfis prontos, por exemplo: o Profili e o Xfoil. Mas, este não é o método mais eficiente. A utilização dos números complexos, junto com a Transformação Conforme, permite a construção de modelos geométricos rigorosos, sendo possível assim atenuar sensivelmente as eventuais oscilações geométricas que venham a ocorrer na região do bordo de ataque, provenientes da variação de inclinação dos painéis durante o processo iterativo. Com isso, garante-se a geração de formatos aerodinâmicos suaves em todo o contorno (PETRUCCI; MANZANARES FILHO, 2002). Este método utiliza a Transformação de Joukowsky, Transformação Conforme, em que a busca do perfil é realizada num plano transformado, em geral nas proximidades de um círculo.

Figura 5 – Perfil de asa de um avião de acrobacias e de um supersônico
Fonte: SOUZA, 2011

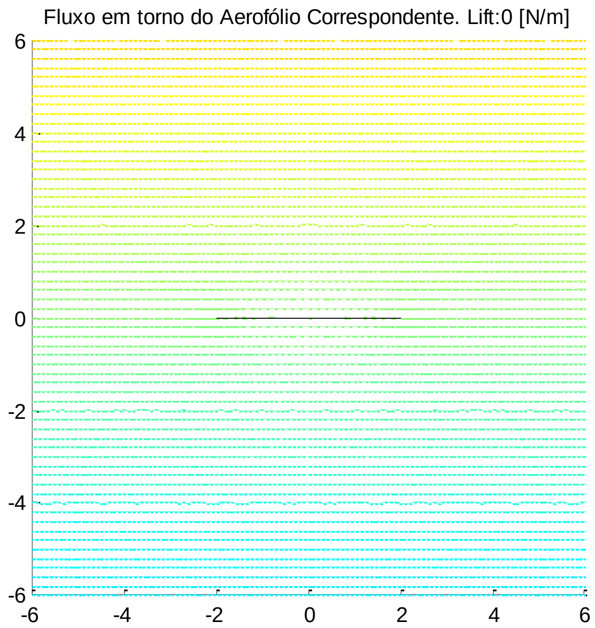


Portanto, os números complexos é um conhecimento importante para o estudo e análise do escoamento em torno dos perfis aerodinâmicos. Assim, tendo o conhecimento da Transformação Conforme, da estrutura e do comportamento aerodinâmico é possível projetar diversos tipos de aerofólios, atendendo a objetivos específicos (SOUZA, 2011). Provavelmente, sem este conhecimento não teríamos os aviões de alta tecnologia que possuímos.

CONSTRUÇÕES DE PERFIS DE ASA NO MATLAB

Tendo o conhecimento desses aspectos, podemos analisar alguns perfis de asa construídos com o auxílio do software MatLab R2009a, abaixo das simulações, segue o script elaborado para a criação dos perfis de asa.

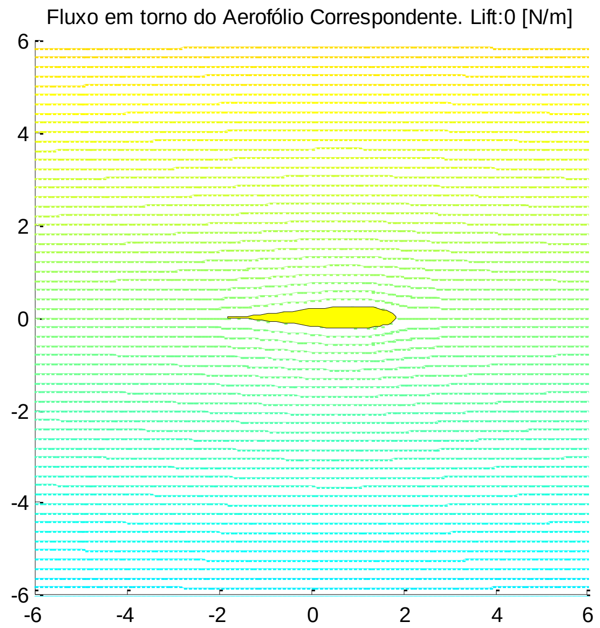
Figura 1 - Transformação de Joukowsky com círculo centrado na origem.
Fonte: Elaborada pelo autor



A figura acima representa a transformação de um círculo de raio, centrado na origem. Assim, ao inserir os dados no aplicativo, de uma circunferência centrada na origem, o resultado da transformação de Joukowsky resultou numa linha reta, ou seja, num perfil sem espessura e sem curvatura. Outros dados são solicitados no aplicativo são o módulo assintótico da velocidade[3] [m/s], ângulo assintótico da velocidade[4] [deg] e o raio [m]. Inicialmente vamos utilizar, respectivamente, os valores de 16, 0, 1. Agora, deslocando somente o círculo em relação ao eixo x, o perfil de asa mudará.

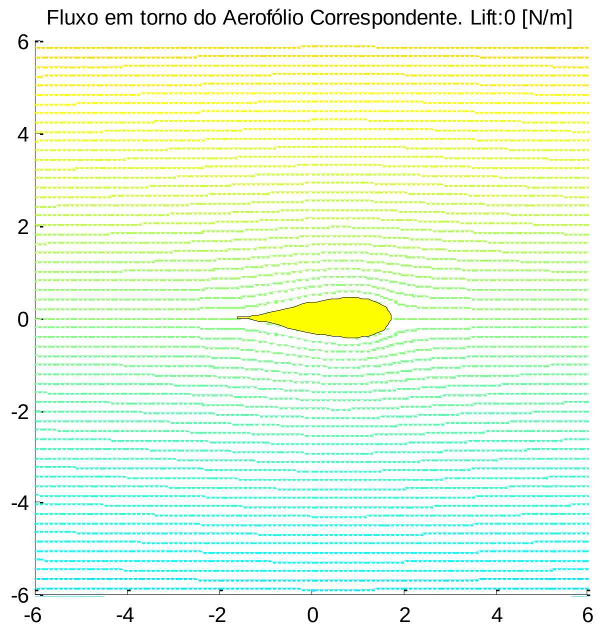
Figura 2 - Transformação de Joukowsky com círculo centrado em (0.1, 0).
Fonte: Elaborada pelo autor

3 O módulo assintótico da velocidade consiste na velocidade que o ar escoa sobre o perfil de asa.
4 O ângulo assintótico da velocidade consiste na inclinação que ar escoa em relação ao horizonte.



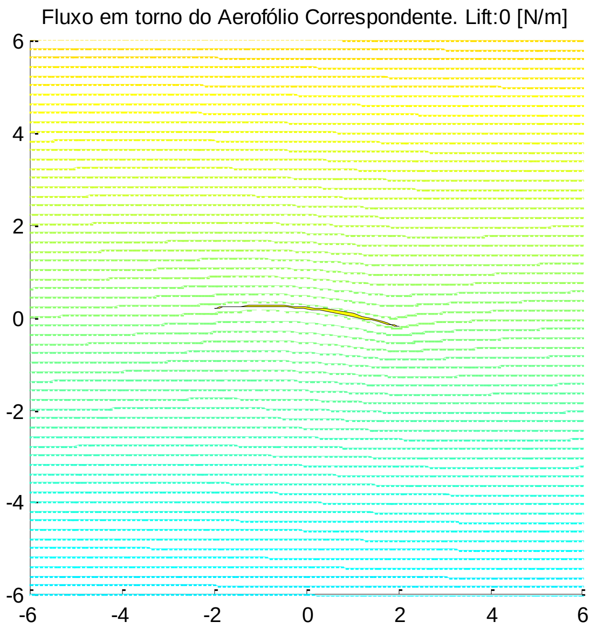
A figura acima foi gerada, através de um círculo com centro em (0.1, 0). Percebemos que o perfil de asa ganhou forma, tem espessura, mas não apresenta curvatura, conhecido também com um perfil simétrico. Deslocando o círculo mais da origem, o perfil de asa será mais espesso.

Figura 3 - Transformação de Joukowsky com círculo centrado em (0.2, 0).
Fonte: Elaborada pelo autor



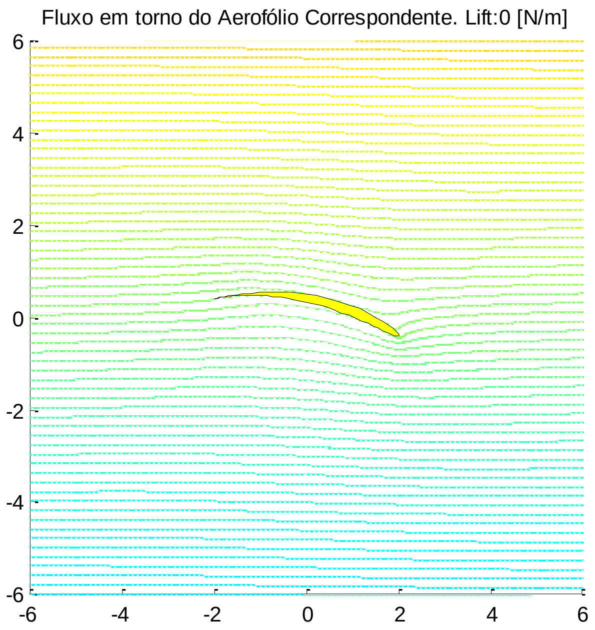
Este é um perfil de asa criado, através de círculo com centro em (0.2, 0). Veja que ele permanece simétrico, não tendo nenhuma curvatura, alterando o eixo x, ele ficou mais espesso. Agora, vamos analisar o que acontece quando alteramos somente o eixo y.

Figura 4 - Transformação de Joukowsky com círculo centrado em (0, 0.1).
Fonte: Elaborada pelo autor



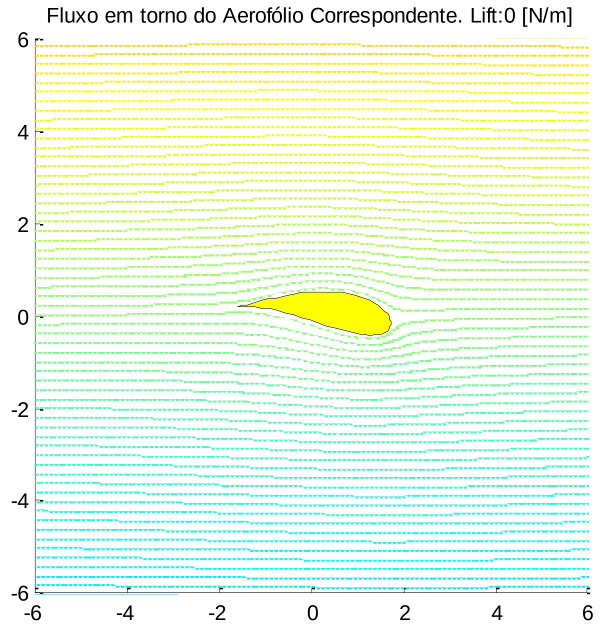
Alterando somente o eixo y, no círculo com centro em (0, 0.1), a linha reta sofreu alteração, ficando uma curva e com uma espessura pequena. Assim, ao alterar o eixo y, a transformação altera significativamente a curvatura e altera um pouco a espessura do perfil.

Figura 5 - Transformação de Joukowsky com círculo centrado em (0, 0.2).
Fonte: Elaborada pelo autor



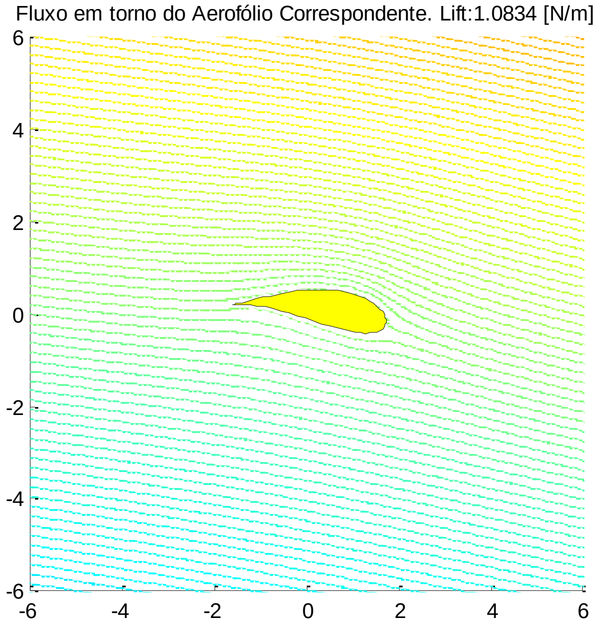
A figura acima foi gerada através de um círculo com centro em (0, 0.2). Percebemos que a curvatura aumentou, como também a espessura do perfil, mas não basta alterar somente um dos eixos do centro do círculo, é necessário alterar os dois eixos. Veja a figura abaixo, um perfil criado com um círculo, cujo centro é (0.2, 0.1), então dependendo do centro do círculo inicial, o perfil criado será mais ou menos curvado e espesso.

Figura 6 - Transformação de Joukowsky com círculo centrado em (0.2, 0.1).
Fonte: Elaborada pelo autor



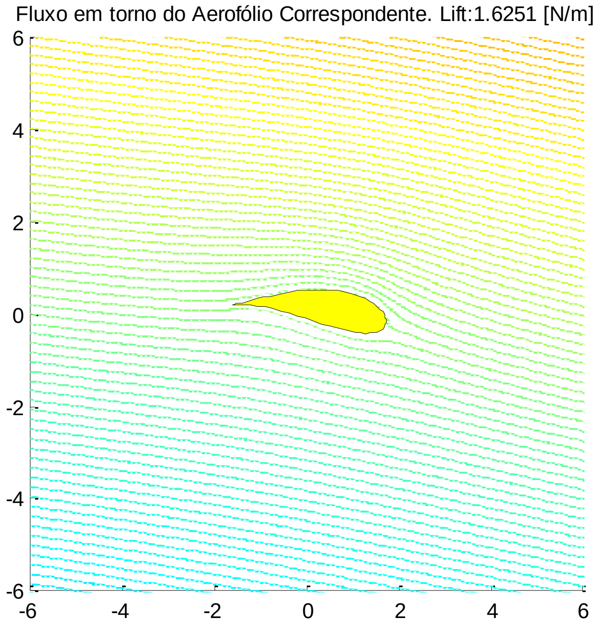
Mas, somente ter um perfil de asa não é suficiente para o avião ganhar sustentação; nas figuras acima, todas possuem um título: “Fluxo em torno do Aerofólio Correspondente. Lift: 0 [N/m]” que é o valor da força de sustentação, assim, percebemos que o aerofólio não gera sustentação. Assim, alterando alguns dados iniciais é possível perceber que a força de sustentação será alterada.

Figura 7 - Análise do perfil de asa com ângulo assintótico de velocidade 10º.
Fonte: Elaborada pelo autor



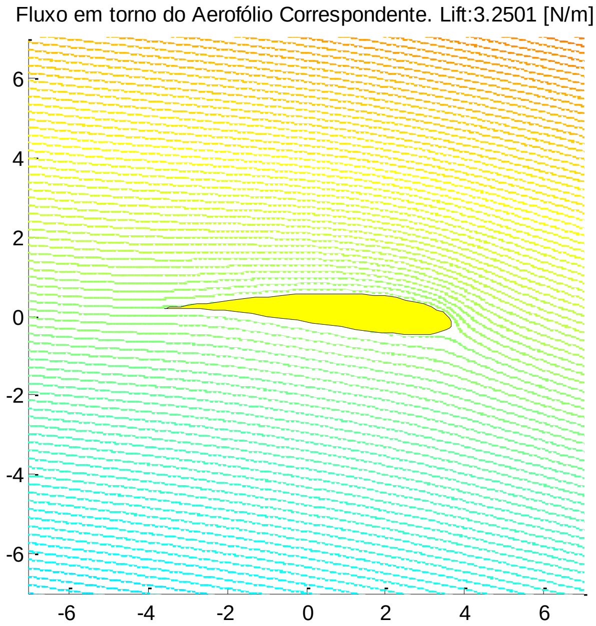
A figura acima representa o perfil de asa criado anteriormente, mas alteramos o ângulo assintótico da velocidade, ao invés de 0 utilizamos 10. O ângulo assintótico da velocidade é a inclinação do fluxo de vento em relação ao horizonte. Alterar o módulo assintótico da velocidade para mais, fará, também, que a força de sustentação aumente, como ilustra a figura abaixo, onde foi alterado o valor do módulo assintótico da velocidade, de 16 para 24.

Figura 8 - Análise do perfil de asa com uma velocidade de 24 m/s.
Fonte: Elaborada pelo autor



O raio do círculo influência para determinar o tamanho da corda do perfil de asa, e a relação é de 1 para 4, ou seja, se o raio do círculo for de uma unidade de comprimento, o tamanho da corda será de 4 unidades de comprimento, como pode ser observado nos perfis criados acima.

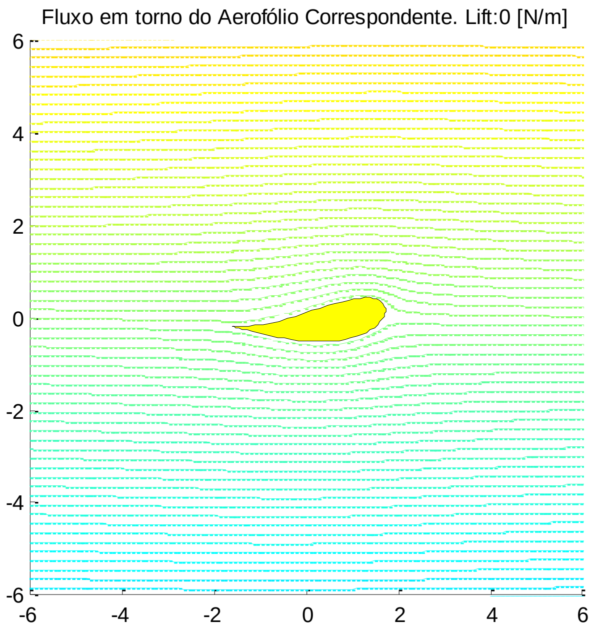
Figura 9 - Perfil de asa criado através de círculo de raio 2.
Fonte: Elaborada pelo autor



Para gerar o perfil acima foram utilizados os mesmos dados do último perfil, porém, o raio foi alterado de 1 para 2, assim, a corda aumentou, tendo um tamanho próximo ou igual a 8 unidades de comprimento.

Os aerofólios não são somente usados em aviões, geralmente em carros que atingem alta velocidade, os possuem também. Porque estes carros não voam? Eles acabam não voando, porque a asa tem a função contrária, ou seja, a sustentação não está puxando o carro para cima, mas para baixo. Neste caso, a velocidade do ar é mais rápida sob o aerofólio, do que sobre ele, assim ele gera uma força para baixo, na mesma direção do peso do carro. Assim, o círculo utilizado para a transformação de Joukowsky deve ter o centro localizado em outro ponto, para criar a sustentação no sentido para baixo, devemos inverter o valor do eixo y, ou seja, vamos utilizar um número negativo. Veja a figura abaixo que foi gerada através de círculo de centro (0.2, -0.1). Este tipo de aerofólio gera sustentação na direção do peso da asa.

Figura 10 - Transformação de Joukowsky com círculo centrado em (0.2, -0.1).
Fonte: Elaborada pelo autor



Abaixo segue o algoritmo para a realização da transformada de Joukowsky (SCIRE DOMINIUM, 2011).

Script do MatLab, para versão igual ou superior 6.0

```
%-----------------------------------------------------------------------
% TRANSFORMAÇÃO DE JOUKOWSKY
%-----------------------------------------------------------------------
% Data: 11 de julho de 2014
%-----------------------------------------------------------------------
clear all
close all
clc
disp('-------------------------------------------------------------------')
disp(' Gerenciador de dados para Transformação de Joukowsky ')
disp('-------------------------------------------------------------------')
v_inf = input(' Módulo assintótico da velocidade [m/s]: '); % Velocidade do vento incidindo
no perfil de asa
v = v_inf/v_inf;
theta = input(' Ângulo assintótico da velocidade [deg]: '); % Ângulo incidência do vento em
relação ao horizonte
theta = theta*pi/180; %Theta em radianos
disp('-------------------------------------------------------------------')
s_x = input(' Origem do Círculo, X_0 [m]: ');
s_y = input(' Origem do Círculo, Y_0 [m]: ');
s = s_x + i*s_y; %Centro do círculo escrito na forma de número complexo
r = input(' Raio [m]: '); %Sugestão de utilizar o raio como uma unidade de comprimento
disp('-------------------------------------------------------------------')
disp(' e a visualização da solução está errada modificar tolerância TOLL')
disp('-------------------------------------------------------------------')

% PARÂMETRO DO FLUÍDO
```

```
% Valor sugerido do rho=1.225 que é a densidade do ar ao nível do mar
rho = 1.225;

% PARÂMETRO DA TRANSFORMAÇÃO
lambda = r-s;

% CIRCULAÇÃO
beta = (theta);
k = 2*r*v*sin(beta);
Gamma = k/(2*pi); %CIRCULAÇÃO

% VELOCIDADE ASSINTÓTICA COMPLEXA
w = v * exp(i*theta);

%TOLERÂNCIA
toll = +5e-2;

% GERAÇÃO DE SUPERFÍCIE
x = meshgrid(-5:.1:5);
y = x';

% PLANO COMPLEXO
z = x + i*y;

% PONTOS INTERNOS AO CÍRCULO SÃO EXCLUÍDOS!
for a = 1:length(x)
for b = 1:length(y)
if abs(z(a,b)-s) <= r - toll z(a,b) = NaN;
end
end
end

% POTENCIAL AERODINÂMICO
f = w*(z) + (v*exp(-i*theta)*r^2)./(z-s) + i*k*log(z);

% TRANSFORMAÇÃO DE JOUKOWSKY
J = z+lambda^2./z;

% GRÁFICO - Círculo e Aerofólio de Joukowsky
angle = 0:.1:2*pi;
z_circle = r*(cos(angle)+i*sin(angle)) + s;
z_airfoil = z_circle+lambda^2./z_circle;
% TEOREMA DE KUTTA-JOUKOWSKY
L = v_inf*rho*Gamma;
L_str = num2str(L); % Cálculo da força de sustentação [N/m]

% PLOTAGEM DA SOLUÇÃO
figure(1)
hold on
contour(real(z),imag(z),imag(f),[-5:.2:5]) % Cria a linha de fluxo em torno do círculo
```

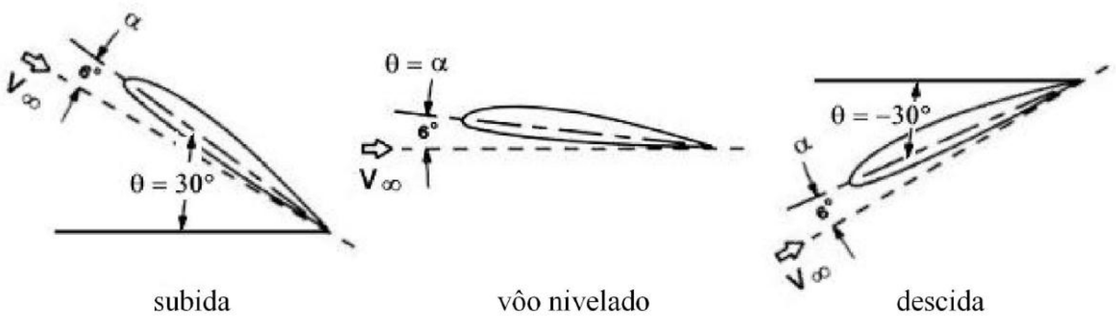
```
fill(real(z_circle),imag(z_circle),'y') % Preenche a forma do círculo
axis equal
axis([-5 5 -5 5])
title(strcat('Fluxo em torno de um Circle. Lift: ',L_str,' [N/m]')); % Lift significa sustentação

figure(2)
hold on
contour(real(J),imag(J),imag(f),[-5:.2:5]) % Cria a linha de fluxo em torno do perfil de asa
fill(real(z_airfoil),imag(z_airfoil),'y') % Preenche a forma do perfil de asa
axis equal
axis([-5 5 -5 5])
title(strcat('Fluxo em torno do Aerofólio Correspondente. Lift: ',L_str,' [N/m]'));
```

ELEMENTOS QUE INFLUENCIAM NA SUSTENTAÇÃO DO AVIÃO

O ângulo de ataque é o termo utilizado definir o ângulo formado entre a linha de corda do perfil e a direção do vento relativo. Representa um parâmetro que influi decisivamente na capacidade de geração de sustentação do perfil. Quanto maior o ângulo de ataque, maior a força de sustentação, até certo ponto no qual esta diminui bruscamente. Outro ângulo importante do perfil de asa é ângulo formado entre a corda do perfil e um eixo horizontal de referência, denominado ângulo de incidência. Veja na figura abaixo, a diferença do ângulo de ataque para o ângulo de incidência, sendo que o ângulo de ataque é α e o ângulo de incidência é θ.

Figura 1 - Diferenciação do ângulo de ataque do ângulo de incidência.
Fonte: RODRIGUES, 2009, p. 31.



A sustentação é a componente da força perpendicular ao vento relativo, enquanto arrasto é a componente paralela a ele. Geralmente, os vetores de sustentação e arrasto são desenhados perpendicular e paralelamente à corda do aerofólio, o que não é muito correto (EASTLAKE, 2002).

Figura 2 - Representação vetorial das forças envolvidas no perfil de asa.
Fonte: WIKIPÉDIA, 2014

As principais características aerodinâmicas de um perfil são o coeficiente de sustentação, o coeficiente de arrasto, o coeficiente de momento, a posição do centro aerodinâmico e a sua eficiência aerodinâmica. As definições abaixo foram retiradas do livro "Fundamentos da Engenharia Aeronáutica: Aplicações ao projeto SAE-AeroDesign"[5] de Luiz Eduardo Miranda J. Rodrigues.

O coeficiente de sustentação representa a eficiência do perfil em gerar a força de sustentação.

O coeficiente de arrasto representa a medida da eficiência do perfil em gerar a força de arrasto. Um perfil como um todo somente será considerado aerodinamicamente eficiente quando produzir grandes coeficientes de sustentação aliados a pequenos coeficientes de arrasto.

Localizado próximo à 1/4 da corda, medido a partir do bordo de ataque, está o centro aerodinâmico do perfil, que é onde o momento independe do ângulo de ataque.

Centro de Pressão: a determinação da distribuição de pressão sobre a superfície de um perfil é geralmente obtida a partir de ensaios em túnel de vento ou com a solução analítica de modelos matemáticos fundamentados na geometria do perfil em estudo.

A força resultante é obtida a partir de um processo de integração da carga distribuída (pressão atuante) entre o bordo de ataque e o bordo de fuga do perfil para cada ângulo de ataque estudado. Essa força é denominada resultante aerodinâmica e o seu ponto de aplicação é chamado de centro de pressão (CP).

A energia elétrica no mundo moderno

Iniciamos a descrição dessa aplicação, a energia elétrica no mundo moderno, com uma afirmação de Halliday, Resnick e Walker (2012) que mostra a importância desse recurso para a humanidade.

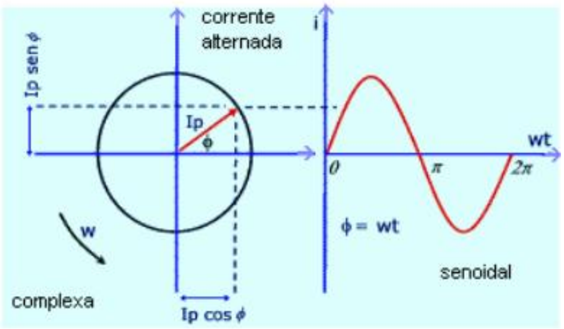
---

[5] O livro esta disponível virtualmente, no site http://www.engbrasil.eng.br/index_arquivos/Page739.htm

> A energia produzida em uma usina de energia elétrica deve chegar até a casa do leitor para poder alimentar um computador. O valor total dessa física aplicada é, hoje em dia, tão elevado que é quase impossível estimá-lo. Na verdade, a civilização moderna seria impossível sem essa física aplicada. Em quase todo o mundo, a energia elétrica é transferida, não como uma corrente constante (corrente contínua), mas como uma corrente que varia senoidalmente com o tempo (corrente alternada). O desafio para os cientistas e engenheiros é projetar sistemas de corrente alternada que transfiram energia de forma eficiente e aparelhos capazes de utilizar essa energia (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012, p. 286).

A fonte de tensão alternada pode ser representada como uma projeção, no eixo dos y, de um “vetor girante”, cujo módulo pode ser chamado de Vp (tensão de pico). O número de giros por segundo desse vetor é de 60 voltas completas, se pensarmos nas tomadas de alimentação elétrica que temos nas nossas casas, no Brasil (há países onde a frequência da rede é 50 Hz). A velocidade angular ω pode ser escrita assim: ω = 2πf, onde f (nesse exemplo) é 60 Hz. A função do “tamanho” da projeção desse vetor girante no tempo pode então ser escrita de duas maneiras alternativas: $V = V_p$ sen ωt (ou cos ωt) ou $V = V_p\ e^{i\omega t}$ (Figura 1).

Figura 1 – Ilustração do "vetor girante" e da função senoidal
Fonte: Elaborada pelo autor

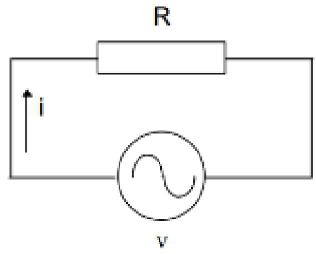


A corrente I, num circuito alimentado por uma dessas fontes, também pode ser representada da mesma forma por um vetor girante: $I = I_p$ sen ωt (ou cos ωt) ou $I = I_p\ e^{i\omega t}$.

Imaginemos uma fonte de tensão alternada ligada a apenas um resistor, ver Figura . Podemos então escrever a Lei de Ohm assim: $I = \frac{V}{Z}$ $\mathrm{I} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Z}}$,com V (tensão), I (corrente) e Z (impedância). Nesse caso, Z = R (resistência).

Na eletrônica e na eletricidade, a análise de circuitos de corrente alternada é feita com a ajuda de números complexos. Grandezas como a impedância (em ohms) e a potência aparente (em volt-ampère) são exemplos de quantidades complexas (fasores).

Figura 2 – Fonte de tensão alternada liga a um resistor
Fonte: Elaborada pelo autor



Nos circuitos que contêm várias malhas, o diagrama fasorial pode ficar bastante complicado. Neste caso o processo dos números complexos é mais adequado que o processo trigonométrico utilizado até agora, pois o trabalho fica bastante simplificado.

Também, para calcular a “impedância” (é assim que chamamos o equivalente à resistência num circuito onde tem resistores, capacitores e indutores) precisamos efetuar operações matemáticas com as funções de V e de I. As operações são, de fato, bem mais simples quando utilizamos a representação dessas funções com números complexos, ao invés das expressões que envolvem seno ou cosseno.

Fractais

Os fractais são formas geométricas que se caracterizam por repetições de um determinado padrão com ligeiras e constantes variações. Quando analisado, em diferentes escalas, o fractal se mostra sempre similar ao todo, apresentando cópias de si mesmo em seu interior, fato este, conhecido como autossimilaridade. Os fractais são gerados em computador, a partir de algoritmos repetidos milhares de vezes, dando origem à fantásticas e surpreendentes figuras.

Os fractais podem ser representados por funções reais ou complexas e apresentam determinadas características: autossimilaridade[6], dimensionalidade[7] e complexidade infinita[8]. Os fractais, na Figura 1, são gerados por funções complexas, respectivamente, chamados de Mandelbrot, fractal de Newton e Julia.

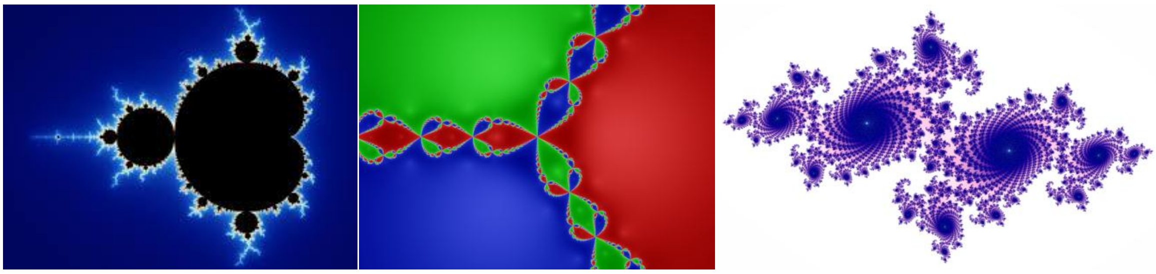
Figura 1 – Fractais gerados por funções complexas
Fonte: Fonte elaborada pelo autor

---

[6] Autossimilaridade: ao analisar um trecho do fractal, percebemos que ele é semelhante a si mesmo num todo, apenas com uma redução, em escala, do tamanho original. Esta característica permanece em qualquer nível de construção do fractal.

[7] Dimensionalidade: o grau de detalhamento de um fractal não diminui se examinarmos uma porção arbitrariamente pequena do mesmo. O fractal possui detalhes em partes tão pequenas como possamos imaginar.

[8] Complexidade infinita: o alto grau de detalhamento e a complexidade da estrutura de um fractal não impedem que sejam formados por processos simples, ou seja, por simplicidade da lei de formação.



Na procura de permitir com que o estudante interaja com esta aplicação, encontramos alguns algoritmos escritos para o software do MatLab que criam fractais. Encontramos algoritmos para a criação dos fractais citados anteriormente, para a sua construção são alterados dados de entrada e o restante é função do software. Esses algoritmos foram retirados do site http://m2matlabdb.ma.tum.de/index.jsp. Durante uma aula, alguns estudantes conseguiram criar alguns fractais.

Desta forma, finalizamos a descrição das aplicações dos números complexos. Os conteúdos para a sua compreensão total não são triviais, principalmente para estudantes do Ensino Médio. Por esse motivo, não nos dispusermos a criar textos com um conhecimento aprofundado, somente dando uma ideia, um sentido para o estudo dos números complexos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Patrícia F. Doern de; PAZOS, Rubén Panta. Análise de Aerofólios Gerados pela Transformação Generalizada de Joukowsky. In: **Anais do XXX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional,** Florianópolis. 2007. Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxx_cnmac/PDF/667.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2014.

BRAZ JÚNIOR, Dulcidio. **100 anos do histórico vôo do mais denso que o ar**. 2006. Disponível em: <http://fisicamoderna.blog.uol.com.br/arch2006-10-22_2006-10-28.html>. Acesso em: 10 jul. 2014.

EASTLAKE, Charles N. An aerodynamicist's view of lift, Bernoulli, and Newton. **The Physics Teacher**, v. 40, n. 3, p. 166-173, 2002.

EASTLAKE, Charles. A visão de um engenheiro aeronáutico acerca da sustentação, Bernoulli e Newton. **Física na Escola**, v. 7, n. 2, p. 52-57, 2006. Disponível em: <http://143.107.135.40/fne/Vol7/Num2/v13a09.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2014.

GALVÃO, Francisco Leme. **Aerodinâmica do Voo**. 2009. Tradução do capítulo 3 do "Gliding Manual" da FAA americana. Disponível em:

<http://xa.yimg.com/kq/groups/3517788/1351370555/name/Cap_3_trad_revC.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2014.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física:** Mecânica. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

PETRUCCI, Denis Rinaldi; MANZANARES FILHO, Nelson. Uma técnica híbrida para o projeto inverso de aerofólios utilizando transformação conforme e o método dos painéis. In: **Proceedings do IX Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas**, Caxambu. 2002.

RODRIGUES, Luiz Eduardo Miranda J.. **Fundamentos da Engenharia Aeronáutica**: Aplicações ao projeto SAE-AeroDesign. São Paulo: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, 2009. 1 v. Disponível em: <http://www.engbrasil.eng.br/index_arquivos/Page739.htm>. Acesso em: 10 jul. 2014.

SANTOS, Fábio Rodrigo de Souza. **O uso do aço inox nas estruturas da fuselagem de aeronaves**. 2009. 73 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Departamento de Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2009. Disponível em: <http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/2797>. Acesso em: 30 jun. 2014.

SCIO SCIRE DOMINIUM. **Deduções sobre o Aerofólio de Joukowsky**. 2011. Disponível em: <http://biztechbrz.wordpress.com/2011/02/06/deducoes-sobre-o-aerofolio-de-joukowsky/>. Acesso em: 10 jul. 2014.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática**: volume 3. São Paulo: FTD, 2011.

WIKIPÉDIA. **Aerofólio**. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Aerof%C3%B3lio>. Acesso em: 10 jul. 2014.

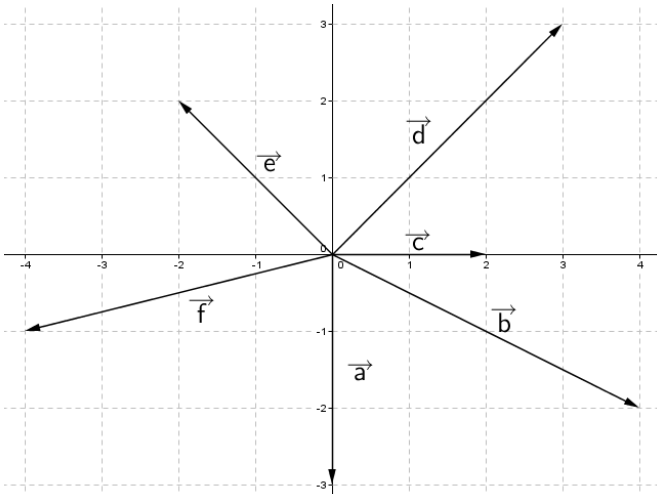
APÊNDICE E – DIAGNÓSTICO DOS SUBSUNÇORES

1. Um vetor é representado por uma seta, indicando, uma grandeza vetorial que é caracterizada por possuir módulo ou intensidade, direção e sentido. Assim quando dizemos que a velocidade de uma bola é de 20 m/s, horizontal e para a direita, temos essas três características. Você identifica essas características? Escreva ao lado de cada expressão M se for o módulo, D se for a direção e S se for o sentido.

   ( ) horizontal ( ) 20 ( ) para à direita.

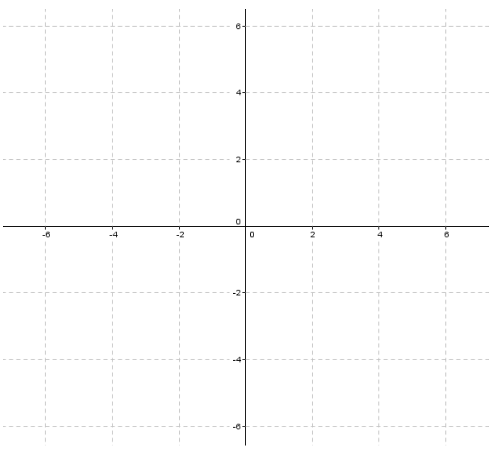
2. Na figura, abaixo, estão representados alguns vetores. No plano cartesiano, se todos os vetores têm origem na origem do sistema, a identificação do vetor é feita pelo ponto que é a sua extremidade. Com isso, ligue cada vetor as suas coordenadas?

$\vec{a}$	(2, 0)
$\vec{b}$	(-4, -1)
$\vec{c}$	(0, -3)
$\vec{d}$	(4, -2)
$\vec{e}$	(-2, 2)
$\vec{f}$	(3, 3)

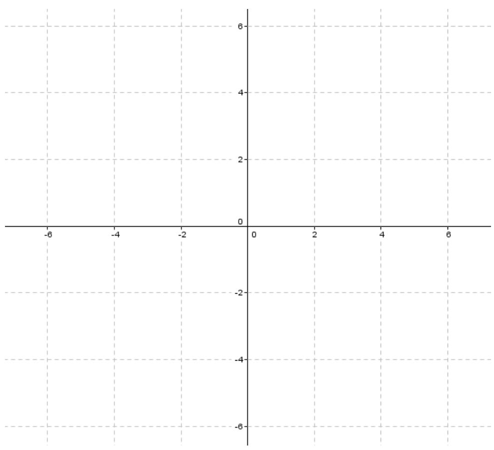


3. Considerando os vetores definidos na questão 2, efetue as operações de vetores indicadas representando geometricamente os vetores dados e o vetor resultante da operação.

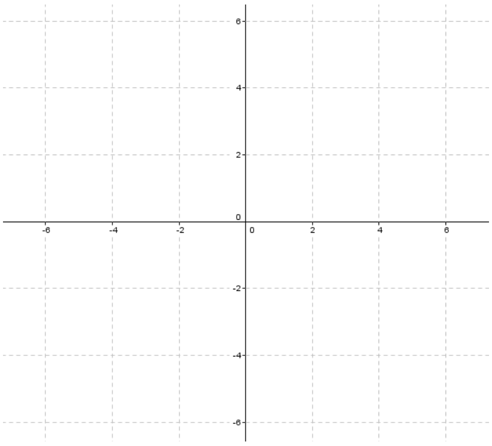
   a. $\vec{f} + \vec{d}$



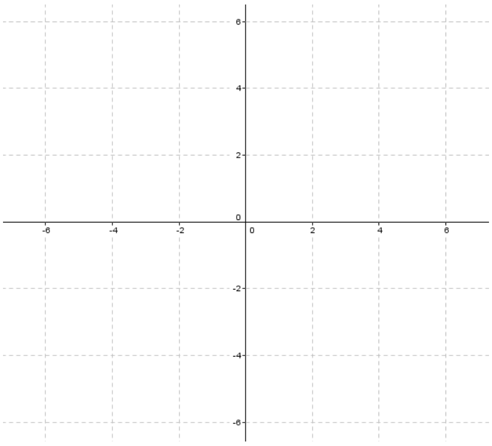
   b. $\vec{a} + \vec{e}$



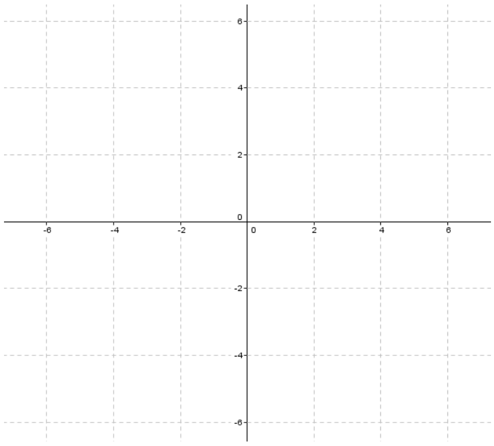
c. $2\vec{c}$



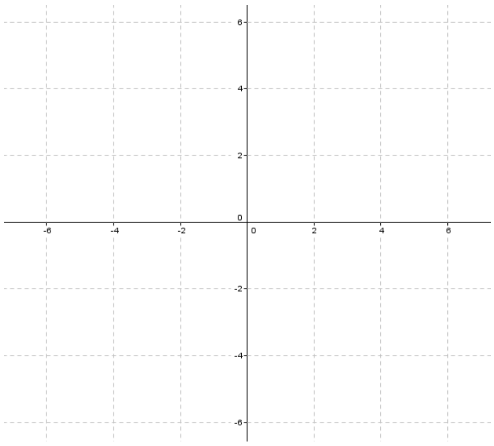
d. $-1\vec{e}$



e. $\vec{b} + 2\vec{e}$



f. $\frac{1}{3}\vec{d} + \vec{a}$



4. Temos que $\sqrt{9}$ é 3, pois $3 \cdot 3 = 9$. Agora, qual é o resultado de $\sqrt{-9}$?

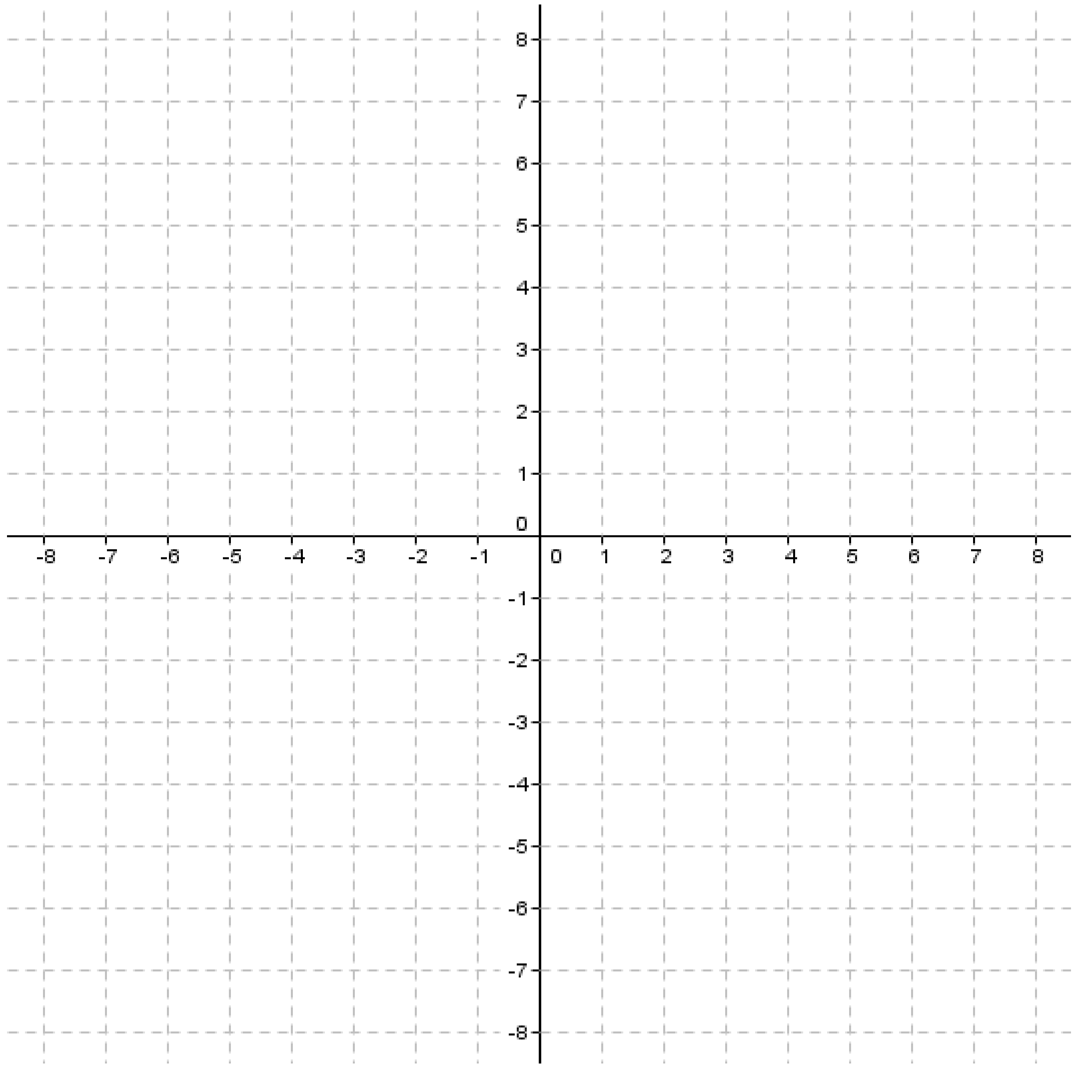
( ) -3 ( ) 3 ( ) $\frac{1}{3}$ ( ) $-\frac{1}{3}$ ( ) desconheço esse número

APÊNDICE F – JOGO BATALHA NAVAL

O grupo A vai definir um vetor inicial $\vec{a}$ e vai efetuar as seguintes operações: $2\vec{a}, -\vec{a}\ e\ \frac{1}{2}\vec{a}$.

O grupo B vai definir um vetor inicial $\vec{b}$ e vai efetuar as seguintes operações: $3\vec{b}, -2\vec{b}\ e\ \frac{1}{3}\vec{b}$.

Partindo dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, desenhados em nova cartela. O desafio do "tiro da misericórdia" terá as seguintes operações: $\vec{a}+\vec{b}, 2\vec{a}-\vec{b}, 3\vec{a}+\vec{b}, -2\vec{a}+\vec{b}\ e -\vec{a}-2\vec{b}$.



APÊNDICE G – QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DO PLANO 1

A avaliação quantitativa (pontuação) seguirá o modelo de escala EDUCAUSE 2001 (www.educause.edu). Abaixo segue os significados da escala proposta na avaliação do objeto de aprendizagem:

5 - Concordo plenamente 3 - Não concordo nem discordo 1 - Discordo totalmente
4 - Concordo 2 - Discordo SR - Sem resposta

Em relação ao ambiente de aprendizagem “Vetores e números complexos”

Critérios	5	4	3	2	1	SR
O OA apresenta informações precisas.						
O OA inclui quantidade adequada de material.						
O OA demonstra um conceito base.						
O OA resume bem os conceitos.						
É fácil andar pelo ambiente.						
O ambiente tem instruções claras de uso.						
O ambiente é motivador.						
O ambiente é visualmente atraente.						
O ambiente é interativo.						
A linguagem é adequada e sem erros ortográficos.						
A linguagem matemática é adequada e sem erros.						
Como recurso de aprendizagem, identifica objetivos de aprendizagem.						
Como recurso de aprendizagem, reforça conceitos progressivamente.						
Como recurso de aprendizagem, demonstra relações entre conceitos.						
Como recurso de aprendizagem, fundamenta em conceitos prévios.						
Como recurso de aprendizagem, é eficiente (pode-se aprender muito em curto período de tempo).						

Atribua um conceito (pouco, satisfatoriamente ou plenamente) para cada uma das perguntas a seguir. Sinta-se a vontade para fazer outras colocações sobre as perguntas. Considerando o objeto de aprendizagem como fonte de conhecimento, você conseguiu interagir e compreender os conceitos apresentados pelo Radice? ________________________________

Além do Radice, estão presentes neste espaço os aplicativos do Geogebra, você conseguiu utilizá-lo? ____

Fez proveito do espaço de prática? ____

A diferença entre as representações dos números complexos e dos números reais é caracterizado pela presença de um elemento especial. A partir da definição deste elemento foi possível definir um novo conjunto numérico chamado de conjunto dos números complexos. Que elemento é esse, que diferencia os números complexos dos números reais?

____

____

____

Este elemento, que diferencia o número complexo do número real, quando multiplicado por vetor (associado a um número complexo) faz com que ele gire. Quantos graus gira esse vetor?

____

Em relação ao ambiente de aprendizagem “Problema histórico” e “Caminhada Histórica”.

Critérios	5	4	3	2	1	SR
O OA apresenta informações precisas.						
O OA inclui quantidade adequada de material.						
O OA demonstra um conceito base.						
O OA resume bem os conceitos.						
É fácil andar pelo ambiente.						
O ambiente tem instruções claras de uso.						
O ambiente é motivador.						
O ambiente é visualmente atraente.						
O ambiente é interativo.						
A linguagem é adequada e sem erros ortográficos.						
A linguagem matemática é adequada e sem erros.						
Como recurso de aprendizagem, identifica objetivos de aprendizagem.						
Como recurso de aprendizagem, reforça conceitos progressivamente.						
Como recurso de aprendizagem demonstra relações entre						

conceitos.						
Como recurso de aprendizagem, fundamenta em conceitos prévios.						
Como recurso de aprendizagem, é eficiente (pode-se aprender muito em curto período de tempo).						

Conseguiste resolver o desafio do Radice sem ajuda? __________ Em qual parte você sentiu dificuldade ou precisou de ajuda? ____

____

____

____

Quando você resolvia equações de 2° grau e chegava a raiz quadrada de um número negativo, lembra de como expressava a solução? O que é adequado dizer, não existe ou não pertence ao conjunto dos números reais? ____

____

Os números complexos são uma construção humana, como qualquer conhecimento, e foram estudado por diversos matemáticos. Você conhecia algum parte desta história ou já tinha tido algum contato com ela? ____
Que fato ou curiosidade chamou mais a sua atenção nestes ambientes?

____

____

____

____

APÊNDICE H – DIÁRIO DE BORDO

Dia 09 de outubro

No dia 09 de outubro de 2014 iniciamos o projeto de mestrado numa turma de 3° ano do Ensino Médio, composta por dezoito estudantes, sendo oito meninos e dez meninas. Ao iniciar a aula fiz uma breve explanação do projeto que estou construindo sobre o objeto de aprendizagem (OA), ressaltei que os estudantes têm papel fundamental para a construção do OA, em que todas as mudanças sugeridas serão levadas em consideração para o aperfeiçoamento do OA.

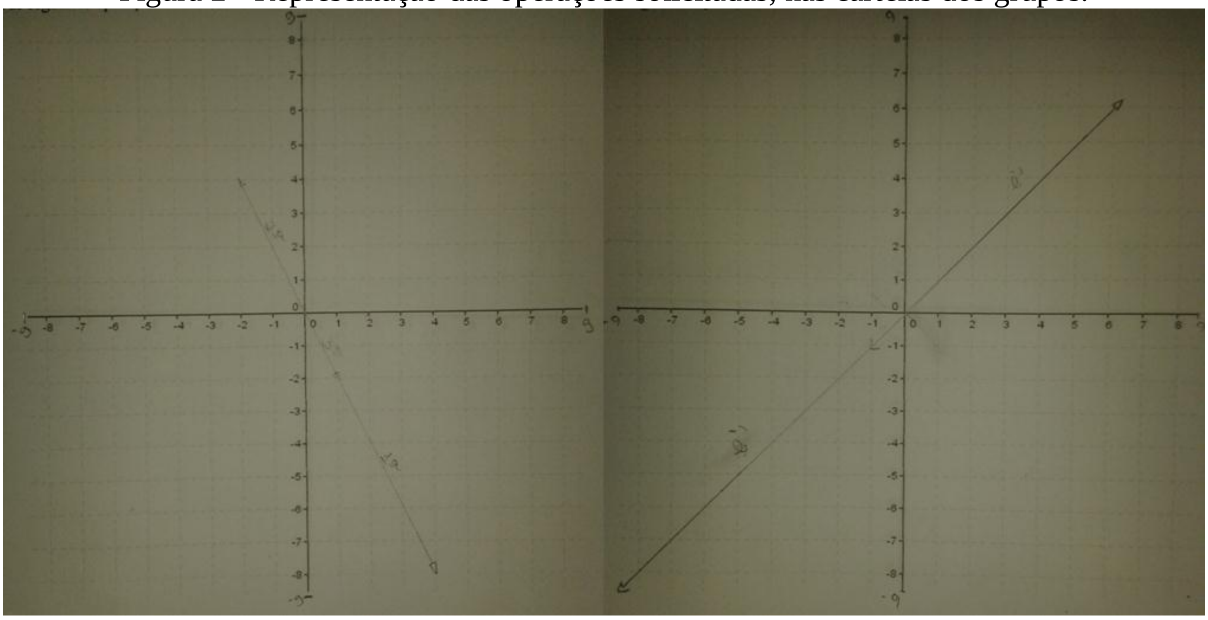
Para avaliar se eles tinham este conhecimento sobre o assunto vetores, foi realizado um questionário para ser respondido de forma individual. Enquanto os questionários eram entregues, relatamos que o objetivo do mesmo não era atribuir um conceito para aquilo que os alunos sabiam, mas sim, de avaliar o conhecimento deles e as suas limitações.

Mesmo assim, todos os estudantes estiveram empenhados na resolução das questões, questionando quando não sabiam ou não se lembravam de alguma questão. Esta inquietação dos estudantes demonstra que estavam dispostos a (re)aprender o conteúdo, motivados a dar continuidade no processo de aprendizagem, uma aprendizagem significativa. Para analisar os subsunçores, não interferimos nas respostas dos estudantes, mesmo com a insistência deles, permanecemos imparciais. Mesmo assim, sem ter suas indagações respondidas, eles se mostraram empenhados e demoraram mais tempo do que foi previsto, demorando, aproximadamente, trinta minutos para a realização do teste.

Figura 1 - Grupos discutindo os valores dos vetores iniciais

Enquanto alguns estudantes terminavam o teste, a turma foi dividida em dois grupos, um dos meninos e outro das meninas para a realização do jogo de Batalha Naval com vetores. Neste período de aula, cada grupo conseguiu somente determinar os vetores iniciais do jogo, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e realizar as operações determinadas em suas respectivas cartelas (Figura 2). A determinação do vetor inicial foi complexa, pois os grupos analisaram as opções possíveis, procurando sempre dificultar a ação do grupo adversário. Durante a atividade, nenhum estudante demonstrou desinteresse pela atividade, todos participaram ativamente das discussões. O grupo das meninas definiu primeiro o vetor e fez as operações solicitadas, os meninos demoraram um pouco mais, pois estavam encontrando dificuldade em representar os vetores, conforme as regras determinadas. Após o teste, a turma foi conduzida para um evento do município, a Feira do Livro, organizada pela Prefeitura Municipal de Vale Real.

Figura 2 - Representação das operações solicitadas, nas cartelas dos grupos.



Analisando o resultado do teste, observamos que os estudantes apresentam algum conhecimento sobre vetores, principalmente, na parte que consiste em reconhecer um vetor como um par ordenado, que possui: módulo, sentido e direção. A primeira questão seria para avaliar se os estudantes saberiam reconhecer o que seria módulo, sentido e direção do vetor. Todos os estudantes que realizaram o teste acertaram do que se tratava o módulo, porém quatorze estudantes (78%) trocaram o significado de sentido e direção, e somente, três (17%) acertaram tudo, lembrando que um estudante não realizou o teste.

A segunda questão consistia em reconhecer o vetor como par ordenado. Os estudantes mostraram que possuem este conhecimento, pois dezesseis acertaram todos os vetores (89%), somente um estudante acabou trocando a representação entre dois vetores. Assim, eles possuem este conhecimento e não foi necessário retomar a representação de vetores, porém, a próxima questão envolvia operações com vetores, como: multiplicação por escalar, soma e subtração.

A maioria dos estudantes não soube operar com eles, treze (72%) não souberam efetuar nenhuma operação, dois (11%) efetuaram corretamente as multiplicações por escalar e dois (11%) resolveram algumas multiplicações e adições corretamente. Esses dados mostram que é necessário retomar estes conceitos com os estudantes. Para retomar estes conceitos, os estudantes que fizeram corretamente as questões foram convidados a relatar como se efetua a soma e a multiplicação por escalar. A explanação dos estudantes foi compreensível, pois os demais afirmaram ter compreendido o processo operacional com os vetores. Para averiguar isso, será feito na próxima aula o jogo da Batalha Naval com vetores.

A última questão do teste era a seguinte: “Temos que $\sqrt{9}$ é 3, pois $3 \cdot 3 = 9$. Agora, qual é o resultado de $\sqrt{-9}$?”. Cerca da metade da turma, dez estudantes (56%) marcaram a opção que desconheciam esse número, destes estudantes, duas alunas relataram, em aula, que esse número não existia, por isso que marcaram essa alternativa. As alternativas assinaladas foram: três (17%), um terço (17%) e menos um terço (6%).

Essa questão trouxe algumas inquietações, a primeira delas consiste na afirmação de duas estudantes e que deveria ser também a de outros, que o número $\sqrt{-9}$ não existe. O conhecimento que os estudantes possuíam é que esse número não existe, eles esqueceram ou não compreenderam que este número não existe, ou não pertence no conjunto dos números reais. Assim, ao trabalhar com os conjuntos numéricos, seria interessante introduzir o conjunto dos números complexos, para que os estudantes compreendam que a raiz quadrada negativa não pertence aos números reais, mas que esse número existe.

Dia 13 de outubro

A aula se iniciou com a turma indo buscar um material que foi exposto na Feira do Livro, organizada pela Prefeitura Municipal de Vale Real. Os estudantes tiveram que se deslocar até o ginásio municipal, demorando aproximadamente vinte minutos até o retorno a sala de aula. Quando eles voltaram, iniciamos o jogo da Batalha Naval com vetores. Os grupos se empenharam em adivinhar os vetores. O grupo dos meninos iniciou melhor, pois os palpites eram resultados compatíveis com as operações solicitadas, diferente do grupo das meninas. Elas demoraram a perceber que alguns vetores não seriam possíveis, devido as operações solicitadas. Os três primeiros palpites delas eram resultados incompatíveis com as operações efetuadas pelo outro grupo.

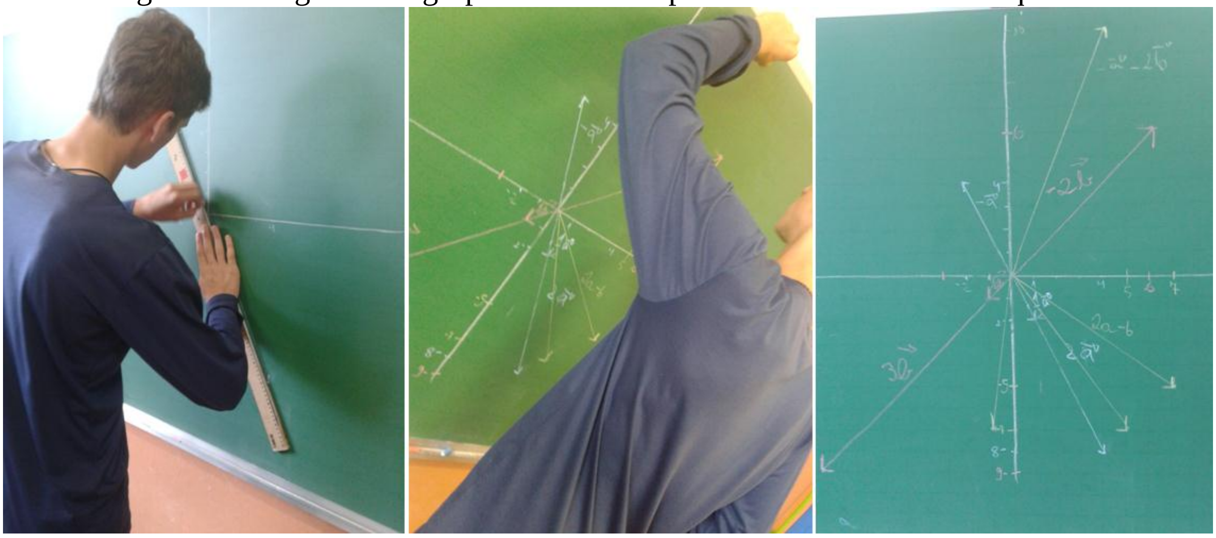
No quarto palpite, o grupo dos meninos acertou um dos vetores do outro grupo. Nós tínhamos a hipótese que acertando o primeiro vetor, os demais seriam descobertos sem dificuldade, e esta hipótese foi comprovada. Conforme os grupos acertavam o vetor, o grupo desenhava o vetor numa cartela, e também o representavam numa cartela coletiva, no quadro, onde foram colocados todos os vetores do jogo com suas respectivas operações. O grupo masculino ganhou a primeira parte do jogo. Logo após dos meninos acertarem o primeiro vetor, as meninas também acertaram um vetor do outro grupo. Durante todo o jogo, os grupos se fechavam e discutia o vetor que seria sugerido, todos os estudantes participaram das discussões.

Figura 3 - Os grupos discutindo os vetores

Na segunda parte do jogo, o "Tiro da misericórdia", o grupo masculino começou o jogo. No primeiro tiro, porém o grupo dos meninos errou o palpite, assim, deram oportunidade para o grupo feminino ganhar o jogo. A operação escolhida por eles consistia numa subtração de vetores, porém por descuido, o grupo acabou efetuando a soma entre os vetores. As meninas aproveitaram a oportunidade e acertaram a operação e seu respectivo resultado. E as demais operações e seus respectivos vetores também foram acertados. Na segunda parte do jogo, a equipe vencedora foi o grupo das meninas. Desta forma, o jogo acabou empatado para a felicidade da turma.

Finalizado o jogo da Batalha Naval, solicitamos aos estudantes para pegarem seus notebooks, acessando o OA. Porém, se deparamos por um problema tecnológico, a internet não estava funcionando, assim foi necessário reiniciar o modem. Este problema acabou atrapalhando a aula, pois demorou aproximadamente cinco minutos até reiniciar o modem.

Figura 4 - Integrante do grupo masculino representando os vetores no quadro



Reiniciando o modem, a internet voltou a funcionar e os estudantes conseguiram acessar o OA. Dando continuidade a aula, cada dupla ficou responsável em acessar um espaço de aprendizagem do OA, e escrever um parágrafo sobre o que se encontra neste ambiente. A escolha dos espaços de aprendizagem foi realizada de forma aleatória, alguns estudantes mostraram o interesse em acessar outros espaços de aprendizagem, percebemos isso através das lamentações feitas, como: “Ah! Eu queria ver o item porque os aviões voam?”, ou também “Eu gostaria de ver as calculadoras”.

Deixamos cinco minutos para as duplas acessarem os espaços de aprendizagem, como também para escrever um parágrafo sobre o ambiente. Após esse tempo, as duplas apresentaram oralmente o que havia em cada ambiente, o comentário mais positivo foi nas aplicações, em que as duplas souberam expor bem o conceito de fractais e do principio de Bernoulli. E o comentário negativo ocorreu no ambiente “Problema histórico”, em que a dupla avançou rapidamente as páginas, vendo que o tempo estava no fim. Inicialmente, a dupla procurou resolver a equação sugerida, e afirmaram que não existiam esses números. Essa dupla acabou dizendo: “no fim eles trocam a $\sqrt{-1}$ por i, isso é meio idiota”. Como a dupla avançou rapidamente por esse espaço, eles não compreenderam o porquê da utilização da unidade imaginária, provavelmente não sabiam que esse i é um número. Assim, nas próximas aulas pretendemos mostrar o significado geométrico da unidade imaginária, dando sentido a esse número. Desta forma, finalizamos a aula.

Dia 16 de outubro

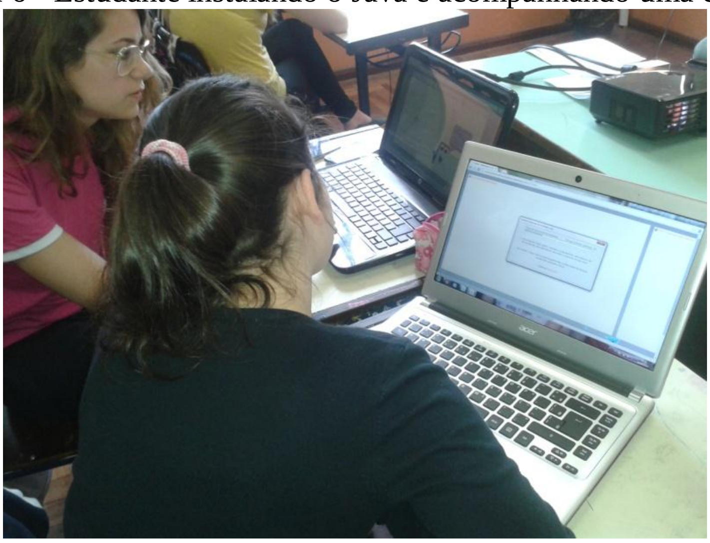
Após de a turma ter conhecido o OA, iniciamos o trabalho com os aplicativos construídos no Geogebra, no espaço “Vetores e Números Complexos”. Porém, enfrentamos algumas dificuldades em relação a internet que não estava funcionando, assim tivemos que reiniciar o modem para acessar o OA. Resolvido este problema, nos deparamos com um problema esperado por nós que condiz sobre o Java. A maioria dos estudantes não possuía o Java instalado, assim perdemos um tempo considerável para baixar o software. Enquanto isso, os outros estudantes tinham dificuldade em executar os aplicativos.

Os estudantes não encontraram no OA a janela que aparecia na tela seu notebook. Desta forma, tivemos que aperfeiçoar o OA, no item Java, onde organizamos esse espaço por itens e com figuras que mostram os passos para executar o aplicativo.

Figura 5 - Janela acrescida no OA

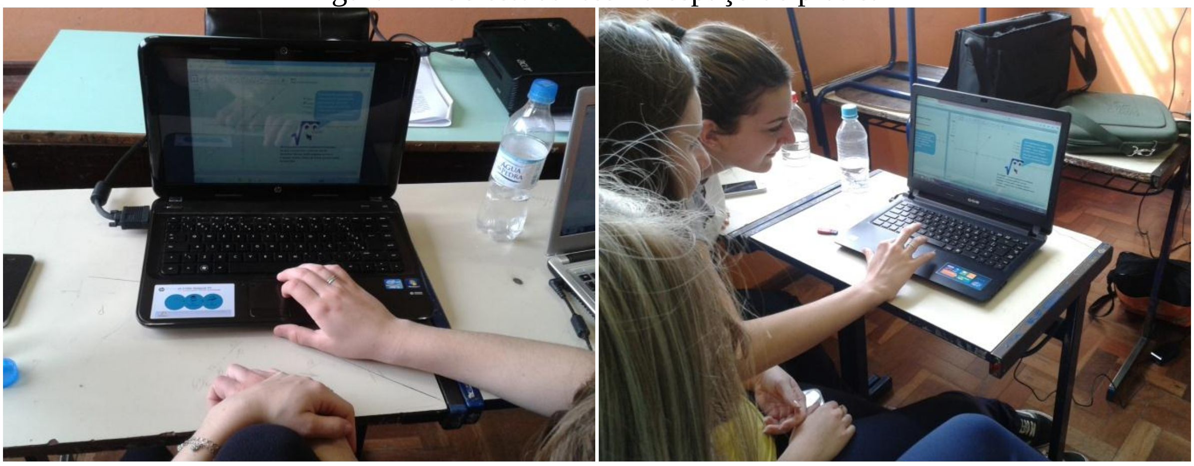
Esses problemas e as dificuldades fizeram com que alguns grupos não conseguissem interagir no OA, somente fizeram a instalação do Java ou a sua atualização. Enquanto isso, os demais estudantes ficaram estudando no OA.

Figura 6 - Estudante instalando o Java e acompanhando uma colega



Os estudantes que conseguiram acessar o OA estavam alegres, discutindo, interagindo e realizaram as atividades propostas pelo Radice. No espaço que o Radice conduz a atividade, os estudantes não apresentaram dificuldade. No ambiente de prática foi o momento mais descontraído, principalmente, na primeira vez que os estudantes interagiram, pois não estavam conseguindo representar o vetor no plano, e quando representavam faziam ele ao contrário do que o solicitado. Radice solicitava um vetor com a origem no ponto (0,0) e a outra extremidade em um ponto aleatório, os estudantes faziam inicialmente ao contrário, o que acabou gerando um momento descontraído e alegre na sala de aula.

Figura 7 - Os estudantes no espaço de prática



Assim, se encerrou as atividades neste dia de aula. Mesmo com todas as dificuldades encontradas no início da aula, ao terminar a aula, os estudantes ficaram interagindo com OA, aparentemente parecia que eles estavam gostando de utilizar os aplicativos. Além de criar um ambiente agradável na sala de aula, nosso objetivo principal é propor um ambiente propicio para a aprendizagem dos números complexos, através do OA. Desta forma, como criador e professor estou ansioso para ver o desenvolvimento das próximas aulas.

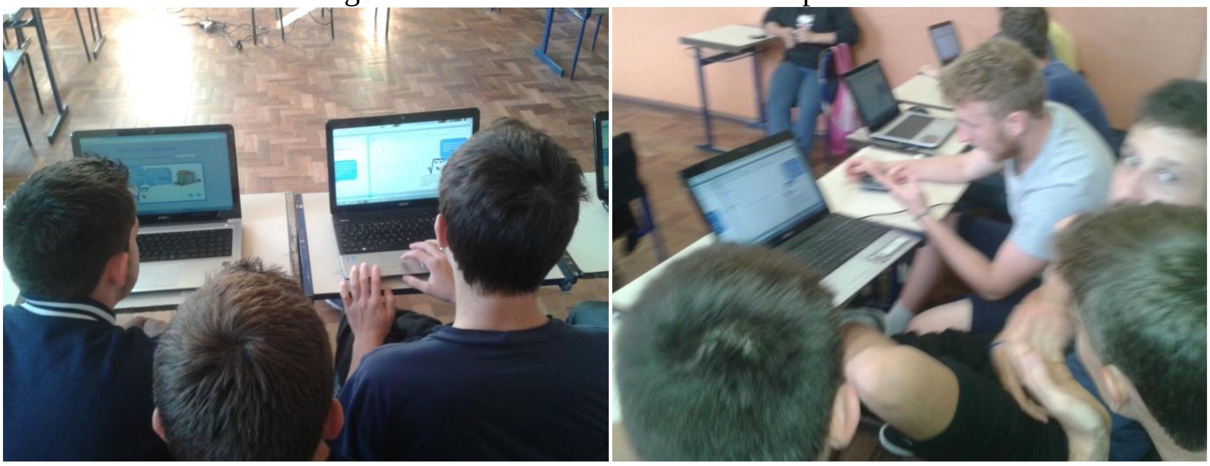
Dia 20 de outubro e 23 de outubro

Infelizmente, nas duas próximas aulas não conseguimos dar continuidade ao estudo dos números complexos. No dia 20 de outubro foi realizada uma hora cívica em homenagem ao dia do professor (15 de outubro). No dia 23 de outubro, a prefeitura municipal de Vale Real propiciou uma palestra com uma escrivã da policia civil, a palestra foi sobre drogas, assim todos os estudantes do 6° ano do Ensino Fundamental ao 3° ano do Ensino Médio participaram dessa atividade.

Dia 27 de outubro

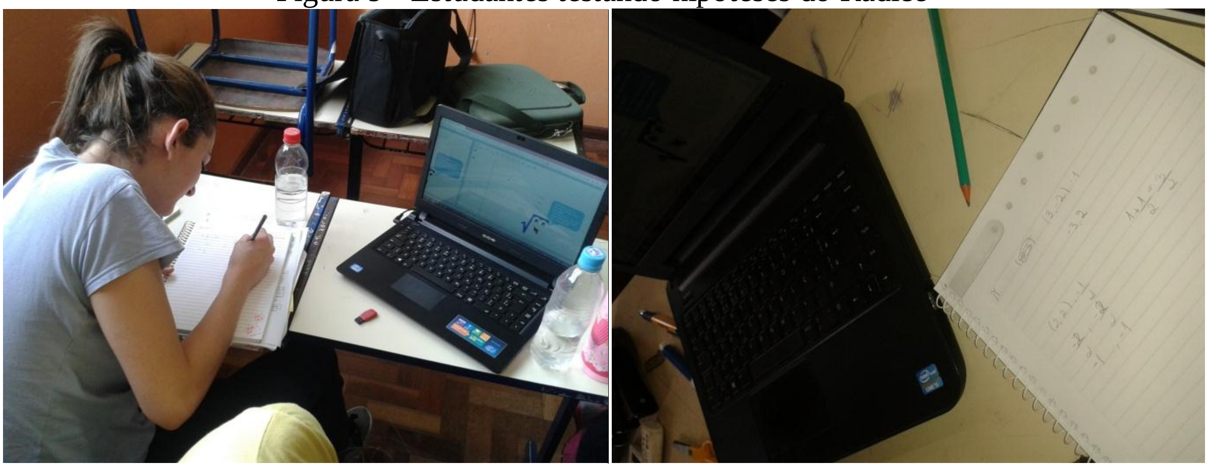
Neste dia, os estudantes trouxeram seus notebooks e todos tinham o Java atualizado ou instalado pronto para interagir com o OA. Como alguns estavam mais adiantados, eles deram continuidade ao estudo, enquanto alguns estavam nas atividades iniciais. As duplas interagiram com o Radice e discutiam entre si sobre o conteúdo.

Figura 8 - Estudantes no ambiente de prática



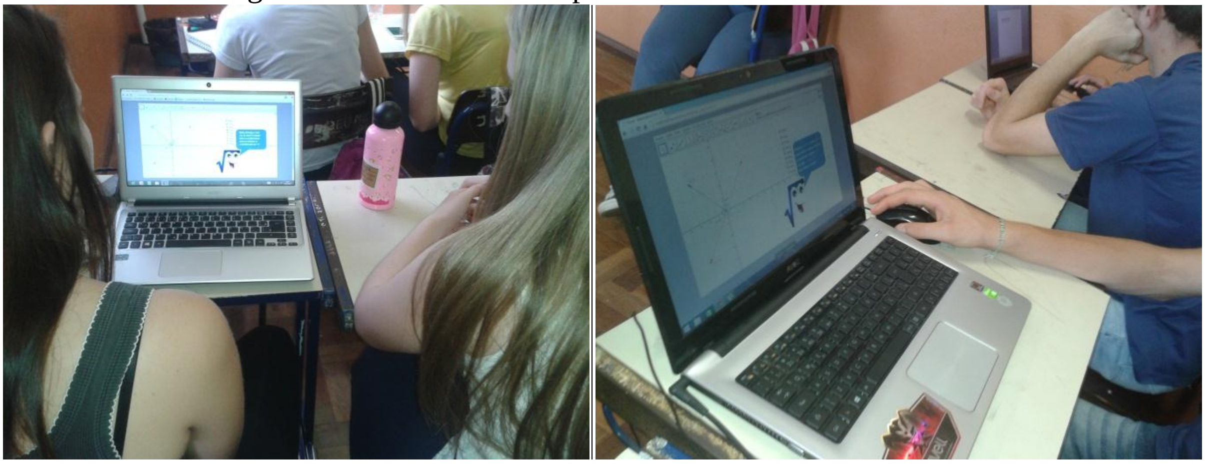
As duplas estavam empenhadas e procuraram encontrar a resposta para o desafio do Radice, porém, os estudantes acharam estranho que não encontravam por que multiplicar o vetor para girar ele em 90° graus. Aparentemente, esse fato causou um constrangimento aos estudantes, pois eles esperavam encontrar um valor.

Figura 9 - Estudantes testando hipóteses do Radice



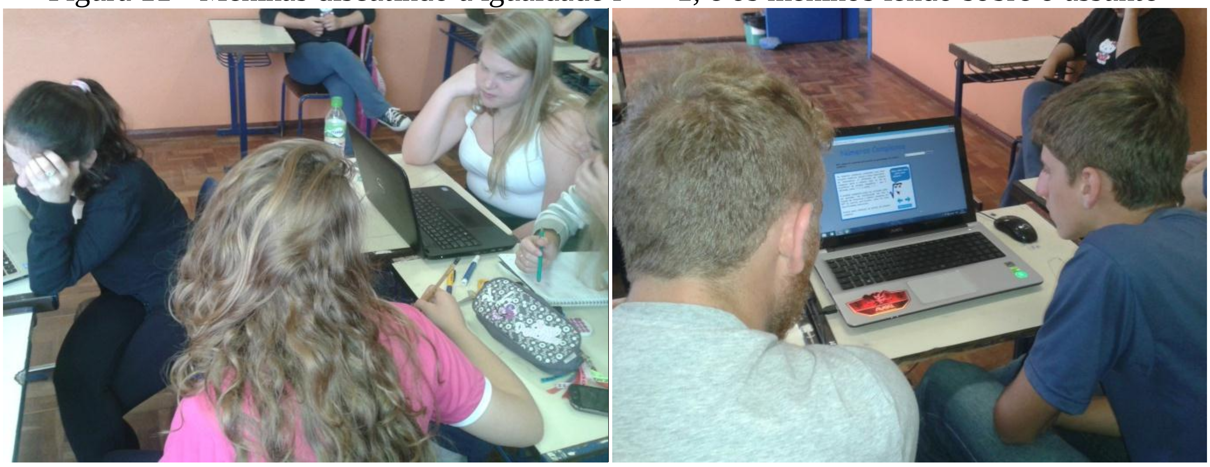
Não encontrando a resposta do desafio, os estudantes deram continuidade a utilização dos aplicativos do Geogebra. Os estudantes acharam confusa a ideia apresentada pelo aplicativo, porém, com as explicações realizadas durante o aplicativo, eles compreenderam a ideia de $i^2 = -1$, para girar um vetor em 180° graus.

Figura 10 - Estudantes compreendendo o conceito de i² = -1



Alguns estudantes sentiram dificuldade em compreender esta ideia, assim, algumas duplas discutiram e um tentou ajudar o outro na compreensão deste conceito. Todos os estudantes se empenharam em compreender o conteúdo abordado pelo Radice. Com as dificuldades encontradas nas últimas aulas (não ter aula, problema da internet e do Java), na próxima aula decidimos conduzir os aplicativos para agilizar as interações no OA.

Figura 11 - Meninas discutindo a igualdade i² = -1, e os meninos lendo sobre o assunto



Nesta aula, com os aplicativos funcionando e os estudantes empenhados, conseguimos avançar bastante sobre o conteúdo, alguns chegaram até no aplicativo que dar sentido a unidade imaginária, e outros avançaram até as partes dos números complexos. Assim, na próxima aula iríamos conduzir a discussão do problema histórico e iríamos formar grupos para a pesquisa sobre os matemáticos que estudaram os números complexos.

Dia 30 de outubro

Neste dia foi realizada uma palestra sobre a escolha vocacional dos estudantes. Para avançar nos estudos, dividimos a turma em grupos para realizar a pesquisa sobre alguns matemáticos que desenvolveram o estudo dos números complexos, ressaltando que este texto fará parte do OA. Junto com a turma, ficou combinado que todos os grupos deveriam entregar uma versão preliminar sobre o texto até 03 de novembro, para analisarmos o que deveria ser acrescentado ou alterado no texto para acrescentar ele no OA. Os cartazes dos grupos, que formaram a linha do tempo, ficaram para ser exposto no dia 10 de novembro, após a realização da feira da escola que ocorrerá no dia 07 de novembro. Todos os grupos entregaram uma versão parcial até a data estipulada.

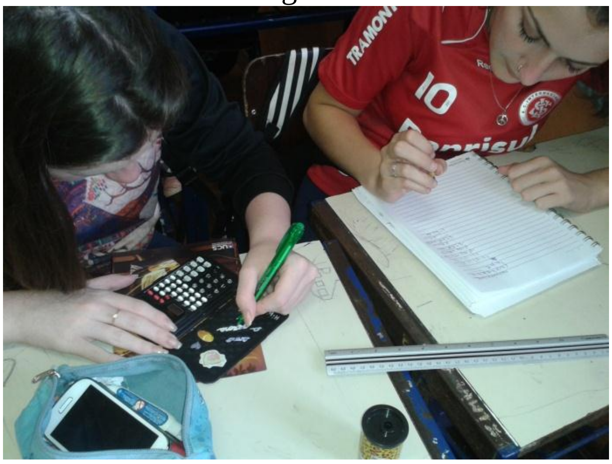
Além de adiantar no estudo dos matemáticos, os questionários que visava avaliar os subsunçores dos estudantes foi entregue a eles para que ser refeito. Os estudantes comentaram que agora saberiam refazer as questões, confirmando a nossa hipótese que a Batalha Naval iria suprir essa necessidade. Confirmaremos essa hipótese na próxima aula, quando os estudantes entregarão o questionário dos subsunçores feito com a cor vermelha, assinalando o que foi alterado em relação ao anterior.

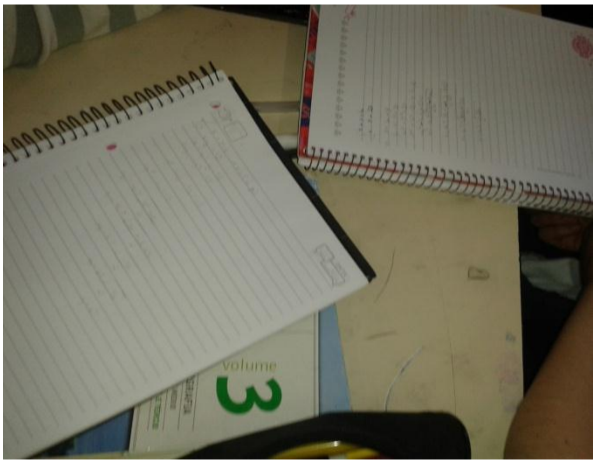
Dia 03 de novembro

Visando dar continuidade ao estudo dos números complexos, o professor conduziu a aula com o auxilio do retroprojetor digital, onde todos os estudantes acompanharam as janelas. Inicialmente, retomamos o conceito da unidade imaginária, passando pelo aplicativo os estudantes se relembraram que $i^2 = -1$, e que não existe no conjunto dos números reais um número que elevado ao quadrado seja negativo. Assim, perceberam a necessidade da criação de um novo conjunto numérico.

Discutido e compreendido esta parte referente a unidade imaginária, conduzimos os estudantes para o espaço do problema histórico, apresentando a eles um desafio matemático, como era proposto antigamente. Ao serem desafiadas, as duplas começaram a discutir e a resolver o problema. A hipótese que tínhamos era que os estudantes resolveriam o sistema e encontrariam uma raiz quadrada negativa, somente um grupo não conseguiu chegar a esse resultado. As duplas ficaram estagnadas quando se depararam com a $\sqrt{-16}$, sabiam que era um número complexo, mas não sabiam o que fazer com ela, o mesmo problema encontrado com o Radice. Os estudantes estavam ansiosos para conseguir dar continuidade ao problema, queriam saber resolver a $\sqrt{-16}$, uma dupla buscou resposta na calculadora, porém encontrou o resultado zero e questionou: "Porque dá zero?". Ela não havia reparado que a calculadora apresentava o "E" no canto da tela, indicando erro, mas ao repetir o cálculo na calculadora, ela percebeu que indicava um erro. Brincando com ela, afirmei: "Daqui a pouco você vai ser mais experta do que sua calculadora, pois ela não sabe operar com números complexos e você vai saber". Para dar continuidade ao desafio, voltamos para o OA e avançamos até na tela onde Radice propõe a utilização da propriedade de radicais, para desmembrar a $\sqrt{-16}$ numa multiplicação de dois radicais, onde um seria a $\sqrt{-1}$ que é o valor de i e outro a $\sqrt{16}$ que é 4. Essa dica fez com que os estudantes conseguissem calcular a $\sqrt{-16}$ encontrando 4i.

Figura 12 - Estudantes resolvendo o desafio do Radice



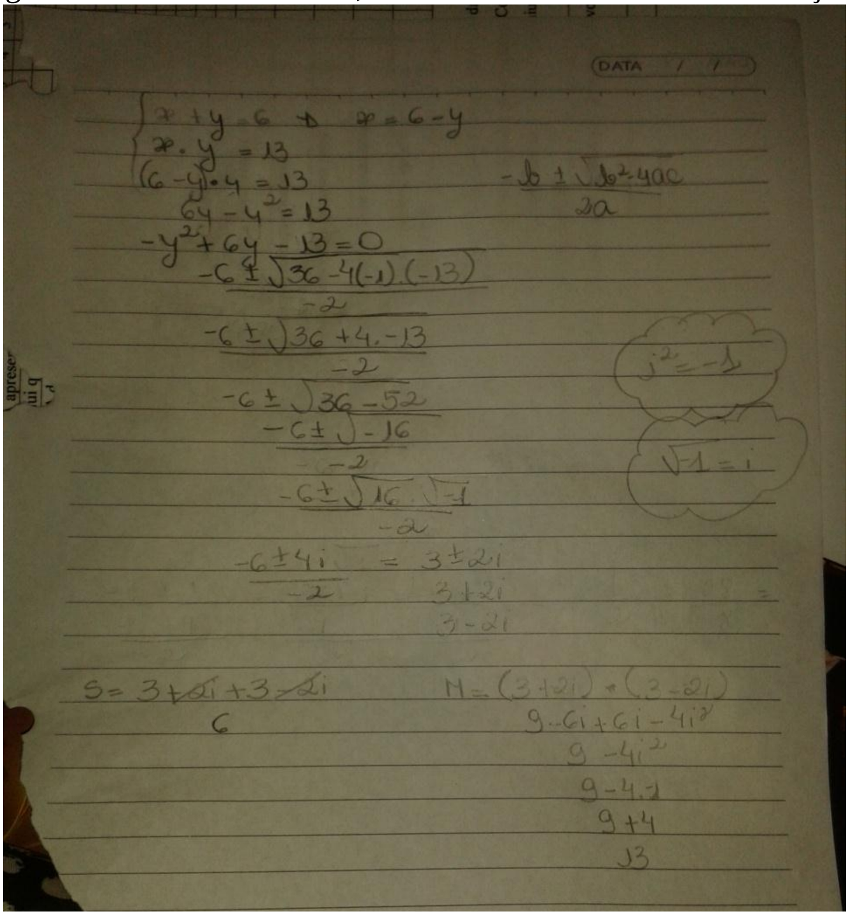


O resultado apresentado pelo Radice estava simplificado, mas logo os estudantes perceberam que poderiam simplificar o resultado encontrado, tendo assim como resposta a mesma que o Radice havia encontrado. Inicialmente, a turma achou estranheza no resultado, era visível no resto deles, também é aceitável essa reação dos estudantes, pois nunca haviam operado com esse tipo de número. Esta reação deve ter sido a mesma dos matemáticos que desenvolveram inicialmente o estudo dos números complexos.

Mesmo achando a resposta um pouco estranha, uma dupla questiona: "Esses números são a resposta do desafio?" e nós questionamos a turma: "Quer conferir? Faça a soma deles, o resultado deve ser 6 e a multiplicação 13!". Sem demora, os estudantes realizaram a soma das duas raízes e encontraram o resultado 6, na multiplicação, efetuaram a distributiva de forma correta, mas não sabiam o que fazer com o i^2, alguns sugeriram resolver igualando a zero, vendo que eles precisavam de auxilio, questionei-os: "Quanto vale i^2?". Essa indagação fez com que os estudantes dessem conta que $i^2 = -1$, que poderiam fazer essa substituição e encontraram a multiplicação das raízes igual a 13.

Essa era justamente a próxima do OA, sendo mostrada somente após dos estudantes terem efetuado as operações. As dificuldades que os estudantes passaram, provavelmente, foram às mesmas dificuldades que Cardano e Bombelli passaram no século XVI, em que, encontravam resultados com raízes negativas, operavam com essas raízes e encontravam o resultado da equação como verdadeiro, por isso que chamavam essas raízes de sofistas ou sutis. Desta forma, a história dos números complexos emergiu na sala de aula, através de um desafio histórico, de uma atividade instigadora, os estudantes puderam sentir as mesmas dificuldades encontradas pelos matemáticos, e com o auxílio do Radice conseguiram resolver este desafio.

Figura 13 - Desafio resolvido, e as raízes confirmadas como soluções



Dando continuidade ao estudo dos números complexos, querendo apresentar um significado ou sentido ao conteúdo, mostrar uma reportagem do Fantástico sobre a morte de Eduardo Campos (http://youtu.be/nQYKE0YH33w). A turma ficou atenta ao vídeo e comentei alguns aspectos que fazem com que o avião voe. Ninguém sabia explicar como o avião voa, somente um dos estudantes (aquele que leu sobre as aplicações do número complexo numa das primeiras aulas) comentou que a velocidade do vento influenciava. Assim, foi feito um experimento com eles, sendo cortado um pedaço de papel e colocado abaixo dos lábios, depois o papel foi assoprado. Antes de assoprar foi feita a pergunta: “O papel vai subir ou descer?”. Todos os estudantes afirmaram que o papel iria descer, ficaram surpresos com o resultado do experimento, então afirmei: “Ao assoprar, a velocidade sobre o papel é maior do que embaixo, com o aumento da velocidade na parte cima, a pressão aumenta no lado de baixo, fazendo uma força para cima, por isso o papel sobe. Isso é estudado em física pelo princípio de Bernoulli”. Infelizmente, a turma não conhecia tal principio físico, o que torna difícil fazer uma prática interdisciplinar, integrando o principio de Bernoulli e os números complexos, mas a turma não se esquecerá dessa atividade.

Para finalizar a aula foram entregues os questionários para avaliar se os estudantes compreenderam os conhecimentos básicos trabalhados nos últimos dias de aula, como também uma avaliação do OA. E também, foram recolhidos os questionários dos subsunçores para ver se a atividade da Batalha Naval cumpriu sua função de organizador prévio.

Dia 06 e 10 de novembro

Organização da Feira da escola e limpeza da sala de aula.

Dia 11 de novembro

Neste dia abordamos fizemos uma prática similar ao do Peer Instruction, onde os estudantes tinham que levantar placas indicando a resposta correta. As questões iniciais remetiam a conhecimentos básicos, assim acreditamos que os estudantes não apresentariam dificuldade na resolução, e esta hipótese foi comprovada pela atividade.

A primeira questão remetia em definir as duas partes dos números complexos, todos os estudantes (17) acertaram a questão; na seguinte, envolvia a identificação da parte real e da parte imaginária, 15 estudantes acertaram a questão, os 2 que erraram trocaram a parte real e a parte imaginária; a questão 3 se remeteu a identificar um número real, 12 estudantes acertaram a questão, os outros tinham marcado outras alternativas, mas foram convencidos com a explicação dos alunos, uma estudante relatou: “Para ser número real não posso ter a parte imaginária” e outra completou “para não ter a parte imaginária tenho que multiplicar por zero para anular ela”. Na questão 4, gerou confusão com a turma, pois a maioria não tinha o conhecimento do significado deu um número imaginário puro, assim somente 6 estudantes acertaram, os demais assinalaram a alternativa 1 + i, relatando que a unidade imaginária estava sozinha, sem um valor junto consigo, por isso seria imaginário puro, mas um aluno levou uma pergunta: “Mas esse número mistura parte real e imaginária, como vai ser imaginário puro?” e outro argumentou “Eu entendi que imaginário puro é o número que somente tem a parte imaginária, esse ai (1 + i) tem parte real. Ele não pode ser imaginário puro”. Com esta argumentação, os estudantes saíram convencidos que o imaginário puro seria o número que tinha parte real igual a zero, e que tem parte imaginária.

Figura 14 - Estudantes discutindo sobre as questões

Para terminar as perguntas sobre a forma algébrica do número complexo, foi questionado sobre a representação no plano Argand-Gauss de um número real, 16 estudantes erraram a questão, o motivo deste número foi que os estudantes não tiveram contato, não pesquisaram sobre sua representação geométrica. Assim foi necessário a intervenção do professor, questionando: “Quando um número complexo é real?”, eles responderam: “quando parte imaginária é zero”, voltamos a questionar “Ao colocar um ponto num plano, quando ele tem um valor zero, ele se localiza em um dos quadrantes?”, responderam “não”. Assim, foi definido que o eixo horizontal é da parte real e do eixo vertical da parte imaginária. Com isso, todos os estudantes acertaram a próxima questão que consistia na representação no plano Argand-Gauss de um imaginário puro.

Na sequência foi feito um exercício de comparação de números complexos, onde 15 estudantes acertaram a questão, na explicação argumentaram: “Eu comparei a parte real de um lado com a parte real do outro lado, e depois fiz o mesmo com a parte imaginária. Isso é lógico”. Dando continuidade, foi sugerida uma questão de soma, onde 16 estudantes acertaram, onde eles argumentaram “somei os termos semelhantes” e ainda “somei a parte real com a parte real e a imaginária com a imaginária”. Já a subtração, 10 acertaram, os que erraram tinham compreendido que somente a parte real do z_2 seria subtraída, eles argumentaram que z_2 não estava dentro dos parênteses para subtrair a parte imaginária. Mas, os que acertaram falaram: “antes eu somei as partes semelhantes, agora vou subtrai elas, como se z_2 tivesse parênteses. O z_2 é toda a expressão, daí iria os parênteses”.

Figura 15 - Estudantes resolvendo individualmente as questões

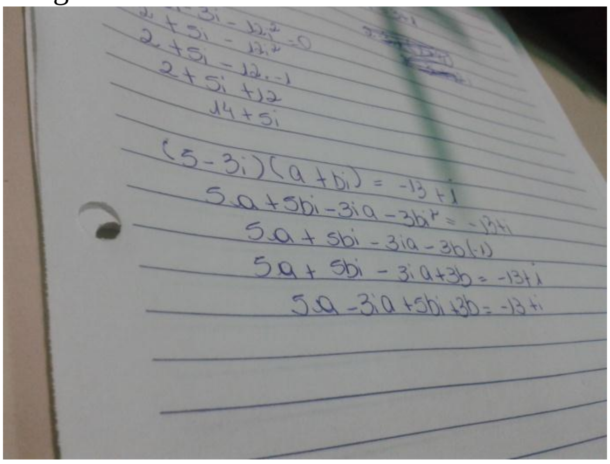
A igualdade da soma de números complexos foi resolvida sem dificuldade por 13 estudantes, sendo que os demais erraram no sinal. A partir daqui a atividade ficou cansativa para alguns estudantes. Talvez a questão que mais tenha chamado atenção se referia a multiplicação de dois números complexos, onde 16 resolveram fazendo a multiplicação da parte real com a parte real e a imaginária com a imaginária, comentando “me que fácil, é muito lógico a resposta”.

Ao se deparar com a questão errada, ficaram surpresos e intrigados com qual seria a resposta, assim comentamos: “Coloquei no papel o calculo e efetuem a multiplicação”. Ao colocar no papel alguns estudantes já perceberam o seu erro. Alguns não se lembravam o que fazer com i^2, mas logo os colegas falaram que $i^2 = -1$, e que a fórmula de Bháskara não seria necessário. Eles relaram “Neste caso temos que fazer a distributiva, não podemos fazer somente com os semelhantes”.

Figura 16 - Estudante explicando para o outro os cálculos

Na igualdade na multiplicação, os estudantes resolveram por tentativa e erro, assim 13 chegaram a resposta correta, um comentou “se não tivesse alternativa ninguém iria conseguir”, dai comentamos “uma colega estava no caminho certo”, e outra disse: “daí teríamos que montar um sistema e resolver ele!”.

Figura 17 - Estudante resolvendo o sistema

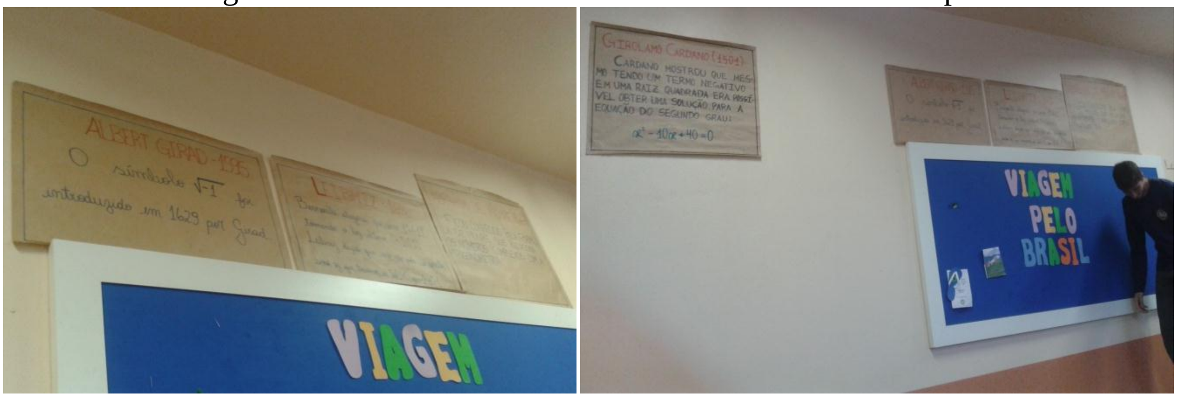


A próxima questão envolvia a divisão de um número complexo por um número real, 15 estudantes responderam corretamente, mas um argumento do colega quase fez com que eles acreditassem que sua resposta estaria errada “Eu dividi as partes semelhantes, como foi feito na soma e subtração”, alguns convencidos com argumentação, mas se lembraram da multiplicação “a divisão é parecido com a multiplicação, porque na multiplicação fizemos a distributiva e aqui não iríamos dividir por todos os elementos?”, assim aquele 1 saiu convencido que teria que dividir por todo o numerador. Por fim, fizemos a divisão pela unidade i, ninguém acertou, pois eles sugeriram dividir as partes semelhantes, do numerador pelo denominador, mas logo perceberam que estavam errados. Assim, interferimos novamente, questionando “quanto vale raiz quadrada de -1?” “O que você faziam quando tinham a raiz no denominador?” Assim, alguns estudantes conseguiram resolver corretamente após esses questionamentos. Porém, a turma já estava cansada, sendo assim vamos retomar estes conceitos na próxima aula.

Dia 13 de novembro

Iniciamos aula construindo a linha do tempo dos números complexos e fazendo a avaliação com os estudantes se eles atingiram os objetivos mínimos de aprendizagem. A fixação da linha do tempo, as explicações demoraram aproximadamente quarenta minutos, nem todos os grupos fizeram os cartazes corretamente, assim ficou combinado que na próxima aula deveriam trazer eles, sendo assim poderia alterar seu conceito para satisfatório.

Figura 18 - Estudantes fixando os cartazes da linha do tempo



Após fixarem os cartazes, discutimos com os estudantes a forma de resolver a divisão de números complexos. Eles compreenderam facilmente quando era dividido por um número real ou pela unidade imaginária i, mas quando tinha no denominador um número complexo com as duas partes, eles não sabiam fazer. Entre os estudantes, dois haviam dito que tentaram fazer em casa essa divisão, mas não conseguiram resolver. A ideia dos dois era multiplicar por i, como foi feito na divisão por i, mas eles perceberam que não conseguiam tirar a unidade imaginária do denominador. Assim, dando continuidade, uma das estudantes sugeriu multiplicar pelo conjugado, mesmo sem saber seu significado, e assim foi desenvolvida a divisão. Rapidamente, explicamos por que teria que ser esse número para dividir o número complexo. Como esperado, nesta parte eles apresentaram um pouco de dificuldade em entender o processo da divisão.

Dando continuidade a aula, sugerimos um desafio para os meninos ($x^2 - 2x + 2 = 0$) e para as meninas ($x^3 - 2x^2 + 2x = 0$), para encontrarem as soluções dessas equações. Sem muita dificuldade eles calcularam as raízes, encontrando as respostas corretas. Finalizando a aula, comentamos sobre a relação entre o grau do polinômio e a sua quantidade de raízes, como também as raízes complexas sempre serem duplas (número complexo e seu conjugado). Assim, a turma ficou de pesquisar o que seria o conjugado de um número complexo.

Dia 17 de novembro

Neste dia, os estudantes trouxeram a definição do conjugado de um número complexo, onde também foi ressaltado a sua utilização para os cálculos de divisão e sua relação com as raízes de polinômio. Depois disso, os estudantes interagiram no OA, conhecendo sobre as potências da unidade imaginária. Esta atividade foi guiada pelo professor, pois a maioria dos estudantes não tinha consigo o notebook. Eles interagiam respondiam as perguntas e acompanhavam atentamente o OA. Logo, os estudantes perceberam que para a potência de i só teríamos quatro valores possíveis, e conseguiram estabelecer a hipótese do resto da divisão.

Ao calcular i^{17}, alguns responderam i. Perguntados o porquê de ser i, eles responderam: “Porque com o expoente 16 é i^0, que é 1, daí 17 é o próximo, então seria i”. O mesmo responderam de i^{30}, que com o expoente 28 seria i^2, assim i^{30} seria dois depois que é i^2, essa foi a explicação dada pelos estudantes. Então, eles tinham a ideia correta, somente não sabiam formalizar a hipótese deles, o que foi possível através do ambiente de prática, onde eles perceberam essa relação entre o resto da divisão por 4 e o respectivo expoente. No final da aula, foi entregue os próximos questionários. Além disso, a aula foi interrompida para que uma professora conversasse com eles sobre a escolha do convite para a formatura dos mesmos, isso demorou cerca de 20 minutos, e acabou desconcentrando os estudantes.

Dia 20 e 27 de novembro

Nestes dias ocorreu o circuito de questões, onde os estudantes tinham que resolver exercícios de aprendizagem sobre as operações com os números complexos. A turma participou da atividade, demonstrando interesse e dedicação durante o circuito. Na rodada 1 (soma e subtração) todos acertaram, sem dificuldade e sem solicitar ajuda ao grupo.

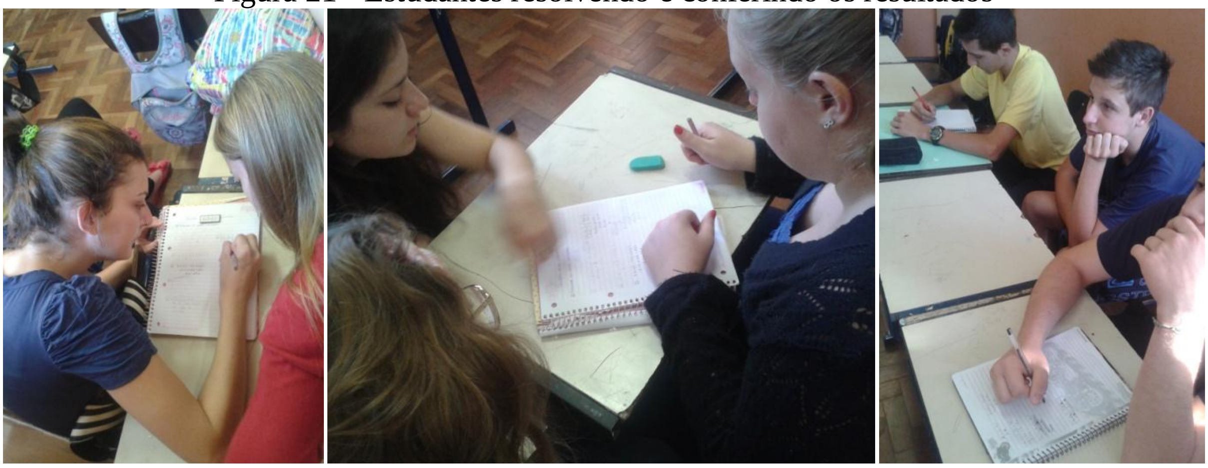
Figura 19 - Estudantes solicitando ajuda ao grupo e o outro grupo resolvendo

Na rodada 2 (multiplicação), os meninos acabaram solicitando ajuda e na primeira atividade erraram uma questão, desta forma, os meninas abriram vantagem.

Figura 20 - Grupos resolvendo uma atividade do circuito

Na rodada 3 (divisão), ocorreu o mesmo, os meninos solicitaram ajuda e erraram a primeira atividade, pois não sabiam mais como se fazia a divisão entre números complexos que possuíam a parte real e a imaginária. Na rodada 4 (expressões) começou a complicar e os dois grupos começaram a solicitar ajuda, por um descuido os meninos acabaram errando a simplificação de uma fração.

Figura 21 - Estudantes resolvendo e conferindo os resultados



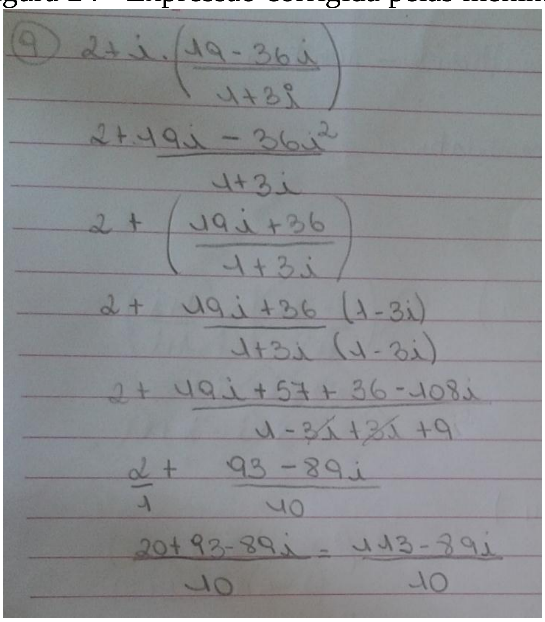
Na rodada 5 (potência i), os meninos não tinham compreendido essa potencia, e acabaram errando as suas questões, mas conseguiram corrigir as das meninas. Na rodada 6 (expressão de potência de i), os meninos recuperaram e compreenderam como se fazia a potência e acertaram todas.

Figura 22 - Estudantes se empenhando e interagindo com o grupo em busca das soluções

Na última rodada, os estudantes estavam cansados, porém se dedicaram para resolver as expressões, novamente por um descuido os meninos simplificaram errado, já as meninas foram impecáveis e acertaram todas as questões e corrigiram corretamente as demais.

Figura 23 - Estudantes na última rodada

Figura 24 - Expressão corrigida pelas meninas



01 de dezembro

Neste dia, foi feita a explanação da forma trigonométrica do número complexo, para isto, os estudantes acompanharam os aplicativos através do retroprojetor e faziam a leitura e respondiam as perguntas feitas pelo Radice. Desta forma, os estudantes perceberam facilmente que ao multiplicar dois números complexos, a relação entre os ângulos é de soma, e na divisão, eles deduziram que seria de subtração.

Após este aplicativo, fomos para o próximo para chegar a forma trigonométrica. Eles se lembravam do teorema de Pitágoras para calcular o módulo, e também das relações trigonométricas. Desta forma, metade da turma conseguiu compreender a transformação do número complexo da forma algébrica para a trigonométrica, para o restante da turma, foi necessário retornar o aplicativo. Após a interação no ambiente, os estudantes foram divididos em dois grupos para realizar a transformação da forma algébrica para a trigonométrica, e vice-versa, os grupos se empenharam e conseguiram fazer as atividades. Depois, eles compartilharam os resultados e comprovaram os resultados.

02 de dezembro

Inicialmente, os estudantes resolveram algumas atividades que envolvia a forma trigonométrica, os estudantes estavam dedicados na resolução das atividades, após terminar a aula, os mesmos continuaram a resolver as atividades. As principais dificuldades encontradas pelos estudantes para resolver as atividades iniciais foram na determinação do argumento, principalmente quando ele não estava localizado no primeiro quadrante, mas após alguns questionamentos calcularam o valor correto do argumento.

Figura 25 - Estudantes resolvendo exercícios sobre a forma trigonométrica

Depois, os estudantes foram levados para o laboratório de informática, onde baixaram o jogo Show do Milhão. A ansiedade era evidente nos estudantes, eles levaram o jogo a sério, procurando ganhar o maior prêmio. Alguns chegavam a comemorar os acertos, principalmente para os prêmios melhores. Nessa aplicação, encontramos alguns erros no aplicativo, numa digitação da multiplicação que ficou multiplica e também no resultado do prêmio de 1 milhão de reais, onde uma dupla iria ganhar o prêmio se tivesse a alternativa correta.

Figura 26 - Estudantes jogando Show do Milhão

Dia 04 de dezembro

Neste dia os estudantes fizeram exercícios sobre a forma trigonométrica dos números complexos, onde encontraram dificuldade, principalmente, nas situações com o contexto físico de corrente alternada, pois misturou i e j, o que causou estranheza para alguns. Além disso, uma parte da turma fez uma rota de aprendizagem, e outra formou alguns fractais.

Dia 08 de dezembro

Vimos a radiciação de números complexos de uma forma coletiva, através do retroprojetor, os alunos estavam inquietos por causa da disciplina de seminário integrado, uma grande desafio foi motivar os estudantes a participarem das aulas nesses últimos dias. Após ver os aplicativos, os estudantes responderam algumas questões e entregaram os últimos questionários como também o termo de consentimento de imagem.

APÊNDICE I – QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DO PLANO 2

A avaliação quantitativa (pontuação) seguirá o modelo de escala EDUCAUSE 2001 (www.educause.edu). Segue, abaixo, os significados da escala proposta na avaliação do objeto de aprendizagem:

5 - Concordo plenamente   3 - Não concordo nem discordo   1 - Discordo totalmente

4 - Concordo   2 - Discordo   SR - Sem resposta

Em relação ao ambiente de aprendizagem "Porque os aviões voam?", "A energia elétrica no mundo moderno" e "O que são fractais?".

Critérios	5	4	3	2	1	SR
O OA apresenta informações precisas						
O OA inclui quantidade adequada de material						
O OA demonstra um conceito base						
O OA resume bem os conceitos						
É fácil andar pelo ambiente						
O ambiente tem instruções claras de uso						
O ambiente é motivador						
O ambiente é visualmente atraente						
O ambiente é interativo						
A linguagem é adequada e sem erros ortográficos						
A linguagem matemática é adequada e sem erros						
Como recurso de aprendizagem, identifica objetivos de aprendizagem						
Como recurso de aprendizagem, reforça conceitos progressivamente						
Como recurso de aprendizagem, demonstra relações entre conceitos						
Como recurso de aprendizagem, fundamenta em conceitos prévios						
Como recurso de aprendizagem, é eficiente (pode-se aprender muito em curto período de tempo)						

Você achou importante conhecer aplicações dos números complexos em situações reais?

( ) Não   ( ) Mais ou menos   ( ) Muito importante

Qual a aplicação despertou mais curiosidade? Por quê?

____

____

Sobre qual(is) aplicação(ões) você gostaria de saber mais?

____

____

Conhecer algumas aplicações serviu como incentivo para o estudo dos números complexos?

( ) Não ( ) Mais ou menos ( ) Sim

Conhecer algumas aplicações de números complexos propiciou estabelecer alguma relação com outra disciplina da escola? Se sim, qual disciplina e qual assunto tem relação com os números complexos?____

____

____

____

____

Em relação ao ambiente de aprendizagem "Plano de Argand-Gauss" e "Potências de i".

Critérios	5	4	3	2	1	SR
O OA apresenta informações precisas.						
O OA inclui quantidade adequada de material.						
O OA demonstra um conceito base.						
O OA resume bem os conceitos.						
É fácil andar pelo ambiente.						
O ambiente tem instruções claras de uso.						
O ambiente é motivador.						
O ambiente é visualmente atraente.						
O ambiente é interativo.						
A linguagem é adequada e sem erros ortográficos.						
A linguagem matemática é adequada e sem erros.						
Como recurso de aprendizagem, identifica objetivos de aprendizagem.						
Como recurso de aprendizagem, reforça conceitos progressivamente.						
Como recurso de aprendizagem, demonstra relações entre conceitos.						
Como recurso de aprendizagem, fundamenta em conceitos prévios.						
Como recurso de aprendizagem, é eficiente (pode-se aprender muito em curto período de tempo).						

Os números complexos são divididos em duas partes, quais são elas? ____________________

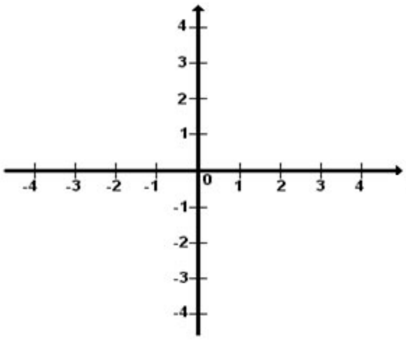
____

Vimos que os números reais são números complexos, e que existem números imaginários puros. Como deve ser o número complexo para que ele seja um número real? E para ser um imaginário puro?____

____

____

Nomeie os eixos no plano, abaixo, e represente geometricamente os números complexos z_1 = 2 + 3i, z_2 = – 3 – 4i e z_3 = – 1 + i.



Como se faz a soma de dois números complexos?____________________________________

____

____

Relate como proceder para multiplicar dois números complexos.

____

____

____

Dividir números complexos é como efetuar a racionalização de denominadores. Escrevemos a divisão como uma fração e multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Qual a diferença entre conjugado e oposto de um número complexo. Explique e apresente o conjugado e o oposto do número -2+5i.___________________________________

____

A potência da unidade imaginária ressalta que multiplicar um número complexo por i, é como rotacionar o vetor associado a esse número complexo. Quanto mede o ângulo de rotação e qual o sentido, quando multiplico i por i?____

____

____

____

____

Quais são os possíveis resultados de uma potência de i, sendo o expoente um número inteiro e positivo? ____

____

Qual o valor i^{41}, i^{135} e ainda de i^{1000}?____

____

____

Efetue:

a) $(4 + 3i)(1 - 2i) + 5 - 2i$

b) $\frac{4-10i}{-2i} + \frac{45-15i}{3+i} - i^{95}$

APÊNDICE J – QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DO PLANO 3

A avaliação quantitativa (pontuação) seguirá o modelo de escala EDUCAUSE 2001 (www.educause.edu). Abaixo segue os significados da escala proposta na avaliação do objeto de aprendizagem:

5 - Concordo plenamente   3 - Não concordo nem discordo   1 - Discordo totalmente

4 - Concordo   2 - Discordo   SR - Sem resposta

Em relação ao ambiente de aprendizagem "Show do Milhão".

Critérios	5	4	3	2	1	SR
O OA apresenta informações precisas.						
O OA inclui quantidade adequada de material.						
O OA demonstra um conceito base.						
O OA resume bem os conceitos.						
É fácil andar pelo ambiente.						
O ambiente tem instruções claras de uso.						
O ambiente é motivador.						
O ambiente é visualmente atraente.						
O ambiente é interativo.						
A linguagem é adequada e sem erros ortográficos.						
A linguagem matemática é adequada e sem erros.						
Como recurso de aprendizagem, identifica objetivos de aprendizagem.						
Como recurso de aprendizagem, reforça conceitos progressivamente.						
Como recurso de aprendizagem, demonstra relações entre conceitos.						
Como recurso de aprendizagem, fundamenta em conceitos prévios.						
Como recurso de aprendizagem, é eficiente (pode-se aprender muito em curto período de tempo).						

Sobre o nível das questões, elas apresentam um avanço gradativo de complexidade?

( ) Sim ( ) Não.

Quanto dinheiro você recebeu na primeira vez que jogou? ___________

Quantas vezes você solicitou ajuda para responder as questões?

Nível ↓ Jogada →	**1º**	**2°**	**3°**	**4º**					
de 1 a 5 mil									
de 10 a 50 mil									
de 100 a 500 mil									
1 milhão									

Escreve abaixo, se você tem alguma observação ou sugestão a fazer que ajude no aprimoramento da atividade Show do Milhão. ____

____

____

____

Em relação ao ambiente de aprendizagem "Forma retangular para forma trigonométrica".

Critérios	5	4	3	2	1	SR
O OA apresenta informações precisas.						
O OA inclui quantidade adequada de material.						
O OA demonstra um conceito base.						
O OA resume bem os conceitos.						
É fácil andar pelo ambiente.						
O ambiente tem instruções claras de uso.						
O ambiente é motivador.						
O ambiente é visualmente atraente.						
O ambiente é interativo.						
A linguagem é adequada e sem erros ortográficos.						
A linguagem matemática é adequada e sem erros.						
Como recurso de aprendizagem, identifica objetivos de aprendizagem.						
Como recurso de aprendizagem, reforça conceitos progressivamente.						
Como recurso de aprendizagem, demonstra relações entre conceitos.						
Como recurso de aprendizagem, fundamenta em conceitos prévios.						

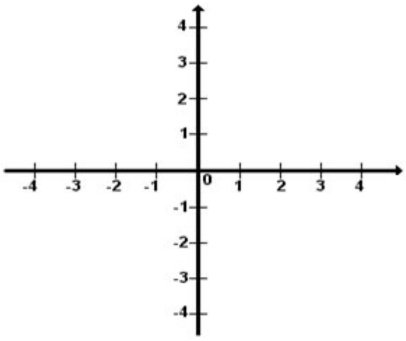
Como recurso de aprendizagem, é eficiente (pode-se aprender muito em curto período de tempo).						

Além da forma algébrica (a + bi) dos números complexos, existe outra forma de representa-los, que a forma trigonométrica. Que dados são levados em consideração para representar um número complexo na forma trigonométrica? ____

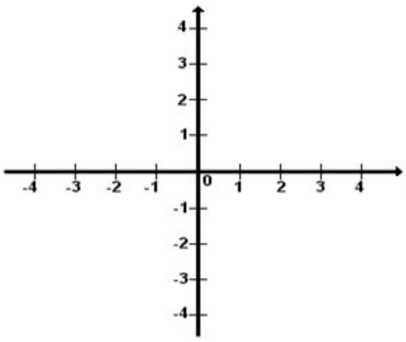
____

____

Represente no plano Argand-Gauss o número complexo $z_1 = 3 + 2i$ e determine-o na forma trigonométrica, destacando os elementos principais da forma trigonométrica.



Represente no plano Argand-Gauss o número complexo $z_2 = 3(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$ na forma algébrica.



Ao multiplicar dois números complexos, qual a relação existe entre esses elementos?

____

____

Ao dividir dois números complexos, qual a relação existe entre esses elementos?

____

____

Caso tenha alguma dica, observação ou sentimento que queira expor, em relação ao espaço de aprendizagem, sinta-se à vontade, pois o espaço de aprendizagem está em fase de construção e suas sugestões são de extrema importância para aprimorar este ambiente.

APÊNDICE K – TERMO DE CONSENTIMENTO

Visando desenvolver uma pesquisa que é parte da dissertação de Mestrado **Interagindo com os Números Complexos** coordenado por mim, Cassiano Scott Puhl (mestrando orientado pela Profª. Drª. Isolda Gianni de Lima), no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática: Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Caxias do Sul, convido você a responder uma entrevista e questionários que tem como finalidade investigar de que modo a o objeto de aprendizagem www.matematicocomplexa.hol.es ajudou na compreensão do conteúdo de números complexos. Além dos questionários, solicitamos a permissão para a utilização dos direitos de imagens, referente as imagens registradas durante as aulas. Para tanto, é importante assinar abaixo desta mensagem tomando ciência de que as informações serão tratadas somente para fins de pesquisa e que sua identidade enquanto participante da pesquisa será preservada, podendo ser utilizada em eventos acadêmicos, **apenas, sem possibilitar sua identificação.** Não serão divulgados nome ou informações que possam identificar o participante da pesquisa. Os dados obtidos serão utilizados apenas para fins de investigação, e o participante pode desistir a qualquer momento sem prejuízo algum. O participante pode obter informações sobre o andamento da pesquisa, quando achar necessário.

Desde já agradeço a sua colaboração e coloco-me a disposição para esclarecimentos pelo telefone (51) 97026566 e e-mail: c.s.puhl@hotmail.com

Eu, ____, RG ____________________________, declaro que estou ciente das informações acima e autorizo a utilização de minhas interações no contexto de aprendizagem para fins da pesquisa.

Caxias do Sul, 09 de dezembro de 2014.

____

Assinatura do sujeito da pesquisa

____

Assinatura do pesquisador

APÊNDICE L – DESCRIÇÃO DO PRODUTO DA DISSERTAÇÃO

A dissertação **Números Complexos: interação e aprendizagem**, de Cassiano Scott Puhl junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Mestrado Profissional, deu origem a um objeto de aprendizagem virtual (OA). Este recurso digital foi construído com base em pesquisas realizadas com professores do Ensino Básico e do Ensino Superior, leitura de trabalhos científicos, participação em eventos de Educação Matemática e uma perspectiva própria de metodologia para a aprendizagem de números complexos. O trabalho e estudo desenvolvidos estão disponíveis em <http://matematicacomplexa.hol.es>.

O objeto de aprendizagem foi criado como produto final do mestrado na linha de pesquisa "Tecnologias, Recursos e Materiais Didáticos para o Ensino de Ciências e Matemática", em que constam textos didáticos, vídeos informativos, questões de diversos vestibulares, aplicativos do GeoGebra e uma rota de aprendizagem, essa aplicada, como experimento numa escola de Ensino Médio, para a aprendizagem de números complexos, à luz da aprendizagem significativa, segundo David Ausubel.

O OA foi desenvolvido levando em consideração teorias de aprendizagem ativa e significativa e orientações do Programa Ensino Médio Inovador e do Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio. O ambiente do OA foi construído visando ser dinâmico, agradável e dialógico para se aprender sobre números complexos. Esse recurso pode ser utilizado como material de apoio em sala de aula ou em atividades de aprendizagem complementares aos estudos em classe e, também, para estudantes que querem realizar uma aprendizagem autônoma de números complexos, sem a orientação de um professor e sem a obrigatoriedade de uma sequência definida de passos, atividades ou leituras a realizar.

O objeto de aprendizagem é constituído de dez espaços: *Caminhada histórica*, *Espaço do vestibulando*, *Fazer e compreender*, *Apoio tecnológico*, *Rotas de Aprendizagem*, *Quem quer dinheiro? Show do Milhão*, *Foco na teoria*, *Calculadora*, *Aplicações* e *Fórum de discussões*.

A *Caminhada histórica* é um espaço estruturado como uma linha do tempo, em que são apresentados os matemáticos que contribuíram para a formalização da teoria dos números complexos. Como os demais conjuntos numéricos, o desses números foi uma construção humana, que percorreu séculos e contou com a contribuição de diversos matemáticos de diferentes nacionalidades.

No *Espaço do vestibulando* consta uma coletânea de questões sobre números complexos, que foi preparada como resultado de uma pesquisa realizada em provas de vestibular de universidades federais do Brasil e de outras que se destacam na oferta de cursos da área das Ciências Exatas e Tecnologia do estado do Rio Grande do Sul.

Para espaço de aprendizagem *Fazer e compreender* foi construída uma sequência de aplicativos no Geogebra, com atividades potencialmente significativas para a aprendizagem de números complexos. O GeoGebra é um software livre, que reúne recursos para processar geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos variados, que está disponível para multiplataformas.

O *Apoio tecnológico* foi criado como apoio à questões relacionadas ao software GeoGebra, que requer o programa Java para programar e rodar os aplicativos. E o Java, correntemente, precisa de uma atualização que, para quem não tem familiaridade com a informática, não é um procedimento trivial. Assim, neste espaço são propostas soluções para alguns problemas recorrentes.

Em *Rotas de aprendizagem* são sugeridos percursos que podem ser seguidos dentro do OA como possíveis rotas por professores, adaptando-as aos seus planejamentos ou por estudantes que desenvolvem uma aprendizagem autônoma.

Quem quer dinheiro? é uma expressão bastante conhecida e sugere o lúdico. Para desafiar e estimular os estudantes criou-se um "Show do Milhão", alusivo a um programa da televisão brasileira, com perguntas sobre números complexos.

No espaço de aprendizagem *Foco na teoria*, são apresentados conceitos formais da teoria dos números complexos.

Em *Calculadora*, são propostas formas de como operar com números complexos em calculadoras científicas. Para isso, buscou-se por manuais das calculadoras Casio e HP, pois são bastante utilizadas por estudantes do Ensino Médio ou de cursos de Engenharia. Assim, agregou-se, ao OA, vídeos explicativos que foram disponibilizados no YouTube, de como se opera com os números complexos nessas calculadoras.

No espaço *Aplicações*, são apresentadas algumas situações em que os números complexos estão presentes no mundo real, descrevendo-as em linguagem compreensível para estudantes de Ensino Médio. Tais situações foram pesquisadas e construídas com a colaboração de professores universitários e de cursos técnicos, que sugeriram bibliografias onde se pode encontrar aplicações que auxiliam a dar substantividade ao conteúdo.

O *Fórum de discussões* permite aos estudantes expor suas dúvidas, sendo auxiliados por professores ou outros estudantes. A troca de experiências e a oportunidade que todos têm de apresentar dúvidas e discutir resoluções ou possíveis soluções cria um ambiente propício para uma construção reflexiva sobre números complexos.

Cada espaço foi criado com o propósito de atender a diversidade dos estudantes que estão presentes nas salas de aulas ou em outros espaços de aprendizagem. Assim, o estudante escolhe por quais espaços quer passar e em qual ordem, conforme seja a sua necessidade, o seu interesse e a sua forma de estudar e aprender, podendo dedicar-se a leituras, resolução de exercícios, vídeos e vídeo aulas, realizar atividades lúdicas, interagir com o Radice, um personagem virtual que propõe reflexões e orientações e construir conhecimento.

No objeto de aprendizagem consta também o espaço *Rotas de Aprendizagem*, que contempla uma proposta de sequência de aulas com atividades potencialmente significativas para a aprendizagem dos números complexos com uma metodologia ativa. Essa rota de aprendizagem foi aplicada durante a pesquisa e foi planejada com quatro etapas.

A primeira é uma proposta didática para introduzir o conceito de unidade imaginária "i", através de uma abordagem geométrica. Desta forma, procura-se dar sentido a unidade imaginária, apresentando-a como o elemento que diferencia um número complexo de um número real. Assim percebe-se a necessidade de rever os conjuntos numéricos e tem sentido o conjunto dos Números Complexos. Ainda nesta etapa, os estudantes conhecem um pouco da evolução histórica desses números, com desafios matemáticos que eram propostos antigamente.

Na segunda etapa do planejamento são considerados os conceitos mais gerais, como partes real e imaginária de números complexos e, com isso, a resolução, com naturalidade, de somas, subtrações, multiplicações e divisões com esses números, a partir de conhecimentos prévios que os estudantes têm destas operações. Como estratégia ativa de aprendizagem é sugerida uma prática similar à da Peer Instruction[1], em que os estudantes podem discutir hipóteses e refletir coletivamente na busca de soluções adequadas. Seguindo as quatro operações básicas, é feito o estudo de potências da unidade imaginária, com a ajuda do Radice e finaliza-se com uma gincana cujas atividades abordam todas as operações, como forma de averiguar as aprendizagens desenvolvidas.

Na terceira parte é proposto o estudo sobre a forma trigonométrica dos números complexos. Ao escrever o número neste formato, pode-se calcular, de modo mais simples,

---

[1] A Peer Instruction tem o objetivo de propiciar que os alunos reflitam individualmente e, depois, discutam em grupo suas respostas, antes de o professor informar qual é a correta. Ao discutir com os colegas, os estudantes argumentam em defesa a sua resposta e devem ter certo domínio da teoria para convencer os colegas da sua escolha, num diálogo que promove a compreensão e o aprendizado do tema em questão. Após esta discussão inicial, os pequenos grupos respondem novamente a questão e, se persistirem divergência nas respostas, acontece nova rodada de discussões, mais ampla, em que o professor media o processo. O docente cuidará para que a argumentação certa prevaleça, com questionamentos, dicas ou explicações, se for necessário, orientando e desequilibrando cognitivamente aqueles que não acertaram, para que refaçam seu pensamento e reconstruam o conceito com entendimento.

multiplicação e divisão de números complexos, como também tornar possível a potenciação e radiciação com esses números. Nesta terceira parte, o OA é especialmente colaborador, pois com um recurso criado no GeoGebra, é possível perceber a relação entre módulo e argumento dos números complexos nas de multiplicação e divisão. Para finalizar esta etapa é propiciado um jogo de perguntas e respostas, no espaço *Quem quer dinheiro? Show do Milhão*, uma atividade lúdica e desafiadora para os estudantes testarem, trocarem e complementarem o seu conhecimento, uma oportunidade de recuperarem defasagens no processo de aprendizagem.

A quarta e última parte do planejamento é para a potenciação e a radiciação, desenvolvidas com o auxílio do objeto de aprendizagem, em que é enfatizada a potenciação como sucessivas multiplicações e a radiciação como a operação inversa da potenciação, e com uma atenção especial ao seu significado geométrica, em que se pode estabelecer relação com progressões aritméticas e com os polígonos regulares. Por fim, apresentam-se situações reais em que ocorre a aplicação de números complexos.

Todo esse planejamento foi construído seguindo-se pressupostos teóricos para se desenvolver uma aprendizagem ativa e significativa, estando disponível no espaço *Rotas de Aprendizagem*.

Os resultados da experiência vivenciada com esse planejamento que integra o objeto de aprendizagem são detalhados na dissertação, em que os dados coletados, com instrumentos como questionários, registros em fotografias, diário de bordo e observações diretas, fornecem indícios do potencial da proposta para a aprendizagem significativa de Números Complexos. Ao disponibilizar toda a diversidade de materiais construída para a aprendizagem de números complexos, como também rotas de aprendizagem, têm-se, com este objeto de aprendizagem, os objetivos de:

- Compartilhar a dissertação, o objeto de aprendizagem e a prática construída com professores, para que possam utilizar e adaptá-la à realidade dos seus estudantes, sugerindo melhorias;
- Propiciar um ambiente em que estudantes podem aprender sozinhos, sem professores, conceitos estruturantes sobre números complexos;
- Oferecer a professores universitários um recurso que auxilie a suprir defasagens sobre números complexos, como atividade à distância.

Assim, utilizou-se a tecnologia como aliada para propiciar uma metodologia diferenciada, podendo ser aplicadas em atividades à distância ou presencialmente, com o foco na construção do conhecimento, para estudos iniciais ou para ajudar estudantes com defasagem de aprendizagem. Este trabalho abre espaços, para outros trabalhos, relacionados ao conteúdo de Números Complexos, como é, também, o objetivo para próximas pesquisas, ampliando a ação do estudante no processo de aprendizagem e destacando, sempre mais, o professor como mediador.