

**UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL  
ÁREA DO CONHECIMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E  
ENGENHARIAS**

**GUSTAVO STEFANI SAUTHIER**

**UM ESTUDO SOBRE O ERRO DE ESTIMAÇÃO DE MOVIMENTO  
TRANSLACIONAL EM IMAGENS POR ALGORITMOS BASEADOS  
NA CORRELAÇÃO DE FASE**

**CAXIAS DO SUL**

**2022**

**GUSTAVO STEFANI SAUTHIER**

**UM ESTUDO SOBRE O ERRO DE ESTIMAÇÃO DE MOVIMENTO  
TRANSLACIONAL EM IMAGENS POR ALGORITMOS BASEADOS  
NA CORRELAÇÃO DE FASE**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado como requisito parcial  
à obtenção do título de bacharel em  
Engenharia de Controle e Automação  
na Área do Conhecimento de Ciências  
Exatas e Engenharias da Universidade  
de Caxias do Sul.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme  
Holsbach Costa

**CAXIAS DO SUL**

**2022**

**GUSTAVO STEFANI SAUTHIER**

**UM ESTUDO SOBRE O ERRO DE ESTIMAÇÃO DE MOVIMENTO  
TRANSLACIONAL EM IMAGENS POR ALGORITMOS BASEADOS  
NA CORRELAÇÃO DE FASE**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado como requisito parcial  
à obtenção do título de bacharel em  
Engenharia de Controle e Automação  
na Área do Conhecimento de Ciências  
Exatas e Engenharias da Universidade  
de Caxias do Sul.

**Aprovado em 11/07/2022**

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Guilherme Holsbach Costa  
Universidade de Caxias do Sul - UCS

---

Prof. M.e Felipe Augusto Tondo  
Universidade de Caxias do Sul - UCS

---

Prof. Dr. Cláudio Antônio Perottoni  
Universidade de Caxias do Sul - UCS

## RESUMO

Registro de imagens é o termo usado para descrever o processo de alinhamento de duas imagens. Esse processo pode ser descrito como a estimação do movimento relativo entre os objetos (*pixels*) de uma imagem em relação a outra, contendo conteúdos semelhantes. Algoritmos baseados em Correlação de Fase são de especial interesse por serem assumidamente rápidos, o que lhes confere a aptidão a processamento em tempo-real. Os trabalhos encontrados na literatura sobre o comportamento desses algoritmos focam na influência do *aliasing* gerado pela rotação sobre o erro de estimação/registo. Recentemente, um estudo apontou as inovações (objetos presentes em apenas uma das imagens a serem registradas) como igualmente ou ainda mais importantes, como já é assumido em outras abordagens de registro. Neste trabalho é proposto um estudo sobre a influência das inovações sobre o erro de registro, pelo método de Correlação de Fase, frente a movimentos de translação. Como resultado, esse estudo aponta direções possíveis para uma investigação sobre a confiabilidade do movimento estimado pelo método.

**Palavras-chave:** Registro de imagens. Erro de registro. Correlação de Fase.

## ABSTRACT

Image Registration is the term used to describe the process of aligning two images. This process can be described as the estimation of the relative movement between objects (pixels) of an image in relation to another, containing similar contents. Algorithms based on Phase Correlation are of special interest because they are assumed to be fast, which makes them suitable for real-time processing. The works found in the literature on the behavior of these algorithms focus on the influence of the aliasing generated by rotation on the estimation/record error. Recently, a study has pointed to innovations (objects present in only one of the images to be registered) as equally or even more important, as is already assumed in other registration approaches. This work proposes a study on the influence of innovations on the registration error, by the Phase Correlation method, for translational movements. As a result, this study points out possible directions for an investigation about the reliability of the motion estimation by this method.

**Keywords:** Image registration. Registration error. Phase Correlation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Etapas do registro de imagens . . . . .	10
Figura 2 – Mosaico de imagens . . . . .	11
Figura 3 – Produtos em deslocamento por meio de uma esteira industrial . . . . .	12
Figura 4 – Exemplo de fusão de imagens de PET <i>scan</i> e de MRI . . . . .	12
Figura 5 – Registro de um movimento translacional . . . . .	15
Figura 6 – Registro na presença de inovações . . . . .	17
Figura 7 – Interpolação gerada por rotação . . . . .	18
Figura 8 – Imagem original e sua magnitude . . . . .	19
Figura 9 – Imagem suavizada e sua magnitude . . . . .	19
Figura 10 – Formas de janelamento . . . . .	20
Figura 11 – Imagem janelada rotacionada e sua magnitude . . . . .	20
Figura 12 – Magnitudes filtradas da imagem original e rotacionada . . . . .	21
Figura 13 – Ilustração de inovações e oclusões em um par de imagens a ser registrado . . . . .	23
Figura 14 – Registro de imagens mediante a ocorrência de inovações . . . . .	26
Figura 15 – Registro de imagens mediante a ocorrência de inovações e de oclusões . . . . .	27
Figura 16 – Registro de imagens mediante a ocorrência de severas inovações e de oclusões . . . . .	28

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>7</b>
1.1	OBJETIVO GERAL . . . . .	8
1.2	Objetivos específicos . . . . .	8
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> . . . . .	<b>9</b>
2.1	REGISTRO DE IMAGENS . . . . .	9
2.2	CORRELAÇÃO DE FASE . . . . .	13
<b>2.2.1</b>	<b>Notação</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Estimação de movimentos de translação</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>2.2.3</b>	<b>Estimação de movimentos de rotação</b> . . . . .	<b>15</b>
2.3	PRINCIPAIS FONTES DE ERRO . . . . .	16
<b>2.3.1</b>	<b>Inovações e Oclusões</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>2.3.2</b>	<b>Interpolações e aproximações</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>2.3.3</b>	<b>Hipótese de periodicidade dos sinais</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>2.3.4</b>	<b><i>Aliasing</i> dependente de rotação</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>MÉTODO PROPOSTO</b> . . . . .	<b>22</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>29</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>30</b>
	<b>APÊNDICE A – ANÁLISE PELO TEOREMA DE PARSEVAL</b> . . . . .	<b>32</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O *registro* é uma técnica de alinhamento de duas imagens de uma mesma cena (ou objeto), uma delas geralmente chamada de *imagem de referência* e outra de *imagem de entrada*, adquiridas de perspectivas diferentes. A operação de registro é composta pela estimação do movimento relativo entre as imagens e, com base no movimento estimado, pela transformação geométrica que alinha a imagem de entrada com a imagem de referência. Essa técnica é amplamente aplicada ao processamento de imagens médicas, imagens de satélites, imagens panorâmicas, dentre outras aplicações (ZITOVÁ; FLUSSER, 2003).

Recentemente, o registro de imagens foi aplicado à manipulação robótica em linhas industriais de produção, com foco na identificação da posição e orientação de objetos que se apresentam ao manipulador sobre esteiras transportadoras (CAMARGO, 2020). Nesse caso, o movimento relativo entre um padrão (imagem de referência) e a imagem de entrada pode ser modelado como translacional e de rotação, movimentos esses que podem ser convenientemente estimados através das propriedades da Transformada de Fourier (TF) (ABCHE *et al.*, 2006). Como será discutido no Capítulo 2, movimentos de translação são estimados com base na propriedade do deslocamento da TF, enquanto movimentos de rotação e de alteração de escala (*zoom*) podem ser transformados em um modelo de translação através de uma mudança no sistema de referência.

Os métodos baseados na TF geralmente apresentam bom desempenho em condições controladas, com limitações que crescem à medida que não-idealidades são incluídas ao processo (CAMARGO, 2020). Uma das causas apontadas como relevante à perda de desempenho é o *aliasing* gerado pelo processo de rotação de uma imagem (STONE; TAO; MCGUIRE, 2003). Todavia, uma análise teórica que quantifique o efeito do *aliasing* não é apresentada na literatura. Os resultados obtidos por Camargo sugerem que a presença de inovações<sup>1</sup> e o fato de o objeto a ser registrado não corresponder exatamente ao mesmo da imagem de referência (o que diverge das premissas em que se baseiam os algoritmos de registro mais populares) são fatores mais relevantes ao mau desempenho do registro.

Neste trabalho é proposto um estudo que visa a análise teórica da influência das inovações no desempenho do registro de imagens por Correlação de Fase. Por uma questão de taxonomia de análise, o problema é inicialmente delimitado a movimentos puramente translacionais. No Capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica do método de correlação de fase com foco nesse modelo de movimento. No Capítulo 3 é apresentada a análise proposta sobre o comportamento do algoritmo. No Capítulo 4 são apresentados resultados de simulações acerca da proposta e, por fim, no Capítulo 5 o trabalho é concluído.

---

<sup>1</sup> Inovações são objetos que aparecem em uma das imagens mas não aparecem em outra (CAMARGO, 2020).

## 1.1 OBJETIVO GERAL

Este trabalho tem por objetivo geral avançar na formulação de um modelo teórico que caracterize o erro de estimação de movimento entre duas imagens digitais por Correlação de Fase.

## 1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Modelar o erro de registro para a condição de movimento translacional e global;
- Evoluir na busca por uma figura de mérito que permita uma avaliação *a priori* do erro de registro entre um par de imagens;
- Avançar o entendimento do grupo de pesquisa em que se insere sobre o comportamento de algoritmos de registro baseados na Correlação de Fase.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é abordada a teoria necessária para a execução do trabalho visando atingir os objetivos propostos no Capítulo 1. Primeiro é feita uma introdução sobre registro de imagens, na qual o trabalho é direcionado para o método de Correlação de Fase. Para que esse método seja discutido com propriedade, na sequência são revisados os fundamentos da Transformada de Fourier e, por fim, são apresentados os problemas resultantes do uso da técnica mencionada, que são os objetos de interesse de análise deste trabalho.

### 2.1 REGISTRO DE IMAGENS

O registro de imagens é o processo de alinhamento geométrico entre duas imagens que possuam alguma característica em comum, apesar de adquiridas em diferentes tempos, ângulos de visão e/ou a partir de diferentes sensores. O objetivo deste processo é encontrar a equivalência entre os *pixels* das imagens para encontrar uma função que consiga transformar a região de interesse de uma imagem na outra. Pode-se entender esse processo como sendo a comparação entre duas funções tipicamente bidimensionais,  $g_1(x, y)$  e  $g_2(x, y)$ , e a busca por uma transformada (processo de transformação),  $T\{\cdot\}$ , que consiga igualar uma a outra (dentro de um determinado domínio). Assumindo  $g_1(x, y)$  e  $g_2(x, y)$  como sendo funções que representam imagens em duas dimensões tem-se (GONZALEZ; WOODS, 2010):

$$g_2(x, y) = T[g_1(x, y)] \quad (2.1)$$

Idealmente, esse processo deve buscar uma transformação não apenas de posição mas de intensidade dos *pixels*, uma vez que a iluminação pode sofrer variações entre as imagens, seja por variação temporal ou por mudança de ponto de vista. Encontrar os parâmetros da transformação ótima é o ponto mais importante de qualquer problema de registro de imagens (BROWN, 1992).

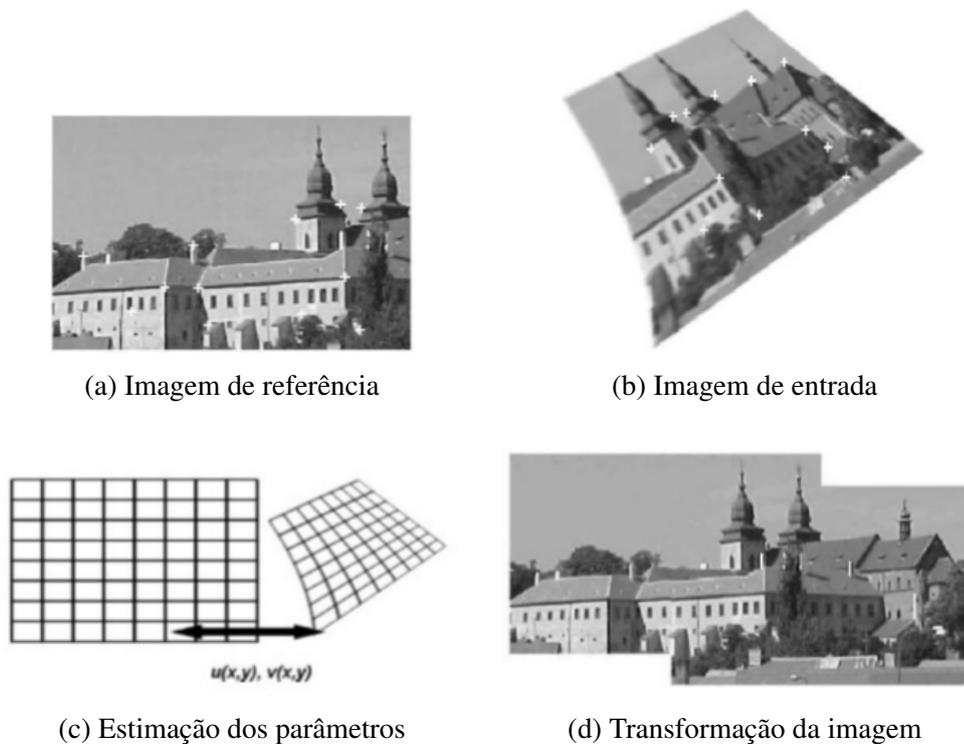
Existem diferentes abordagens para a realização do registro, sendo as abordagens chamadas de *baseadas em características* as mais didáticas para o entendimento do processo como um todo. Assim, ainda que o método de interesse não corresponda a essa abordagem, ela é considerada neste momento para que o leitor possa se familiarizar com o conceito da técnica. Através dela, então, o registro de imagens pode ser resumido em quatro passos (BROWN, 1992; CAMARGO, 2020):

- Detecção de características — etapa em que pontos característicos são identificados em cada imagens. Esses pontos geralmente correspondem a características de altas frequências, como quinas, bordas, etc;

- Pareamento das características — os pontos detectados em uma das imagens são pareados (relacionados) com os pontos detectados na outra imagem;
- Estimação dos parâmetros — estima-se o tipo e os parâmetros da transformação geométrica que relaciona os pontos. Essa transformação pode corresponder, por exemplo, a um movimento translacional e rotacional, que pode ser bem representado por uma transformação bi-cúbica (GONZALEZ; WOODS, 2010);
- Transformação da imagem — transforma-se a imagem adquirida utilizando o modelo e os parâmetros estimados na etapa anterior. Trata-se do alinhamento das imagens, propriamente dito.

Esses passos do registro de imagens são ilustrados na Figura 1. Nas figuras 1a e 1b são ilustradas uma imagem de referência e uma imagem de entrada, respectivamente. Nessas imagens, pontos específicos são destacados por cruzes brancas, ilustrando características supostamente detectadas pelo algoritmo. As respectivas características, são relacionadas de uma imagem para outra e uma função de transformação é estimada (Figura 1c). Por fim, na Figura 1d, é ilustrada a transformação (correção geométrica) da imagem de entrada e o alinhamento dela com a imagem de referência.

Figura 1 – Etapas do registro de imagens



Fonte: Adaptado de Zitová e Flusser (2003)

Três campos com ampla aplicação das técnicas de registro de imagens são a medicina, a visão computacional e o sensoriamento remoto (ZITOVÁ; FLUSSER, 2003) . Na medicina é co-

mum o uso de múltiplos sensores para a análise de uma região específica do corpo humano, com o objetivo de ter uma imagem que contemple a fusão de diferentes informações, registradas, oriundas dos diferentes sensores. Outra aplicação médica comum utiliza o registro de imagens de um único sensor em movimento, como no caso da obtenção de imagens tomográficas. No campo da visão computacional o registro pode ser usado na detecção de movimento e na identificação de padrões, considerando-se imagens de uma cena em movimento adquiridas por um sensor estático, ao longo do tempo. No sensoriamento remoto, assim como na área médica, é comum o uso do registro de imagens obtidas a partir de diferentes sensores (no caso da fusão de sensores sensíveis a diferentes faixas do espectro) bem como obtidas a partir de um único sensor, em movimento em relação ao solo (BROWN, 1992).

Saxena e Singh (2014) categorizam as diferentes técnicas de registro de imagens em quatro classes, que variam de acordo sua aplicação:

- Diferentes pontos de vista — Aqui assume-se uma paisagem estática e o observador se move, gerando uma nova perspectiva. Essa técnica é bastante útil em visão computacional, na geração de mosaicos de imagens, técnica em que se adquirem várias imagens de uma mesma cena e cria-se uma nova imagem que engloba as demais, como mostrado na Figura 2, onde tem-se a junção de exames de Tomografia por Emissão de Positrons (PET) e Imagem por Ressonância Magnética (MRI);

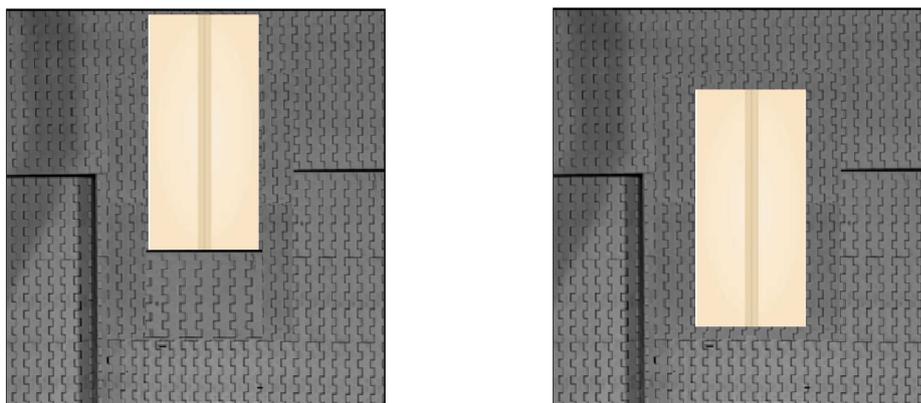
Figura 2 – Mosaico de imagens



Fonte: <https://home.cse.ust.hk/~cstws/research/641D/mosaic/> (2021)

- Tempos diferentes — Aqui o observador permanece estático e a cena varia conforme o passar do tempo. O objetivo aqui é encontrar mudanças que ocorreram na cena dentro de um intervalo de tempo. Seus usos podem ser encontrados em esteiras de fábrica que desejam verificar a velocidade ou o posicionamento de seus produtos para sua aquisição por braços robotizados ou afins, como mostrado na Figura 3;

Figura 3 – Produtos em deslocamento por meio de uma esteira industrial

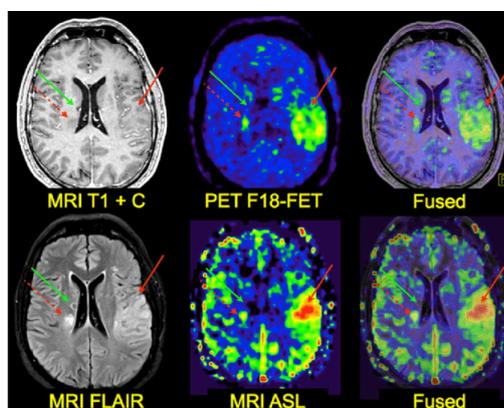


Fonte: Autor

Fonte: Autor

- Diferentes sensores — Nesta classe geralmente utilizam-se múltiplos sensores (sensíveis a diferentes naturezas de excitações ou faixas espectrais) para adquirir imagens de uma mesma cena mais rica em informações. Esta técnica é muito utilizada na área da medicina, onde vários sensores escaneiam uma mesma área do corpo para gerar uma imagem com mais informações, como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Exemplo de fusão de imagens de PET *scan* e de MRI



Fonte: Kjaer *et al.* (2012)

- Registro de cena com modelo — Aqui tem-se uma imagem artificial (modelo) gerada por computador que é comparada com uma imagem adquirida, com objetivo de identificação e/ou comparação.

A detecção automática dos pontos em comum entre imagens pode ser classificada em duas abordagens (ZITOVÁ; FLUSSER, 2003):

- Métodos baseados em características — Estes métodos executam os quatro passos do registro de imagens, detecção e pareamento das características, estimação dos parâmetros e transformação da imagem. Aqui, características salientes (bordas, cantos, linhas)

são extraídas de (evidenciadas em) cada imagem e pareadas, estabelecendo sua inter-relação. Essas características devem ser facilmente detectadas e estarem bem distribuídas pela imagem. Segundo Zitová e Flusser (2003), por este método não considerar a relação direta dos valores de cada *pixel* nas diferentes imagens, faz com que seja bastante útil em situações em que ocorrem variações de luminosidade. Entretanto, essa opinião não é consenso na literatura, apontando os métodos discutidos a seguir como sendo mais adequados em situações em que a intensidade dos *pixels* de um mesmo objeto variam de uma imagem para outra (CAMARGO, 2020). Nesses métodos, tem-se a participação de diversos algoritmos que trabalham em conjunto, como por exemplo algoritmos de detecção de bordas, cantos, intersecções de linhas, centroides, etc;

- Métodos baseados em área — Estes métodos têm como foco o pareamento de características, e não a sua detecção, fazendo com que o primeiro passo (Detecção de características) não seja realizado. Aqui, o valor de intensidade de cada *pixel* é o foco para o pareamento das imagens. Devido a isso, estes métodos apresentam problemas com áreas com intensidades similares, que levam a problemas inversos mal postos.

Neste trabalho optou-se por trabalhar com métodos baseados em área devido ao fato de que geralmente recaem em problemas inversos e em métodos lineares, o que viabiliza a desenvolvimento de análises matemáticas, permitindo a investigação de erros e suas origens. No contexto das aplicações industriais, que motivam este trabalho, considera-se o método de correlação de fase, que tem sido alvo de recorrente interesse pela comunidade científica (KUGLIN, 1975; BROWN, 1992; ZITOVÁ; FLUSSER, 2003; STONE; TAO; MCGUIRE, 2003; TONG *et al.*, 2019; CAMARGO, 2020).

## 2.2 CORRELAÇÃO DE FASE

O uso do método de correlação de fase para registro de imagens foi inicialmente proposto por Kuglin (1975), que apresenta uma alternativa à técnica de correlação cruzada, que era a mais utilizada na época. Essa técnica pode lidar com movimentos translacionais, de rotação e com variação de escala (*zoom*). Movimentos de rotação e de variação de escala são, a partir de uma mudança de coordenadas, transformados em um problema de estimação de movimento translacional. Todos esses modelos de movimento, então, são estimados com base na propriedade do deslocamento da transformada de Fourier (TF).

Por razões metodológicas, neste trabalho considera-se inicialmente apenas movimentos de translação. Sendo possível modelar os erros de registro para esse tipo de movimento, procede-se então com a análise para um modelo de movimento mais elaborado.

## 2.2.1 Notação

Neste trabalho, variáveis escalares são representadas por minúsculas em itálico ( $x$ ), constantes são representadas por maiúsculas em itálico ( $X$ ), conjugados complexos são representados por um asterisco sobrescrito ( $x^*$ ) e variáveis no domínio da frequência são representadas por um til ( $\tilde{x}$ ). Matrizes são representadas por maiúsculas em negrito ( $\mathbf{X}$ ).

## 2.2.2 Estimação de movimentos de translação

Assumindo duas imagens,  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$ , cujos *pixels* são representados respectivamente por  $g_1(x, y)$  e  $g_2(x, y)$ , que diferem por um deslocamento espacial  $(x_0, y_0)$ , segue que

$$g_2(x, y) = g_1(x - x_0, y - y_0). \quad (2.2)$$

De acordo com a propriedade do deslocamento da TF, tem-se que a TF de (2.2) corresponde a (KUGLIN, 1975)

$$\tilde{g}_2(\xi, \mu) = \tilde{g}_1(\xi, \mu)e^{-i2\pi(\xi x_0 + \mu y_0)}, \quad (2.3)$$

em que  $\xi$  e  $\mu$  correspondem às frequências nas direções das linhas e das colunas de  $\mathbf{G}_1$  e de  $\mathbf{G}_2$ , respectivamente. Segundo Ojansivu e Heikkila (2007), pode-se inferir de (2.3) que ambas funções apresentam a mesma magnitude e sua fase é diretamente relacionada com o deslocamento entre as imagens. Correspondendo as imagens a sinais determinísticos, o deslocamento entre elas poderia ser estimado isolando-se a exponencial em (2.3), isto é, dividindo-se  $\tilde{g}_2(\xi, \mu)$  por  $\tilde{g}_1(\xi, \mu)$ . Entretanto, por via de regra as imagens consistem de sinais aleatórios e não diferem apenas por um deslocamento. Sendo assim, a diferença de fase entre duas imagens relacionadas essencialmente por um movimento de translação pode ser melhor estimada por uma abordagem estatística como, por exemplo, usando-se o espectro de potência cruzada (*cross-power spectrum* — CPS). Dessa forma não se busca mais uma igualdade, e sim a máxima correlação entre os sinais (CAMARGO, 2020). O CPS pode ser definido como:

$$\frac{\tilde{g}_2(\xi, \mu)\tilde{g}_1^*(\xi, \mu)}{|\tilde{g}_2(\xi, \mu)\tilde{g}_1^*(\xi, \mu)|} = e^{-i2\pi(\xi x_0 + \mu y_0)}. \quad (2.4)$$

A Transformada de Fourier inversa da exponencial é um delta de Dirac deslocado no domínio dos *pixels* da imagem (sequência). Pode-se então calcular  $x_0$  e  $y_0$  através da transformada inversa de Fourier de (2.4), encontrado a localização do pulso do delta de Dirac no domínio do tempo, conforme:

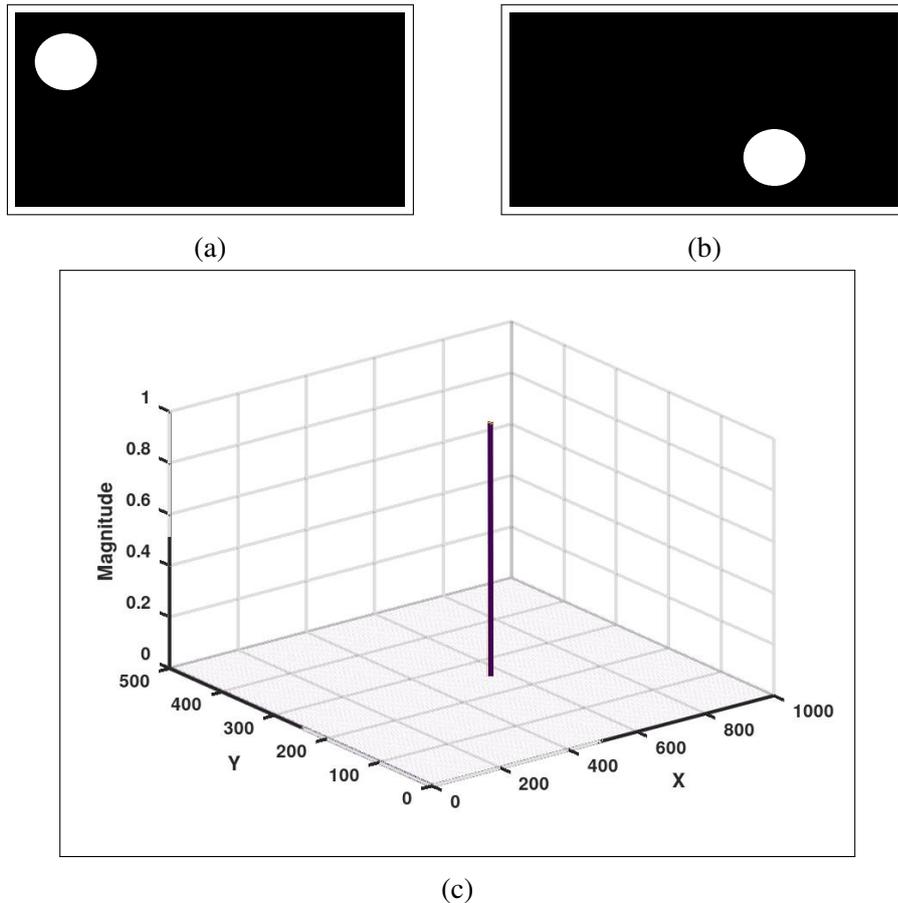
$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\tilde{g}_2(\xi, \mu)\tilde{g}_1^*(\xi, \mu)}{|\tilde{g}_2(\xi, \mu)\tilde{g}_1^*(\xi, \mu)|}\right\} = \delta(x - x_0, y - y_0). \quad (2.5)$$

Idealmente, a função de correlação é uma função delta localizada no ponto de registro. Este processo apresenta bons resultados mesmo em casos nos quais existe ruído e/ou a área comum entre as imagens é pequena (KUGLIN, 1975).

O método descrito pode ser ilustrado na Figura 5. Nas figuras 5 (a) e (b) são ilustrados dois círculos brancos cujos centros estão deslocados um em relação ao outro, aleatoriamente,

em 550 *pixels* na direção das colunas ( $x$ ) e em 247 *pixels* na direção das linhas ( $y$ ). A solução de (2.5) resulta na Função Delta ilustrada na Figura 5(c), onde percebe-se um pico de valor unitário nas coordenadas  $x = 550$  e  $y = 247$ . Vale ressaltar que esta é uma situação ideal, na qual não há inovações ou oclusões entre  $G_1$  e  $G_2$ , ou seja, não há objetos que apareçam em apenas uma das imagens. Os problemas resultantes das inovações ou oclusões serão discutidos na Seção 2.3.

Figura 5 – Registro de um movimento translacional



(a) Imagem de referência. (b) Imagem de entrada. (c) Resultado do registro.  
Fonte: Autor

### 2.2.3 Estimação de movimentos de rotação

Assumindo agora duas imagens  $G_1$  e  $G_2$ , e sendo  $G_2$  uma versão de  $G_1$  rotacionada em um ângulo  $\theta_0$ , a relação entre as coordenadas dos *pixels* dessas imagens,  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , pode ser determinada por (GONZALEZ; WOODS, 2010)

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Sendo assim, segue que

$$g_2(x, y) = g_1(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0, -x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0). \quad (2.7)$$

Aplicando-se a TF em (2.7), tem-se que

$$\tilde{g}_2(\xi, \mu) = \tilde{g}_1(\xi \cos \theta_0 + \mu \sin \theta_0, -\xi \sin \theta_0 + \mu \cos \theta_0), \quad (2.8)$$

de onde se pode observar que, diferente do caso translacional, em que as transformadas diferem apenas por uma defasagem, neste caso o espectro de  $\mathbf{G}_2$  corresponde a uma rotação do espectro de  $\mathbf{G}_1$ . Entretanto, mudando-se o sistema de referência de coordenadas retangulares,  $(\xi, \mu)$ , para coordenadas polares,  $(\rho, \theta)$ , essa rotação no plano cartesiano se transforma em uma translação no plano polar:

$$g_2(\rho, \theta) = g_1(\rho, \theta - \theta_0). \quad (2.9)$$

A equação (2.9) agora pode ser tratada como uma translação, podendo ser resolvida da mesma forma que (2.2).

A estimação do movimento de rotação pode ser feita independente de a imagem ter sofrido simultaneamente uma translação, reduzindo a complexidade dos algoritmos que buscam atender a ambos movimentos (STONE; TAO; MCGUIRE, 2003). Considerando-se, por exemplo, a transformação

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

tem-se que

$$g_2(x, y) = g_1(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 - x_0, -x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0 - y_0) \quad (2.11)$$

. A TF de (2.11) resulta em

$$\tilde{g}_2(\xi, \mu) = \tilde{g}_1(\xi \cos \theta_0 + \mu \sin \theta_0, -\xi \sin \theta_0 + \mu \cos \theta_0) e^{-i2\pi(\xi x_0 + \mu y_0)}. \quad (2.12)$$

Como é razoável esperar, é possível observar em (2.12) que  $\theta_0$  não aparece na diferença de fase entre  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$ . Por outro lado, sabe-se que os deslocamentos  $(x_0, y_0)$  afetam a fase mas não afetam o módulo dos espectros. Sendo assim, é possível, estimar a rotação através da rotação do módulo dos espectros de  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{G}_2$ :

$$|\tilde{g}_2(\xi, \mu)| = |\tilde{g}_1(\xi \cos \theta_0 + \mu \sin \theta_0, -\xi \sin \theta_0 + \mu \cos \theta_0)|. \quad (2.13)$$

Para isso, a equação (2.13) é então mapeada para o plano polar e convertida em um problema de estimação de movimento translacional, como discutido anteriormente.

## 2.3 PRINCIPAIS FONTES DE ERRO

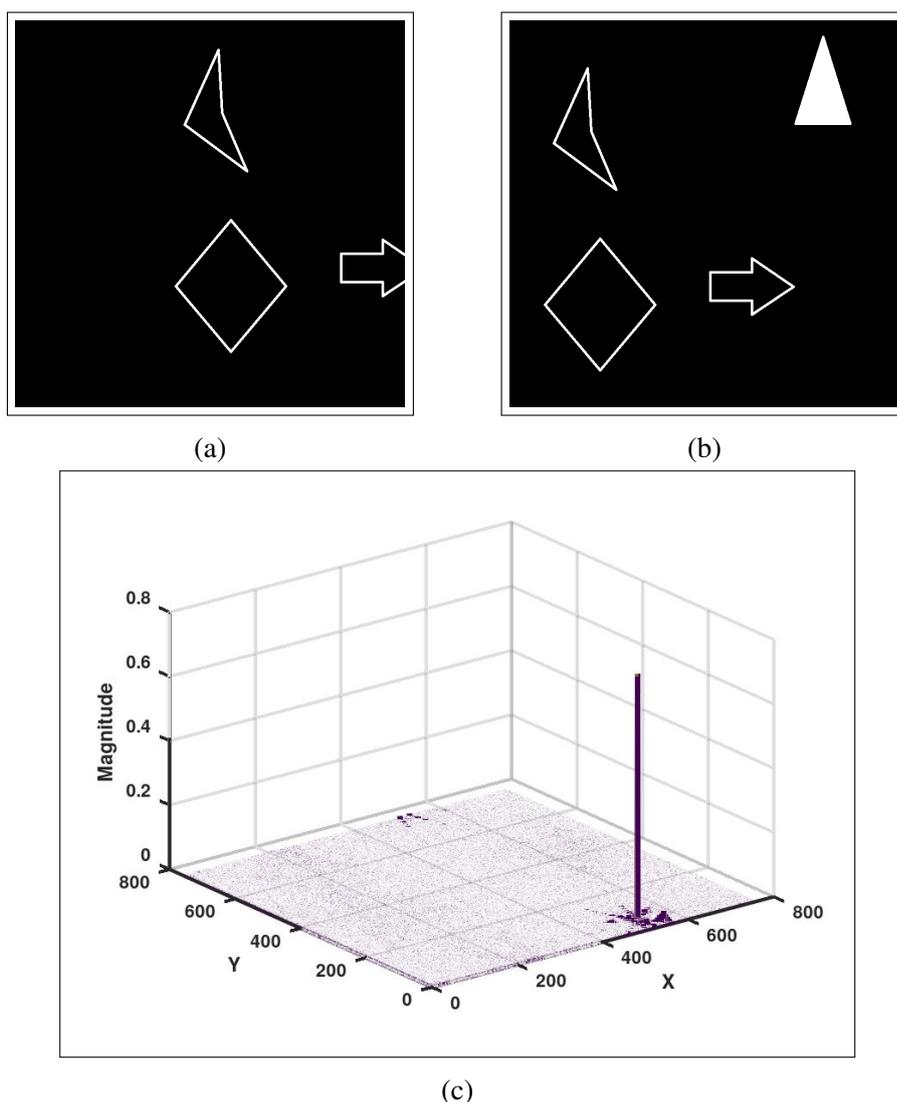
O erro de registro ocorre quando não é possível relacionar os *pixels* (características) de duas imagens. Isso pode ocorrer quando, por exemplo, o mesmo objeto apresenta características muito distintas nas duas imagens. São potenciais fontes de erro: presença de inovações e oclusões, interpolações, hipótese de periodicidade dos sinais e *aliasing* dependente de rotação (DAVARI *et al.*, 2017; CAMARGO, 2020).

### 2.3.1 Inovações e Oclusões

Inovações são informações (objetos) presentes na imagem de entrada que não existem na imagem de referência. Quando na imagem de referência existem objetos que não aparecem na imagem de entrada, chama-se esse efeito de oclusão.

O mesmo processo do teste realizado utilizando as Imagens da Figura 5 é feito agora na presença de inovações, como ilustrado na Figura 6.

Figura 6 – Registro na presença de inovações



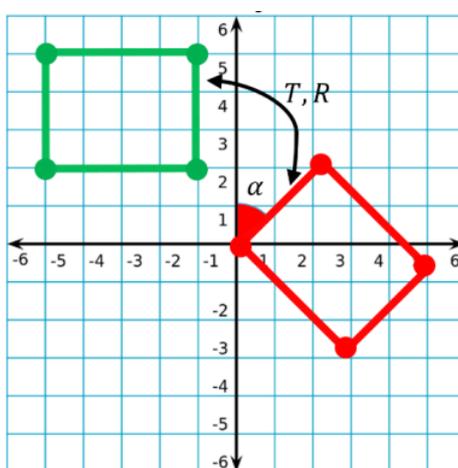
(a) Imagem de referência. (b) Imagem de entrada. (c) Resultado do registro.  
Fonte: Autor

Percebe-se que, mesmo com os objetos tendo uma correspondência perfeita nas duas imagens, as inovações produzem uma alteração significativa no comportamento da correlação, quando comparada com a Figura 5. O valor do pico reduz de 1.0 para aproximadamente 0.78, enquanto surgem pequenas correlações próximas.

### 2.3.2 Interpolações e aproximações

Devido a dimensão dos *pixels* não ser infinitesimal, mesmo sob condições ideais, a movimentação de um objeto pode levar a uma diferença nos tons de cinza desse objeto. Por exemplo, na Figura 7 é ilustrado um objeto cujas bordas estão originalmente (perfeitamente) alinhadas com as linhas e colunas da imagem. Em função da disposição dessas bordas sobre a matriz de *pixels*, elas assumirão um determinado nível de intensidade na imagem digital. Se esse objeto é então rotacionado, fazendo com que suas bordas recaiam sobre os *pixels* da imagem em diferentes posições (proporções), isso irá gerar uma interpolação (integração no sensor) distinta do caso anterior. Dessa forma, o objeto assumirá diferentes intensidades na imagem digital.

Figura 7 – Interpolação gerada por rotação



Fonte: Davari *et al.* (2017)

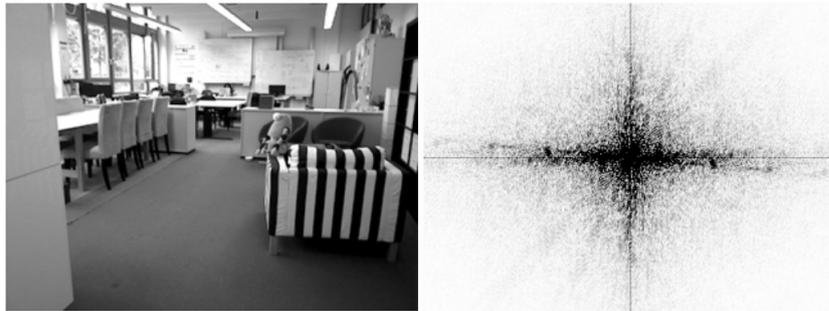
De forma similar, na transformação do sistema de coordenadas de cartesiano para polar é feita uma aproximação dos valores da fase e ângulo resultantes, uma vez que estes podem ser números fracionários e precisam ser alocados em valores inteiros de *pixels*. Por exemplo, o par de coordenadas cartesianas  $(x, y) = (5, 5)$  seria convertido em  $(0.7854, 7.0711)$ , valores polares que seriam arredondados para  $(1, 7)$ .

### 2.3.3 Hipótese de periodicidade dos sinais

Considerando-se que a Transformada Discreta de Fourier assume a periodicidade dos sinais (efeito da amostragem espectral), a replicação da imagem adquirida pode gerar componentes de frequências que não estão presentes na cena original (OPPENHEIM; SCHAFER; BUCK, 1999). Por exemplo, quando se replica uma imagem, a região do limite direito dessa imagem é justaposta à região do limite esquerdo, geralmente gerando uma borda que inexistente na cena real. Esse efeito é especialmente prejudicial em movimentos de rotação, visto que as bordas (limites) da imagem não rotacionam, apenas o conteúdo que está dentro dela, fazendo com que apareçam correlações falsas, especialmente em  $90^\circ$ .

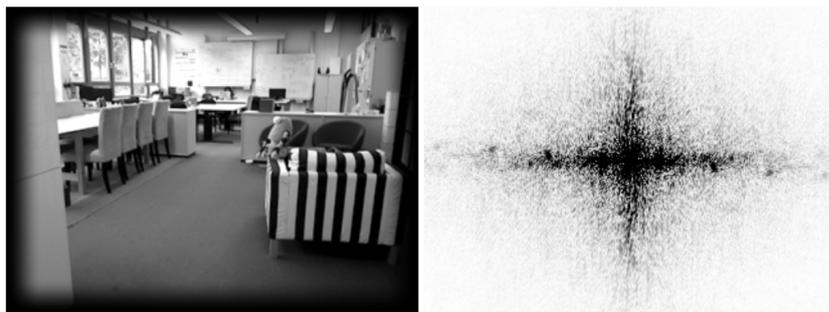
Isso pode ser resolvido aplicando uma suavização de transição nas áreas mais externas da figura, através de um janelamento (*windowing effect*), por exemplo. Este processo é ilustrado nas Figuras 8 e 9, onde percebe-se duas linhas que se sobrepõem aos eixos  $x$  e  $y$  na magnitude da imagem original e que são removidas pela suavização das bordas através do janelamento conhecido como *raised-cosine window*.

Figura 8 – Imagem original e sua magnitude



Fonte: Sthoduka (2016)

Figura 9 – Imagem suavizada e sua magnitude



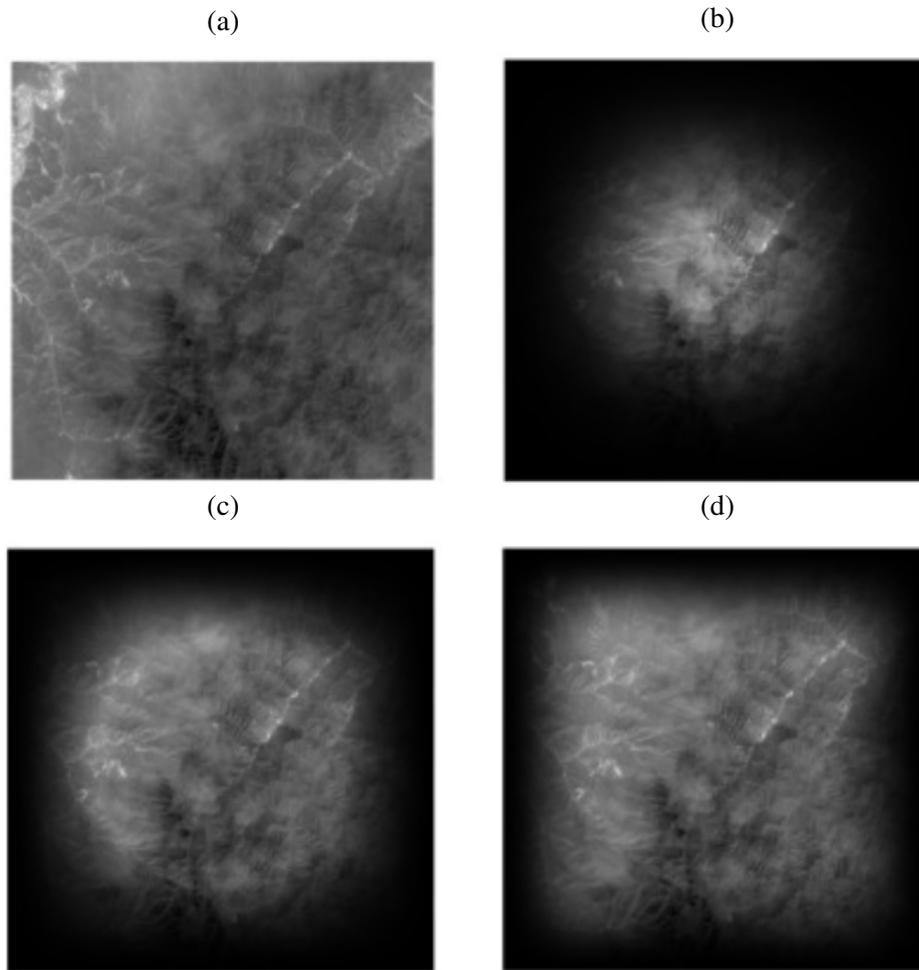
Fonte: Sthoduka (2016)

Dentre as principais funções de janelamento, destacam-se *Blackman*, *flat-top* e *raised-cosine window* (DONG; LONG; JIOO, 2018), cujas formas de filtragem são ilustradas na Figura 10.

### 2.3.4 *Aliasing* dependente de rotação

Stone, Tao e McGuire (2003) mencionam o surgimento de falsos picos de correlação em  $0^\circ$ , gerados pelo recobrimento espectral (*aliasing*) (fruto da DFT de uma imagem finita), e sugerem o uso de um filtro passa-altas. Este processo é ilustrado pelas Figuras 11 e 12. Segundo Stone, Tao e McGuire (2003), o processo de filtragem, apesar de ajudar no tratamento do *aliasing*, tem um efeito negativo na precisão da imagem, uma vez que a eliminação de baixas frequências impacta na detecção de bordas, cantos e linhas dentro da própria imagem. Entretanto, até onde alcança o conhecimento do autor neste momento, isso não faz sentido. Por definição, o *aliasing* é evitado com filtragem passa-baixas e as altas frequências que são supostamente eliminadas com o janelamento na verdade são efeito de espalhamento espectral (este,

Figura 10 – Formas de janelamento



(a) Imagem original. (b) Janelamento *Blackman*. (c) Janelamento *Flap-top*. (d) Janelamento *Raised-cosine*.  
Fonte: Dong, Long e Jioo (2018)

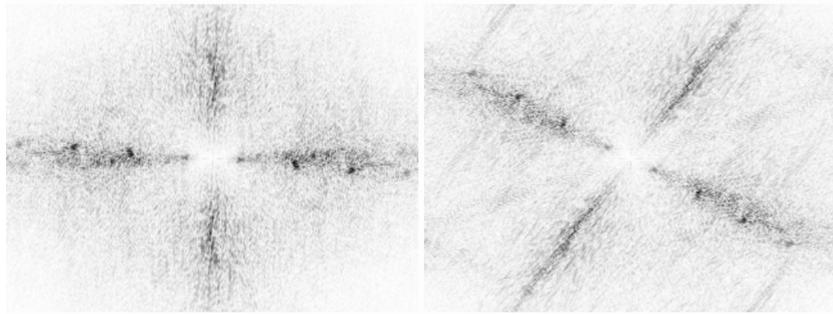
sim, pode causar *aliasing*). Além disso, a detecção de bordas é justamente favorecida na banda de altas frequências.

Figura 11 – Imagem janelada rotacionada e sua magnitude



Fonte: Sthoduka (2016)

Figura 12 – Magnitudes filtradas da imagem original e rotacionada



Fonte: Sthoduka (2016)

### 3 MÉTODO PROPOSTO

Neste capítulo é proposta uma análise inicial que considera apenas movimentos translacionais para a caracterização de erro gerado por inovações. Uma vez que se consiga chegar a um modelo teórico para a influência das inovações, evolui-se esse modelo considerando outro tipo de movimento, por exemplo.

Todas as simulações foram realizadas com imagens que foram convertidas para tons de cinza antes de seu processamento pelo algoritmo, entretanto foram mantidas coloridas para melhor visualização.

Visto que o objetivo deste trabalho é realizar a análise matemática do erro no processo de registro de imagens, serão estudadas situações nas quais a hipótese inicial do processo de registro de imagens transacionadas falha, ou seja, quando

$$g_2(x, y) \neq g_1(x - x_0, y - y_0). \quad (3.1)$$

Conforme discutido na Seção 2.3.1, a equação (3.1) não é aplicável na maioria das situações práticas, uma vez que a o deslocamento relativo entre duas cenas digitalizadas geralmente apresenta diferenças entre seus conteúdos, não se limitando ao deslocamento espacial dos objetos contidos na cena. Dentre essas diferenças, as principais são a de inclusão e perda de informações, visto que ao deslocar a câmera ou o objeto novas informações surgem e desaparecem quando comparadas a imagem inicial, como ilustrado nas imagens da Figura 13. Na Figura 13(a) é mostrado um exemplo de imagem de referência, enquanto na Figura 13(b) é ilustrado um exemplo de imagem de entrada. Essas imagens simulam um movimento translacional da câmera. Na Figura 13(c) é ilustrado o resultado do registro entre as duas imagens. No retângulo em destaque à esquerda tem-se as inovações (informações contidas na imagem de entrada que não se encontram na imagem de referência) e no retângulo em destaque à direita tem-se as oclusões (informações contidas na imagem de referência que não se encontram na imagem de entrada).

Considerando-se inovações,  $i(x, y)$ , e oclusões,  $o(x, y)$ , em operações puramente translacionais pode-se modificar (2.2) conforme

$$g_2(x, y) = g_1(x - x_0, y - y_0) + s(x, y). \quad (3.2)$$

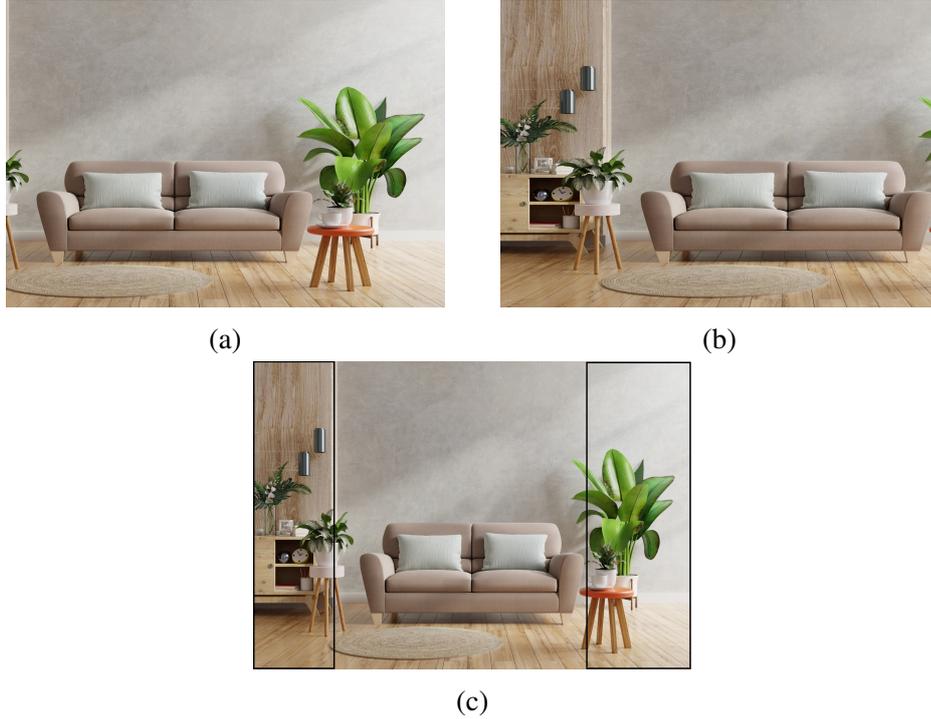
em que

$$s(x, y) = i(x, y) - o(x, y). \quad (3.3)$$

Ou seja, os *pixels* da imagem  $G_2$  são iguais aos da  $G_1$  deslocados por um valor  $x_0$  e  $y_0$  e somados às inovações ou subtraídos das oclusões correspondentes àquela coordenada de *pixel*.

Sendo a TF de (3.2)

Figura 13 – Ilustração de inovações e oclusões em um par de imagens a ser registrado



(a) Imagem de referência. (b) Imagem de entrada. (c) Resultado do registro.  
 Fonte: “<https://www.freepik.com/photos/home-interior>”, acesso em 2022

$$\tilde{g}_2(\xi, \mu) = e^{-i2\pi(\xi x_0 + \mu y_0)} \tilde{g}_1(\xi, \mu) + \tilde{s}(\xi, \mu). \quad (3.4)$$

é proposta, inicialmente, uma caracterização determinística, alinhada com o método de Correlação de Fase, isolando-se a diferença de fase em (3.4), conforme

$$\frac{\tilde{g}_2(\xi, \mu) - \tilde{s}(\xi, \mu)}{\tilde{g}_1(\xi, \mu)} = e^{-i2\pi(\xi x_0 + \mu y_0)}. \quad (3.5)$$

Aplicando-se agora a transformada inversa, chega-se em

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{g}_2(\xi, \mu) - \tilde{s}(\xi, \mu)}{\tilde{g}_1(\xi, \mu)} \right\} = \delta(x - x_0, y - y_0), \quad (3.6)$$

ou, de forma equivalente,

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{g}_2(\xi, \mu)}{\tilde{g}_1(\xi, \mu)} \right\} = \delta(x - x_0, y - y_0) + \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{s}(\xi, \mu)}{\tilde{g}_1(\xi, \mu)} \right\}. \quad (3.7)$$

Sendo

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{g}_2(\xi, \mu)}{\tilde{g}_1(\xi, \mu)} \right\} = \hat{\delta}(x, y) \quad (3.8)$$

a única parcela de (3.7) que se pode determinar a partir do par de imagens de entrada, a equação (3.7) pode ser reescrita como

$$\hat{\delta}(x, y) = \delta(x - x_0, y - y_0) + e(x, y), \quad (3.9)$$

em que  $\hat{\delta}(x, y)$  é a estimativa da função impulso que indica o deslocamento entre as imagens e  $e(x, y)$  corresponde ao erro de estimação de movimento gerado pelas inovações e oclusões, descrito por

$$e(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{s}(\xi, \mu)}{\tilde{g}_1(\xi, \mu)} \right\}. \quad (3.10)$$

Garante-se uma correta estimação da translação quando o elemento de maior valor em  $\hat{\delta}(x, y)$  coincide com o elemento de maior valor em  $\delta(x - x_0, y - y_0)$ , ou seja,

$$\arg \max_{(x,y)} \delta(x - x_0, y - y_0) = \arg \max_{(x,y)} \hat{\delta}(x - x_0, y - y_0). \quad (3.11)$$

Segue direto de (3.9) que, sendo

$$|e(x, y)| < 0,5, \quad (3.12)$$

garante-se (3.11). Nesse caso, uma vez que

$$\delta(x - x_0, y - y_0)|_{(x,y) \neq (x_0,y_0)} = 0, \quad (3.13)$$

por consequência,

$$\hat{\delta}(x - x_0, y - y_0)|_{(x,y) \neq (x_0,y_0)} = \delta(x - x_0, y - y_0)|_{(x,y) \neq (x_0,y_0)} + e(x, y) < 0,5. \quad (3.14)$$

De forma similar, uma vez que

$$\delta(x - x_0, y - y_0)|_{(x,y) = (x_0,y_0)} = 1, \quad (3.15)$$

por consequência,

$$\hat{\delta}(x - x_0, y - y_0)|_{(x,y) = (x_0,y_0)} = \delta(x - x_0, y - y_0)|_{(x,y) = (x_0,y_0)} + e(x, y) > 0,5. \quad (3.16)$$

Sendo assim,

$$0,5 < \hat{\delta}(x_0, y_0) \leq 1 \quad (3.17)$$

e

$$0 \leq \hat{\delta}(x, y)|_{(x,y) \neq (x_0,y_0)} < 0,5. \quad (3.18)$$

são condições suficientes à garantia de um registro correto. Note-se, ainda, que se esta condição não for atendida, não significa que o registro será incorreto; apenas não se garante, pela análise proposta que ele será correto. Entretanto,  $x_0$  e  $y_0$  não são conhecidos. Neste trabalho propõe-se avaliar se, sendo apenas um elemento de  $\hat{\delta}(x, y)$  maior que 0,5 e sendo todos os demais menores que 0,5, essa característica pode vir a ser um indicativo de um registro correto.

No Apêndice A é apresentada uma análise, proposta neste trabalho, baseada no Teorema de Parseval. Esse encaminhamento, entretanto, leva a uma condição excessivamente conservadora.

## 4 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos de simulações acerca da análise proposta. Ainda que o estudo proposto tenha se baseado em uma visão determinística do método, equação (2.3), as simulações propostas avaliam o comportamento do método original, de acordo com a equação (2.4). Isso é pertinente uma vez que avalia se a análise, proposta sob condições mais restritas, reflete o comportamento real do algoritmo.

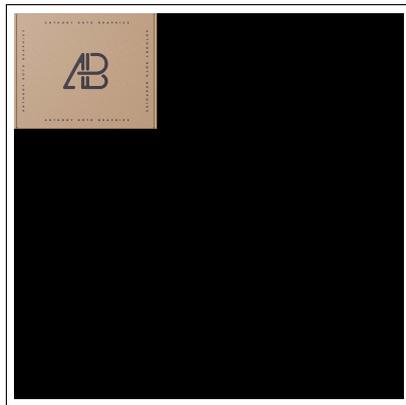
São propostas três simulações. Nessas simulações, incluiu-se gradativamente inovações e oclusões, de forma a afastar o resultado de estimação do comportamento ideal (impulso deslocado). Todas as simulações foram baseadas na mesma de referência, contendo uma caixa sobre um fundo preto, ilustrada na Figura 14(a) e reapresentada junto aos demais resultados, por razões didáticas.

Na primeira simulação é utilizada uma imagem de entrada, Figura 14(b), que corresponde à imagem de referência deslocada em  $x_0 = 620$  e  $y_0 = 777$  e contendo um nível substancial de inovações. Conforme pode ser visto na Figura 14(c), o registro é bem sucedido e o comportamento da estimação atende ao avaliado na análise proposta, ou seja, o sinal estimado possui um único elemento com amplitude acima de 0,5.

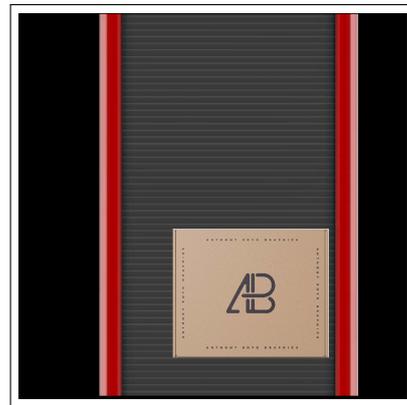
Na sequência, tem-se uma situação similar, entretanto, além da ocorrência das inovações, tem-se a ocorrência de oclusões nos objetos da imagem de entrada em relação à de referência, conforme ilustrado nas imagens da Figura 15(a) e (b). O método de Correlação de Fase novamente é capaz de estimar corretamente o deslocamento, agora equivalente a  $x_0 = 671$  e  $y_0 = 1300$ , conforme pode ser avaliado pela posição do maior pico, na Figura 15(c). Entretanto, como pode ser visto neste gráfico, o maior elemento do sinal estimado possui amplitude ligeiramente abaixo de 0,5. De acordo com a análise proposta, já não se trataria de um resultado com garantias de desempenho.

Por fim, na Figura 16 é apresentada uma simulação em que a imagem de entrada corresponde à imagem de referência deslocada em  $x_0 = 453$  e  $y_0 = 924$ , com oclusões e severas inovações. Neste caso, o objeto de interesse nas imagens de referência, Figura 16(a), e de entrada, Figura 16(b), são, de fato, de objetos distintos; duas caixas similares mas distintas. Essa distinção é ilustrativa de situações práticas e pode ser modelada, na pior hipótese, por uma oclusão total. Conforme ilustrado na Figura 16(c), o resultado da estimação é substancialmente mais ruidoso, a exemplo da comparação com a Figura 15(c). Nesse resultado, é possível observar que a maior amplitude é de aproximadamente 0,01. Neste caso, o registro é realizado incorretamente. Este comportamento, mais uma vez, é consistente com o que é avaliado no Capítulo 3.

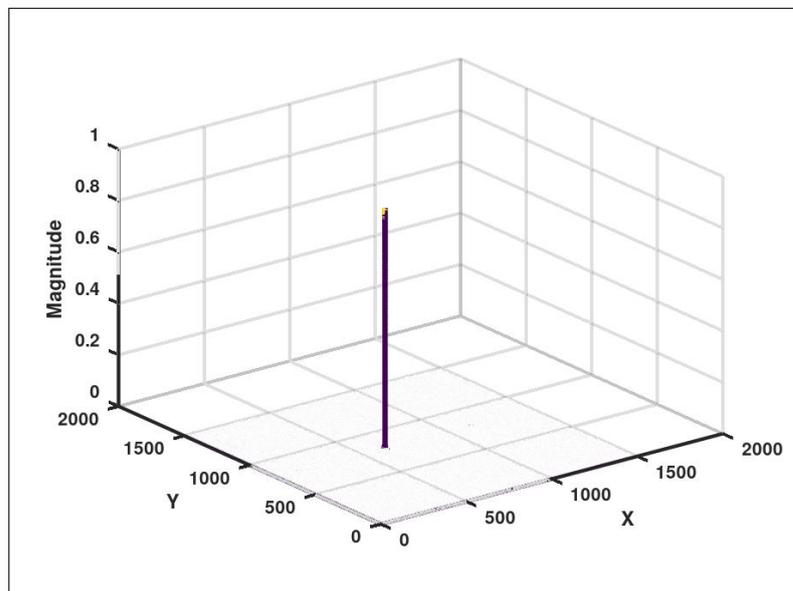
Figura 14 – Registro de imagens mediante a ocorrência de inovações



(a)



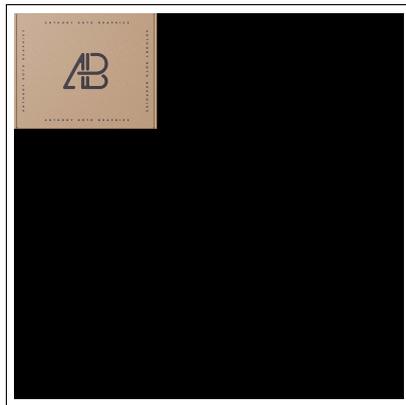
(b)



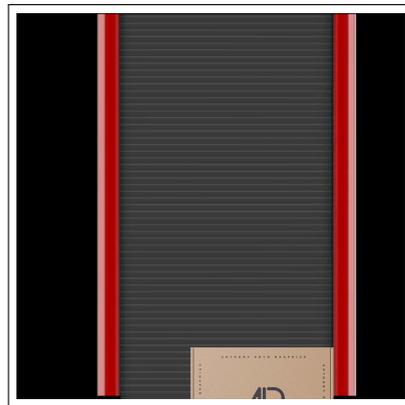
(c)

(a) Imagem de referência. (b) Imagem de entrada. (c) Resultado do registro.  
Fonte: Autor

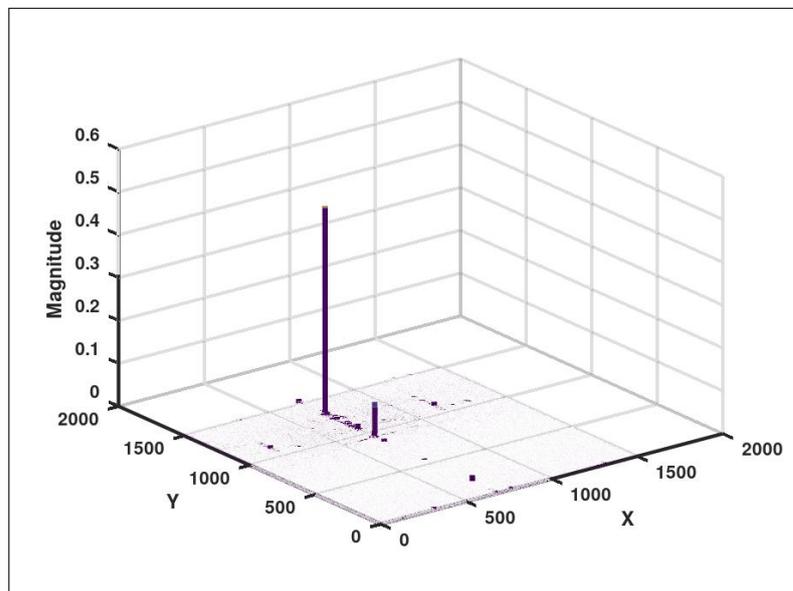
Figura 15 – Registro de imagens mediante a ocorrência de inovações e de oclusões



(a)



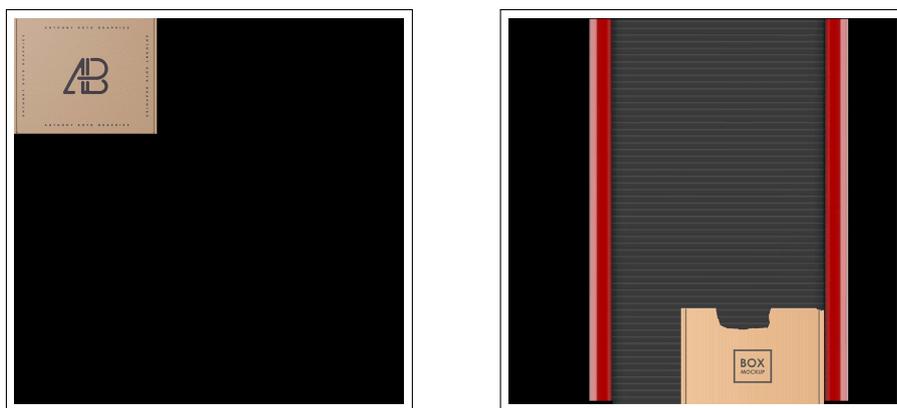
(b)



(c)

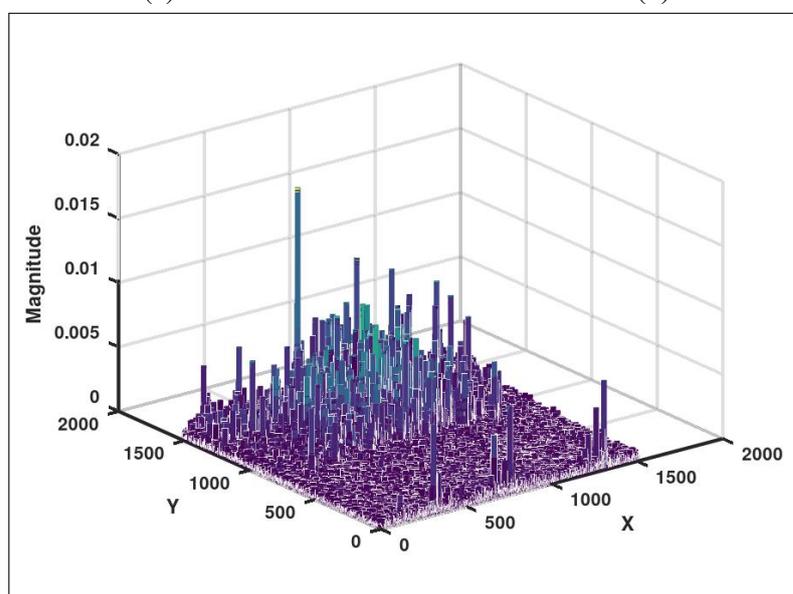
(a) Imagem de referência. (b) Imagem de entrada. (c) Resultado do registro.  
Fonte: Autor

Figura 16 – Registro de imagens mediante a ocorrência de severas inovações e de oclusões



(a)

(b)



(c)

(a) Imagem de referência. (b) Imagem de entrada. (c) Resultado do registro.  
Fonte: Autor

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi proposto um estudo sobre o comportamento do método de Correlação de Fase aplicado ao registro de imagens mediante movimento translacional e global. Com base nesse estudo, buscou-se avaliar uma figura de mérito capaz de indicar a confiabilidade de estimação de movimento com base apenas no par de imagens a serem registradas, antes do registro ser estimado. São as principais conclusões deste trabalho:

- A análise determinística proposta possui consistência com o comportamento estocástico do método;
- O método, diferente do que foi considerado na análise, normaliza o sinal estimado, resultando em um sinal com norma unitária, como pode ser observado em (2.4) e como foi retratado nos resultados das simulações;
- O estudo aqui desenvolvido pode ser avançado pela consideração dessa normalização na análise proposta ou por nova análise, partindo-se de (2.5) em vez de (2.4), por questões de taxonomia.

## REFERÊNCIAS

- ABCHE, A. B. *et al.* Image registration based on neural network and fourier transform. In: **2006 International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society**. [S.l.: s.n.], 2006. p. 4803–4806.
- BROWN, L. G. A survey of image registration techniques. **ACM Computing Surveys**, v. 24, p. 325–376, 1992.
- CAMARGO, G. de. **Registro de imagens aplicado à manipulação industrial robotizada — Exame de qualificação**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Caxias do Sul, dezembro 2020.
- DAVARI, A. *et al.* Image registration for the alignment of digitized historical documents. 12 2017.
- DONG, Y.; LONG, T.; JIOO, W. Eliminating effect of image border with image periodic decomposition for phase correlation based image registration. In: **IGARSS 2018 - 2018 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium**. [S.l.: s.n.], 2018. p. 4977–4980.
- GONZALEZ, R.; WOODS, R. **Processamento de Imagens Digitais**. [S.l.]: Editora Blucher, 2010. ISBN 9788521217268.
- HASSANZADEH, M.; SHAHRAVA, B. Linear version of parseval’s theorem. **IEEE Access**, v. 10, p. 1–1, 03 2022.
- KJAER, A. *et al.* Pet/mri in cancer patients: first experiences and vision from copenhagen. **Magma (New York, N.Y.)**, v. 26, 12 2012.
- KUGLIN, D. H. C. The phase correlation image alignment method. **Proc. of Intl. Conf. on Cybernetics and Society, N.4**, p. 163–165, 1975.
- OJANSIVU, V.; HEIKKILA, J. Image registration using blur-invariant phase correlation. **IEEE Signal Processing Letters**, v. 14, n. 7, p. 449–452, 2007.
- OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W.; BUCK, J. R. **Discrete-Time Signal Processing**. Second. [S.l.]: Prentice-hall Englewood Cliffs, 1999.
- SAXENA, S.; SINGH, R. A survey of recent and classical image registration methods. **International Journal of Signal Processing, Image Processing and Pattern Recognition**, v. 7, p. 167–176, 08 2014.
- STHODUKA. Image registration based on the fourier-mellin transform. 2016. Disponível em: <[https://sthoduka.github.io/imreg\\_fmt/docs/additional-info/](https://sthoduka.github.io/imreg_fmt/docs/additional-info/)>.
- STONE, H. S.; TAO, B.; MCGUIRE, M. Analysis of image registration noise due to rotationally dependent aliasing. **J. Vis. Commun. Image Represent.**, v. 14, p. 114–135, 2003.
- TONG, X. *et al.* Image registration with fourier-based image correlation: A comprehensive review of developments and applications. **IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing**, v. 12, n. 10, p. 4062–4081, 2019.

ZITOVÁ, B.; FLUSSER, J. Image registration methods: a survey. **Image and Vision Computing**, v. 21, n. 11, p. 977–1000, 2003. ISSN 0262-8856.

## APÊNDICE A – ANÁLISE PELO TEOREMA DE PARSEVAL

O Teorema de Parseval (HASSANZADEH; SHAHRAVA, 2022) versa que, sendo  $f(t)$  uma função real ou complexa e  $F(\omega)$  sua transformada de Fourier, então vale a identidade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (\text{A.1})$$

Com base em (A.1), segue de (3.10) que

$$\sum_x \sum_y |e(x, y)|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi} \sum_{\mu} \left| \frac{\tilde{s}(\xi, \mu)}{\tilde{g}_1(\xi, \mu)} \right|^2. \quad (\text{A.2})$$

Isolando-se  $\tilde{s}(\xi, \mu)$  em (3.4) e tirando-se o módulo dos dois lados da igualdade resultante, chega-se em

$$|\tilde{s}(\xi, \mu)| = |\tilde{g}_2(\xi, \mu) - e^{-i2\pi(\xi x_0 + \mu y_0)} \tilde{g}_1(\xi, \mu)|. \quad (\text{A.3})$$

Sendo

$$|\tilde{g}_2(\xi, \mu) - e^{-i2\pi(\xi x_0 + \mu y_0)} \tilde{g}_1(\xi, \mu)| \leq |\tilde{g}_2(\xi, \mu)| + |e^{-i2\pi(\xi x_0 + \mu y_0)} \tilde{g}_1(\xi, \mu)|. \quad (\text{A.4})$$

Tendo a exponencial em (A.4) módulo unitário, segue de (A.3) e de (A.4) que

$$|\tilde{s}(\xi, \mu)| \leq |\tilde{g}_2(\xi, \mu)| + |\tilde{g}_1(\xi, \mu)|. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo-se (A.5) em (A.2), chega-se em

$$\sum_x \sum_y |e(x, y)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi} \sum_{\mu} \left[ \frac{|\tilde{g}_2(\xi, \mu)| + |\tilde{g}_1(\xi, \mu)|}{|\tilde{g}_1(\xi, \mu)|} \right]^2 \quad (\text{A.6})$$

Da mesma forma, segue que

$$\sum_x \sum_y |e(x, y)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi} \sum_{\mu} \left[ \frac{|\tilde{g}_2(\xi, \mu)|}{|\tilde{g}_1(\xi, \mu)|} + 1 \right]^2 \quad (\text{A.7})$$

A partir de (A.7) e (3.12), apenas consegue-se garantir que o maior valor de  $M(x, y)$  coincida com o maior valor de  $\delta(x, y)$  fazendo-se

$$\sum_x \sum_y |e(x, y)|^2 \leq 0,5^2. \quad (\text{A.8})$$

Infelizmente, (A.8) é uma condição bastante mais conservadora que (3.12).

Por fim, segue de (A.7) e de (A.8) que

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\xi} \sum_{\mu} \left[ \frac{|\tilde{g}_2(\xi, \mu)|}{|\tilde{g}_1(\xi, \mu)|} + 1 \right]^2 \leq 0,25, \quad (\text{A.9})$$

nunca atendida.