UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL – UCS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
CURSO DE MESTRADO

ALEXANDRE ROBERTO FAÉ

A CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS DE FUNÇÃO AFIM E QUADRÁTICA MEDIADA PELO LIVRO DIDÁTICO NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO À LUZ DA TEORIA DE VIGOTSKI

CAXIAS DO SUL/RS
AGOSTO/2024

ALEXANDRE ROBERTO FAÉ

A CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS DE FUNÇÃO AFIM E QUADRÁTICA MEDIADA PELO LIVRO DIDÁTICO NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO À LUZ DA TEORIA DE VIGOTSKI

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pela Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Caxias do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Educação.

Linha de Pesquisa: Processos educacionais, linguagem, tecnologia e inclusão.

Orientadora: Profa. Dra. Eliana Maria do Sacramento Soares

CAXIAS DO SUL/RS

AGOSTO/2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Universidade de Caxias do Sul
Sistema de Bibliotecas UCS - Processamento Técnico

F147c Faé, Alexandre Roberto
A construção dos conceitos de função afim e quadrática mediada pelo livro didático no ensino médio [recurso eletrônico] : um estudo à luz da teoria de Vigotski / Alexandre Roberto Faé. – 2024.
Dados eletrônicos.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de Caxias do Sul, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2024.
Orientação: Eliana Maria do Sacramento Soares.
Modo de acesso: World Wide Web
Disponível em: https://repositorio.ucs.br

1. Livros didáticos - Matemática. 2. Matemática (Ensino médio) - Estudo dirigido. 3. Programa Nacional do Livro Didático (Brasil). 4. Vigotsky, Lev Semenovich, 1896-1934. 5. Educação. I. Soares, Eliana Maria do Sacramento, orient. II. Título.

CDU 2. ed.: 51(075)

Catalogação na fonte elaborada pela(o) bibliotecária(o)
Ana Guimarães Pereira - CRB 10/1460

“ A Construção dos Conceitos de Função Afim e Quadrática Mediada pelo Livro Didático no Ensino Médio: um Estudo à Luz da Teoria de Vigotski”

Alexandre Roberto Faé

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pela Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Caxias do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Educação. Linha de Pesquisa: Processos Educacionais, Linguagem, Tecnologia e Inclusão.

Caxias do Sul, 14 de junho de 2024.

Dra. Eliana Maria do Sacramento Soares (presidente - UCS)

Dra. Flávia Brocchetto Ramos (UCS)

Participação por videoconferência
Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso (UFRGS)

Dedico esta dissertação aos professores e professoras que fizeram e fazem parte de minha jornada: à minha esposa e companheira de vida, Geneviève Faé, professora que comigo pensa e conversa sobre Educação e que ajudou nas revisões das minhas produções; à minha orientadora, professora Eliana Maria do Sacramento Soares, pelo aprendizado durante esse estudo; aos meus colegas professores e professoras das instituições com quem tive a oportunidade de participar na construção da história de nossos alunos; aos professores e professoras do PPGEdu da UCS, pela dedicação na formação de seres humanos críticos e protagonistas da própria história e aos meus professores e professoras, do Ensino Fundamental à Pós-graduação, que contribuíram para a minha formação e desenvolvimento. Por fim, aos meus mestres da vida: Oscar Pedro Faé e Dilva Maria Sirtoli Faé, que dedicaram sua existência à educação dos filhos.

AGRADECIMENTOS

Gratidão é a palavra que traduz o sentimento que me invade nesse momento, pois poder estudar é um privilégio, especialmente em um país onde não há oportunidades para todos.

À UCS, por fomentar pesquisas na área da educação.

À minha orientadora, professora Eliana Maria do Sacramento Soares, por acreditar na realização desta pesquisa, pelas suas sugestões de temas e aportes teóricos, por suas provocações e desafios acadêmicos durante a escrita.

Aos professores do PPGEdu, pelos encontros de intensa aprendizagem e por nos proporcionarem a construção de uma jornada como professores-pesquisadores.

Aos colegas do PPGEdu, pelas trocas, conhecimentos e desafios na área da educação, como via de transformação de uma comunidade.

Aos servidores da Coordenação-Geral dos Programas do Livro, em especial à Karina de Oliveira Scotton, Coordenadora de Apoio às Redes de Ensino, pela atenção, disponibilidade e auxílio.

À minha prima e professora Aline Marques de Freitas, pelo incentivo para que eu seguisse nos estudos.

Ao meu irmão, Ricardo Daniel Faé, sensível observador do mundo e sonhador de um país mais igualitário, pelas conversas que também fazem parte de minha formação.

Aos meus pais, Oscar Pedro Faé e Dilva Maria Sirtoli Faé, pelo exemplo de valorização do conhecimento e por toda sua dedicação para que seus filhos pudessem estudar.

Por fim, ao meu filho, Pedro Guilherme Faé e à minha esposa, Geneviève Faé, pelo apoio, paciência e compreensão durante essa intensa jornada de conciliação dos estudos com o trabalho.

“Um livro, uma caneta, uma criança e um professor podem mudar o mundo”.

Malala Yousafzai

RESUMO

Nesse estudo foi apresentado como os livros didáticos de matemática do Ensino Médio, indicados pelo PNLD 2021, podem mediar a construção de conceitos de função afim e de função quadrática. A base teórica dessa pesquisa foi construída a partir de ideias da teoria sociointeracionista de Vigotski: mediação, internalização, interação social, zona de desenvolvimento proximal e, em especial, a teoria de formação de conceitos. O *corpus* de pesquisa foi composto de três obras didáticas que, juntas, estão presentes em quase 80% das escolas de administração pública estadual e federal do município de Caxias do Sul. As obras selecionadas foram analisadas com base na análise textual discursiva de Moraes e Galiazzi (2011), e as categorias que emergiram desse processo foram: *apresentação de contextos*, *apresentação de definições*, *propostas d*e *atividades e retomadas de pré-requisitos*. A terceira categoria foi dividida em três subcategorias: *propostas de questões e testes*, *propostas de atividades com uso de tecnologia digital* e *propostas de explorações e investigações.* Os resultados indicam que o livro didático tem potencial de mediação na construção dos conceitos de função afim e de função quadrática, em especial se: retomar conceitos que são pré-requisitos por meio de sondagens, apresentar situações de contexto relacionadas aos conceitos a serem estudados, enunciar as definições na linguagem simbólica combinada à linguagem materna e propor atividades variadas como questões contextualizadas, problematizações com uso de tecnologia digital, explorações e investigações que priorizem a interação social, a comunicação verbal e a produção escrita. Esses quatro aspectos, apresentados de forma articulada, potencializam a mediação da obra didática no processo de construção de conceitos de função afim e de função quadrática. Esse potencial está integrado à atuação do professor como mediador no processo de aprendizagem, por meio de explicações, orientações e intervenções que contribuem na construção e internalização desses conceitos.

Palavras-chave: Livros Didáticos de Matemática. PNLD. Ensino Médio. Construção de Conceitos. Abordagem Vigotskiana.

ABSTRACT

This study aims to present how Secondary Education mathematics textbooks, indicated by PNLD 2021, can mediate the construction of concepts of affine and quadratic functions. The theoretical basis of this research was built on ideas from Vygotsky's socio-interactionist theory: mediation, internalization, social interaction, zone of proximal development and, in particular, the theory of concept formation. The research corpus consisted of three teaching books which, together, are present in almost 80% of state and federal public schools in the municipality of Caxias do Sul. The selected textbooks were analyzed based on the discursive textual analysis of Moraes and Galiazzi (2011), and the categories that emerged from this process were: presentation of contexts, presentation of definitions, proposals for activities and retakes of prerequisites. The third category was divided into three subcategories: proposals for questions and tests, proposals for activities using digital technology and proposals for explorations and investigations. The results indicate that textbooks have the potencial to mediate the construction of the concepts of affine and quadratic functions, especially if taking up concepts that are prerequisites through probing, presents contextual situations related to the concepts to be studied, states definitions in symbolic language combined with mother tongue and proposes varied activities such as contextualized questions, problematizations using digital technology, explorations and investigations that prioritize social interaction, verbal communication and written production. These four aspects, presented in an articulated way, enhance the mediation of the didactic work in the process of constructing concepts of affine and quadratic functions. This potential is integrated with the teacher's role as a mediator in the learning process, through explanations, guidance and interventions that contribute to the construction and internalization of these concepts.

Keywords: Mathematics Textbooks. PNLD. Secondary Education. Construction of Concepts. Vygotskyan Approach.

APRESENTAÇÃO

Esta dissertação está organizada em seis capítulos.

No Capítulo 1 – Introdução, apresento minha trajetória como estudante e professor, contextualizo os eventos que me impulsionaram a realizar essa pesquisa, justifico a escolha do livro didático como objeto de pesquisa, bem como sua relevância. Ainda nesse capítulo, apresento a pergunta de pesquisa, seus objetivos gerais e específicos.

No Capítulo 2 – Referenciais Teóricos, apresento os quadros teóricos que iluminaram essa jornada. Começo trazendo reflexões e propostas para a educação no século XXI, tendo como referência o *Relatório da Comissão Internacional sobre os Futuros da Educação*, da UNESCO. Na sequência, trago informações a respeito do *Programa Nacional do Livro e do Material Didático*, uma política pública de responsabilidade do Ministério da Educação. Na terceira seção desse capítulo, discorro sobre ideias da teoria sociointeracionista de Vigotski, base dos norteadores teóricos desse estudo. Na última seção, trago os conceitos matemáticos relacionados à função afim e à função quadrática, tendo como referência o livro *Conceitos Fundamentais da Matemática*, de Bento de Jesus Caraça.

No Capítulo 3 – Método, apresento como foi realizada a composição do *corpus* de pesquisa: três obras didáticas utilizadas em quase 80% das escolas de administração pública estadual e federal do Município de Caxias do Sul. Na segunda seção, discorro a respeito da escolha pela A*nálise Textual Discursiva* de Moraes e Galiazzi (2011) e apresento o quadro de norteadores teóricos desse estudo.

No Capítulo 4 – Análise dos Dados, apresento o panorama das três obras que compõem o *corpus* e discorro sobre cada uma das quatro categorias emergentes do estudo. Na última sessão, relaciono as categorias e respondo à pergunta de pesquisa.

No Capítulo 5 – Resultados e Discussão, avalio o processo desenvolvido para obter os resultados da pesquisa e se o objetivo geral foi atingido. Também discorro sobre a contribuição dessa pesquisa para minha formação como pesquisador e educador, sobre as maneiras que esta pesquisa pode contribuir para a comunidade científica e acadêmica e sobre as perspectivas para trabalhos futuros.

Por fim, no Capítulo 6, trago as Referências que fizeram parte de minhas leituras ao longo da jornada.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CGPLI	Coordenação-Geral dos Programas do Livro
ECT	Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
MEC	Ministério da Educação
PDDE	Programa Dinheiro Direto na Escola
PNBE	Programa Nacional Biblioteca na Escola
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
PPGEdu-UCS	Programa de Pós-graduação em Educação da UCS
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
INL	Instituto Nacional do Livro
UCS	Universidade de Caxias do Sul
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UNESCO	Organização das Nações Unidas para Educação, Ciência e Cultura

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO: O PESQUISADOR E SEU OBJETO DE ESTUDO

> Ninguém começa a ser educador numa certa terça-feira às quatro à tarde. Ninguém nasce educador ou marcado para ser educador. A gente se faz educador, a gente se forma, como educador, permanentemente, na prática e na reflexão sobre a prática (Freire, 1991, p. 58).

1.1 PRIMEIRAS PALAVRAS

Minha trajetória de vida, desde a infância, foi nutrida de exemplos de valorização dos estudos e do conhecimento. Meus pais me matricularam na Escola Estadual Santa Catarina, no primeiro ano do Ensino Fundamental, e lá permaneci até o terceiro ano do Ensino Médio. Tanto meu pai quanto minha mãe participaram e acompanharam de perto minha vida estudantil. Lembro-me de minha mãe “tomando a tabuada de multiplicação”, enquanto passava a roupa, e de meu pai explicando a divisão de números decimais, antes de eu ter aprendido na escola. Recordo, também, que ajudava meus colegas em suas dificuldades em matemática, no Fundamental e no Médio.

Prestei vestibular para Engenharia Química na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), em 1991, e consegui a vaga no mesmo ano, quando passei a morar em Porto Alegre. Durante a graduação, tive a oportunidade de participar, com uma bolsa de monitoria, na disciplina de Geometria Analítica, do Departamento de Matemática da UFRGS. Essa experiência foi muito significativa, pois exerci minha paixão pela matemática e pelo processo de compartilhar alguns conhecimentos dessa área.

Terminei a graduação em 1996 e atuei na área da Engenharia, durante cinco anos, em três empresas diferentes. Cabe aqui uma reflexão: por que não cursei licenciatura em matemática? A resposta a essa pergunta já suscita um dos inúmeros problemas na área da educação em nosso país: os jovens não se sentem motivados a seguir a carreira de professor. Quantos jovens, ao longo dessas três décadas, desde minha escolha na graduação, poderiam ter optado pela licenciatura? Teremos professores suficientes nas próximas décadas? Qual o futuro de um país que forma poucos professores?

Eu me tornei professor por insistência. Paralelamente à atividade de engenheiro, durante o dia, passei a dar aulas de reforço na preparação para o vestibular, bem como em alguns cursos livres de aplicação da matemática na área da saúde, no turno da noite. A partir do ano 2000, montei um pré-vestibular com preparação específica para vagas concorridas – o Apoio pré-vestibular – e passei a atuar como professor de matemática de Ensino Médio em algumas instituições da serra gaúcha: Colégio São Carlos, Colégio Objetivo Caxias do Sul, Bento Gonçalves e São Marcos e Colégio Nossa Senhora de Lourdes, em Farroupilha. Assim, deixei a carreira de engenheiro e entrei, definitivamente, na área da educação como professor de matemática.

Já são 25 anos na área de educação, como professor e diretor pedagógico. Ao longo desse período, acompanhei e sigo acompanhando estudantes do primeiro, segundo e terceiro anos do Ensino Médio, bem como os que já concluíram essa etapa, na preparação para os vestibulares e para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). A maioria desses estudantes provêm da rede privada de ensino e alguns da rede pública estadual ou federal. A forma individualizada de atendimento a esses estudantes, proporcionada pelo curso, me permitiu conhecer as enormes lacunas na aprendizagem de matemática de uma parcela muito significativa desses alunos.

A maioria dos estudantes que entravam no curso não haviam apreendido conceitos básicos relacionados à matemática do ensino básico e, portanto, não conseguiam definir minimamente objetos matemáticos. Além disso, tinham uma percepção instrumentista e mecanicista da matemática. Uma parcela significativa conseguia desenvolver cálculos, mediante procedimentos algébricos, porém apresentava dificuldades na resolução de situações-problema e no estabelecimento de relações entre conceitos matemáticos.

Nesse cenário, a inquietação resultante das dificuldades dos estudantes no desenvolvimento do pensamento matemático e a busca por uma formação mais ampla na área da educação me conduziram ao mestrado da Universidade de Caxias do Sul (UCS), por intermédio de indicações de colegas que salientaram a qualidade do Programa de Pós-graduação em Educação (PPGEdu-UCS). Assim, planejei cursar disciplinas isoladas durante um período para depois ingressar formalmente no mestrado no ano de 2022.

A partir das leituras e dos estudos, optei por pesquisar a construção de conceitos nos livros didáticos de matemática do Ensino Médio. A escolha do livro didático como instrumento de mediação no processo de aprendizagem ocorreu pois, na matemática do Ensino Médio no Brasil, é a principal fonte de informação e, em muitos casos, especialmente para os estudantes de classes sociais mais carentes, a única fonte de acesso aos conteúdos por meio de um dos maiores programas de distribuição gratuita de livros didáticos do mundo – o *Programa Nacional do Livro e do Material Didático* (PNLD).

1.2 CONTEXTUALIZAÇÃO, JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA DO OBJETO DE PESQUISA

> Procura, dentro de ti, os problemas que te inquietam, aquilo que queres saber e compreender. A prática científica é sempre, de uma ou de outra maneira, um ajuste de contas com a nossa vida. Se não encontrarmos aquilo que nos inquieta, as perguntas a que queremos responder, se não nos implicarmos por inteiro, jamais produziremos um trabalho com sentido para nós e para os outros (Nóvoa, 2015, p. 24).

Na primeira semana do ano letivo de 2019, resolvi fazer uma sondagem diferente com meus alunos do pré-vestibular. Ao invés de entregar uma avaliação mediante situações-problema envolvendo os principais assuntos do Ensino Médio, elaborei três questões abertas: uma de álgebra, uma de geometria e uma de probabilidade. A pergunta relacionada à álgebra foi: “O que é uma função matemática?”; a de geometria: “O que é o número *pi* (π)?”; e a de probabilidade: “Como calcular a probabilidade de um evento?”. Apesar de bastante específicas sob o ponto de vista de saberes, as perguntas mostraram-se importantes para a sondagem de lacunas relacionadas a conceitos de objetos matemáticos.

A primeira pergunta foi a que mais apresentou respostas evasivas como “não sei” ou “não lembro”. Muitas respostas estavam relacionadas à simbologia matemática ou ao processo mecânico ou algorítmico de cálculo como “função é f(x)...” ou “função o valor calculado após a substituição de x....”. Houve ainda respostas vinculadas à representação cartesiana de uma função: “função é um gráfico...”. Nenhum de meus (quase) duzentos alunos de Caxias e de Porto Alegre citou que função é uma relação de dependência entre dois conjuntos ou uma relação de dependência entre duas grandezas. Houve algumas (poucas) respostas que se aproximaram, citando que “função é uma fórmula e pode ser representada em um gráfico...”.

A segunda pergunta não apresentou respostas “não sei” ou “não lembro” – reforçando que a palavra *pi* é bastante familiar no contexto do Ensino Médio. Porém, a imensa maioria das respostas estiveram associadas ao valor aproximado de 3,14 ou ao fato de o *pi* ser um número com infinitas casas decimais: “o *pi* é 3,14”, ou “o *pi* é um número infinito e seu valor é próximo de 3,14”, o que evidencia uma aprendizagem associada à memorização. Por outro lado, poucas respostas associando o *pi* à circunferência, seja pela definição formal (o *pi* é um número irracional que expressa a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro), seja pela identificação de um padrão que ocorre com qualquer circunferência, revelando uma compreensão do conceito e da ideia matemática associada ao número *pi*, a partir de uma construção sólida desse conceito. Se a questão fosse elaborada de forma diferente, associando o *pi* à circunferência: “qual a relação do *pi* com a circunferência?”, possivelmente haveria mais respostas assertivas, porém, provavelmente haveria mais respostas evasivas também.

A terceira pergunta foi a que apresentou maior índice de respostas adequadas ou associadas ao conceito: “probabilidade de um evento é a chance de ele ocorrer...” ou “probabilidade de um evento é a porcentagem na qual o evento ocorre...”, embora poucos tenham utilizado a palavra razão – importante conceito da matemática dos ensinos fundamental e médio.

Em suma, as perguntas propostas, além de sugerirem lacunas associadas à definição de conceitos básicos, suscitaram minha vontade de realizar uma pesquisa relacionada à aprendizagem desses conceitos na matemática do Ensino Médio. Boaler (2020, p. 128) afirma que “a matemática pode ser uma bela disciplina de ideias e conexões passíveis de serem abordadas de maneira conceitual e criativa”. Portanto, o professor precisa criar práticas mediadoras para que o aluno internalize conceitos matemáticos. A internalização de um conceito matemático permite que o estudante compreenda de maneira mais profunda e desenvolva pré-requisitos para seguir seus estudos, pois muitos conceitos estão entrelaçados em uma rede que produz os vínculos necessários ao desencadeamento de um processo sólido de aprendizagem.

A compreensão de conceitos matemáticos também está prevista na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), na área de Matemática e suas Tecnologias. A BNCC estabelece que os “novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos” (BNCC, 2018, p. 529). Na sequência, preconiza que, para que esses propósitos se concretizem, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Nesse sentido, conclui que essas habilidades serão desenvolvidas a partir de competências que envolvem raciocinar, representar, comunicar e argumentar, a partir da apreensão de conceitos e do desenvolvimento de representações. Essas habilidades estão inscritas nas competências que envolvem o raciocínio, a representação, a comunicação e a argumentação.

A aprendizagem dessas habilidades e competências pode ser mediada pelo professor e por fontes como livros didáticos, sites e ambientes virtuais, entre outros. Ou seja, são fontes que podem apresentar predicados importantes na mediação do processo de aprendizagem, no entanto as fontes provenientes da web não chegam a todos os lares brasileiros ou chegam de forma parcial. O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em sua edição 2021, divulgou que a internet chegou a 90% dos domicílios do Brasil, de modo que 28,2 milhões de brasileiros seguem sem acesso à internet. O Instituto também identificou que 44,8 milhões, em média, têm internet em 25 dias por mês, e outros 41,8 milhões usam o serviço apenas em 19 dias por mês, de modo que, aproximadamente 70% da população acima de 16 anos não consegue usar a internet todos os dias.

O livro didático é, por meio do PNLD, a fonte mais disponível aos estudantes das escolas públicas brasileiras e, em uma quantidade significativa dos casos, a única fonte disponível. Segundo o Ministério da Educação, a dotação orçamentária para o financiamento do PNLD em 2021 foi de R$ 2.216.482.139,00 (dois bilhões, duzentos e dezesseis milhões, quatrocentos e oitenta e dois mil cento e trinta e nove reais). Desse orçamento foram empenhados R$ 2.216.142.505,00 (dois bilhões, duzentos e dezesseis milhões, cento e quarenta e dois mil, quinhentos e cinco reais) para despesas como as de aquisição dos livros e de materiais didáticos nos formatos previstos em edital (impresso, digital, braile e ePUB), de avaliação e controle de qualidade e de distribuição, sendo adquiridos mais de 207 milhões de exemplares para atendimento de todas as etapas da Educação Básica.

Segundo o Ministério da Educação, em função do ganho de escala, o custo médio de cada exemplar é de apenas R$ 8,80 (oito reais e oitenta centavos), de modo que se equilibram o interesse público e o mercado, demonstrando um propósito de economicidade. Além disso, grande parte das obras didáticas do PNLD é reutilizável, pois são confeccionadas com material resistente. Cada exemplar tem, de acordo com o MEC, durabilidade prevista de três anos, ou seja, deve ser usado por três estudantes em três anos consecutivos, seguindo critérios de sustentabilidade. As Escolas são orientadas a realizarem trabalhos de conscientização junto aos pais e alunos sobre a importância dos cuidados com os livros para que nenhum estudante fique prejudicado no próximo ano letivo. Em que pese a quantidade de recursos públicos destinados às editoras, esse estudo não analisará questões relativas aos valores ou ao mercado das editoras no Brasil por meio do PNLD.

Na área da matemática, o livro didático evoluiu e sofreu significativas transformações na última década, via inserção de aplicações no cotidiano, de ampla utilização de situações-problema contextualizadas, de uma linguagem que trabalha não apenas o domínio simbólico e de recursos da web que podem ser acessados via códigos QR. Então, se o material didático é um referencial importante e com muitos recursos, passando por crivos de seleção estabelecidos pelo PNLD, como estão sendo realizadas as apresentações dos conceitos matemáticos? Quais atividades, mediadas pelo material didático, estão relacionadas à construção de conceitos matemáticos? Como o livro didático pode potencializar a construção de conceitos matemáticos?

Nesse sentido, esta pesquisa tem por objetivo contribuir com o aperfeiçoamento do livro didático de matemática e a consequente produção de algum conhecimento que possa ser solidarizado, a partir da divulgação de resultados às editoras envolvidas, bem como às instituições de ensino que utilizam o PNLD.

Para iluminar minha jornada nesta pesquisa, busquei sustentação em conceitos da teoria sociointeracionista de Lev Seminovich Vigotski[1], como a interação social, a mediação, a internalização**,** a zona de desenvolvimento proximal e sua teoria de formação de conceitos. O professor Juan Ignacio Pozo afirma que "nas ideias vigotskianas a respeito da generalização e na compreensão de conceitos se encontram, talvez como em nenhum outro aspecto, as melhores virtudes da teoria histórico-cultural de Vigotski" (Pozo, 1998, p. 198). Assim, analisei a apresentação dos conceitos matemáticos, as situações-problema envolvendo conceitos matemáticos e as atividades associadas à construção de conceitos matemáticos sugeridas tanto no livro didático quanto no manual do professor para os capítulos de *função afim*[2] e de *função quadrática*[3], tendo como norteadores ideias da teoria de Vigotski.

1.3 O PROBLEMA E OS OBJETIVOS DA PESQUISA

1.3.1 O Problema

Como os livros didáticos de matemática do Ensino Médio, indicados pelo PNLD 2021[4], podem mediar a construção de conceitos de função afim e quadrática a partir de ideias da teoria vigotskiana?

1.3.2 Objetivo Geral

Analisar livros didáticos de matemática do Ensino Médio, indicados pelo PNLD 2021, como instrumentos mediadores na construção dos conceitos de função afim e quadrática, sob à luz de ideias da teoria de Vigotski.

---

[1] Utilizarei, nesta dissertação, a grafia Vigotski, usada na maioria das obras em língua portuguesa.
[2] Toda função do tipo $f(x) = ax + b$, sendo x a variável independente e a e b constantes.
[3] Toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo x a variável independente, a, b e c constantes e $a \neq 0$.
[4] A escolha do ano de 2021 deve-se ao fato de que, pela primeira vez, foram ofertados livros didáticos por área do conhecimento em substituição aos livros didáticos por componente curricular.

1.3.3 Objetivos Específicos

a) Construir um quadro teórico relacionando ideias da teoria sociointeracionista de Vigotski como a mediação, a interação social, a zona de desenvolvimento proximal e a teoria de formação de conceitos.
b) Compor um *corpus* de estudo constituído por livros didáticos indicados pelo PNLD 2021 - Objeto 2[5], para a área de Matemática e suas Tecnologias.
c) Elaborar norteadores relacionados à construção dos conceitos de função afim e de função quadrática à luz das ideias da teoria de Vigotski, descritas nos referenciais teóricos.
d) Descrever a forma como os livros didáticos que compõem o *corpus* apresentam os conteúdos de estudo de função afim e de função quadrática.
e) Analisar os contextos, as definições e as atividades propostas pelos livros didáticos que compõe o *corpus* para inferir sobre seu potencial como instrumento mediador para a construção de conceitos de função afim e quadrática, a partir de ideias da teoria sociointeracionista de Vigotski.
f) Discutir e discorrer sobre o potencial do livro didático de matemática como mediador da construção de conceitos de função afim e quadrática.

[5] O Objeto 2 do PNLD 2021 apresenta as obras por áreas do conhecimento e didáticas específicas.

2 REFERENCIAIS TEÓRICOS

Entendo que as práticas educativas têm o potencial de permitir que as pessoas acessem os conhecimentos produzidos e possam contribuir com novos conhecimentos ao patrimônio intelectual da humanidade. Considero, portanto, que o conhecimento é um bem e um ato coletivo de criação conjunta. Nesse sentido, busquei referenciais que vão ao encontro dessa crença e aos norteadores teóricos dessa pesquisa.

Começo essa seção trazendo reflexões e propostas para a educação no século XXI, tendo como referência o *Relatório da Comissão Internacional sobre os Futuros da Educação*. O relatório foi iniciado em 2019, a partir da organização da Comissão pela UNESCO, e apresentado em 2022. Trata-se de um norteador, com propostas e um chamado à ação coletiva para delinear futuros para a humanidade e para o planeta. O Relatório foi produzido durante a epidemia do novo coronavírus que evidenciou a necessidade de ações coletivas para seu enfrentamento, a partir da cooperação e da solidariedade entre nações. Cooperação e solidariedade – princípios que se tornaram indispensáveis para que o ser humano possa ser capaz de sobrepujar os desafios do século XXI. Se educação está associada à transformação, é preciso que estes princípios estejam inseridos em propostas pedagógicas e em políticas públicas.

Em relação às políticas públicas, trago informações a respeito do *Programa Nacional do Livro e do Material Didático*, uma política pública, de responsabilidade do Ministério da Educação, garantida pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional que estabelece, como dever do Estado com a educação escolar pública, o atendimento ao educando por meio de programas suplementares de material didático-escolar. A pesquisa tem como objeto o livro didático de matemática do Ensino Médio. A construção do *corpus* de pesquisa se dá a partir das obras oferecidas no PNLD 2021 – Objeto 2, para a área de Matemática e suas Tecnologias.

Na sequência, construo um quadro teórico relacionando algumas ideias fundamentais da teoria sociointeracionista de Vigotski, que serão base para o desenvolvimento do estudo proposto. Vou discorrer não apenas sobre a teoria de formação de conceitos espontâneos e de conceitos científicos, como também sobre ideias que estão diretamente associadas à construção dessa teoria – a mediação, que inclui o uso de instrumentos e signos e a interação social, que determina a internalização ou reconstrução interna desses signos.

À medida que construo o quadro teórico, a partir das ideias de Vigotski, relaciono com o processo de ensino e aprendizagem de matemática e as potenciais atividades mediadas pelo livro didático. Utilizo o termo potenciais, pois entendo que a atuação do professor é fundamental na ação pedagógica e de forma alguma pode ser substituída pelo livro didático.

Escolhi Vigotski não só por sua teoria de formação de conceitos a partir de uma construção histórica, mas também por entender que os desafios da educação para o futuro demandam um esforço coletivo e cooperativo. Vigotski viveu nos primórdios da antiga União Soviética, onde a crença dominante naquela sociedade era, segundo o historiador Yuval Harari (2016, p. 239), a crença no coletivo.

Na quarta e última seção desse capitulo, faço uma breve descrição a respeito da matemática enquanto ciência e conhecimento construído pelo ser humano ao longo dos séculos. Após essas considerações, trago as definições de função e os conceitos associados, bem como de função afim e de função quadrática – os assuntos pesquisados nos livros didáticos do PNLD selecionados para a pesquisa.

2.1 EDUCAÇÃO PARA O SÉCULO XXI

> O respeito pelos direitos humanos e a preocupação com a educação como um bem comum devem se tornar as linhas centrais que costuram o nosso mundo compartilhado e o nosso futuro interconectado (Sahle-Work Zewde, presidente da Comissão Internacional sobre os Futuros da Educação).

Os últimos 500 anos testemunharam um crescimento sem precedentes na história da humanidade. Christian (2004, p. 141) afirma que a população humana aumentou 14 vezes, a produção, 240 vezes e o consumo de energia, 115 vezes. Em sua busca por conhecimento e desenvolvimento, a humanidade sobrecarregou seu ambiente natural ameaçando sua própria existência. Hoje, elevados padrões de vida coexistem com enormes carências sociais. As inovações tecnológicas não são direcionadas de forma adequada à equidade, à inclusão e à participação democrática.

Por outro lado, em nenhum outro momento da história, o ser humano teve tanto acesso ao conhecimento e às ferramentas que nos possibilitam colaborar e transformar. Nesse sentido, a *Comissão Internacional sobre os Futuros da Educação*, organizada pela UNESCO, contou com a colaboração de cerca de um milhão de pessoas, de redes e de organizações para produzir o relatório intitulado *Reimaginar nossos Futuros Juntos – um novo contrato social para a educação* (UNESCO, 2022). A Comissão Internacional conta com membros de todos os continentes, professores e pesquisadores reconhecidos internacionalmente como Antônio Nóvoa e Cristovam Buarque e, atualmente, é presidida por Sahle-Work Zewde, presidente da Etiópia.

O ponto de partida do novo contrato social para a educação é uma visão compartilhada de seus propósitos públicos. Reimaginar significa trabalharmos juntos para criarmos futuros compartilhados e independentes. Segundo o relatório, o novo contrato social para a educação deve nos unir em torno de esforços coletivos e fornecer inovação e conhecimento necessários para produzir futuros sustentáveis e pacíficos, fundamentados em três eixos: justiça social, econômica e ambiental.

O relatório destaca que as marcas de nossa atual conjuntura histórica são, entre outras: a ampliação da desigualdade social, a mudança climática, a perda da biodiversidade, o uso de recursos que extrapola os limites do planeta, o retrocesso democrático e a automação tecnológica disruptiva. Assim, múltiplos futuros alternativos são possíveis e transformações disruptivas e desafios podem ser identificados em várias áreas fundamentais:

a) Embora o planeta esteja ameaçado, estão em andamento ações de descarbonização e mudanças para a economia verde.
b) Ao longo da última década, o mundo assistiu a um retrocesso na governança democrática e a um aumento no sentimento populista identitário. Ao mesmo tempo, tem ocorrido um florescimento da participação cidadã e do ativismo que contesta a discriminação e a injustiça.
c) Há um enorme potencial transformador nas tecnologias digitais, porém ainda não descobrimos como realizar essas transformações.
d) A Inteligência Artificial e a automação alteram os cenários de emprego em todo o mundo. Ao mesmo tempo, mais pessoas e comunidades reconhecem o valor do trabalho assistencial.

O relatório afirma que essas transformações têm implicações importantes para a educação e que as formas como a educação está organizada em todo o mundo não são suficientes para garantir sociedades justas e pacíficas, bem como um planeta saudável e um progresso compartilhado. Nesse sentido, há necessidade de um novo contrato social para a educação que nos permita pensar de forma diferente sobre a aprendizagem e as relações entre os estudantes, os professores, o conhecimento e o planeta Terra.

A partir dessas considerações o relatório produzido pela Comissão Internacional sobre os Futuros da Educação estabeleceu propostas em cinco eixos: pedagógico, curricular, docente, estrutural e discente. Quanto ao eixo pedagógico, o relatório afirma que a pedagogia precisa ser transformada baseada nos princípios da cooperação e da solidariedade. A pedagogia deve promover a empatia e a compaixão e deve construir competências para que os estudantes trabalhem juntos para transformar a si mesmos e ao mundo. Os professores podem se envolver em uma ampla gama de estratégias de aprendizagem como *feedback* entre pares, aprendizagem baseada em projetos, aprendizagem baseada em questionamentos, laboratórios estudantis, oficinas técnicas e profissionais, entre outras. Além disso, pais, responsáveis e famílias também podem ser convidados a compartilhar e valorizar a diversidade e o pluralismo ao lado de seus filhos. Por fim, a avaliação não deve ser utilizada de forma punitiva ou para categorizar estudantes.

Quanto aos currículos, o relatório estabelece que devem ser norteados por dois processos: a aquisição do conhecimento como parte do patrimônio comum da humanidade e a criação coletiva de novos conhecimentos e novos futuros possíveis. Dessa forma, a concepção curricular deve procurar fomentar nos estudantes os conceitos, competências, valores e atitudes que lhes permitam envolver-se com diversas formas de aquisição, aplicação e geração de conhecimento. Os currículos também devem destacar os efeitos da mudança climática em suas comunidades e no planeta, bem como combater a rápida disseminação de desinformação e manipulação por meio de múltiplas informações – digitais, científicas, textuais e matemáticas – que permitem que os indivíduos encontrem seu caminho para um conhecimento mais preciso e um compromisso com a verdade. Por fim, os direitos humanos e a participação democrática devem fundamentar os princípios para os currículos e aprendizagem que transformam pessoas e o mundo.

O relatório estabelece que os professores são os principais organizadores para ajudar a aumentar o conhecimento e as capacidades dos estudantes. A colaboração e o trabalho em equipe devem caracterizar o fazer pedagógico dos professores. Além disso, o trabalho dos professores como produtores de conhecimento deve ser reconhecido e apoiado, ajudando-os a documentar, compartilhar e discutir pesquisas e experiências relevantes com seus colegas. Por fim, deve ser garantida a autonomia profissional, o respeito social e salários dignos para incentivar os educadores qualificados a permanecerem na profissão.

Na proposta estrutural, o relatório enfatiza que é preciso realizar um esforço público para redesenhar os tempos e os lugares das escolas, de forma a protegê-las e transformá-las, de modo que os estudantes encontrem desafios e possibilidades que não estarão disponíveis em outros locais. Dessa forma, os espaços físicos, horários e cronogramas de aulas devem ser reimaginados e elaborados para desenvolver a capacidade dos indivíduos de trabalharem juntos. Quanto às tecnologias digitais, devem ser úteis e essenciais para aumentarem a criatividade e a comunicação dos estudantes. Por fim, as escolas devem se tornar exemplos de sustentabilidade e de neutralidade de carbono.

Quanto aos discentes, o relatório estabelece que as oportunidades educacionais devem estar disponíveis em todas as etapas e fases da vida. A educação de adultos deve ser mais desenvolvida e apoiada, indo além das concepções de qualificação ou de requalificação para abraçar possibilidades transformadoras. Dessa forma, o financiamento público e as capacidades dos governos devem ser fortalecidos, de modo que o direito à educação deve ser ampliado.

O relatório também lançou dois chamados para a ação: o primeiro para uma nova agenda de pesquisa e o segundo para solidariedade e cooperação internacional renovadas. O relatório propõe um programa de pesquisa coletiva mundial sobre os futuros da educação, centrando-se no direito universal à educação. A proposta de ação sugere que o conhecimento, os dados e as evidências devem incluir diversas fontes e formas de conhecimento e que os resultados da aprendizagem, da neurociência, de dados digitais e de indicadores estatísticos podem gerar ideias importantes quando relacionados a insumos empíricos.

A respeito do chamado para a solidariedade e cooperação, a Comissão chama todas as partes interessadas na educação para trabalharem em conjunto de modo a gerar soluções comuns para os desafios educacionais. As necessidades educacionais de solicitantes de asilo, refugiados, apátridas e migrantes, em particular, devem ser apoiadas por meio dessa cooperação e do trabalho de instituições internacionais. O relatório destaca que a UNESCO deve se reposicionar como parceira cujo trabalho é fortalecer as instituições e, também, como mediadora de evidências, produtora e facilitadora da troca de conhecimentos entre países e regiões.

No final, o relatório destaca que as universidades e as outras instituições de ensino superior devem ser ativas em todos os aspectos da construção de um novo contrato social para a educação, desde o apoio à pesquisa e ao avanço da ciência até a contribuição com programas educacionais em suas comunidades. Além disso, salienta a essencialidade de todos participarem da construção dos futuros da educação: crianças, jovens, pais, responsáveis, professores, pesquisadores, ativistas, empregadores, líderes culturais e religiosos, pois elaborar um novo contrato social para a educação é um passo fundamental para, juntos, reimaginarmos nosso futuro.

Dentre os eixos expostos nesse breve resumo do relatório, destaco como norteador para minha pesquisa o eixo pedagógico, baseado nos princípios da cooperação e da solidariedade. O *Relatório da Comissão Internacional sobre os Futuros da Educação*, em sua essência, estabelece que o novo contrato é social e deve ser construído de forma coletiva. Nesse sentido, as práticas pedagógicas podem propiciar que os estudantes atuem em interação e cooperação, alinhadas com as ideias da teoria vigotskiana: o *social* e a *atividade*. Segundo Garnier (1996,

p. 12), “o *social* constitui, por um lado, a fonte do desenvolvimento conceitual da criança e caracteriza, por outro lado, a organização da atividade comum e do aprendizado do aluno”, ou seja, o desenvolvimento intelectual de um indivíduo surge como resultado de sua imersão em um ambiente cultural e coletivo. Nessa perspectiva, Boell, Arruda, Oliveira e Sacramento Soares (2021) destacam que é preciso ir além dos conteúdos, valorizando as relações interpessoais, interatividade e afetividade, enfatizando o valor desses aspectos para o desenvolvimento da aprendizagem. Em vista disso, o material didático pode sugerir práticas pedagógicas coletivas, que proporcionem interação social através de debates e pesquisas, entre outras ações.

Quanto à *atividade*, Garnier (1996, p. 13) destaca que “o social se encontra vinculado à *atividade*, de maneira que a criança somente pode apropriar-se do ambiente cultural enquanto ser ativo”, ou seja, para que o indivíduo apreenda conceitos, é necessária a inclusão do outro em uma atividade, outro que já tenha experiência no uso desses conceitos como produtos do ambiente cultural. Portanto, o social e a atividade são elementos importantes no processo de internalização de conceitos. Nesse sentido, considero que atividades coletivas entre estudantes e o professor, relacionadas à compreensão e formação de conceitos matemáticos, podem estar destacadas no material didático.

O outro aspecto destacado no relatório da Comissão Internacional se refere ao financiamento público para a educação e as políticas públicas voltadas às necessidades dessa área, especialmente para países em desenvolvimento. No Brasil, entre as políticas voltadas à área da educação, há o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD). Através desse programa, o livro didático tornou-se a fonte de informação mais disponível aos estudantes das escolas públicas brasileiras. Na subseção a seguir, discorro a respeito desse quase centenário programa da educação brasileira, do qual selecionei o *corpus* de estudo desta pesquisa.

2.2 PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO E DO MATERIAL DIDÁTICO

Dos programas relacionados à distribuição de material didático no Brasil, o *Programa Nacional do Livro e do Material Didático* (PNLD) é o mais antigo. A origem do programa remonta à criação do *Instituto Nacional do Livro* (INL), em 1929, cuja atribuição era a de elaboração de leis sobre políticas educacionais relacionadas ao livro didático. Somente a partir de 1985, após a redemocratização do Brasil, o programa passou a se chamar *Programa Nacional do Livro Didático*, embora, nessa década e no início dos anos 1990, não atendesse a todos os alunos da rede pública, nem a todas as disciplinas, pois não havia uma regularização.

Em 1997, o PNLD passou a alcançar todos os anos e componentes curriculares do Ensino Fundamental. O Ensino Médio e a Educação de Jovens e Adultos (EJA) passaram a ser integralmente atendidos somente a partir de 2011. Com o Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017, os programas relacionados a livro foram unificados. O PNLD passou a significar *Programa Nacional do Livro e do Material Didático*, uma vez que, além de livros didáticos, o programa passou a distribuir livros literários – função antes atribuída ao *Programa Nacional Biblioteca na Escola* (PNBE). No edital de 2019, o PNLD trouxe uma outra inovação: a aquisição de livros com formato digital.

Quanto à aquisição dos materiais didáticos, foi estabelecido que o processo ocorrerá de forma periódica e regular para atender, a cada ano, cada uma das etapas e segmentos de ensino, conforme programação do quadro a seguir.

Quadro 1 – Programação do PNLD

PNLD	**Nível de Ensino**
2018	Ensino Médio
2019	Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental
2020	anos finais do Ensino Fundamental
2021	Ensino Médio
2022	Educação Infantil
2023	anos iniciais do Ensino Fundamental
2024	anos finais do Ensino Fundamental

Fonte: Coordenação-Geral dos Programas do Livro (2022).

O Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), autarquia federal criada pela Lei nº 5.537, de 21 de novembro de 1968, e alterada pelo Decreto-Lei nº 872, de 15 de setembro de 1969, vinculado ao Ministério da Educação (MEC), é o órgão responsável pela realização do PNLD.

A escolha dos materiais é realizada virtualmente, por meio do *Programa Dinheiro Direto na Escola* (PDDE) interativo. O acesso ao sistema é concedido pela Secretária de Educação e a operação deve ser realizada pelo diretor de cada escola. O sistema faz com que a escolha dos materiais didáticos seja mais segura. Para garantir o recebimento dos materiais, é necessário ter muita atenção quanto à leitura e à assinatura dos termos e condições do PNLD, assim como cuidado na etapa conclusiva, que inclui a escolha final e exposição em local público da ata do comprovante de escolha.

A figura a seguir, extraída do site do Ministério da Educação, apresenta, em ordem cronológica, as etapas internas, desde a publicação dos editais até a distribuição do material didático.

Figura 1 – Etapas do PNLD

Fonte: Coordenação-Geral dos Programas do Livro (2022).

O processo se inicia com a publicação de um edital que especifica os elementos que devem estar presentes nos materiais didáticos. Seguindo o prazo estabelecido no edital, as editoras interessadas inscrevem suas obras no PNLD. As obras inscritas passam por uma avaliação por especialistas. A partir das escolhas, os especialistas elaboram resenhas dos livros aprovados que são disponibilizadas pelo Guia PNLD. Esses guias orientam a escolha do livro e podem ser consultados nos portais on-line do MEC. Diretores e professores, após analisarem os guias dos livros, formalizam a escolha dos materiais que a escola deseja receber via internet. O FNDE adquire os livros solicitados pelas escolas e as editoras ficam encarregadas da produção. A distribuição é realizada pela Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos (ECT). Desde o PNLD 2019, a utilização dos livros será de quatro anos consecutivos, o que significa que o aluno deve devolver o material ao final do período letivo, com exceção dos livros consumíveis.

A escolha dos materiais do PNLD deve ser realizada de maneira conjunta entre o corpo docente e dirigente de cada escola, com base na análise das informações contidas no Guia do PNLD. O Guia do PNLD é o documento oficial, disponibilizado pelo governo federal para orientar a escolha dos livros pelas escolas brasileiras. O Guia contém as resenhas das obras aprovadas na avaliação pedagógica realizada pelo Ministério da Educação.

O PNLD de 2021, para o ensino médio, foi dividido em 5 objetos:

a) Objeto 1: projetos integradores e projetos de vida.

b) Objeto 2: obras por áreas do conhecimento e didáticas específicas.

c) Objeto 3: formação continuada.

d) Objeto 4: recursos digitais.

e) Objeto 5: Obras literárias.

No âmbito do PNLD 2021 – *Objeto 2*, foram ofertadas obras para as Áreas do Conhecimento e Obras Específicas destinadas aos estudantes e professores do ensino médio. Pela primeira vez foram oferecidos livros didáticos por área do conhecimento em substituição aos livros didáticos por componente curricular. Dessa forma, o programa ofereceu obras para as quatro áreas do conhecimento: Ciências Humanas e Sociais, Ciências da Natureza, Linguagens e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias. O Objeto 2 está alinhado à *Formação Geral Básica* do novo ensino médio. Saliento que essa pesquisa não fará análises da pertinência ou não das recomendações e propostas do Novo Ensino Médio.

O estudante recebe seis volumes impressos por área do conhecimento mais uma coletânea de áudios em CDs ou que podem ser acessados pelo portal do PNLD para o estudo de arte na coleção de Linguagens e suas Tecnologias. O (A) professor (a) recebe seis volumes impressos (manuais do professor), um videotutorial por volume para cada área do conhecimento e a coletânea de áudios para o estudo de arte na coleção de Linguagens e suas Tecnologias. Além dessas, o programa ofereceu mais três obras específicas para aprofundamento, ofertadas em volume único: Língua Portuguesa, Língua Inglesa e Ciências Humanas e Sociais em diálogo com a Matemática. Cada estudante recebe um volume impresso e uma coletânea de áudios no volume de língua inglesa. O (A) professor (a) recebe um manual do professor impresso, um videotutorial por volume e uma coletânea de áudios no volume de língua inglesa.

Os seis volumes de cada área não são sequenciais, ou seja, cada escola define, por intermédio de seus professores, o sequenciamento dos volumes de cada área ao longo dos três anos do Ensino Médio ou, até mesmo, em um tempo menor, conforme a programação estabelecida pela escola. Dessa forma, busca-se assegurar a autonomia do professor na elaboração do planejamento e na organização didática, bem como no aprofundamento dos objetos do conhecimento.

A escolha dessas obras ocorreu no período de 13 de julho a 12 de agosto de 2021. Estavam aptas a participar da escolha 20.449 escolas urbanas e rurais, com alunado no ensino médio (1º ao 3º ano), registrado no censo escolar de 2020. A escolha foi registrada por 18.889 escolas, o que representa 92,73% de registros efetuados.

Para a área de Matemática e suas Tecnologias, o *Guia PNLD 2021 – Objeto 2* estabelece quinze critérios específicos para a estruturação de todos os volumes. Entre estes, há alguns que abordam especificamente os conceitos matemáticos. Um deles (item 7, p. 22) indica que o livro didático deve “explorar conceitos matemáticos e sua utilidade para resolver problemas na vida cotidiana do estudante, oferecendo subsídios claros e precisos para a tomada de decisão cientificamente formada”. Outro (item 9, p. 22) aponta que o livro didático “deve explorar os conceitos com encadeamento lógico, sem recorrer, por exemplo, a definições circulares ou confundir tese com hipótese nas demonstrações matemáticas”.

Além dos critérios, o Guia estabelece mais quatro categorias para aprovação das obras: a coerência e a pertinência da abordagem teórico-metodológica, a qualidade das orientações prestadas ao professor, a funcionalidade do projeto gráfico-editorial, a qualidade do tratamento dos princípios éticos e a coerência e pertinência do material digital do professor. Na sequência, vou destacar apenas os itens abordados, nessas quatro categorias, que possuem alguma menção ou relação com meu objeto de pesquisa.

Quanto à coerência e pertinência da abordagem teórico-metodológica, as obras aprovadas devem promover o desenvolvimento das competências gerais, das competências específicas e habilidades da área de matemática presentes na BNCC. Nessa perspectiva, as obras devem explorar a vivência de práticas investigativas, a abordagem interdisciplinar e contextualizada, o desenvolvimento do pensamento crítico, reflexivo e argumentativo, o pensamento computacional e o uso de tecnologias. Nesse item, há um parágrafo que destaca informações relacionadas à interação social:

> O trabalho colaborativo, em dupla ou em pequenos grupos, estimula o desenvolvimento da argumentação matemática e do desenvolvimento do pensamento reflexivo, por meio de um debate qualificado entre os (as) estudantes e destes (as) com o (a) professor (a) envolvendo opiniões e estratégias que permitem a construção de ideias e/ou conceitos matemáticos (Guia PNLD 2021, p. 25).

No item que destaca a qualidade das orientações prestadas ao professor no manual do professor, não há menções específicas relacionadas à mediação visando à construção de conceitos matemáticos. O Guia estabelece, de maneira geral, que as orientações específicas visam potencializar os objetos de conhecimento, sugerir encaminhamentos metodológicos e fomentar discussões coletivas dos resultados encontrados pelos estudantes.

Quanto à funcionalidade do projeto gráfico-editorial, o Guia (p. 27) destaca que “quando necessário, as obras retomam conceitos do Ensino Fundamental ou acrescentam um conceito primordial à compreensão do tema a ser estudado” que “há incentivo ao registro de ideias, estratégias e procedimentos necessários para a construção de conceitos matemáticos”.

A respeito da coerência e da pertinência do material digital do professor, o Guia menciona, genericamente, que são destacados, com objetividade e clareza, os objetos de conhecimento que são propostos para estudo em cada volume de cada obra e como podem ser trabalhados pelo (a) professor (a), por meio de uma apresentação sintetizada da abordagem teórico-metodológica e sua articulação com os objetivos.

Além disso, o Guia contém uma ficha de avaliação utilizada para todas as obras com uma série de perguntas por categorias. A ficha avalia o panorama da obra, o manual do professor, a pertinência em relação às competências gerais da BNCC e as competências e habilidades específicas de Matemática e suas Tecnologias. Apresenta, também, as perguntas relativas às características gerais e específicas da obra, a coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica, a consonância com a legislação, com as diretrizes e com as normas oficiais relativas à educação. Além disso, a avaliação da qualidade do material digital do professor e uma sessão que aponta falhas pontuais.

Na parte final, o Guia exibe uma resenha para cada obra com os seguintes tópicos: *Visão Geral*, *Descrição da Obra*, *Análise da Obra* e *Em Sala de Aula*. A *Visão Geral* apresenta as características gerais da obra, os referenciais teóricos, a abordagem didática e a organização do material impresso e do digital do professor. A *Descrição da Obra* descreve a estrutura e a organização das obras quanto ao número de páginas, capítulos, temas e conteúdos, bem como a relação entre estes. A *Análise da Obra* aponta as qualidades, as ressalvas, o arranjo das competências e habilidades da BNCC, o respeito à legislação e a qualidade do projeto gráfico. O tópico *Em Sala de Aula* indica como a obra se vincula ao cotidiano do espaço escolar e onde o professor pode atuar, complementando detalhes para além dos livros que chegam aos estudantes. O Guia, portanto, dá subsídios para que os professores escolham a obra que julgam mais adequada.

A fim de resumir e organizar as informações, descrevo a seguir os critérios citados pelo Guia e relacionados a esta pesquisa:

- exploração de conceitos matemáticos e sua utilidade para resolução de problemas cotidianos;
- exploração de conceitos com encadeamento lógico;
- práticas de trabalho colaborativo para estimular o desenvolvimento da argumentação matemática e a construção de ideias e conceitos matemáticos;

- retomada de conceitos do Ensino Fundamental ou de conceitos primordiais quando necessário;
- apresentação de problemas diversificados sobre os mesmos conceitos, inclusive de modo a promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Esses critérios foram analisados nas obras escolhidas para o *corpus* da pesquisa, a partir de norteadores construídos sob o viés das ideias da teoria sociointeracionista de Vigotski, sobre a qual discorro na próxima subseção.

2.3 IDEIAS DA TEORIA SOCIOINTERACIONISTA DE VIGOTSKI

Pode-se atribuir à pesquisa de Vigotski a seguinte pergunta: como ocorre o desenvolvimento das funções psicológicas superiores? O pesquisador buscou, portanto, compreender como funcionam os processos de pensamento, linguagem, memória e atenção e quais as suas relações. De acordo com Moreira (2019, p. 115), "Vigotski, em seus experimentos em psicologia, se interessou no que as crianças faziam e não nas soluções as quais poderiam chegar", ou seja, suas técnicas focavam os processos ao invés dos produtos. Na introdução da sexta edição da obra *A Formação Social da Mente*, Michel Cole e Sylvia Scribner (Vigotski, 1998a, p. 16) destacam três técnicas do método experimental do pesquisador. Em uma delas, introduziam-se obstáculos na tarefa de forma a quebrar os métodos rotineiros de solução de problemas. Um outro método utilizado era o de fornecer caminhos alternativos para a solução de um problema, incluindo vários tipos de materiais, chamados pelo pesquisador de "auxiliares externos", que poderiam ser usados de maneiras diferentes. Uma terceira técnica utilizada envolvia colocar uma criança frente a uma tarefa que excedesse em muito seus conhecimentos.

Rego (1995, p. 25) ressalta que a preocupação principal de Vigotski não era a de elaborar uma teoria de desenvolvimento infantil. Ele recorre à infância como forma de poder explicar o comportamento humano e justifica que a necessidade do estudo da criança reside no fato de ela estar no centro da pré-história do desenvolvimento cultural devido ao surgimento do uso de instrumentos e da fala humana.

Vigotski observa, em seus estudos, que a *fala egocêntrica* das crianças "deve ser vista como uma forma de transição entre a fala exterior e a interior" (1998a, p. 36). Assim, sua principal característica é acompanhar a ação e se dirigir ao próprio sujeito da ação. Neste estágio, a criança dialoga consigo mesma, planejando e solucionando situações em voz audível.

Em um interessante experimento, os pesquisadores pediram a uma menina de quatro anos e meio que pegasse um doce usando como possíveis instrumentos um banco e uma vara:

> A menina, parada ao lado do banco e com a vara na mão, falou: “Subir no banco”. Mudou a vara de mão e falou para o experimentador: “Aquilo é mesmo um doce”? “Eu posso pegá-lo com aquele outro banco, subo e pego”.
> “Não, não dá. Eu poderia usar a vara”. Pega a vara e esbarra no doce.
> “Ele vai se mexer agora”. Acerta o doce.
> “Moveu-se, eu não consegui pegá-lo com o banco, mas a vara funcionou” (Vigotski, 1998a, p. 34).

A criança fala enquanto age, de modo que, por intermédio desse e de outros experimentos, o autor percebeu que as crianças resolvem suas tarefas práticas com ajuda da fala, assim como do seu corpo. A fala egocêntrica das crianças é uma espécie de monitoramento de seus pensamentos e, embora a forma de pensamento do adulto seja diferente da utilizada pelas crianças, o autor concluiu que compreender e comunicar são processos recíprocos, ou seja, ninguém comunica aquilo que não compreende. Ressalto aqui a importância da comunicação para desenvolver um pensamento, seja escrita ou oral. Nesse sentido, o professor pode promover situações em que o estudante comunique o que compreendeu, proporcionando um ambiente dialógico. Essas atividades podem ser sugeridas no material didático e, na área da matemática, podem privilegiar a comunicação dos conceitos básicos envolvidos em determinado conteúdo.

A menina utiliza a vara e o banco como instrumentos. Um *instrumento* é algo que pode ser utilizado para se fazer alguma coisa. O uso de instrumentos na interação homem-ambiente distingue de maneira essencial o homem de outros animais e permite seu domínio sobre a natureza. De acordo com um postulado marxista, o instrumento é um elemento interposto entre o trabalhador e o objeto de seu trabalho, ampliando as possibilidades de transformação da natureza, ou seja, o instrumento é *mediador* entre o homem e a natureza. Conforme Oliveira (2003, p. 26), “mediação é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação”. Desse modo, a relação deixa de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento.

Vigotski constrói sua teoria sob forte influência marxista e estende essa ideia de mediação a partir dos signos. A palavra *signo* provém do termo latim *signum*. Trata-se de um objeto, fenômeno ou ação que pode representar algo. Vigotski (1998a, p. 70) estabelece que “o signo age como um instrumento da atividade psicológica de maneira análoga ao papel de um instrumento no trabalho”. Apesar da analogia, enfatiza que os instrumentos e os signos orientam o comportamento humano de diferentes maneiras. Enquanto o instrumento é orientado externamente, pois leva a mudanças nos objetos, o signo é orientado internamente, pois constitui um meio da atividade interna para o controle do próprio indivíduo.

Assim, Vigotski preconiza que as sociedades criam signos e instrumentos e modificam seu desenvolvimento social e cultural. Portanto, instrumentos e signos são resultados de construções socio-históricas e, por meio da apropriação ou internalização dessas construções, o indivíduo se desenvolve cognitivamente. Vigotski (1998a, p. 74) define *internalização* como a reconstrução interna de uma operação externa. Ao comentar sobre o processo de internalização, o autor elenca os itens a seguir:

> 1) A internalização é de particular importância para o desenvolvimento dos processos mentais superiores.
> 2) Um processo interpessoal é transformado num processo intrapessoal. Isso se aplica para a atenção voluntária, para a memória lógica e para a formação de conceitos.
> 3) A transformação de um processo interpessoal num processo intrapessoal é o resultado de uma longa série de eventos ocorridos ao longo do desenvolvimento (Vigostki, 1998a, p. 75).

A partir dessas premissas, estabelece que a interação social é fundamental para o desenvolvimento cognitivo do indivíduo. Logo, para internalizar signos, por exemplo, o ser humano tem que compreender significados compartilhados socialmente. Nesse aspecto, a teoria de aprendizagem significativa de Ausubel (1963) articula-se à teoria de Vigotski, pois este afirma que a *aprendizagem significativa* é o caminho pelo qual as pessoas se relacionam com a cultura que as envolve. Pozo (1998, p. 243), ratificando essa articulação, sustenta que a noção vigotskiana de internalização "faz da teoria de Ausubel um complemento instrucional adequado ao marco teórico geral de Vygotsky".

A *interação social* se dá por meio da linguagem e, para Vigotski, a linguagem humana é o sistema simbólico fundamental para qualquer cultura, seja falada, escrita, pictórica ou corporal. O desenvolvimento da linguagem no indivíduo se dá da fala social para a fala egocêntrica e desta para a fala interna. É por meio da linguagem que o ser humano estabelece categorias e se relaciona com o seu meio. Nesse viés, o pesquisador estabelece que a linguagem tem duas funções: como *intercâmbio social* e como *pensamento generalizante*. A primeira função refere-se à comunicação e a segunda função como organizadora das categorias conceituais da experiência humana. Nessa segunda função, o ser humano agrega características de um objeto e cria conceitos a partir da cultura em que está inserido. Esse processo de construção é interacional, ou seja, o desenvolvimento cognitivo não ocorre independente do contexto social, histórico e cultural.

O pesquisador e seus colaboradores estudaram experimentalmente o processo de formação de conceitos em mais de trezentas pessoas – crianças, adolescentes e adultos, utilizando objetos como blocos de madeira de cores, formas, alturas e larguras diferentes. De acordo com Vigotski (1998b, p. 72), "a tarefa de aprendizagem exige identificação indutiva dos atributos essenciais comuns de uma classe de estímulos a partir de uma série extensa de exemplos que variam tanto em relação aos atributos essenciais quanto aos não essenciais". O experimentador, por exemplo, pode apresentar ao indivíduo uma série de quadrados, círculos ou triângulos, cada forma com três cores diferentes e então dizer: "Tenho uma ideia em mente que pode ser uma forma particular ou uma cor particular. Cada um dos cartões à sua frente tem uma dessas formas com sua respectiva cor. Você pode indicar com o dedo qualquer um desses cartões, na ordem que quiser e, então, lhe direi se é ou não um exemplo da ideia que tenho em mente. A partir de minhas respostas, você será eventualmente capaz de determinar que ideia particular eu estou pensando. Sua tarefa é descobrir isto usando o menor número de cartões possível". Se o experimentador tem um "quadrado" em mente, dirá "sim, é o exemplo" para quadrados de cores diferentes e "não, não é o exemplo" para triângulos ou círculos de cores diferentes, até que o indivíduo descubra que o conceito que o experimentador tinha em mente é o "quadrado". Esse método chamado pelo autor de *dupla estimulação* é consistente com sua perspectiva segundo a qual o comportamento humano não é apenas a resposta a um determinado estímulo, mas é constituído com o auxílio de mediações, visto que os objetos são mediadores do processo.

Partindo dessas observações experimentais, o pesquisador determinou que a trajetória até a formação de conceitos passa por três fases básicas. A primeira fase ocorre com a criança em idade pré-escolar, que agrupa objetos em um amontoado para solucionar um problema, que Vigotski (1998b, p. 74) denominou de *agregação desorganizada*. Os objetos são agrupados sem qualquer fundamento, através de uma visão indiferenciada. O autor categorizou essa fase em três estágios distintos. O primeiro é uma manifestação de tentativa e erro da criança. O grupo é criado ao acaso e um outro objeto o substitui quando se observa que a suposição estava equivocada. No estágio seguinte há, segundo o autor, uma organização do campo visual da criança, de modo que a imagem se forma como resultado da proximidade de elementos isolados. E, por fim, no terceiro estágio, a imagem se compõe de elementos tirados de amontoados diferentes. Nesse caso, a criança, ao tentar dar significado à nova palavra, o faz por meio de uma operação em duas etapas.

A segunda fase ocorre por um pensamento que Vigotski (1998b, p. 76) denomina de *pensamento por complexos*, no qual os objetos isolados se associam, na mente da criança, pelas relações que de fato existem entre esses objetos. Em um pensamento por complexos, as ligações entre os objetos são concretas e factuais, não abstratas e lógicas. Vigotski (1998b, p. 76) divide em três tipos: associativo, em que são agrupados por semelhanças, coleções, em que são agrupados por relações na experiência prática e, em cadeia, em que atributos decisivos podem variar ao longo do processo. No complexo em cadeia, há relações entre elementos isolados, não necessariamente ligados a um núcleo comum.

O último estágio da segunda fase é o que o pesquisador chamou de *pseudoconceito*, que é, segundo Moreira (2019, p. 117), "ainda um complexo, porque a generalização formada na mente da criança, embora semelhante a um conceito, não tem ainda todas as suas características como, por exemplo, a abstração". Vigotski (1998b, p. 85) infere que "o pseudoconceito é um elo entre o pensamento por complexos e o pensamento por conceitos". Os pseudoconceitos predominam sobre todos os outros complexos no pensamento da criança em idade pré-escolar. A partir dessa ideia, Vigostski (1998b, p. 84) conclui que "o adulto não pode transmitir à criança o seu modo de pensar. Ele apenas lhe apresenta o significado acabado de uma palavra, ao redor da qual a criança forma um complexo".

A terceira e última fase é a *abstração*, em que os conceitos formados vão além da unificação. Durante esse estágio, o agrupamento de objetos com base na semelhança é substituído pelo agrupamento a partir de um único atributo, de modo que forma, segundo Vigotski (1998b, p. 96), um conceito potencial. Contudo, Vigotski (1998b, p. 98) afirma que a abstração também ocorre na formação dos complexos, porém o traço abstraído é instável. Já nos conceitos potenciais, o traço abstraído não se perde facilmente. A totalidade concreta dos traços foi destruída pela sua abstração. Assim, o pesquisador conclui que somente o domínio da abstração, combinado com o pensamento por complexos em sua forma mais avançada, permite à criança progredir até a formação do que chama de conceitos verdadeiros.

> Um conceito só aparece quando os traços abstraídos são sintetizados novamente, e a síntese abstrata daí resultante torna-se o principal instrumento do pensamento. Como ficou demonstrado em nossos experimentos, o papel decisivo nesse processo é desempenhado pela palavra, deliberadamente empregada para dirigir todos os processos parciais da fase mais avançada da formação de conceitos (Vigostki, 1998b, p. 98).

Compreende-se, então, que a palavra mantém sua função principal, que é a de conduzir para a formação de novos conceitos. A investigação de Vigotski, portanto, evidencia que um conceito se forma por uma operação mental dirigida pelo uso das palavras como o meio para centrar a atenção, abstrair determinados traços e sintetizá-los. Importante ressaltar que as fases descritas não são lineares e que há sobreposição de pensamentos no processo. Os estudos experimentais de Vigostski (1998b, p. 99) e seu grupo mostraram que as formas primitivas de pensamento, embora sigam gradualmente desaparecendo ao longo da vida adolescente e adulta, continuam a operar por muito tempo, sendo predominantes em muitas áreas do pensamento.

Vigotski e seus colaboradores estudaram, além dos *conceitos cotidianos* (ou *espontâneos*), a formação dos *conceitos científicos* (ou *não espontâneos*) para crianças em idade escolar, adolescentes e adultos, submetendo-os a um estudo comparativo. A partir dos estudos de Piaget, que estabelece que conceitos espontâneos provêm de uma deliberação não consciente, Vigotski (1998b, p. 116) infere que um conceito só pode ser submetido à consciência e ao controle deliberado se fizer parte de um sistema. Dessa forma, deduz que, se consciência significa generalização, então *generalização* significa a formação de um conceito supraordenado. Assim, o conceito dado é inserido em um sistema de relações de generalidade, de modo que, nos conceitos científicos adquiridos na escola, a relação com um objeto é mediada por algum outro conceito.

Sob orientação de Vigotski, Zh. I. Shif (1998b) conduziu investigações sobre o desenvolvimento de conceitos científicos e cotidianos durante a idade escolar na área de ciências sociais. A análise dos dados evidenciou que “quando o currículo fornece o material necessário, o desenvolvimento dos conceitos científicos ultrapassa o desenvolvimento dos conceitos cotidianos” (Vigotski, 1998b, p. 132). Dessa forma, o pesquisador conclui que a criança provavelmente acha difícil solucionar problemas que envolvem situações da vida cotidiana, porque não tem consciência de seus conceitos. Já para os conceitos científicos, ela foi mais capaz, pois “o professor explicou, deu informações, questionou, corrigiu o aluno e o fez explicar” (Vigotski, 1998b, p. 133). Ou seja, o processo de mediação, mediante uma proposta pedagógica inserida em um ambiente dialógico, no qual o estudante expressa o conceito por meio de palavras, potencializa a aprendizagem. Nesse sentido, se o material didático utiliza de recursos como a metalinguagem ou de dinâmicas de interação verbal aluno/professor ou aluno/aluno, pode estabelecer essa mediação buscando uma maior internalização do conceito.

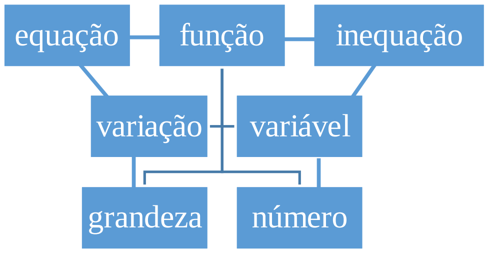
Ademais, as investigações de Vigotski e seus colaboradores também apontaram que um domínio no nível mais elevado na esfera dos conceitos científicos elevou o nível dos conceitos cotidianos. “Uma vez que a criança já atingiu a consciência e o controle de um tipo de conceito, todos os conceitos anteriormente formados são reconstruídos da mesma forma” (Vigotski, 1998b, p. 134). O ponto fundamental da hipótese do autor é que os conceitos cotidianos e científicos se desenvolvem em direções contrárias, ou seja, “o desenvolvimento dos conceitos espontâneos é ascendente, enquanto o desenvolvimento dos seus conceitos científicos é descendente" (Vigotski, 1998b, p. 135). Em outras palavras, a origem do conceito espontâneo se dá pelo confronto com uma situação concreta ao passo que o conceito científico precisa ser mediado em relação ao seu objeto.

A partir dos dados, Vigotski (1998b, p. 138) aponta que "o estudo dos conceitos mostra que o grau de generalidade ou de abstração é a variável psicológica básica segundo a qual podem ser ordenados". Segue afirmando que, se cada conceito é uma generalização, então a relação entre conceitos é uma relação de generalidade. Cada fase ou estrutura de generalização tem um nível específico de generalidade. Exemplifica que, "no pensamento por complexos, a relação entre flor e rosa não é uma relação de supraordenação; o conceito mais amplo e o mais restrito coexistem no mesmo plano" (1998b, p. 139).

Na área da matemática, o conceito de relação encontra-se supraordenado em relação ao conceito de função, visto que toda função é uma relação, assim como toda rosa é uma flor. Entendo que essa descrição linear de Vigotski possa estabelecer relações entre conceitos cotidianos, porém me parece insuficiente para relacionar conceitos científicos. Esses estão contidos em redes às quais um conceito é pré-requisito para que se compreenda outro. Minha experiência como professor evidenciou que, para que o estudante compreenda o conceito de variação e de variável, precisa, antes, compreender que grandezas são medidas e que suas medidas podem ser associadas a números. Para compreender o conceito de função, necessita, antes, compreender que conjuntos ou grandezas estão em correspondência por meio de relações definidas através de expressões algébricas, ou seja, o estudante deve compreender o conceito de variável que pode ser expresso por um número associado a uma grandeza, estabelecendo uma relação de conceitos.

Os conceitos matemáticos são, em linhas gerais, constituídos por outros, de forma articulada, formando uma rede de conceitos. Dessa maneira, frequentemente, a compreensão de um é pré-requisito para a compreensão de outro. E é, na maioria das vezes, nesse processo verticalizado e supraordenado de compreensões de conceitos que reside a dificuldade de aprendizagem, conforme exemplo destacado na figura a seguir.

Figura 2 – Exemplo de rede de conceitos matemáticos



Fonte: elaborada pelo autor (2022).

Atuando como professor, ao longo de 25 anos, tenho percebido que o discente tem dificuldades em compreender os conteúdos de forma conceitual, no sentido de entender o significado do conteúdo como objeto matemático. Por exemplo, no caso de uma equação algébrica, muitas vezes ele consegue resolvê-la manipulando símbolos mecanicamente, porém não consegue interpretar o resultado encontrado e tampouco usar uma equação para representar uma situação contextualizada. Ou seja, o estudante ainda não desenvolveu todos os estágios de compreensão do conceito.

Vigotski estudou conceitos da área de ciências sociais e suas conclusões são genéricas e, segundo ele, podem ser aplicadas em qualquer área do conhecimento, conforme destaca e exemplifica para a área da matemática:

> A transformação dos pré-conceitos (é o que geralmente são os conceitos aritméticos da criança em idade escolar) em conceitos verdadeiros, tais como os conceitos algébricos dos adolescentes, é alcançada por meio de generalizações do nível anterior. No estágio anterior, certos aspectos dos objetos haviam sido abstraídos e generalizados em ideias de números. Os conceitos algébricos representam abstrações e generalizações de certos aspectos dos números, e não dos objetos, indicando assim uma nova tendência – um plano de pensamento novo e mais elevado (Vigotski, 1998b, p. 142).

A partir da base de dados em sua investigação, o autor concluiu que a diferença psicológica principal que distingue os conceitos espontâneos dos conceitos científicos é a ausência de um sistema para os primeiros. Assim, à medida que o indivíduo vai desenvolvendo conceitos científicos na escola, transforma gradualmente sua estrutura de conceitos espontâneos e passa a organizar o sistema. No caso da matemática, trata-se de um sistema denso, profundamente interligado em uma teia de conceitos e ideias que demandam a compreensão de outros conceitos e ideias. E esse atributo do conhecimento matemático, juntamente com o avançado grau de abstração dos conceitos matemáticos, estabelece maior dificuldade em sua aprendizagem.

Em uma de suas investigações, Vigotski (1998b, p. 100) anunciou que "se o conceito necessitava ser formulado em um plano abstrato, sem referência a situações concretas, o adolescente, em seus estudos, frequentemente descia a um nível mais primitivo de pensamento". O autor segue explicando que o adolescente "utilizava enumerações de diferentes objetos para os quais o conceito se aplicava". Ou seja, o estudante não havia estabelecido o grau de generalização suficiente para explicar o conceito. Minha experiência como professor de matemática de Ensino Médio tem evidenciado de forma empírica essa observação do autor: quando o nível de abstração é mais elevado em uma situação-problema, por exemplo, os estudantes têm maiores dificuldades em sua resolução. Ao contrário de um conceito associado ao mundo concreto, um conceito matemático, quando não internalizado, tem sua aplicação dificultada. Portanto, se o livro didático ou o professor realiza a mediação, apresentando a definição, sem estabelecer propostas pedagógicas para que o estudante construa e internalize esse conceito a partir de outros conceitos, o grau de abstração necessário à sua compreensão fica comprometido.

Além da retomada de conceitos que são pré-requisitos de outros conceitos, deve-se considerar retomar conceitos que são importantes em vários assuntos ou eixos da matemática. O professor Nilson José Machado (2014, p. 53) preconiza que "a estratégia básica para mobilizar os conteúdos é a identificação e a exploração das ideias fundamentais de cada tema". Segue seu raciocínio afirmando que "a lista de ideias ou conceitos fundamentais não é extensa e o fato de serem fundamentais conduz a uma reiteração delas no estudo de uma diversidade de assuntos" (2014, p. 55). Cita como exemplo o conceito de *proporcionalidade*. Esse conceito está associado ao estudo das frações, nas razões e proporções, na semelhança de figuras geométricas, nas relações entre grandezas e no estudo de algumas funções. Machado (2014, p. 56) afirma que "as ideias ou conceitos fundamentais podem ser explorados nos diversos conteúdos apresentados, tendo em vista o desenvolvimento da capacidade de expressão, de compreensão e de argumentação". Ou seja, a internalização dos conceitos fundamentais também está associada a uma reiteração do conceito em diferentes áreas.

Vigotski preconiza que a interação que provoca a aprendizagem deve ocorrer dentro do que chama de *zona de desenvolvimento proximal*, que define como:

> a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (Vigostki, 1998a, p. 112).

A partir dessa ideia, Vigotski (1998a, p. 117) indica que o "bom aprendizado é somente aquele que se adianta ao desenvolvimento". Sob esse ponto de vista, o autor diferencia aprendizado de desenvolvimento, de modo que o primeiro é necessário ao segundo. Mediante essa hipótese, os processos de aprendizado e de desenvolvimento são relacionados por meio da conversão daquele neste. Ou seja, o processo de desenvolvimento progride de forma mais lenta e atrás do processo de aprendizado. Vigotski (1998a, p. 118) estabelece um exemplo na matemática fundamental na qual "o domínio inicial das quatro operações aritméticas fornece a base para o desenvolvimento subsequente de vários processos internos altamente complexos".

A concepção do autor corrobora uma crença reforçada por minha experiência como professor ao longo dos anos: o estudante precisa, antes, compreender os conceitos básicos de um determinado campo da matemática, para que, posteriormente, possa ser capaz de resolver situações-problema relacionadas ao assunto.

Por meio dessas considerações, explorei algumas ideias da teoria de Vigotski, como o pensamento e a linguagem, a interação, a mediação e, especialmente, a formação de conceitos. Em relação ao último aspecto, a teoria determina que, quanto maior o grau de abstração ou de generalidade, mais pré-requisitos demanda a aprendizagem do conceito, visto que estão relacionados em uma teia complexa. Dessa forma, a aprendizagem demanda uma retomada desses conceitos encadeados.

A partir dos estudos de ideias da teoria vigotskiana, depreendo que a construção e a internalização de um conceito científico são desencadeadas pelas práticas pedagógicas: tarefas, intervenções e outras atividades relacionadas ao processo de aprendizagem. Nessa perspectiva, o livro didático tem potencial mediador se, entre outras propostas, apresentar:

1) Enunciados contendo definições, exercícios e situações-problema que retomem a compreensão dos conceitos, bem como contextualizações e aplicações relacionadas aos conceitos.
2) Atividades associadas aos conceitos que valorizem a interação social e a comunicação.
3) Conceitos matemáticos a partir de uma cadeia estruturada de conceitos, visto que a compreensão de um é pré-requisito para a compreensão de outro.
4) Sondagens de nível de desenvolvimento de cada estudante e atividades com diferentes níveis de dificuldade.

Assim, entendo que teoria de Vigotski oferece elementos conceituais para analisar o potencial do livro didático como instrumento mediador para a construção de conceitos matemáticos. A construção e a internalização de novos conceitos estão relacionadas à compreensão de conceitos que são pré-requisitos, formando uma rede de conceitos. O potencial está associado à atuação do professor, visto que a mediação do professor na forma de instigações, problematizações, dentre outras estratégias, auxilia no processo de construção e de internalização dos conceitos.

Para a realização da pesquisa, selecionei um assunto que julgo possuir uma cadeia considerável de objetos matemáticos: as funções. Esse assunto normalmente é abordado nas turmas de primeiro ano do Ensino Médio. Além dos capítulos iniciais de funções, que tratam de sua definição e de outros objetos matemáticos envolvidos como conjuntos, grandezas, variáveis, domínio e imagem, entre outros, incluí os capítulos de função afim e de função quadrática para uma análise mais ampla. Assim, na subseção a seguir, discorro a respeito das definições desses objetos a partir de considerações de autores da área da matemática.

2.4 DEFINIÇÕES RELACIONADAS À FUNÇÃO AFIM E À FUNÇÃO QUADRÁTICA

Fui à floresta,
Em si volvido.
Na distração
Tive sentido.[6]
(primeiro verso do poema Achado de Goethe)

A *matemática* pode ser entendida como um sistema teórico logicamente formalizado. A axiomatização, a formalização e a dedução são elementos essenciais do fazer matemático, fazer esse desenvolvido por humanos. Nessa perspectiva, a matemática é uma construção histórica e culturalmente localizada. Ponte *et al.* (1997) argumenta que a matemática deve ser entendida como uma atividade humana, um fenômeno social, parte da cultura humana historicamente construída e inteligível apenas em um contexto social.

Nesse sentido, objetos matemáticos, que são entes abstratos criados para representar os conceitos matemáticos, diferem de objetos tratados pelas ciências da natureza, pois são imateriais e não demandam verificações empíricas. Hersh (1986) sugere que:

> (1) Os objetos matemáticos são inventados ou criados pelos seres humanos;
> (2) São criados, não arbitrariamente, mas provém de atividade desenvolvida a partir de outros objetos matemáticos já existentes e de necessidades da ciência e da vida diária;
> (3) Uma vez criados, os objetos têm propriedades bem determinadas, que poderemos ter grande dificuldade em descobrir, mas que as possuem, independentemente do nosso conhecimento acerca delas.

[6] Tradução de Wagner Schadeck.

Portanto, as teorias matemáticas são produto de um sistema cultural em evolução e, por meio da partilha e da discussão crítica de ideias relativas aos objetos matemáticos, torna-se possível desenvolver novos saberes matemáticos.

Em sua descrição da primeira competência específica para o Ensino Fundamental de matemática, a BNCC vai ao encontro dessa linha de pensamento:

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BNCC, p. 267).

Nesse contexto, a concepção do que se sustenta sobre a matemática influencia profundamente o que se considera ser desejável relativamente ao seu ensino e aprendizagem. Ponte *et al.* (1997, p. 28) salienta que "as controvérsias acerca do ensino de matemática dificilmente poderão ser resolvidas sem se refletir sobre a natureza da matemática e dos processos de produção do saber matemático". Dessa forma, compreender que a matemática é uma ciência cujas bases se sustentam em definições, axiomas e teoremas significa estabelecer um fazer pedagógico que busque essa congruência de significados.

Vigotski (1998, p. 140) afirma que "em uma habilidade técnica, como o tocar piano, o aluno desenvolve a destreza de seus dedos e aprende quais teclas deve tocar ao mesmo tempo que lê a partitura; no entanto, ele não está, de forma alguma, envolvido na essência da própria música". Trata-se de uma interessante analogia em relação à aprendizagem de matemática. O ensino de matemática como simples transmissão de técnicas desprovidas de significado e de repetição mecanicista de algoritmos não determina uma aprendizagem significativa e efetiva, pois não está relacionado com sua essência. E sua essência está relacionada às suas ideias ou aos seus conceitos fundamentais, conforme destaca o professor Nilson José Machado (2014, p. 54): "Em cada conteúdo devem ser identificadas as ideias fundamentais a ser exploradas. Tais ideias constituem a razão do estudo das diversas disciplinas".

Considerando-se que o material didático pode ser auxiliar nesse processo de construção de conceitos, é importante que esse material apresente atividades que permitam que o professor verifique como o estudante construiu e internalizou os conceitos matemáticos. Assim, o processo de ensino e de aprendizagem necessita buscar um fazer pedagógico que valorize e busque sua essência enquanto ciência axiomática e conceitual.

Para esta pesquisa, realizei uma seleção de algumas ideias fundamentais que normalmente são estudadas no primeiro ano do Ensino Médio e estão presentes nos livros didáticos. O objeto matemático fundamental é o de *função*, que está associado ao de *relação* e à ideia de *conjunto*. Inseridos nesse contexto estão outras definições desses objetos como a de *domínio*, de *imagem* e de c*ontradomínio*, bem como a noção de *variável* e de *grandeza*. Além dessa parte inicial de funções, selecionei a *função afim* e a *função quadrática* para fechar o estudo.

Para apresentar essas definições, tomei como referência o livro *Conceitos Fundamentais da Matemática*, de Bento de Jesus Caraça, da Editora Livraria Sá da Costa, cuja primeira edição foi publicada no ano de 1941. O autor expõe as definições em rede, estabelecendo conexões entre os objetos matemáticos e contextualizando suas aplicações no meio científico. A ideia de função está no Capítulo I da 2ª Parte: Estudo Matemático das Leis Naturais. No início desse capitulo, Caraça (1984, p. 108) destaca que o objetivo da Ciência é "o de construir quadros racionais de interpretação e previsão" e que "a legitimidade de tais quadros dura enquanto durar o seu acordo com os resultados da observação e da experimentação". Segue seu raciocínio enfatizando que a realidade que o ser humano se esforça por compreender apresenta duas características essenciais: a *interdependência*, pois as coisas do mundo físico podem estar relacionadas em maior ou menor grau e a *fluência*, pois as coisas do mundo físico passam por transformações.

Com relação à interdependência, Caraça explica que a ciência estabeleceu um método para relacionar dois objetos de estudo, que é realizar um recorte da totalidade, o qual o autor dá o nome de *isolado*. A partir da noção de isolado, o autor estabelece a definição de *qualidade* (1984, p. 113): "Sejam A, B, ... L componentes de um isolado; ao conjunto de todas as relações $A \rightarrow B$, ... $A \rightarrow L$, dá-se o nome de qualidades de A em relação a B, ... L". Nesta relação, a notação $A \rightarrow B$ indica o sentido de A para B, ou seja, tem A como antecedente e B como consequente.

Na sequência, Caraça (1984, p. 116) preconiza que a "*quantidade* é um atributo da qualidade e, como tal, só em relação a ela pode ser considerada". Quanto à variação da quantidade, o autor lembra que o fato da quantidade poder ou não ser medida tem apenas significado histórico, visto que, em determinado avanço das ciências da natureza, pode-se aprender a medir o que até então era impossível.

A partir das definições destacadas, Caraça destaca que há certos fenômenos que apresentam regularidade, isto é, comportamentos idênticos que permitem sua repetição e previsão, desde que se crie as condições iniciais convenientes. Nesse sentido, o trabalho de investigação é a procura pela regularidade de fenômenos naturais. Assim, o autor (1984, p. 120) define lei natural como "a toda a regularidade de evolução de um isolado". Segue explicando que, conforme a natureza do isolado e de sua evolução, pode haver dois tipos fundamentais de lei: a lei qualitativa, que diz respeito à variação de qualidade, e a lei quantitativa, que está relacionada à variação de quantidade. O autor enfatiza que esses dois tipos não podem ser rigidamente separados, pois há uma ligação íntima entre qualidade e quantidade, logo a utilidade da distinção está na predominância de um ou outro aspecto.

O autor estabelece, na sequência, um paralelo entre o nascimento dos números naturais, por necessidade de contagem[7], e o nascimento da ideia de função, como necessidade para a descrição de leis quantitativas, que se revela importante a partir dos estudos de Johannes Kepler e, especialmente, de Newton, em sua obra Princípios Matemáticos da Filosofia Natural. Newton se utiliza do termo *fluxions* ou *fluentes* para as funções, denotando fluência, transformação, em consonância com seus estudos do movimento de corpos.

O termo *função*, segundo Boyer (1996, p. 279), foi cunhado pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibnitz, no final do século XVII e a definição geral de função, desde Leibnitz, está associada a uma correspondência entre dois conjuntos ou entre duas grandezas. Roque (2012, p. 369) afirma que um componente fundamental para o desenvolvimento do conceito de função foi o conceito de *variação*[8], visto que uma função é expressa em termos das variáveis. A partir desse conceito, foi necessário criar representações simbólicas para conjuntos genéricos e representações para qualquer de seus elementos, que foram definidas como *variáveis*. Podemos então chamar de A um conjunto qualquer e de x sua variável, ou seja, x é um símbolo que representa qualquer dos elementos do conjunto A. Caraça (1984, p. 128) salienta que "uma variável é o que for determinado pelo conjunto numérico que ela representa – a sua substância ou o seu *domínio*".

A moderna notação f(x), para expressar uma função de x, foi introduzida pelo matemático suíço Leonhard Euler, quase cem anos depois do termo cunhado por Leibntiz (Boyer, p. 305). Para relacionar dois conjuntos, é preciso estabelecer um símbolo para a variável antecedente, que chamaremos de x e para a variável consequente, que chamaremos de y e que representa qualquer dos elementos de um conjunto que chamaremos de B. Desse modo, Caraça (1984, p. 129) define: "sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números, diz-se que y é função de x e escreve-se y = f(x). Se entre as duas variáveis existe uma

---

[7] Não há consenso de que o nascimento dos números naturais se deu por necessidade de contagem. Há estudos que sugerem que os números naturais surgiram em conexão com rituais religiosos primitivos e que o aspecto ordinal precedeu o conceito quantitativo de número natural (Boyer, 1996, p. 4).

[8] Para maiores informações sobre a relação histórica do desenvolvimento do conceito de função relacionado ao conceito de variação, consulte o livro História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas de Tatiana Roque.

correspondência unívoca no sentido x $\rightarrow$ y, a x chama-se variável independente e a y variável dependente". Essa correspondência unívoca entre variáveis pode ser expressa também pelo conjunto às quais pertencem. Assim, podemos representar uma função f, que estabelece uma relação unívoca entre dois conjuntos A e B, simbolicamente como f: A $\rightarrow$ B. Assim, chamamos de *domínio* da função f o conjunto A e de *contradomínio* o conjunto B.

Partindo de uma correspondência específica entre dois conjuntos, se as variáveis puderem ser quantificadas ou medidas, é possível estabelecer uma relação analítica entre elas. Caraça (1984, p. 126) traz o exemplo da relação entre os tempos e espaços na queda de um corpo no vácuo. Se as medições forem realizadas de segundo em segundo, teremos o quadro abaixo:

Quadro 2 – Relação entre tempos e espaços na queda de um corpo no vácuo

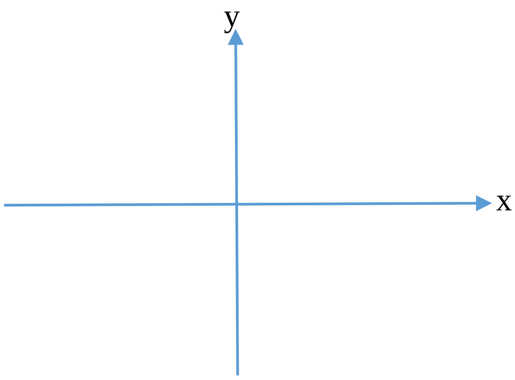
Tempos (em segundos)	0	1	2	3	4
Espaços percorridos (em metros)	0	4,9	19,6	44,1	78,4

Fonte: Conceitos Fundamentais da Matemática (1984).

Observa-se, no quadro, que o espaço percorrido pelo corpo depende do tempo que se passa. Cada valor do tempo está associado a um valor do espaço percorrido. Chamando-se de x a variável tempo e de y a variável espaço, verifica-se, no quadro, que para x = 0 $\rightarrow$ y = 0, para x = 1 $\rightarrow$ y = 4,9, para x = 2 $\rightarrow$ y = 19,6 e assim sucessivamente. A partir desses valores, pode-se estabelecer uma lei que resume e descreve quantitativamente a relação entre os tempos (x) e os espaços (y), dada por: $y = 4{,}9 \cdot x^2$, que é a expressão analítica ou algébrica da função que pode ser expressa por $f(x) = 4{,}9 \cdot x^2$. Essa expressão permite concluir que o os espaços percorridos no vácuo são proporcionais aos quadrados dos tempos.

Além da expressão analítica, uma função pode ser apresentada na forma gráfica, a partir de um sistema de referência/localização. O sistema mais utilizado é o plano cartesiano, composto por duas retas perpendiculares. Embora esse sistema seja atribuído ao filósofo René Descartes, o uso de sistema de coordenadas com retas perpendiculares, segundo Boyer (1996, p. 181), data da matemática grega de 300 a 200 a.C., por Apolônio e outros matemáticos, embora esses não utilizassem para quantidades variáveis. Nesse sistema, podemos tomar cada um dos eixos para cada uma das variáveis, estabelecendo um deles para a variável dependente (y) e o outro para a independente (x), conforme a figura a seguir:

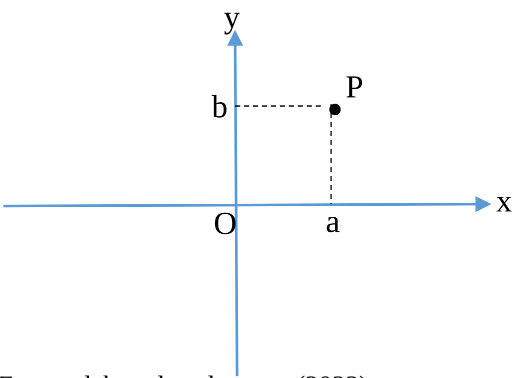
Figura 3 – Plano Cartesiano



Fonte: elaborada pelo autor (2023).

Para cada ponto do plano acima corresponde um par de números reais, que chamamos de coordenadas cartesianas. Estabeleceu-se que o ponto de intersecção das retas seria a origem O do plano com coordenadas nulas. Sendo a e b dois números reais, a pertencente ao domínio da variável x e b pertencente ao contradomínio da variável y, um ponto P obtido a partir da intersecção das perpendiculares aos eixos terá coordenadas (a,b) que são denominadas, respectivamente de abscissa e de ordenada.

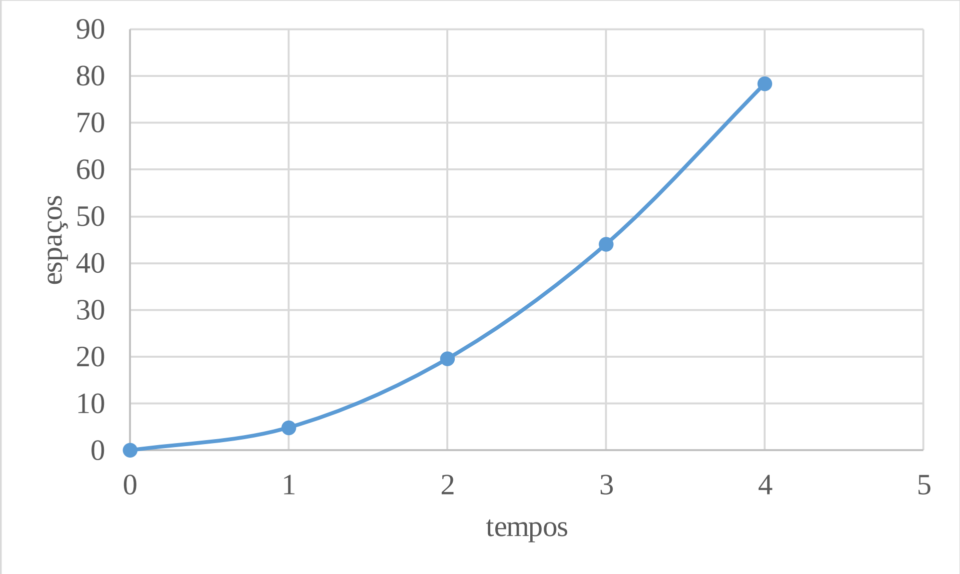
Figura 4 – Ponto P de abscissa a e ordenada b no plano cartesiano



Fonte: elaborada pelo autor (2023).

Dessa forma, "para cada par de valores das duas variáveis, obtemos no plano um conjunto de pontos" (Caraça, p. 125). A esse conjunto de pontos, chamamos de imagem geométrica ou representação geométrica da função. Assim, para o exemplo mencionado da relação de espaços e tempos na queda de um corpo no vácuo, a partir dos valores do Quadro 2, teremos a seguinte curva, que é a representação geométrica da função no plano cartesiano, onde os espaços correspondem à variável dependente (y) e os tempos à variável dependente (x).

Figura 5 – Representação geométrica dos espaços em função do tempo no experimento de queda de um corpo no vácuo



Fonte: elaborada pelo autor (2023).

Assim, o fenômeno da queda de um corpo no vácuo é descrito algebricamente pela expressão $y = 4{,}9 \cdot x^2$ e geometricamente pela curva da figura acima, chamada ramo de parábola e a função que modela esse fenômeno é a função quadrática, um tipo específico de função polinomial. As *funções polinomiais* ou *polinômios* são funções cuja forma algébrica é dada por $P(x) = a_o \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n$, onde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais chamados coeficientes, n é um número natural, denominado grau do polinômio.

Quando o valor do maior expoente (n) é menor do que 2, tem-se uma *função afim*, cuja forma algébrica é P(x) = ax + b, na qual a e b são os coeficientes reais, sendo a o coeficiente de x e b o coeficiente de x^0, chamado de termo independente de x. A função afim pode ser uma *função constante* se a = 0, ou uma *função polinomial do primeiro grau*, se a ≠ 0. Uma função de primeiro grau que possui coeficiente b nulo é chamada de *função linear*. Se a função afim possuir coeficiente angular não nulo, terá uma única raiz.

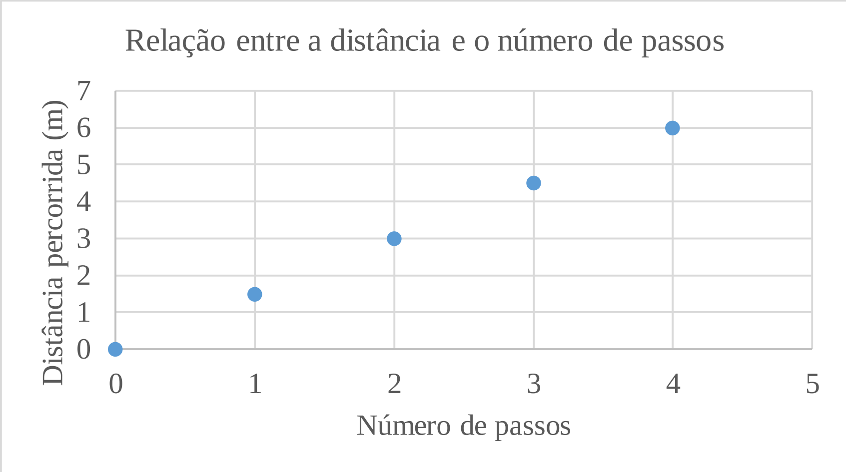
A forma geométrica da função afim é a de uma *reta*, cujo traçado depende dos parâmetros a e b, denominados, respectivamente, de *coeficiente angular* e de *coeficiente linear*. Se o coeficiente angular for positivo, a reta será ascendente e, se for negativo, será descendente. Se o coeficiente angular for nulo, a reta será horizontal, paralela ao eixo das abscissas.

Quando o valor do maior expoente (n) é igual a 2, tem-se uma *função polinomial do segundo grau* ou *função quadrática*, cuja forma algébrica é $P(x) = ax^2 + bx + c$, na qual a, b e c são os coeficientes, sendo a ≠ 0 o coeficiente de x^2, b o coeficiente de x e c o coeficiente de x^0, chamado de *termo independente* de x. Essa função é modelada geometricamente por uma curva chamada *parábola* que tem sua localização determinada por esses coeficientes. A parábola é uma curva simétrica, cujo eixo de simetria passa por seu vértice e cuja *concavidade* depende do coeficiente a. Se o coeficiente a for um número real positivo, a parábola terá concavidade voltada para cima. Se o coeficiente a for um número real negativo, a parábola terá sua concavidade voltada para baixo. O *vértice* da função quadrática é o *ponto de mínimo*, quando o coeficiente a é positivo, e o *ponto de máximo* quando o coeficiente a é negativo. Essa função possui duas *raízes*, que são os valores da variável independente x que tornam a função nula. A natureza das raízes depende do *discriminante*, cujo valor é dado pela expressão $b^2 - 4ac$ (o quadrado do coeficiente de x menos quatro vezes o coeficiente de x^2 vezes o termo independente). O discriminante é um número real que, se positivo, determina duas raízes reais e distintas, se nulo, duas raízes reais e iguais e, se negativo, duas raízes não reais. As raízes podem ser calculadas pela fórmula resolutiva $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, conhecida aqui no Brasil como fórmula de Bhaskara[9].

Para retratar exemplos de funções e destacar a atemporalidade da matemática, descrevo, na sequência, uma criativa passagem da obra *A Magia dos Números*, escrita pelo matemático Paul Karlson na década de quarenta do século passado. Karlson busca sentido matemático na ação descrita no famoso poema Achado, de Goethe, destacado na epígrafe desse item: “O viandante na floresta põe um pé diante do outro – e a cada passada, o caminho por ele vencido se acresce de nova porção. O trajeto guarda com o número de passos uma relação fixa e determinada” (Karlson, 1961, p. 378). Nessa relação há uma *interdependência* entre duas *grandezas*: o número de passos e a distância percorrida pelo viandante. A distância é uma função do número de passos. Se considerarmos que o comprimento de um passo é de 0,75 m e que cada passo mantém esse comprimento, a distância percorrida (d), em metros, em função do número de passos (n) será dada por d = 0,75n. A variável independente n pode assumir, portanto, nesse modelo, valores naturais. Isto é, o seu *domínio* contém apenas números naturais. A relação entre o número de passos e a distância, em metros, pode ser representada graficamente pela figura a seguir:

[9] A fórmula resolutiva da equação do segundo grau adquiriu o aspecto que tem hoje, somente quando se generalizou o uso de letras para representar os coeficientes de uma equação, a partir dos trabalhos de Viète e Girard (Boyer, 1996, p. 209).

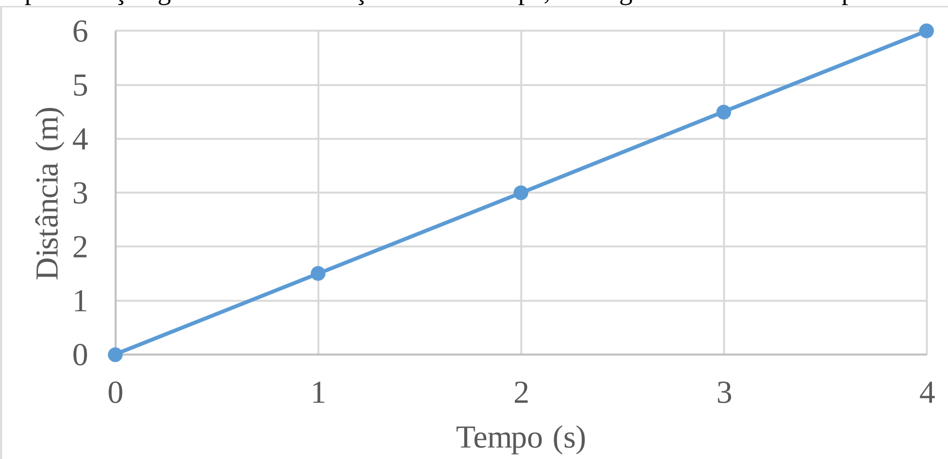
Figura 6 – Representação geométrica da relação entre o número de passos e a distância percorrida em metros



Fonte: elaborada pelo autor (2023).

Na sequência, Karlson imagina outra relação de dependência, entre a distância percorrida pelo viandante e o tempo gasto. Se estabelecermos que a cada segundo o pensativo excursionista percorre um metro e meio, então a distância d, em metros, em função do tempo, em segundos, será dada pela representação algébrica d = 1,5t, visto que, em um segundo, percorrerá 1,5 metros, em dois segundos, 3 metros e assim sucessivamente, mantendo essa proporção. Nesse caso, a relação entre o tempo, em segundos e a distância, em metros, pode ser representada graficamente pela figura a seguir:

Figura 7 – Representação geométrica da relação entre o tempo, em segundos e a distância percorrida em metros

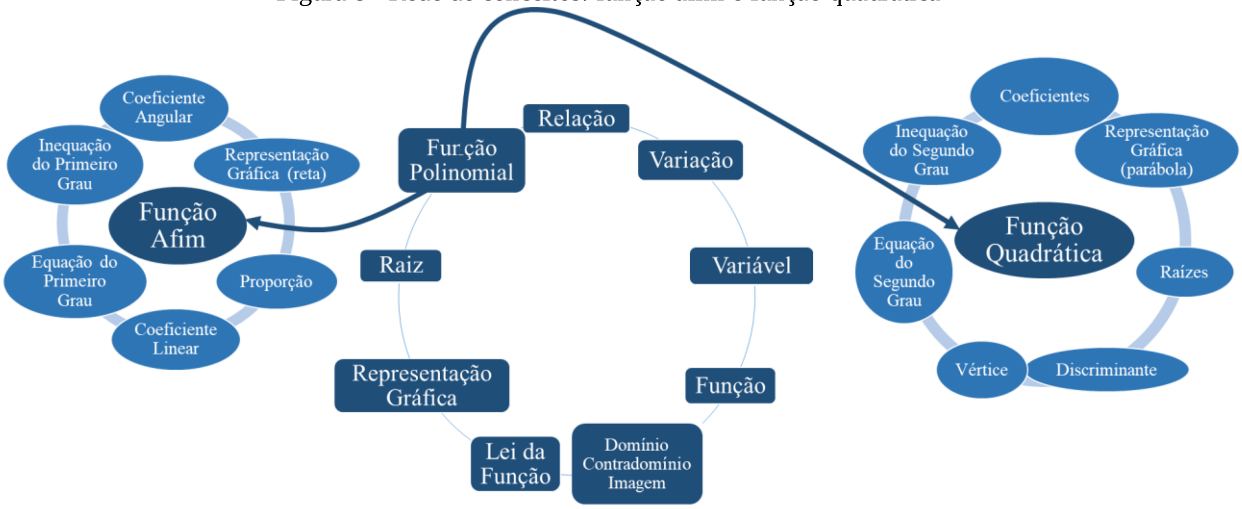


Fonte: elaborada pelo autor (2023).

Observa-se, nessa relação, que o tempo t pode ser dado por qualquer número real, ou seja, o *domínio* de t é o conjunto dos números reais positivos e, assim, o poema de Goethe se concretiza na forma de uma semi-reta.

Todas as definições matemáticas descritas foram analisadas nas obras selecionadas. A figura a seguir é uma representação de várias dessas definições, inseridas em uma rede de conceitos

Figura 8 – Rede de conceitos: função afim e função quadrática



Fonte: elaborada pelo autor (2024).

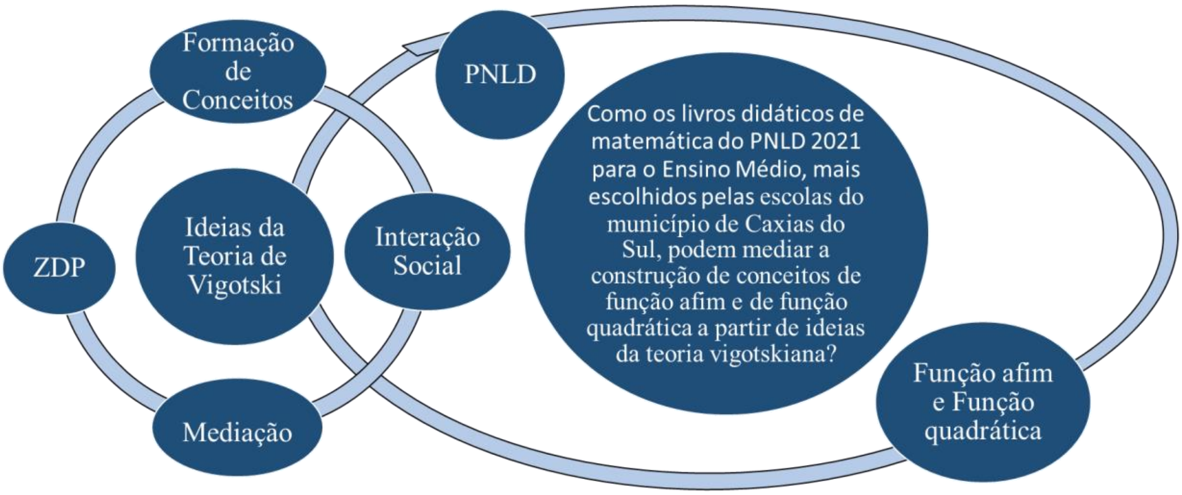
Importante destacar que utilizo o termo *definição* como a representação escrita ou simbólica do conceito. Foram investigadas, nos materiais didáticos selecionados, as apresentações das definições, suas aplicações, as atividades propostas e os apontamentos nos manuais do professor. Utilizei como norteadores de análise ideias da teoria vigotskiana: a formação de conceitos, a mediação, a interação social e zona de desenvolvimento proximal.

Em suma, na construção dos referenciais teóricos deste estudo, comecei apresentando algumas propostas para a educação no século XXI, tendo como referência o *Relatório da Comissão Internacional sobre os Futuros da Educação*, organizado pela UNESCO. O Relatório, em sua essência, estabelece um novo contrato social para a educação que deve ser construído de forma coletiva. Nesse sentido, as práticas pedagógicas podem propiciar que os estudantes atuem em interação e cooperação. Essas práticas estão alinhadas com as ideias da teoria sociointeracionista de Vigotski: a formação de conceitos, a interação social, a zona de desenvolvimento proximal e a mediação, discorridas na terceira seção deste capítulo.

Outro aspecto destacado no relatório da Comissão Internacional se refere ao financiamento público para a educação e as políticas públicas voltadas às necessidades dessa área. No Brasil, entre as políticas voltadas à área da educação, há o Programa Nacional do Livro Didático, que descrevi na segunda seção desse capítulo.

Por fim, esta pesquisa tem como norteadores ideias da teoria vigotskiana como: a formação de conceitos, a interação social e a zona de desenvolvimento proximal. Essas ideias vigotskianas foram usadas como bússolas na exploração e análise do potencial de mediação do livro didático na construção de conceitos matemáticos relacionados às funções afim e quadrática, descritos na quarta seção deste capítulo. A figura abaixo representa a relação entre os norteadores teóricos e a pergunta de pesquisa:

Figura 9 – Representação da relação dos referenciais teóricos com a pergunta de pesquisa



Fonte: elaborada pelo autor (2023).

3 MÉTODO

O objeto de investigação desta pesquisa é o livro didático de matemática, e o olhar está voltado ao seu potencial de desencadear processos relacionados à construção de conceitos matemáticos relacionados à função afim e à função quadrática. O estudo foi desenvolvido segundo uma abordagem analítico-qualitativa, cujo *corpus* constituiu-se de livros didáticos de matemática para o Ensino Médio.

De acordo com Denzin e Lincoln (2006), a palavra *qualitativa* enfatiza as qualidades das entidades, os processos e os significados que não são mensurados ou explorados em termos de quantidades, volumes, frequências ou intensidades. Assim, a investigação qualitativa ressalta a descrição interpretativa, a partir da bagagem teórica do investigador. Nessa perspectiva, Ludke e Andre (1986) afirmam que as análises qualitativas se caracterizam por serem essencialmente descritivas, exigindo um posicionamento por parte do pesquisador. A partir dessa premissa, infere-se que a "pesquisa qualitativa não permite que seus resultados sejam generalizados" (Ludke; André, 1986).

Segundo Godoy (1995, p. 21), devido ao fato de a pesquisa qualitativa possuir um caráter mais flexível, cabe, nesse tipo de abordagem, a investigação de documentos técnicos de modo a elaborar uma interpretação possível sobre eles. A autora defende que:

> [...] a pesquisa documental representa uma forma que pode ser e vestir de um caráter inovador, trazendo contribuições importantes no estudo de alguns temas. Além disso, os documentos normalmente são considerados importantes fontes de dados para outros tipos de estudos qualitativos, merecendo, portanto, atenção especial (Godoy, 1995, p. 21).

Para a autora, a palavra *documento*, neste caso, deve ser entendida de uma forma ampla, incluindo os materiais escritos como, por exemplo, jornais, revistas, diários, obras literárias, científicas e técnicas, cartas, memorandos e relatórios. O exame de materiais de natureza diversa, que ainda não receberam um tratamento analítico, ou que podem ser reexaminados, buscando-se novas e/ ou interpretações complementares, constitui o que a autora denomina pesquisa documental. Os documentos analisados nessa pesquisa são livros didáticos de matemática para o Ensino Médio.

Bogdan e Biklen (1994, p. 47-50) definem cinco características da investigação qualitativa. São elas: 1) a fonte direta de coletas de dados é o ambiente natural e o investigador o instrumento principal; 2) é descritiva; 3) há um interesse maior pelo processo que pelos resultados ou produtos; 4) normalmente, os dados são analisados de forma indutiva, pois a coleta de dados não visa “confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente”; 5) tem um significado extremamente importante, no qual se evidencia a preocupação com a perspectiva dos participantes.

Para esses autores, a investigação de caráter qualitativo não necessariamente abrange essas cinco características. A presente pesquisa contempla algumas das características citadas: é descritiva, não buscou causas, nem resultados ou produtos, embora estabeleça sugestões ao livro didático, a partir dos referenciais teóricos estudados, e os dados foram analisados de forma indutiva e dedutiva, a partir de categorias emergentes e deduzidas de teorias que serviram de fundamento ao estudo.

Toda investigação é conduzida por um caminho previamente planejado. Porém, a caminhada tem seu caráter exploratório a partir dos movimentos do pesquisador de modo que o percurso tem suas idas, retornos e novos caminhos. Quanto ao planejamento do percurso metodológico, entendo que é possível organizar a partir dos objetivos específicos. Paviani (2009, p. 123) ressalta que o objetivo geral descreve o resultado que se deseja obter, enquanto os objetivos específicos adiantam as operações metodológicas. Nesse sentido, enquanto o objetivo geral de uma pesquisa tem o potencial de determinar seu produto final, os objetivos específicos podem apontar as direções que o pesquisador pode seguir.

O primeiro objetivo específico desse estudo trata da construção de um quadro teórico relacionando ideias da teoria sociointeracionista de Vigotski como a mediação, a interação social, a zona de desenvolvimento proximal e a teoria de formação de conceitos. Esse objetivo foi cumprido na seção anterior, acrescido de uma descrição do Relatório da Comissão Internacional sobre os Futuros da Educação. O relatório, apresentado em 2022, evidencia aspectos educacionais que vão ao encontro da teoria vigotskiana, que data da segunda década do século XX. Entre esses aspectos, destaco o social e a atividade. Segundo Garnier, Bernardz e Ulanovskaya (1996, p. 12), “o **social** constitui, por um lado, a fonte do desenvolvimento conceitual da criança e caracteriza, por outro lado, a organização da atividade comum e do aprendizado do aluno”. Com relação à atividade, de acordo com esses autores (1996, p. 13) “[...] o social encontra-se vinculado à **atividade**, de maneira que a criança somente pode apropriar-se do ambiente cultural enquanto ser ativo”.

O segundo objetivo específico trata da composição de um *corpus* de estudo constituído por livros didáticos indicados pelo PNLD 2021 - *Objeto 2*, para a área de Matemática e suas Tecnologias. Na subseção que segue, descrevo a construção do *corpus*.

3.1 CONSTRUÇÃO DO *CORPUS*

Para compor o *corpus* de pesquisa, adotei como o critério a representatividade das obras nas escolas de Caxias do Sul. O quadro a seguir apresenta as dez obras oferecidas pelo PNLD 2021, na área de Matemática e suas Tecnologias, Objeto 2. Todas as obras foram editadas no ano de 2020.

Quadro 3 – Coleções aprovadas no PNLD 2021, Objeto 2 – Matemática e suas Tecnologias

Título	Autor(es)	Editora
Conexões Matemática e suas Tecnologias	Renata Martins Fortes Goncalves; Dario Martins de Oliveira; Edson Ferreira de Souza; Ernani Nagy de Moraes; Fabio Martins de Leonardo; Juliana Ikeda; Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz; Maria Jose Guimaraes de Souza; Romenig da Silva Ribeiro	Editora Moderna Ltda.
Diálogo Matemática e suas Tecnologias	André Luiz Steigenberger; Lilian Aparecida Teixeira; Julio Cesar Jovino Da Silva; Felippe Neves Manjavachi; Alessandra Negrini Dalla Barba; Daiany Cristiny Ramos	Editora Moderna Ltda.
Interação Matemática	Rodrigo Morozetti Blanco; Adilson Longen; Luciana Maria Tenuta de Freitas	Editora do Brasil S.A.
Matemática em Contextos	Luiz Roberto Dante; Fernando Cesar De Abreu Viana	Editora Ática S.A.
Matemática Interligada	Victor Hugo dos Santos Gois; Danielly Regina Kaspary dos Anjos; Eduardo Henrique Gomes Tavares; Elias Borges da Silva; Keila Tatiana Boni; Thais Marcelle De Andrade	Editora Scipione S.A.
Matemática nos Dias de Hoje	Jefferson Dos Santos Cevada; Daniel Romao Da Silva; Gabriel Gleich Prado; Joao Guilherme Boaratti Colpani	Editora SEI Ltda.
Multiversos Matemática	Joamir Roberto De Souza	Editora FTD S.A.
Prisma Matemática	Jose Roberto Bonjorno; José Ruy Giovanni Júnior; Paulo Roberto Câmara de Sousa	Editora FTD S.A.
Quadrante Matemática e suas Tecnologias	Diego Barboza Prestes; Eduardo Rodrigues Chavante	Edições SM Ltda.
Ser Protagonista Matemática e Suas Tecnologias	Maria Ignez De Souza Vieira Diniz; Katia Cristina Stocco Smole	Edições SM Ltda.

Fonte: Guia PNLD 2021 (2021).

Por meio do endereço eletrônico <https://www.fnde.gov.br/distribuicaosimadnet>, busquei as informações de todas as escolas de administração pública federal, estadual ou municipal, bem como das escolas particulares que receberam algum livro ou material do PNLD. Esta página virtual também fornece a quantidade de livros e de materiais recebidos pela escola e o ano do recebimento. Averiguei todas as escolas Ensino Médio, de administração pública estadual e federal, bem como as particulares da cidade de Caxias do Sul, para verificar quais as obras solicitadas na área de Matemática e suas Tecnologias, Objeto 2. Nenhuma das escolas particulares, que podem solicitar obras para seus alunos bolsistas desde o edital de 2019, optou por escolher livros do Objeto 2. Quanto às de administração pública estadual e federal de todo o município de Caxias do Sul, solicitaram as obras conforme o quadro a seguir:

Quadro 4 – Obras de Matemática e suas Tecnologias, Objeto 2, recebidas pelas escolas de administração pública federal e estadual de Caxias do Sul

(continua)

Instituição	Obra recebida
Col. Est. Henrique Emílio Meyer	Prisma Matemática
Col. Est. Imigrante	Multiversos Matemática
Esc. Est. de Educação Básica Abramo Pezzi	Conexões Matemática e suas Tecnologias
Esc. Est. de Ensino Médio Alexandre Záttera	Matemática em Contextos
Esc. Est. de Ensino Médio Antônio Avelino Boff	Prisma Matemática
Esc. Est. de Ens. Médio Cavalh. Aristides Germani	Conexões Matemática e suas Tecnologias
Esc. Est. de Ensino Médio Dr. Assis Antônio Mariani	Prisma Matemática
Esc. Est. de Ensino Médio Érico Veríssimo	Matemática em Contextos
Esc. Est. de Ensino Médio Evaristo de Antoni	Matemática Interligada
Esc. Est. de Ensino Médio Galópolis	Multiversos Matemática
Esc. Est. de Ensino Médio Irmão José Otão	Matemática em Contextos
Esc. Est. de Ensino Médio Irmão Guerini	Conexões Matemática e suas Tecnologias
Esc. Est. de Ensino Médio João Pilati	Diálogo Matemática e suas Tecnologias
Esc. Est. de Ensino Médio João Triches	Prisma Matemática

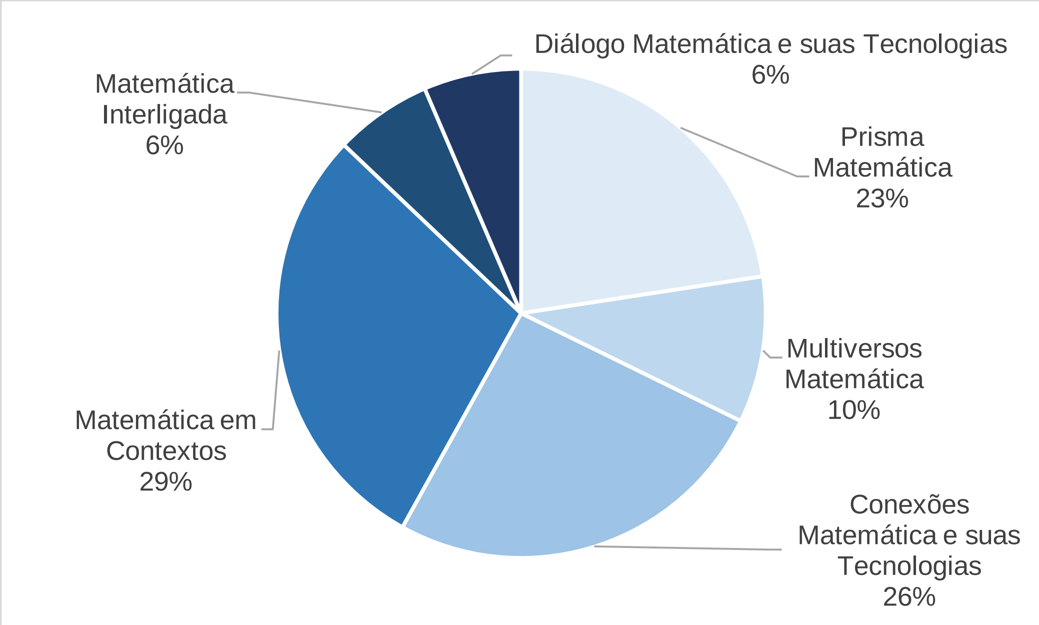
Instituição	Obra recebida
Esc. Est. de Ensino Médio José Generosi	Prisma Matemática
Esc. Est. de Ens. Médio Maria Araci Trindade Rojas	Conexões Matemática e suas Tecnologias
Esc. Est. de Ensino Médio Melvin Jones	Matemática em Contextos
Esc. Est. de Ensino Médio Olga Maria Kayser	Matemática em Contextos
Esc. Est. de Ensino Médio Paulo Freire	Matemática em Contextos
Esc. Est. de Ensino Médio Província de Mendoza	Matemática em Contextos
Esc. Est. de Ensino Médio Rachel Grazziottin	Matemática Interligada
Esc. Est. de Ensino Médio Santa Catarina	Matemática em Contextos
Esc. Est. de Ensino Médio São Caetano	Multiversos Matemática
Esc. Est. de Ensino Médio Victório Webber	Conexões Matemática e suas Tecnologias
Esc. Est. Esp. de Ensino Médio Helen Keller	Diálogo Matemática e suas Tecnologias
Esc. Est. Técnica Caxias do Sul	Prisma Matemática
Instituto Est. de Educação Cristóvão de Mendoza	Prisma Matemática
IFRS – Campus Caxias do Sul	Conexões Matemática e suas Tecnologias

(conclusão)

Fonte: Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/distribuicaosimadnet>. Acesso em: nov. 2022.

Observa-se que, das dez obras do Objeto 2, oferecidas pela área de Matemática e suas Tecnologias, seis foram selecionadas pelas escolas de Ensino Médio de administração pública estadual e federal de Caxias do Sul. O gráfico abaixo mostra a distribuição porcentual dessas obras nesse universo de escolas:

Figura 10 – Distribuição porcentual das obras nas escolas de administração estadual e federal de Caxias do Sul



Fonte: elaborada pelo autor (2022).

Entre as seis selecionadas, três estão presentes em quase 80% das escolas de administração pública estadual e federal. O censo escolar de 2021, disponível no endereço <https://qedu.org.br/municipio/4305108-caxias-do-sul/censo-escolar>, aponta 11.075 matrículas no Ensino Médio Estadual e 475 matrículas no Federal de Caxias do Sul, de modo que as obras selecionadas possuem presença bastante significativa no universo de estudantes de Ensino Médio de Caxias do Sul.

Dessa forma, realizei minha investigação nas três obras didáticas mais solicitadas do PNLD 2021, Objeto 2: Matemática em Contextos, Conexões Matemática e Prisma Matemática, que somadas estão em quase 80% das escolas de administração pública estadual e federal do município de Caxias do Sul. A escolha dos materiais mais representativos está de acordo com o princípio da prestação de contas da pesquisa à comunidade escolar. Bauer e Gaskell (2002, p. 40) enfatizam que "a seleção não sistemática viola o princípio de prestação de contas pública da pesquisa".

Quanto ao conteúdo dos livros na pesquisa, optei por escolher a *função afim* ou do primeiro grau e a *função quadrática* ou do segundo grau. Isto porque, a partir de minhas observações empíricas em sala de aula, percebi que exigem do aluno um maior nível de abstração e uma série de conceitos subordinados em relação a outros conteúdos do Ensino Médio, ou seja, esse maior nível de abstração pressupõe um maior encadeamento de conceitos necessários para a compreensão de novos conceitos (conceitos superordenados). Assim, investiguei como é feita a retomada dos conceitos subordinados nesses livros didáticos.

Na obra Matemática em Contextos, da Editora Ática, os conteúdos se encontram no Volume 2: Função Afim e Função Quadrática. Para a obra Conexões Matemática e suas Tecnologias, da Editora Moderna, se encontram no Volume 1: Grandezas, Álgebra e Algoritmos e no Volume 2: Funções e Aplicações. E, para a coleção Prisma Matemática, da editora FTD, estão no Volume 1: Conjuntos e Funções.

A partir da investigação dos volumes de cada obra, entrei em contato com a Coordenação-Geral dos Programas do Livro (CGPLI), vinculada ao FNDE, solicitando as obras em arquivo pdf. Recebi o Manual do Professor, que contempla todo o conteúdo existente nos livros dos estudantes mais as orientações aos professores. Portanto, o *corpus* se constitui de quatro arquivos pdf que contém os conteúdos solicitados e o manual do professor. Os manuais do professor contêm orientações para cada capítulo do livro e as respostas dos exercícios e atividades.

3.2 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE

As obras selecionadas foram analisadas com base na análise textual discursiva de Moraes e Galiazzi (2011). A *análise textual discursiva* é definida pelos autores "como um conjunto de metodologias de análise de dados e informações de natureza qualitativa com a finalidade de produzir novas compreensões sobre os fenômenos e discursos" (Moraes; Galiazzi, 2011, p. 7). Esse método organiza-se em um processo cíclico, constituído de três fases principais: desmontagem dos textos (unitarização), estabelecimento de relações (categorização) e captação do novo emergente. No decorrer do processo da análise, Moraes e Galiazzi relatam sobre os "flashes" que emergem sobre os fenômenos investigados, os quais podem possibilitar novas compreensões.

A primeira fase (unitarização) consiste na desconstrução e fragmentação dos textos para obtenção de unidades do fenômeno estudado. Moraes e Galiazzi (2011, p. 19) apontam que a prática de unitarização pode ser concretizada em três momentos: 1) fragmentação dos textos e codificação de cada unidade; 2) reescrita de cada unidade de modo que assuma um significado; e 3) atribuição de um nome ou título para cada unidade assim produzida.

A segunda fase (categorização) consiste em um processo de comparação entre as unidades definidas que produz agrupamentos de elementos semelhantes. Moraes e Galiazzi (2011, p. 23) indicam que as categorias podem originar-se de três maneiras diferentes: 1)

Método dedutivo ou “a priori”: criadas a partir das teorias que servem de fundamento; 2) Método indutivo ou emergente: originadas de acordo com a análise do *corpus*; e 3) Método Intuitivo: originadas de inspirações repentinas, denominadas “insights”.

A terceira fase (captação do novo emergente) consiste na obtenção de novas compreensões do fenômeno investigado. O ir e vir desse processo cíclico resulta em uma produção de metatextos a partir de um movimento de constante construção e desconstrução. Moraes e Galiazzi (2011, p. 34) destacam que se trata de um processo vivo, um movimento de aprendizagem aprofundada sobre os fenômenos investigados. Esse processo combina duas faces de um mesmo movimento, o aprender e o comunicar. Assim, a partir da desordem e do caos, surgem as “luzes” como novas compreensões. Optei por esse método de análise devido sua flexibilidade ao transitar entre a análise de discurso e a análise de conteúdo.

Para a análise do *corpus* gerado, foram considerados norteadores provenientes dos referencias teóricos, para responder à pergunta de pesquisa: como os livros didáticos de matemática do Ensino Médio, indicados pelo PNLD 2021, podem mediar a construção de conceitos de função afim e de função quadrática a partir de ideias da teoria vigotskiana?

Conforme comentei anteriormente, os objetivos específicos dessa pesquisa me auxiliaram nas direções a seguir. O terceiro objetivo específico é a composição de norteadores relacionados à construção dos conceitos de função afim e quadrática à luz da teoria de Vigotski. Assim sendo, busquei orientações em elementos da teoria sociointeracionista de Vigotski e também em conceitos matemáticos relacionados às funções afim e quadrática. No quadro a seguir descrevo esses norteadores:

Quadro 5 – Norteadores Teóricos

Norteador	Descritor
Mediação	"Mediação, em termos genéricos, é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação; a relação deixa, então, de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento" (Oliveira, 2003, p. 26). O elemento intermediário, no caso dessa pesquisa, é o livro didático.
Internalização	"Reconstrução interna de uma operação externa" (Vigotski, 1998a, p. 74). É pela mediação que se dá a internalização. Para que o estudante internalize um conceito científico, esse conceito deve lhe ser apresentado de alguma maneira. Após o estudo do conceito, o estudante deve ter a oportunidade de externalizá-lo, de modo que possa se verificar se o significado que captou é socialmente aceito.
Interação social	Segundo Garton (1992, p. 11), interação social implica um mínimo de duas pessoas intercambiando informações. A interação social é, na perspectiva vigotskiana, o veículo fundamental para a transmissão do conhecimento culturalmente construído. Assim, na interação social em sala de aula, o professor é o participante que já internalizou significados socialmente compartilhados para os materiais didáticos.
Zona de Desenvolvimento Proximal	"É a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes" (Vigotski, 1998a, p. 112). Portanto, para Vigotski, sem interação social, dentro da zona de desenvolvimento proximal do aprendiz, não há ensino e não há aprendizagem.
Construção ou formação de conceitos científicos	Segundo Vigotski (1998b, p. 116), nos conceitos científicos, a relação com um objeto é mediada por algum outro conceito. Assim, nos conceitos científicos ocorre uma organização mais consistente e sistemática. Nessa perspectiva, a formação ou construção dos conceitos é um processo complexo que depende da interação social e do intercâmbio de significados.
Conceitos matemáticos relacionados às funções afim e quadrática	São conceitos abstratos e organizados em uma rede consistente. Entre outros, o estudante precisa compreender os conceitos de função, relação, conjunto, variável, grandeza, plano cartesiano, par ordenado, função afim, função quadrática, coeficientes, reta, parábola, proporção, equação e inequação.

Fonte: elaborado pelo autor (2023).

4 ANÁLISE DOS DADOS

A análise textual discursiva propõe que o *corpus* seja organizado em unidades de análise. As leituras, anotações, releituras e descrições das obras, a partir das lentes estabelecidas pelos norteadores teóricos, resultaram em uma identificação de unidades de análise, reunidas por similaridades, originaram categorias emergentes. No processo de unitarização, estabeleci, após as releituras, cinco unidades: apresentação de contextos, apresentação de definições matemáticas, retomadas de definições que são pré-requisitos, propostas de atividades de aplicação dos conceitos matemáticos, e propostas de atividades de sociointeração. Após a comparação entre as unidades, as categorias que emergiram da análise do *corpus* foram: *apresentação de contextos*, *apresentação de definições*, *propostas d*e *atividades* e *retomadas de pré-requisitos*.

A primeira categoria refere-se aos contextos ou situações práticas relacionadas aos conceitos matemáticos a serem estudados. A segunda trata das definições formais e simbólicas dos conceitos matemáticos. A terceira categoria aborda a análise de propostas de atividades relacionadas aos conceitos estudados (questões, testes, diálogos, explorações, investigações, entre outras) que envolvam ou não a interação entre os estudantes ou entre os estudantes e o professor, presentes nos livros que compõe o *corpus*. A terceira categoria, em função da diversidade de atividades propostas nos livros didáticos, foi dividida em três subcategorias: *propostas de questões e testes, propostas de atividades com uso de tecnologia digital* e *propostas de explorações e investigações.* A quarta categoria trata da análise da existência (ou não) de retomada de definições que são pré-requisitos para a formação dos conceitos estudados.

Nas subseções a seguir, descrevo cada uma das categorias emergentes desse estudo e, no final, analiso suas relações. Porém, antes, realizo uma descrição da organização de cada obra didática presente nesse estudo.

4.1 O PANORAMA DAS OBRAS QUE COMPÕEM O *CORPUS* DE PESQUISA

As obras didáticas do PNLD são organizadas em volumes. Cada volume possui uma quantidade específica de capítulos. No quadro abaixo, destaco os volumes, os capítulos e as páginas investigados nesse estudo:

Quadro 6 – Volumes, capítulos e páginas investigados nas obras que compõem o corpus

Obra Didática	Volume	Capítulos	Páginas
Matemática em Contextos	Volume 2 – Função Afim e Função Quadrática	Capítulo 1 – Função Afim	08 a 73
		Capítulo 2 – Função Quadrática	74 a 129
		Manual do Professor	138 a 229
Conexões Matemática e suas Tecnologias	Volume 1 – Grandezas, Álgebra e Algoritmos	Capítulo 3 – Funções	58 a 91
		Manual do Professor	XXX a LXI
	Volume 2 – Funções e Aplicações	Capítulo 1 – Função Afim	14 a 38
		Capítulo 2 – Função Quadrática	39 a 66
		Manual do Professor	XXIX a XL
Prisma Matemática	Volume 1 – Conjuntos e Funções	Capítulo 2 – Função Afim	58 a 109
		Capítulo 3 – Função Quadrática	110 a 160
		Orientações para o professor	215 a 297 e 259 a 287

Fonte: elaborada pelo autor (2023).

As obras didáticas que compõem o *corpus* apresentam textos em língua portuguesa, símbolos matemáticos e imagens. Utilizam-se, assim, da linguagem escrita, da linguagem simbólica e da linguagem pictórica. Essas formas de linguagem, conforme a teoria vigotskiana, são exemplos de signos que, ao serem apropriados ou internalizados pelo estudante, permitem seu desenvolvimento cognitivo. Há, portanto, uma variedade de formas de comunicação nas obras didáticas. Para especificar melhor a organização de cada obra, descrevo suas seções e apresento seus panoramas por meio de imagens correspondentes às seções descritas.

4.1.1 Matemática em contextos

A obra Matemática em Contextos, da Editora Ática, apresenta o Volume *Função Afim e Função Quadrática* em dois capítulos. O Capítulo 1: Função Afim e o Capítulo 2: Função Quadrática. Cada capítulo é constituído de textos, imagens e seções de atividades.

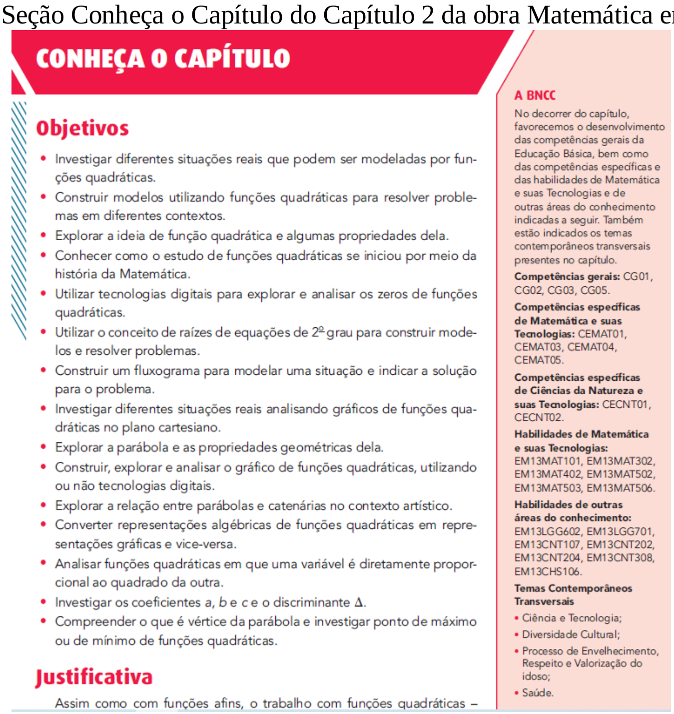
A primeira página de cada capítulo exibe um texto de abertura, com uma imagem relacionada a um ou mais conteúdos abordados. A figura abaixo é um recorte da página de abertura do Capítulo 2 – Função Quadrática.

Figura 11 – Imagem de abertura do Capítulo 2 da obra Matemática em Contextos

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Na sequência, apresenta a seção *Conheça o Capítulo*, na qual os autores pontuam os objetivos que devem ser atingidos ao longo do capítulo, bem como sua justificativa. Além disso, indicam as competências gerais e específicas, e as habilidades da BNCC relacionadas ao capítulo. A figura abaixo é um recorte dessa seção para o Capítulo 2.

Figura 12 – Seção Conheça o Capítulo do Capítulo 2 da obra Matemática em Contextos



CONHEÇA O CAPÍTULO

Objetivos

- Investigar diferentes situações reais que podem ser modeladas por funções quadráticas.
- Construir modelos utilizando funções quadráticas para resolver problemas em diferentes contextos.
- Explorar a ideia de função quadrática e algumas propriedades dela.
- Conhecer como o estudo de funções quadráticas se iniciou por meio da história da Matemática.
- Utilizar tecnologias digitais para explorar e analisar os zeros de funções quadráticas.
- Utilizar o conceito de raízes de equações de 2º grau para construir modelos e resolver problemas.
- Construir um fluxograma para modelar uma situação e indicar a solução para o problema.
- Investigar diferentes situações reais analisando gráficos de funções quadráticas no plano cartesiano.
- Explorar a parábola e as propriedades geométricas dela.
- Construir, explorar e analisar o gráfico de funções quadráticas, utilizando ou não tecnologias digitais.
- Explorar a relação entre parábolas e catenárias no contexto artístico.
- Converter representações algébricas de funções quadráticas em representações gráficas e vice-versa.
- Analisar funções quadráticas em que uma variável é diretamente proporcional ao quadrado da outra.
- Investigar os coeficientes *a*, *b* e *c* e o discriminante Δ.
- Compreender o que é vértice da parábola e investigar ponto de máximo ou de mínimo de funções quadráticas.

Justificativa

Assim como com funções afins, o trabalho com funções quadráticas –

A BNCC

No decorrer do capítulo, favorecemos o desenvolvimento das competências gerais da Educação Básica, bem como das competências específicas e das habilidades de Matemática e suas Tecnologias e de outras áreas do conhecimento indicadas a seguir. Também estão indicados os temas contemporâneos transversais presentes no capítulo.

Competências gerais: CG01, CG02, CG03, CG05.

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT01, CEMAT03, CEMAT04, CEMAT05.

Competências específicas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias: CECNT01, CECNT02.

Habilidades de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT402, EM13MAT502, EM13MAT503, EM13MAT506.

Habilidades de outras áreas do conhecimento: EM13LGG602, EM13LGG701, EM13CNT107, EM13CNT202, EM13CNT204, EM13CNT308, EM13CHS106.

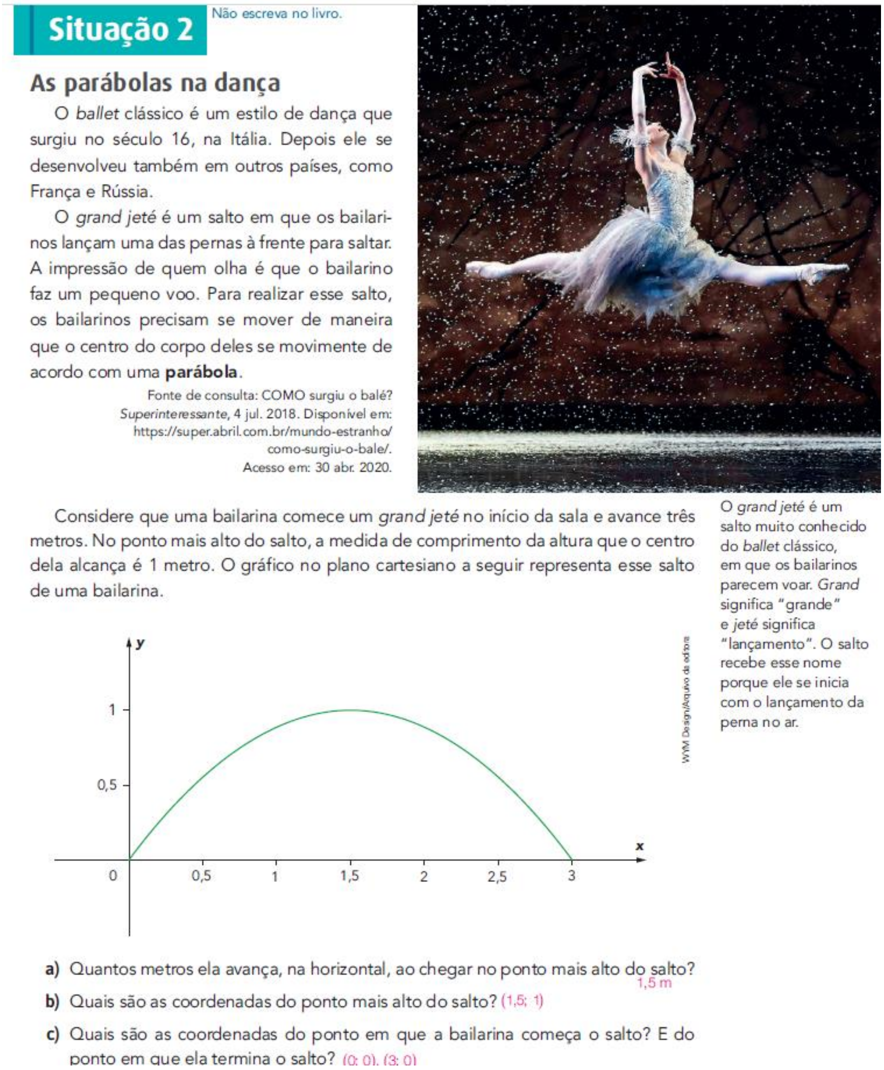
Temas Contemporâneos Transversais

- Ciência e Tecnologia;
- Diversidade Cultural;
- Processo de Envelhecimento, Respeito e Valorização do idoso;
- Saúde.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Após pontuar os objetivos de cada capítulo, a obra didática apresenta situações contextualizadas e de aplicação dos conceitos matemáticos, na forma de textos e de imagens. A partir da situação, o livro propõe perguntas relacionadas ao contexto relatado. A figura a seguir mostra uma das situações apresentadas no Capítulo 2.

Figura 13 – Situação apresentada no Capítulo 2 da obra Matemática em Contextos



Situação 2 Não escreva no livro.

As parábolas na dança

O *ballet* clássico é um estilo de dança que surgiu no século 16, na Itália. Depois ele se desenvolveu também em outros países, como França e Rússia.

O *grand jeté* é um salto em que os bailarinos lançam uma das pernas à frente para saltar. A impressão de quem olha é que o bailarino faz um pequeno voo. Para realizar esse salto, os bailarinos precisam se mover de maneira que o centro do corpo deles se movimente de acordo com uma **parábola**.

Fonte de consulta: COMO surgiu o balé? *Superinteressante*, 4 jul. 2018. Disponível em: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-surgiu-o-bale/. Acesso em: 30 abr. 2020.

O *grand jeté* é um salto muito conhecido do *ballet* clássico, em que os bailarinos parecem voar. *Grand* significa "grande" e *jeté* significa "lançamento". O salto recebe esse nome porque ele se inicia com o lançamento da perna no ar.

Considere que uma bailarina comece um *grand jeté* no início da sala e avance três metros. No ponto mais alto do salto, a medida de comprimento da altura que o centro dela alcança é 1 metro. O gráfico no plano cartesiano a seguir representa esse salto de uma bailarina.

a) Quantos metros ela avança, na horizontal, ao chegar no ponto mais alto do salto? 1,5 m

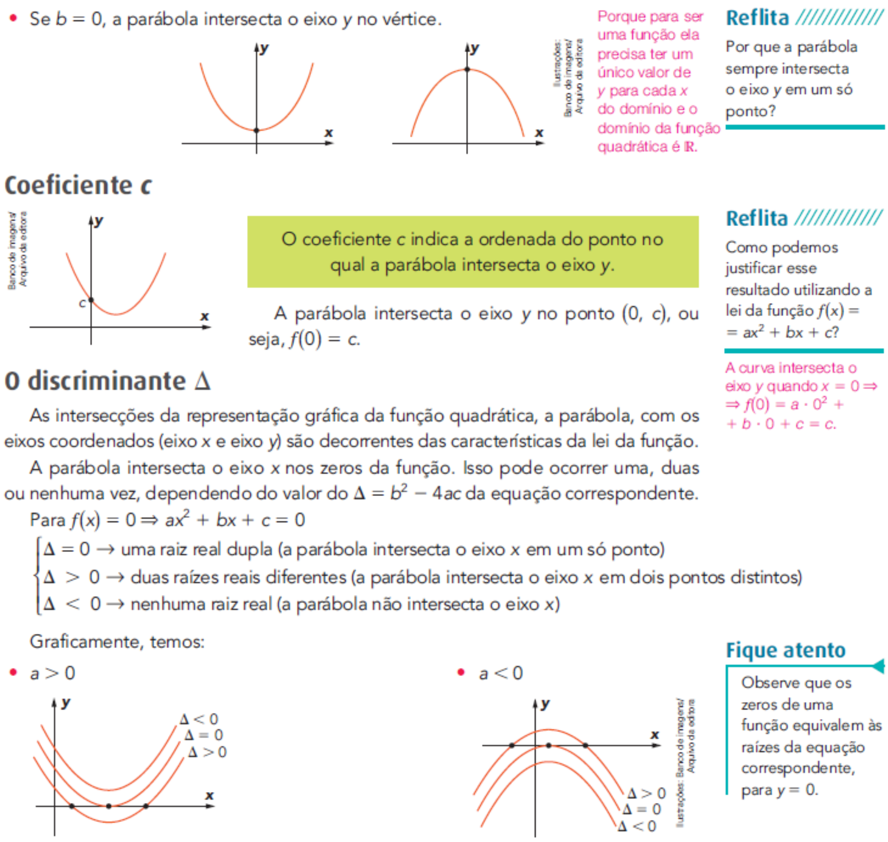
b) Quais são as coordenadas do ponto mais alto do salto? (1,5; 1)

c) Quais são as coordenadas do ponto em que a bailarina começa o salto? E do ponto em que ela termina o salto? (0; 0), (3; 0)

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Na sequência, a obra expõe os conteúdos matemáticos relacionados ao contexto, usando a linguagem escrita e a linguagem simbólica. Os textos que contêm o conteúdo do capítulo são desenvolvidos em uma coluna e podem apresentar boxes nas laterais, que são textos curtos com objetivos específicos. O boxe *Reflita* traz questionamentos e reflexões sobre o conteúdo apresentado. O boxe *Fique atento* retoma definições, nomenclaturas, simbologias e dicas para auxiliar o estudante. O boxe *Sobre o assunto* relata informações e curiosidades relacionadas ao conteúdo estudado, bem como sugestões de textos, vídeos, simuladores e museus para o estudante aprofundar os estudos e realizar pesquisas. Além desses, há um boxe chamado *Glossário*, que define algumas palavras da língua portuguesa. A figura a seguir é um recorte de um exemplo de texto de apresentação de conteúdos contidos no Capítulo 2 – Função Quadrática, juntamente com alguns boxes laterais:

Figura 14 – Exemplo de texto de apresentação de conteúdos matemáticos e de boxes laterais do Capítulo 2 da obra Matemática em Contextos



Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Após a apresentação dos textos com objetos matemáticos, o livro traz seções de atividades, organizadas em textos de duas colunas. Há uma seção de *Atividades resolvidas*, na qual o estudante pode acompanhar a resolução detalhada de problemas e de atividades, bem como estratégias diferentes de resolução de problemas e exercícios. Na seção *Atividades*, o leitor encontra testes abstratos relacionados ao conteúdo, bem como problemas e atividades envolvendo contextos cotidianos. A figura a seguir é um recorte de um exemplo de atividades propostas no Capítulo 2.

Figura 15 – Exemplo de Atividades do Capítulo 2 da obra Matemática em Contextos

Atividades Não escreva no livro.

11. Determine, se existirem, os zeros das funções quadráticas calculando o Δ em cada caso.

a) $f(x) = x^2 - 3x$ 3 e 0.

b) $f(x) = x^2 + 4x + 5$ Não tem zeros reais.

c) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ -2 e 4.

d) $f(x) = x^2 + 10x + 25$ -5

e) $f(x) = x^2 - 8x + 16$ 4

f) $f(x) = 25x^2 + 9x + 1$ Não tem zeros reais.

12. (Ifsul-RS) As medidas do comprimento e da altura (em metros) do *outdoor* retangular, representado na figura abaixo, são exatamente as soluções da equação $x^2 - 10x + 21 = 0$.

Dessa forma, é correto afirmar que a área desse *outdoor* é: Alternativa **c**.

a) 10 m². **b)** 20 m². **c)** 21 m². **d)** 24 m².

13. (FGV-RJ) Na resolução de um problema que recaía em uma equação do 2º grau, um aluno errou apenas o termo independente da equação e encontrou como raízes os números 2 e -14. Outro aluno, na resolução do mesmo problema, errou apenas o coeficiente do termo de primeiro grau e encontrou como raízes os números 2 e 16.

As raízes da equação correta eram: Alternativa **b**.

a) -2 e -14.

b) -4 e -8.

c) -2 e -16.

d) -2 e -16.

e) 4 e 14.

14. (Acafe-SC) Uma biblioteca possui 300 livros, todos do mesmo tamanho. Um funcionário pretende dividi-los igualmente entre as prateleiras da loja. Sabendo que, se os livros forem igualmente divididos entre 3 prateleiras a menos, cada prateleira receberá 5 livros a mais do que o previsto inicialmente.

Assim, o número de prateleiras para colocar todos os livros é: Alternativa **b**.

a) múltiplo de 4.

b) múltiplo de 3.

c) entre 10 e 12.

d) maior que 20.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Além das seções descritas, a obra possui seções chamadas *Tecnologias Digitais* que propõe a utilização de diversas tecnologias como calculadoras, softwares livres e simuladores para que o estudante possa construir e manipular representações gráficas e planilhas entre outros. Há, também, seções chamadas *Conexões*, que relacionam temas atuais de diferentes áreas do conhecimento, via aplicações do conteúdo estudado em ciências humanas e em ciências da natureza. As atividades possibilitam interpretação, aplicação, pesquisa e debate do tema da seção. O capítulo pode conter, ainda, uma seção de *Leitura e compreensão*, na qual o estudante é convidado a ler, compreender e interpretar textos que buscam ampliar e enriquecer os conteúdos estudados, e uma seção relacionada à etnomatemática, chamada de *Além da sala de aula*, na qual o aluno é convidado a investigar e propor ações que podem auxiliar a comunidade ou conhecer outras realidades e contextos. No final de cada capítulo, há uma seção denominada *Vestibulares e ENEM*, com questões do ENEM e de vestibulares de todas as regiões do Brasil, relacionadas aos conteúdos estudados no capítulo. As figuras a seguir são recortes de exemplos das sessões mencionadas:

Figura 16 – Exemplo da seção Tecnologias Digitais, do Capítulo 2 da obra Matemática em Contextos

Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Construção do gráfico de uma função quadrática

Como você viu, em um plano cartesiano, o gráfico de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, é uma parábola. A representação desse gráfico no plano cartesiano pode ser feita com o auxílio de diversos *softwares*. Vamos utilizar o GeoGebra Calculadora Gráfica. Você pode usar a versão *on-line* disponível em www.geogebra.org/ (acesso em: 12 jun. 2020).

Vamos construir inicialmente o gráfico da função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 6x + 5$ e destacar alguns pontos importantes. Para isso, siga os passos a seguir.

1º passo: No campo Entrada de comando digite a lei da função **f(x)=x^2-6x+5** e tecle "Enter".

2º passo: Acesse as configurações de exibição (na parte superior direita da tela) e selecione as opções de exibir os eixos e de exibir a malha principal. Você deverá ter uma imagem como a apresentada abaixo.

Fique atento

Salve as construções que você fizer.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Figura 17 – Exemplo da seção Conexões, do Capítulo 2 da obra Matemática em Contextos

Não escreva no livro.

Conexões

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

As curvas que intrigaram os matemáticos

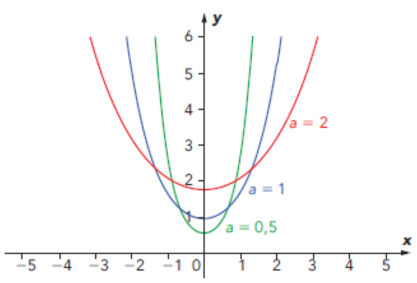
É muito comum nos depararmos com situações envolvendo certas curvas que podem parecer parábolas.

O matemático, físico, astrônomo e filósofo italiano Galileu Galilei (1564-1642) propôs a conjectura, ou seja, fez uma suposição de acordo com observações, de que um fio flexível suspenso entre dois pontos sob a ação exclusiva da gravidade descreveria uma parábola. A situação suposta por Galileu gera uma curva muito parecida com a parábola, mas não é parábola.

Em 1646, aos 17 anos, o matemático, físico e astrônomo holandês Christiaan Huygens (1629-1695) mostrou que esse tipo de curva não era uma parábola, mas outra curva com uma equação um pouco mais complexa, pois envolve o conceito de relações trigonométricas hiperbólicas. São curvas de equações do tipo $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}}{2}$.

brillenstimmer/Shutterstock

Alguns lugares têm pilares como esses, em que as correntes ficam presas em dois pontos, um em cada pilar. A curva formada nessa situação é uma catenária.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

O número **e** que aparece nessa equação é conhecido como número de Euler ou número de Napier. Ele é um número irracional positivo comumente utilizado em estudos de Matemática financeira e Probabilidade.

Por ser um número irracional, ele tem infinitas casas decimais não periódicas. A aproximação desse número, com duas casas decimais, é 2,72.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

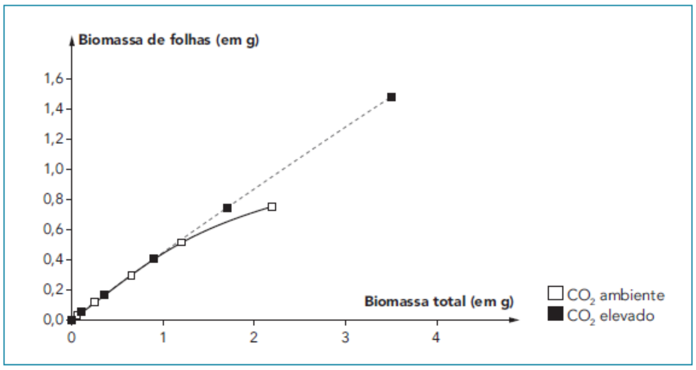
Figura 18 – Exemplo da seção Leitura e compreensão, do Capítulo 1 da obra Matemática em Contextos

Leitura e compreensão Não escreva no livro.

Há na Botânica, além da relação apresentada, outras cujo comportamento pode ser aproximado ao de funções afins para alguns intervalos. É o caso da relação entre a **biomassa** presente em folhas de *Senna alata* (leguminosa arbórea) e a biomassa total quando em ambientes com CO_2 elevado.

Biomassa
Massa seca de qualquer organismo vivo. No caso das plantas, indica a matéria orgânica que foi incorporada na planta a partir da fotossíntese.

Biomassa presente nas folhas em função da biomassa total das plantas de *Senna alata*



Fonte de consulta: MARABESI, Mauro Alexandre. *Efeito do alto CO_2 no crescimento inicial e na fisiologia da fotossíntese em plântulas Senna alata (L) Roxb.* 2007. Dissertação (Mestreado em Biodiversidade Vegetal e Meio Ambiente) – Instituto de Botânica da Secretaria de Estado do Meio Ambiente, São Paulo, 2007. Disponível em: http://arquivos.ambiente.sp.gov.br/pgibt/2013/09/Mauro_Alexandre_Marabesi_MS.pdf. Acesso em: 6 maio 2020.

A linha tracejada representa a função afim dada por $y = 0{,}42x + 0{,}027$, que é a função que melhor aproxima os dados relacionados à biomassa das folhas de *Senna alata* em ambiente de CO_2 elevado (concentração de 720 ppm). A linha contínua representa a função polinomial de 2º grau que melhor aproxima os dados relacionados ao CO_2 ambiente (concentração de 380 ppm).

Fique atento
Você vai estudar a função polinomial de 2º grau no próximo capítulo.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Figura 19 – Exemplo da seção Além da sala de aula, do Capítulo 1 da obra Matemática em Contextos

Não escreva no livro.

Além da sala de aula

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste tópico encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

A função afim e as flautas Rikbaktsa

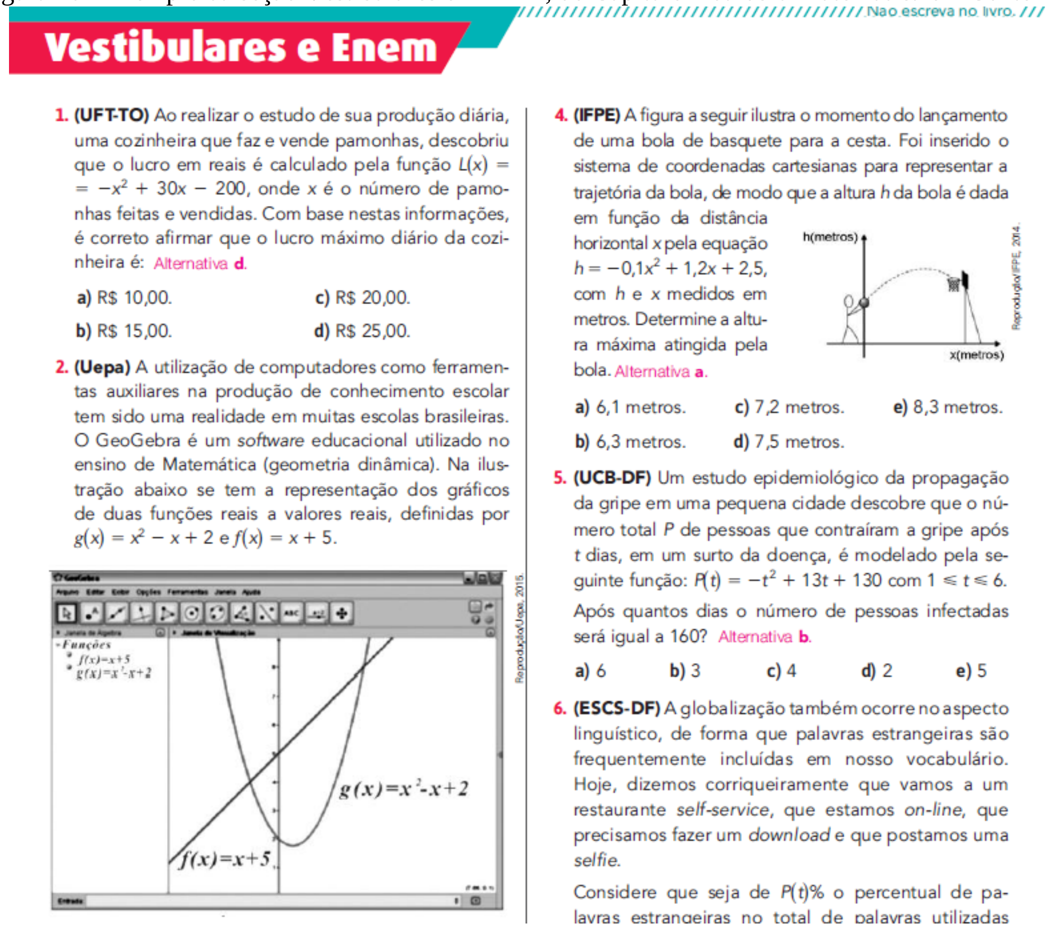
A bacia do rio Juruema, situada no noroeste mato-grossense, abriga a comunidade indígena Rikbaktsa. *Rik* pode ser traduzido como "o ser humano", *bak* é "verdadeiro" e *tsa* indica o plural, dessa maneira o nome Rikbaktsa significa "seres humanos verdadeiros". Os habitantes dessa comunidade são habilidosos no uso das canoas e por isso são conhecidos na região como "canoeiros".

A educação nas aldeias é organizada em escolas indígenas e os estudantes aprendem os conteúdos previstos no currículo nacional. Dos professores das escolas, os mais antigos foram educados no internato jesuítico de Utiariti, enquanto os mais novos foram educados pelos mais velhos até o nível de Educação Básica e depois tiveram formação profissional na Faculdade Indígena Intercultural do *campus* da Universidade Estadual de Mato Grosso (Unemat-MG).

Os Rikbaktsa reconhecem a importância de compreender as técnicas matemáticas

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Figura 20 – Exemplo da seção Vestibulares e ENEM , do Capítulo 2 da obra Matemática em Contextos



/// Não escreva no livro. ///

Vestibulares e Enem

1. (UFT-TO) Ao realizar o estudo de sua produção diária, uma cozinheira que faz e vende pamonhas, descobriu que o lucro em reais é calculado pela função $L(x) = -x^2 + 30x - 200$, onde x é o número de pamonhas feitas e vendidas. Com base nestas informações, é correto afirmar que o lucro máximo diário da cozinheira é: Alternativa **d**.

a) R$ 10,00. **b)** R$ 15,00. **c)** R$ 20,00. **d)** R$ 25,00.

2. (Uepa) A utilização de computadores como ferramentas auxiliares na produção de conhecimento escolar tem sido uma realidade em muitas escolas brasileiras. O GeoGebra é um *software* educacional utilizado no ensino de Matemática (geometria dinâmica). Na ilustração abaixo se tem a representação dos gráficos de duas funções reais a valores reais, definidas por $g(x) = x^2 - x + 2$ e $f(x) = x + 5$.

4. (IFPE) A figura a seguir ilustra o momento do lançamento de uma bola de basquete para a cesta. Foi inserido o sistema de coordenadas cartesianas para representar a trajetória da bola, de modo que a altura h da bola é dada em função da distância horizontal x pela equação $h = -0{,}1x^2 + 1{,}2x + 2{,}5$, com h e x medidos em metros. Determine a altura máxima atingida pela bola. Alternativa **a**.

a) 6,1 metros. **b)** 6,3 metros. **c)** 7,2 metros. **d)** 7,5 metros. **e)** 8,3 metros.

5. (UCB-DF) Um estudo epidemiológico da propagação da gripe em uma pequena cidade descobre que o número total P de pessoas que contraíram a gripe após t dias, em um surto da doença, é modelado pela seguinte função: $P(t) = -t^2 + 13t + 130$ com $1 \leq t \leq 6$.

Após quantos dias o número de pessoas infectadas será igual a 160? Alternativa **b**.

a) 6 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 2 **e)** 5

6. (ESCS-DF) A globalização também ocorre no aspecto linguístico, de forma que palavras estrangeiras são frequentemente incluídas em nosso vocabulário. Hoje, dizemos corriqueiramente que vamos a um restaurante *self-service*, que estamos *on-line*, que precisamos fazer um *download* e que postamos uma *selfie*.

Considere que seja de $P(t)$% o percentual de palavras estrangeiras no total de palavras utilizadas

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

No final do volume, apresenta as respostas de todas as atividades propostas no livro e as referências bibliográficas.

Quanto ao Manual do Professor, há orientações gerais e específicas. Nas gerais, enumera as competências gerais da BNCC e as competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias. Além disso, dispõe o link do Relatório para a Unesco da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI e traz algumas informações a respeito de abordagens teórico-metodológicas, como: resolução de problemas, argumentação oral e escrita, investigação científica e pensamento computacional. No final das orientações gerais, apresenta um texto a respeito de avaliação, exibe a organização dos volumes da obra e indica sites, podcasts, vídeos, softwares, revistas e boletins de educação matemática e livros para os professores.

Nas orientações específicas, traz uma proposta de calendário para o desenvolvimento dos assuntos do Capítulo 1 e do Capítulo 2, e as competências e habilidades relacionadas aos assuntos do volume. Na sequência, há apontamentos e sugestões para o professor, para cada seção e atividade de cada capítulo, destacando as habilidades relacionadas na BNCC, conforme a figura a seguir:

Figura 21 – Exemplos de orientações específicas do Manual do professor da obra Matemática em Contextos

Além da sala de aula (p. 45)

Nesta seção, é abordada uma atividade investigativa em Etnomatemática que visa explorar a contextualização proposta por pesquisadores da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) no estudo da função afim a partir da construção das flautas usadas pelos Rikbaktsa.

Neste estudo, as flautas, que são utilizadas no cotidiano da comunidade, têm diferentes medidas de comprimento, conforme a medida de comprimento da mão do artesão responsável por fabricá-las. As flautas são construídas com diferentes medidas de comprimento para obter diferentes sons, já que, quanto maior a medida de comprimento da flauta, mais grave é o som emitido.

Nas atividades propostas nesta seção, as medidas de comprimento dessas flautas são modeladas por meio de uma função afim que associa a medida de comprimento em palmos de mão (unidade de medida de comprimento usada pelos Rikbaktsa) com a medida de comprimento aproximada em centímetros.

Na atividade 4, espera-se que o estudante identifique que a utilização de contextos do cotidiano auxilia o estudo de conceitos matemáticos, pois, além de permitir que conceitos matemáticos ganhem significados práticos, também ajuda a tornar o estudante sujeito participante do processo de construção dos significados. Além disso, esperamos que eles identifiquem que os significados práempregando uma função polinomial de 1º grau) e EM13MAT401 (ao converter uma representação algébrica de uma função polinomial de 1º grau numa representação geométrica no plano cartesiano). Além disso, essa seção favorece os Temas Contemporâneos Transversais "Educação para Valorização do Multiculturalismo nas Matrizes Históricas e Culturais Brasileiras" e "Diversidade Cultural".

Conexões (p.54)

Nesta seção é abordado um texto de propósito interdisciplinar e um conjunto de atividades sobre o processo de conceptualização e construção do edifício Eastgate Centre, inspirado no processo de regulação de temperatura dos cupinzeiros.

A comparação do edifício Eastgate Centre com a estrutura de cupinzeiro real, explicando o funcionamento da eficiência térmica de ambos, contribui para o desenvolvimento da habilidade EM13CNT102. O estudo tecnológico desse edifício, considerando o consumo reduzido de energia elétrica em uma região com características geográficas de clima quente, favorece o desenvolvimento da habilidade EM13CNT106.

Cabe destacar também que o trabalho com a capacidade térmica, que é dada pela razão entre a variação na quantidade de calor e a variação na medida de temperatura, permite favorecer o trabalho com as habilidades EM13MAT101 e EM13MAT314.

Fonte: Manual do Professor da obra Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

No final, há resoluções detalhadas de todas as atividades propostas no volume e referências bibliográficas comentadas.

4.1.2 Conexões Matemática e suas Tecnologias

A obra Conexões Matemática e suas Tecnologias, da editora Moderna, apresenta o Volume 1 – Grandezas, Álgebra e Algoritmos em quatro capítulos. O capítulo que faz parte do *corpus* dessa pesquisa é o Capítulo 3 – Funções. Além desse, há o Volume 2 – *Funções e Aplicações*, dividido em seis capítulos: Função Afim, Função Quadrática, Função Exponencial, Função Logarítmica, Sequências e Matemática Financeira. Os capítulos investigados nesse volume foram o Capítulo 1 – Função Afim e o Capítulo 2 – Função Quadrática. Cada capítulo é constituído de textos, imagens e seções de atividades.

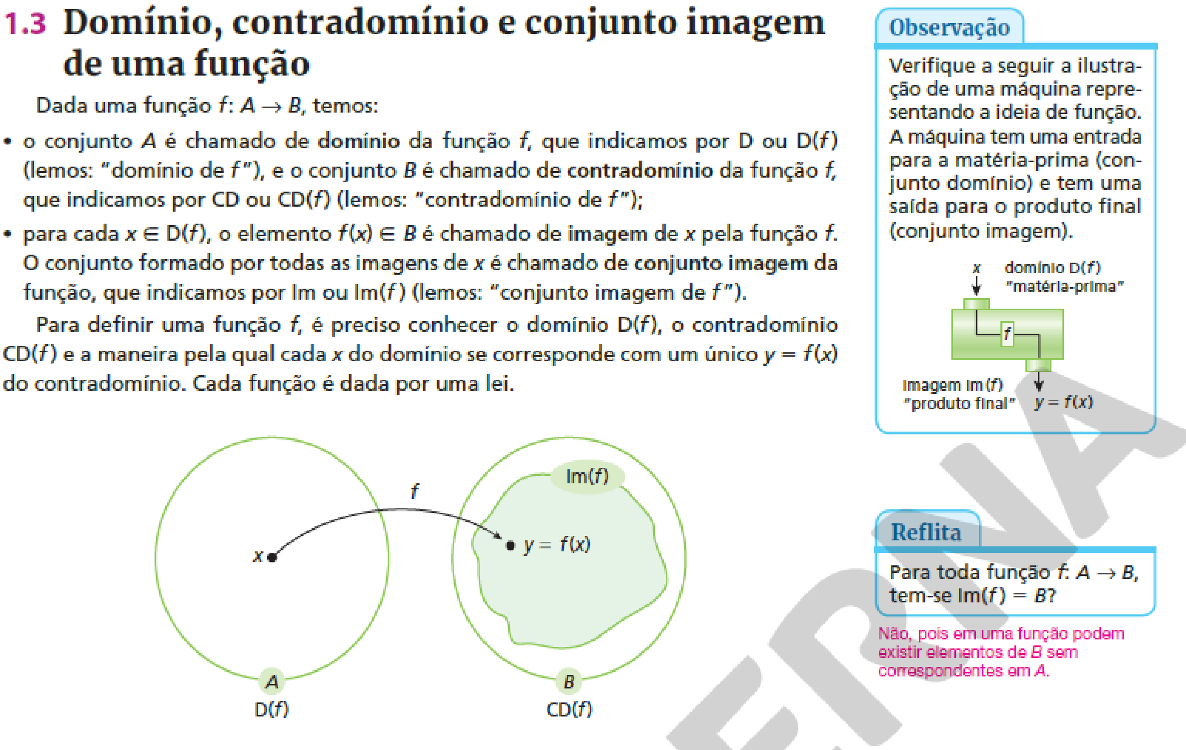
Os capítulos iniciam com a *Abertura*, que pontua os objetivos daquele capítulo e relata uma situação de contexto, acompanhada de uma imagem, que sugere os conceitos que serão abordados no capítulo. A figura a seguir é um recorte da página de abertura do Capítulo 3 – Funções:

Figura 22 – Imagem de abertura e objetivos do Capítulo 3, Volume 1 da obra Conexões Matemática e suas Tecnologias

Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 1 (2020).

Os textos que contêm o conteúdo do capítulo são desenvolvidos em uma coluna e podem conter boxes nas laterais. Ao longo dos textos, pode apresentar boxes chamados de *Observação(ções)*, com explicações relativas à simbologia matemática utilizada na formalização dos conceitos. Nas laterais dos exemplos, pode apresentar boxes chamados de *Reflita*, com perguntas relacionadas aos exemplos mostrados e boxes chamados de *Explore*, que solicitam investigações de temas da matemática ou de outras áreas, especialmente de ciências da natureza. Além desses, há um boxe chamado *Pensamento Computacional*, que apresenta os pilares dessa forma de pensamento: a decomposição, a abstração, o reconhecimento de padrões e os algoritmos. A figura a seguir mostra um recorte de apresentação de conceitos e os boxes laterais do Capítulo 3, Volume 1 da obra didática:

Figura 23 - Exemplo de texto de apresentação de conteúdos matemáticos e de boxes laterais do Capítulo 3, Volume 1, da obra Conexões Matemática e suas Tecnologias



1.3 Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

Dada uma função $f: A \to B$, temos:

- o conjunto A é chamado de **domínio** da função f, que indicamos por D ou D(f) (lemos: "domínio de f"), e o conjunto B é chamado de **contradomínio** da função f, que indicamos por CD ou CD(f) (lemos: "contradomínio de f");
- para cada $x \in D(f)$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado de **imagem** de x pela função f. O conjunto formado por todas as imagens de x é chamado de **conjunto imagem** da função, que indicamos por Im ou Im(f) (lemos: "conjunto imagem de f").

Para definir uma função f, é preciso conhecer o domínio D(f), o contradomínio CD(f) e a maneira pela qual cada x do domínio se corresponde com um único $y = f(x)$ do contradomínio. Cada função é dada por uma lei.

Observação

Verifique a seguir a ilustração de uma máquina representando a ideia de função. A máquina tem uma entrada para a matéria-prima (conjunto domínio) e tem uma saída para o produto final (conjunto imagem).

Reflita

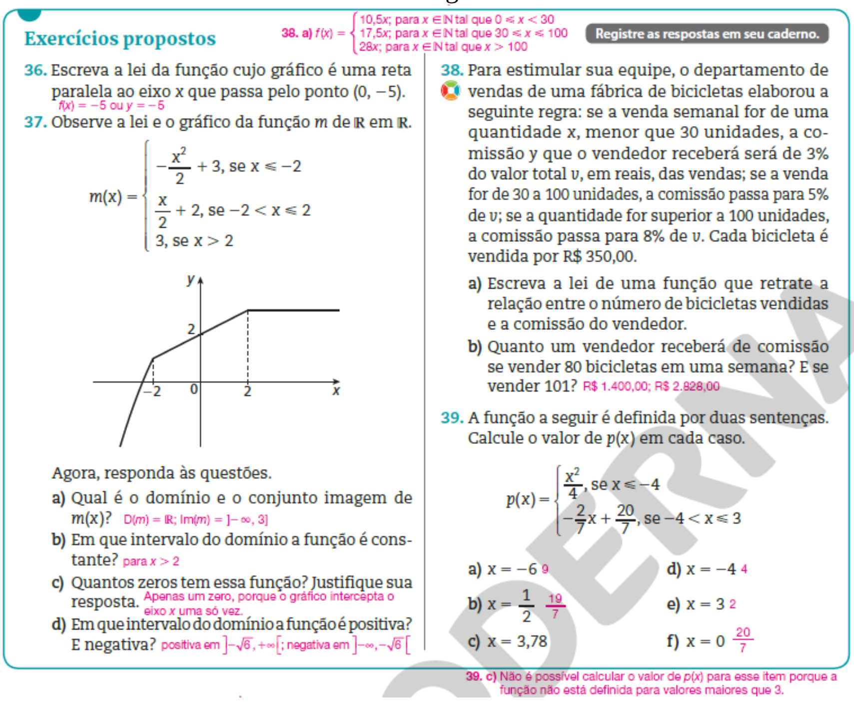
Para toda função $f: A \to B$, tem-se Im(f) = B?

Não, pois em uma função podem existir elementos de B sem correspondentes em A.

Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 1 (2020).

Quanto às atividades e exercícios, há uma de *Exercícios Resolvidos* e outra de *Exercícios Propostos*, logo após os textos de apresentação de cada conteúdo. No final de cada capítulo, há *Exercícios Complementares*, divididos em exercícios de *aplicação*, de *aprofundamento* e *desafio*, em grau crescente de complexidade. As atividades são formatadas em textos de duas colunas. As figuras a seguir são recortes de páginas com exemplos de atividades propostas:

Figura 24 – Exemplo de Exercícios propostos do Capítulo 3, Volume 1, da obra Conexões Matemática e suas Tecnologias



Exercícios propostos

38. a) $f(x) = \begin{cases} 10{,}5x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leqslant x < 30 \\ 17{,}5x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 30 \leqslant x \leqslant 100 \\ 28x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x > 100 \end{cases}$

Registre as respostas em seu caderno.

36. Escreva a lei da função cujo gráfico é uma reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto $(0, -5)$. $f(x) = -5$ ou $y = -5$

37. Observe a lei e o gráfico da função m de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

$$m(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + 3, \text{ se } x \leqslant -2 \\ \dfrac{x}{2} + 2, \text{ se } -2 < x \leqslant 2 \\ 3, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

Agora, responda às questões.

a) Qual é o domínio e o conjunto imagem de $m(x)$? $D(m) = \mathbb{R}$; $Im(m) =]-\infty, 3]$

b) Em que intervalo do domínio a função é constante? para $x > 2$

c) Quantos zeros tem essa função? Justifique sua resposta. Apenas um zero, porque o gráfico intercepta o eixo x uma só vez.

d) Em que intervalo do domínio a função é positiva? E negativa? positiva em $]-\sqrt{6}, +\infty[$; negativa em $]-\infty, -\sqrt{6}[$

38. Para estimular sua equipe, o departamento de vendas de uma fábrica de bicicletas elaborou a seguinte regra: se a venda semanal for de uma quantidade x, menor que 30 unidades, a comissão y que o vendedor receberá será de 3% do valor total v, em reais, das vendas; se a venda for de 30 a 100 unidades, a comissão passa para 5% de v; se a quantidade for superior a 100 unidades, a comissão passa para 8% de v. Cada bicicleta é vendida por R$ 350,00.

a) Escreva a lei de uma função que retrate a relação entre o número de bicicletas vendidas e a comissão do vendedor.

b) Quanto um vendedor receberá de comissão se vender 80 bicicletas em uma semana? E se vender 101? R$ 1.400,00; R$ 2.828,00

39. A função a seguir é definida por duas sentenças. Calcule o valor de $p(x)$ em cada caso.

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, \text{ se } x \leqslant -4 \\ -\dfrac{2}{7}x + \dfrac{20}{7}, \text{ se } -4 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

a) $x = -6$ 9

b) $x = \frac{1}{2}$ $\frac{19}{7}$

c) $x = 3{,}78$

d) $x = -4$ 4

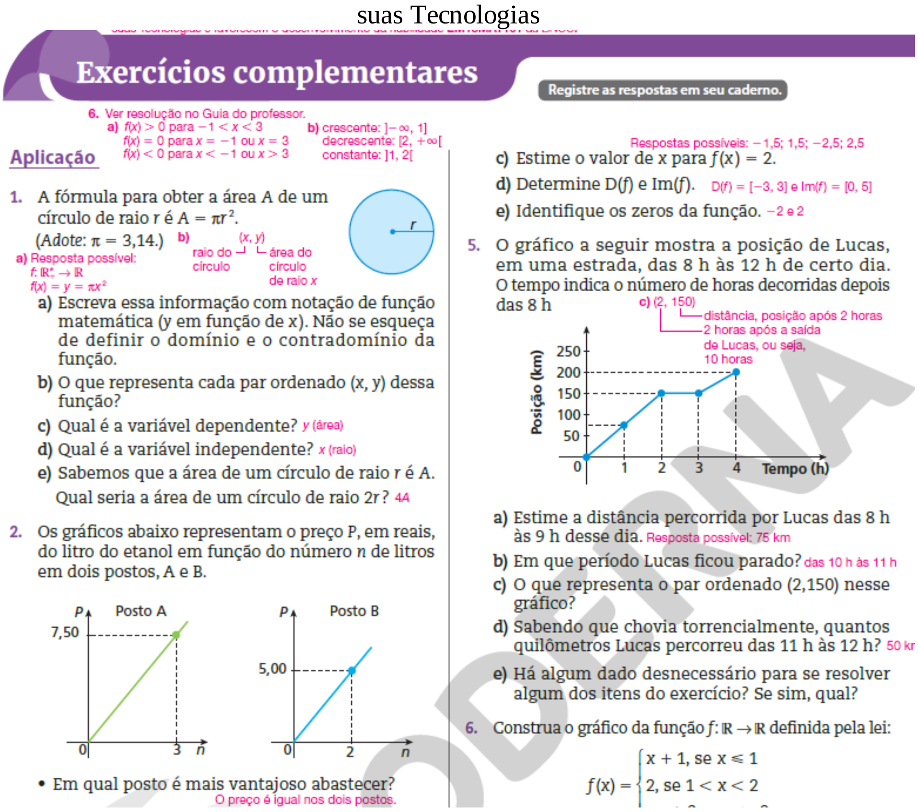
e) $x = 3$ 2

f) $x = 0$ $\frac{20}{7}$

39. c) Não é possível calcular o valor de $p(x)$ para esse item porque a função não está definida para valores maiores que 3.

Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 1 (2020).

Figura 25 – Exemplo de Exercícios complementares do Capítulo 3, Volume 1, da obra Conexões Matemática e suas Tecnologias



Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

6. Ver resolução no Guia do professor.
a) $f(x) > 0$ para $-1 < x < 3$; $f(x) = 0$ para $x = -1$ ou $x = 3$; $f(x) < 0$ para $x < -1$ ou $x > 3$
b) crescente: $]-\infty, 1]$; decrescente: $[2, +\infty[$; constante: $]1, 2[$

Aplicação

1. A fórmula para obter a área A de um círculo de raio r é $A = \pi r^2$. (Adote: $\pi = 3{,}14$.)

a) Resposta possível: $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$; $f(x) = y = \pi x^2$
b) (x, y): raio do círculo; área do círculo de raio x

a) Escreva essa informação com notação de função matemática (y em função de x). Não se esqueça de definir o domínio e o contradomínio da função.

b) O que representa cada par ordenado (x, y) dessa função?

c) Qual é a variável dependente? y (área)

d) Qual é a variável independente? x (raio)

e) Sabemos que a área de um círculo de raio r é A. Qual seria a área de um círculo de raio $2r$? 4A

2. Os gráficos abaixo representam o preço P, em reais, do litro do etanol em função do número n de litros em dois postos, A e B.

• Em qual posto é mais vantajoso abastecer? O preço é igual nos dois postos.

Respostas possíveis: $-1{,}5$; $1{,}5$; $-2{,}5$; $2{,}5$

c) Estime o valor de x para $f(x) = 2$.

d) Determine $D(f)$ e $Im(f)$. $D(f) = [-3, 3]$ e $Im(f) = [0, 5]$

e) Identifique os zeros da função. -2 e 2

5. O gráfico a seguir mostra a posição de Lucas, em uma estrada, das 8 h às 12 h de certo dia. O tempo indica o número de horas decorridas depois das 8 h

c) (2, 150) distância, posição após 2 horas; 2 horas após a saída de Lucas, ou seja, 10 horas

a) Estime a distância percorrida por Lucas das 8 h às 9 h desse dia. Resposta possível: 75 km

b) Em que período Lucas ficou parado? das 10 h às 11 h

c) O que representa o par ordenado (2,150) nesse gráfico?

d) Sabendo que chovia torrencialmente, quantos quilômetros Lucas percorreu das 11 h às 12 h? 50 km

e) Há algum dado desnecessário para se resolver algum dos itens do exercício? Se sim, qual?

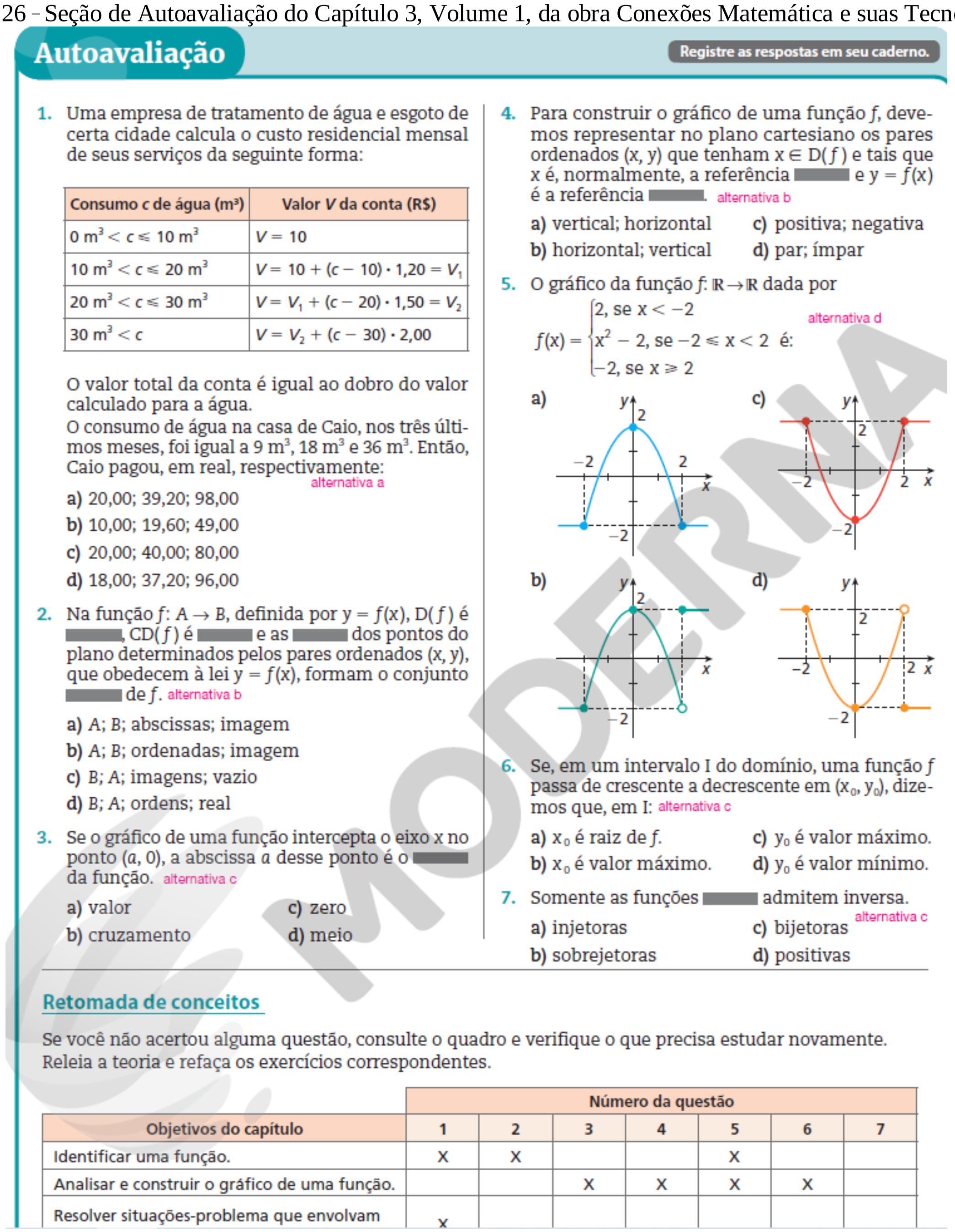
6. Construa o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2, \text{ se } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 1 (2020).

No final de cada capítulo, há uma seção de *Autoavaliação*, com algumas questões, em um quadro, relacionando cada questão com o objetivo listado na abertura do capítulo, e uma seção chamada de *Compreensão de Texto*, com textos extraídos de mídias, relacionados aos assuntos estudados, para desenvolvimento da competência leitora. As figuras a seguir mostram exemplos de recortes das seções citadas.

Figura 26 – Seção de Autoavaliação do Capítulo 3, Volume 1, da obra Conexões Matemática e suas Tecnologias



Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Uma empresa de tratamento de água e esgoto de certa cidade calcula o custo residencial mensal de seus serviços da seguinte forma:

Consumo c de água (m³)	Valor V da conta (R$)
$0\ m^3 < c \leq 10\ m^3$	$V = 10$
$10\ m^3 < c \leq 20\ m^3$	$V = 10 + (c - 10) \cdot 1{,}20 = V_1$
$20\ m^3 < c \leq 30\ m^3$	$V = V_1 + (c - 20) \cdot 1{,}50 = V_2$
$30\ m^3 < c$	$V = V_2 + (c - 30) \cdot 2{,}00$

O valor total da conta é igual ao dobro do valor calculado para a água.
O consumo de água na casa de Caio, nos três últimos meses, foi igual a 9 m³, 18 m³ e 36 m³. Então, Caio pagou, em real, respectivamente: alternativa a

a) 20,00; 39,20; 98,00
b) 10,00; 19,60; 49,00
c) 20,00; 40,00; 80,00
d) 18,00; 37,20; 96,00

2. Na função $f: A \rightarrow B$, definida por $y = f(x)$, $D(f)$ é ____, $CD(f)$ é ____ e as ____ dos pontos do plano determinados pelos pares ordenados (x, y), que obedecem à lei $y = f(x)$, formam o conjunto ____ de f. alternativa b

a) A; B; abscissas; imagem
b) A; B; ordenadas; imagem
c) B; A; imagens; vazio
d) B; A; ordens; real

3. Se o gráfico de uma função intercepta o eixo x no ponto $(a, 0)$, a abscissa a desse ponto é o ____ da função. alternativa c

a) valor
b) cruzamento
c) zero
d) meio

4. Para construir o gráfico de uma função f, devemos representar no plano cartesiano os pares ordenados (x, y) que tenham $x \in D(f)$ e tais que x é, normalmente, a referência ____ e $y = f(x)$ é a referência ____. alternativa b

a) vertical; horizontal
b) horizontal; vertical
c) positiva; negativa
d) par; ímpar

5. O gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x < -2 \\ x^2 - 2, \text{ se } -2 \leq x < 2 \\ -2, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$$

é: alternativa d

a) b) c) d)

6. Se, em um intervalo I do domínio, uma função f passa de crescente a decrescente em (x_0, y_0), dizemos que, em I: alternativa c

a) x_0 é raiz de f.
b) x_0 é valor máximo.
c) y_0 é valor máximo.
d) y_0 é valor mínimo.

7. Somente as funções ____ admitem inversa. alternativa c

a) injetoras
b) sobrejetoras
c) bijetoras
d) positivas

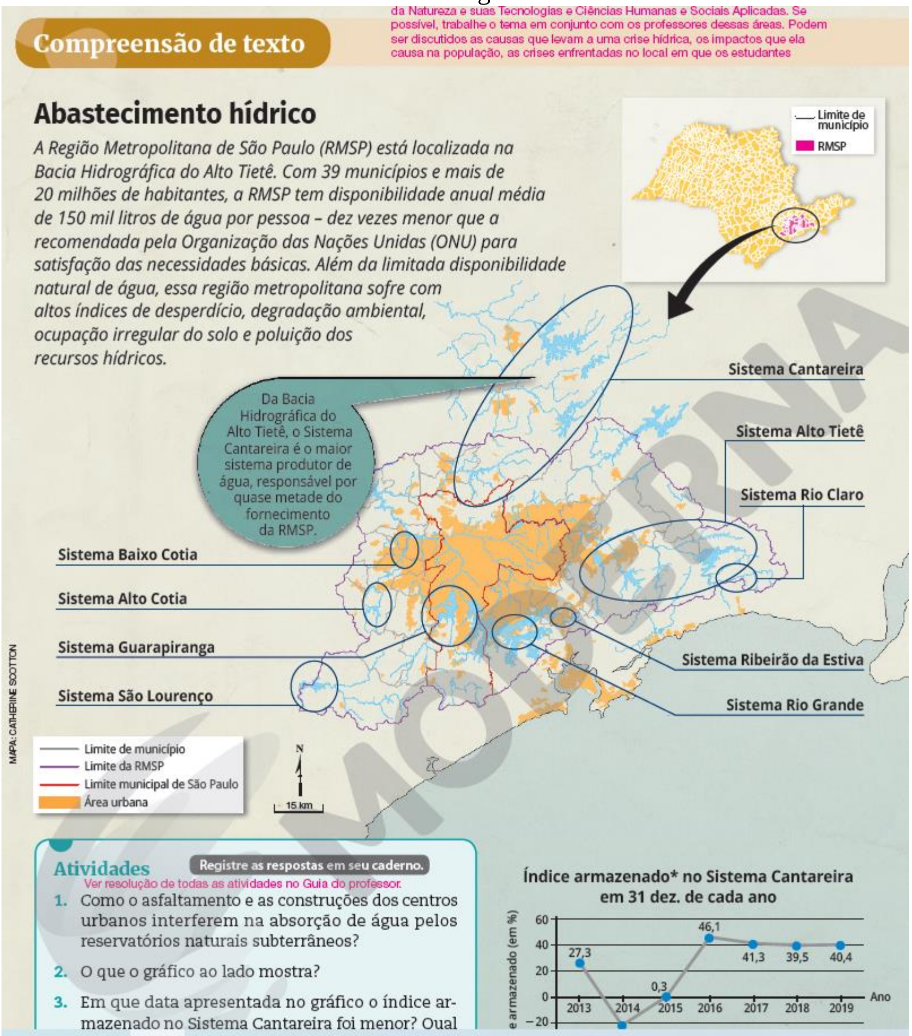
Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão						
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7
Identificar uma função.	X	X			X		
Analisar e construir o gráfico de uma função.			X	X	X	X	
Resolver situações-problema que envolvam	X						

Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 1 (2020).

Figura 27 – Seção Compreensão de texto do Capítulo 3, Volume 1, da obra Conexões Matemática e suas Tecnologias



Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 1 (2020).

No final de cada volume, há três seções extras. Uma chamada *Pesquisa e Ação*, que propõe uma atividade prática para realização em grupos, relacionada a algum conteúdo abordado no volume. O objetivo é que os estudantes pesquisem e elaborem uma apresentação para a turma. Há, ainda, uma seção de *Educação Financeira*, com atividades que visam promover atitudes conscientes no planejamento e uso de recursos financeiros. E uma seção chamada *Ampliando os Conhecimentos*, com sugestões de livros, mídias digitais e visitas a museus, cujo objetivo é o incentivo à leitura e à consulta a outras fontes de informação. As figuras a seguir são recortes das seções citadas que estão no final do Volume 1 da obra Conexões Matemática e suas Tecnologias:

Figura 28 – Seção Educação Financeira, do Volume 1, da obra Conexões Matemática e suas Tecnologias

Educação financeira — **Orçamento e planejamento financeiro**

Para começar e pensar

Vamos refletir sobre como gastar e economizar dinheiro. Para isso, responda às questões a seguir.

1. Você costuma anotar todos os seus gastos? Se sim, você acha esse tipo de atitude importante? Justifique sua resposta.
2. Em que você mais gasta? Em que poderia gastar menos?
3. Observe três maneiras de compor a mesma quantia.

Agora, reflita e responda: qual composição de cédulas você escolheria pensando em evitar gastar o dinheiro por mais tempo? Ou a escolha seria indiferente? Justifique suas respostas.

4. É o mês do seu aniversário e, por isso, você recebeu uma quantia em dinheiro.
   a) O que você faz assim que recebe o dinheiro?

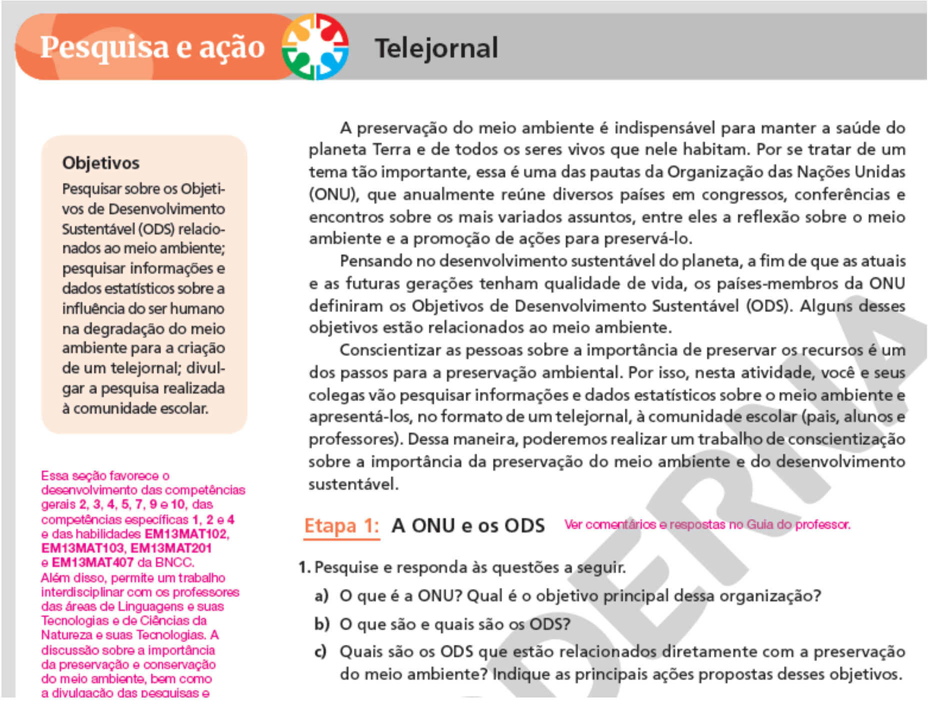
Objetivos

Analisar um orçamento familiar; listar e classificar as despesas e as receitas; planejar a redução de despesas; considerar e compreender situações de imprevistos; distinguir comportamentos positivos de comportamentos negativos no ato de comprar.

Essa seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **4, 6, 9 e 10**, as competências específicas **1, 2 e 4** e a habilidade **EM13MAT203** da BNCC. Além disso as situações, atividades e discussões propostas tratam dos temas contemporâneos: **vida familiar e social, educação financeira e educação para o consumo.** Ver comentários e respostas no Guia do professor.

Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 1 (2020).

Figura 29 – Seção Pesquisa e ação, do Volume 1, da obra Conexões Matemática e suas Tecnologias



Pesquisa e ação — **Telejornal**

Objetivos

Pesquisar sobre os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) relacionados ao meio ambiente; pesquisar informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal; divulgar a pesquisa realizada à comunidade escolar.

Essa seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **2, 3, 4, 5, 7, 9 e 10**, das competências específicas **1, 2 e 4** e das habilidades **EM13MAT102, EM13MAT103, EM13MAT201** e **EM13MAT407** da BNCC. Além disso, permite um trabalho interdisciplinar com os professores das áreas de Linguagens e suas Tecnologias e de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A discussão sobre a importância da preservação e conservação do meio ambiente, bem como a divulgação das pesquisas e

A preservação do meio ambiente é indispensável para manter a saúde do planeta Terra e de todos os seres vivos que nele habitam. Por se tratar de um tema tão importante, essa é uma das pautas da Organização das Nações Unidas (ONU), que anualmente reúne diversos países em congressos, conferências e encontros sobre os mais variados assuntos, entre eles a reflexão sobre o meio ambiente e a promoção de ações para preservá-lo.

Pensando no desenvolvimento sustentável do planeta, a fim de que as atuais e as futuras gerações tenham qualidade de vida, os países-membros da ONU definiram os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS). Alguns desses objetivos estão relacionados ao meio ambiente.

Conscientizar as pessoas sobre a importância de preservar os recursos é um dos passos para a preservação ambiental. Por isso, nesta atividade, você e seus colegas vão pesquisar informações e dados estatísticos sobre o meio ambiente e apresentá-los, no formato de um telejornal, à comunidade escolar (pais, alunos e professores). Dessa maneira, poderemos realizar um trabalho de conscientização sobre a importância da preservação do meio ambiente e do desenvolvimento sustentável.

Etapa 1: A ONU e os ODS Ver comentários e respostas no Guia do professor.

1. Pesquise e responda às questões a seguir.
   a) O que é a ONU? Qual é o objetivo principal dessa organização?
   b) O que são e quais são os ODS?
   c) Quais são os ODS que estão relacionados diretamente com a preservação do meio ambiente? Indique as principais ações propostas desses objetivos.

Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 1 (2020).

Figura 30 – Seção Ampliando os conhecimentos, do Volume 1, da obra Conexões Matemática e suas Tecnologias

Ampliando os conhecimentos

As indicações desta seção podem ampliar os conhecimentos dos alunos em relação a assuntos vistos na obra, em relação à Matemática em geral, ou em relação a outros assuntos para a formação integral do indivíduo. Devemos lembrar, porém, que cada referência baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre outras.

Livros

REPRODUÇÃO

A dama ou o tigre? E outros problemas lógicos
Raymond Smullyan
Rio de Janeiro: Zahar, 2015.
Nesse livro, o autor nos convida a desvendar incríveis problemas e enigmas que envolvem raciocínio lógico-matemático. A leitura é conduzida por personagens diferentes e divertidos que participam de histórias que surpreendem pelos desafios propostos ao leitor e por suas resoluções.

REPRODUÇÃO

O caderno secreto de Descartes
Amir D. Aczel
Rio de Janeiro: Zahar, 2007.
O plano cartesiano é também conhecido por sistema de coordenadas cartesianas. O termo **cartesiano** vem do nome do idealizador desse sistema de localização de pontos no plano, o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), considerado por muitos o pai da Filosofia moderna. Com um misto de biografia e aventura investigativa, o autor retrata a infância e a formação de Descartes e os encontros com filósofos e matemáticos que influenciaram seu pensamento. Além disso, apresenta controvérsias religiosas e políticas da época, escritos não publicados do filósofo e as circunstâncias

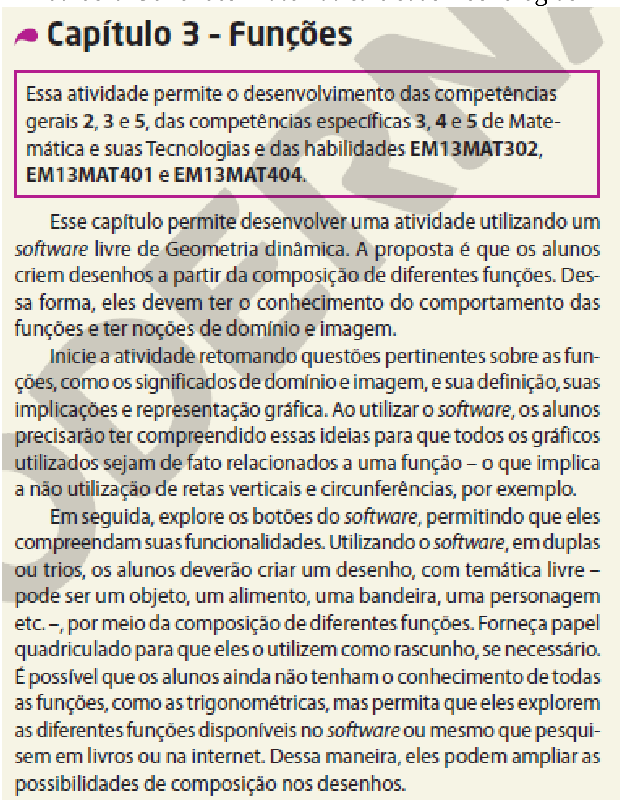
Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 1 (2020).

No final de cada volume, elenca as respostas de todas as atividades propostas e as referências bibliográficas.

Quanto ao Manual do Professor, foi dividido em duas partes, denominadas parte geral e parte específica. Na parte geral, começa enumerando as competências gerais, as competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias. Na sequência, traz algumas informações a respeito de metodologias ativas, da importância da matemática, das tecnologias digitais e sua relação com a matemática, de temas contemporâneos transversais, da gestão e da inclusão em sala de aula. No final das orientações gerais, há um texto a respeito de avaliação, uma sugestão de cronograma e indicações de consulta de livros, artigos e periódicos para o professor.

Na parte específica, começa enumerando as competências e habilidades da BNCC trabalhadas em cada volume. Na sequência, sugere ampliações de atividades e de avaliação, por meio de questões, para cada capítulo do volume. A figura a seguir é um recorte de sugestão de atividade para o Capítulo 3, Volume 1, no manual do professor, da obra Conexões Matemática e suas Tecnologias:

Figura 31 – Sugestão de ampliação de atividades proposta no manual do professor para o Capítulo 3, Volume 1, da obra Conexões Matemática e suas Tecnologias



Capítulo 3 - Funções

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2**, **3** e **5**, das competências específicas **3**, **4** e **5** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT302**, **EM13MAT401** e **EM13MAT404**.

Esse capítulo permite desenvolver uma atividade utilizando um *software* livre de Geometria dinâmica. A proposta é que os alunos criem desenhos a partir da composição de diferentes funções. Dessa forma, eles devem ter o conhecimento do comportamento das funções e ter noções de domínio e imagem.

Inicie a atividade retomando questões pertinentes sobre as funções, como os significados de domínio e imagem, e sua definição, suas implicações e representação gráfica. Ao utilizar o *software*, os alunos precisarão ter compreendido essas ideias para que todos os gráficos utilizados sejam de fato relacionados a uma função – o que implica a não utilização de retas verticais e circunferências, por exemplo.

Em seguida, explore os botões do *software*, permitindo que eles compreendam suas funcionalidades. Utilizando o *software*, em duplas ou trios, os alunos deverão criar um desenho, com temática livre – pode ser um objeto, um alimento, uma bandeira, uma personagem etc. –, por meio da composição de diferentes funções. Forneça papel quadriculado para que eles o utilizem como rascunho, se necessário. É possível que os alunos ainda não tenham o conhecimento de todas as funções, como as trigonométricas, mas permita que eles explorem as diferentes funções disponíveis no *software* ou mesmo que pesquisem em livros ou na internet. Dessa maneira, eles podem ampliar as possibilidades de composição nos desenhos.

Fonte: Manual do professor da obra Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 1 (2020).

No final, o Manual do Professor apresenta as resoluções comentadas de todos os exercícios e atividades dos capítulos de cada volume, bem como os comentários das seções extras de *Educação Financeira* e de *Pesquisa e Ação.*

4.1.3 Prisma Matemática

O Volume 1 – Conjuntos e Funções da obra Prisma Matemática, está dividido em três capítulos: Conjuntos, Função Afim e Função Quadrática. Os capítulos que fazem parte do *corpus* dessa pesquisa são o Capítulo 2 – Função Afim e o Capítulo 3 – Função Quadrática. Cada capítulo é constituído de textos, imagens e seções de atividades.

Nas páginas de *Abertura*, a obra exibe textos e/ou imagens relacionados ao conteúdo do capítulo. No boxe lateral da abertura, a obra enumera as competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC que se pretende desenvolver no capítulo. A figura abaixo é um recorte da página de abertura do Capítulo 3 – Função Quadrática.

Figura 32 – Recorte da página de abertura do Capítulo 3, Volume 1, da obra Prisma Matemática

CAPÍTULO 3

Função quadrática

A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- **Competências gerais da BNCC:** 1, 2, 4, 5 e 7
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
- Competência específica 1: EM13MAT101
- Competência específica 3: EM13MAT302
- Competência específica 4: EM13MAT402
- Competência específica 5: EM13MAT502, EM13MAT503, EM13MAT510
- **Competência específica da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
- Competência específica 3

O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

Quando falamos de produção e venda de um produto ou serviço, seja de uma grande, média ou pequena empresa, é fundamental estudar como essa atividade empresarial vai gerar lucro e como esse lucro conseguirá manter as atividades e os negócios da empresa.

Nesse sentido, muitos profissionais são envolvidos para analisar custos, identificar maneiras mais eficientes de produção, fazer pesquisas de mercado, pensar em embalagens mais econômicas, propor formas sustentáveis de produção etc. Para grande parte dessas atividades, é imprescindível o uso de conhecimento matemático para analisar a situação e alcançar resultados satisfatórios.

O estudo de **função quadrática** e de outros conceitos relacionados pode nos auxiliar a compreender como o conhecimento matemático é utilizado para modelar situações como essas, além de outras que vivenciamos em nosso dia a dia.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Na sequência, os estudantes são convidados a responder questões, individualmente ou em grupo, com o objetivo de provocar reflexões a respeito do contexto apresentado, conforme se observa na figura a seguir:

Figura 33 – Perguntas relacionadas à situação apresentada na abertura do Capítulo 3, Volume 1, da obra Prisma Matemática

Agora reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada item. NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. O que vocês entendem por lucro? Resposta pessoal.
2. Na opinião de vocês, para obter maior lucro, é necessário apenas aumentar a quantidade de bens produzidos por uma empresa? Justifique sua resposta. Resposta pessoal.
3. Vocês acreditam que há um lucro máximo a ser atingido em um negócio ou que ele aumenta indefinidamente? Pesquisem sobre o assunto e discutam com a turma. Resposta pessoal.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Após as perguntas, a obra didática expõe textos de uma coluna com os conteúdos matemáticos relacionados. Ao longo dos textos, a obra pode conter boxes laterais com informações curtas e objetivas. O boxe *Glossário* contém explicações de termos ou símbolos matemáticos ou de termos ou palavras da língua portuguesa. O boxe *Pense e Responda* suscita, por meio de questões, a participação e a interação dos estudantes em investigações e reflexões sobre o conteúdo estudado. Além desses, há o boxe *Saiba que*, com uma dica interessante ou informação relevante a respeito do conteúdo. A figura a seguir é um recorte de uma página com a definição de função quadrática e um boxe lateral:

Figura 34 – Exemplo de texto de apresentação de conceitos matemáticos e de boxes laterais do Capítulo 3, Volume 1, da obra Prisma Matemática

Função quadrática

A função quadrática também pode ser denominada função polinomial do 2º grau, pois as relações entre a variável dependente e a variável independente são expressas por polinômios do 2º grau.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais e $a \neq 0$, é chamada de **função quadrática**.

Os números a, b e c são os **coeficientes** (ou parâmetros) da função, sendo que a é o coeficiente do termo x^2, b é o coeficiente do termo x e c é o coeficiente independente.

Porque, para ser um polinômio do 2º grau, é preciso que exista o termo em x^2. Caso tivéssemos $a = 0$, o termo ax^2 se anularia e teríamos uma função definida por $f(x) = bx + c$, que é a lei de uma função afim.

PENSE E RESPONDA

Por que precisamos cumprir a condição $a \neq 0$ para definir a função quadrática?

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Quanto às atividades e exercícios, há uma de *Atividades Resolvidas* e outra de *Atividades* formatadas em duas colunas, logo após os textos de apresentação dos conteúdos. As figuras a seguir são exemplos dessas seções de atividades:

Figura 35 – Exemplo de Atividades Resolvidas do Capítulo 3, Volume 1, da obra Prisma Matemática

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Em uma marcenaria, o número N de móveis fabricados no mês varia em função do número x de funcionários que trabalham na marcenaria, de acordo com uma função quadrática dada por $N(x) = x^2 + 2x$.

ANTONIODIAZ/SHUTTERSTOCK.COM

▪ Algumas profissões exigem o uso de equipamentos de proteção individual (EPI) que auxiliam na prevenção de acidentes de trabalho.

Quantos móveis podem ser produzidos em um mês quando estão trabalhando 12 funcionários na marcenaria?

Resolução

Para responder à questão, precisamos calcular $N(12)$.

Nesse caso, temos:

$N(12) = 12^2 + 2 \cdot 12 = 144 + 24 = 168$

Portanto, em um mês, podem ser produzidos 168 móveis quando há 12 funcionários trabalhando na marcenaria.

As equações (I) e (II) formam um sistema de equações:

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ a - b = -4 \end{cases}$$

Adicionando membro a membro essas equações, temos:

$2a = -6 \Rightarrow a = -3$

Substituindo $a = -3$ em (I), temos:

$-3 + b = -2 \Rightarrow b = 1$

Como $a = -3$, $b = 1$ e $c = 5$, a lei de formação da função f é $f(x) = -3x^2 + x + 5$.

Para calcular $f(5)$, substituímos x por 5 na lei da função f. Assim:

$f(5) = -3 \cdot (5)^2 + 5 + 5 = -65$

Portanto, $f(5) = -65$.

3. Seja f uma função quadrática dada por $f(x) = -2x^2 + 10x$. Determine:

a) $f(3) + f(-1) - f(-2)$;

b) os valores de x, se existirem, para os quais $f(x) = 8$.

Resolução

a) Inicialmente, calculamos os valores de $f(3)$, $f(-1)$ e $f(-2)$.

$f(3) = (-2) \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 = -18 + 30 = 12$

$f(-1) = (-2) \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1) = -2 - 10 = -12$

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Figura 36 – Exemplo de Atividades Resolvidas do Capítulo 3, Volume 1, da obra Prisma Matemática

ATIVIDADES NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. c) Foram obtidos dois valores de tempo decorrido porque um deles é verificado quando o objeto está subindo e o outro, quando o objeto está descendo.

5. d) $x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{17}{2}$

1. Um objeto é lançado para cima, a partir do solo, e a altura h, em metro, varia em função do tempo t, em segundo, decorrido após o lançamento. Supondo que a lei dessa função seja $h(t) = 30t - 5t^2$, responda:

a) Qual é a altura do objeto 3 segundos após o lançamento? 45 metros

b) Quanto tempo após o lançamento o objeto encontra-se a 40 metros de altura? Após 2 segundos ou após 4 segundos.

c) Como podemos interpretar o resultado obtido no item **b**?

2. Considere a função definida por $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e calcule:

a) $f(0)$; 4

b) $f(-4)$; 40

c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $\frac{7}{4}$

d) $f(\sqrt{2})$. $6 - 5\sqrt{2}$

3. (Unifesp-SP) A tabela mostra a distância s em

5. Dada a função $f(x) = -x^2 + 9x - 8$, determine os valores reais de x para que se tenha:

a) $f(x) = 0$; $x = 1$ ou $x = 8$

b) $f(x) = 10$; $x = 3$ ou $x = 6$

c) $f(x) = 11$; $x = \frac{9 \pm \sqrt{5}}{2}$

d) $f(x) = -\frac{15}{4}$.

6. (UFPR) A distância que um automóvel percorre a partir do momento em que um condutor pisa no freio até a parada total do veículo é chamada de distância de frenagem. Suponha que a distância de frenagem d, em metros, possa ser calculada pela fórmula $d(v) = \frac{1}{120}(v^2 + 8v)$, sendo v a velocidade do automóvel, em quilômetros por hora, no momento em que o condutor pisa no freio.

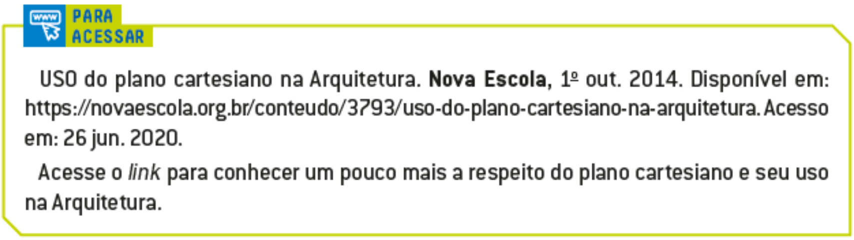
a) Qual é a distância de frenagem de um automóvel que se desloca a uma velocidade de 40 km/h? 16 m

b) A que velocidade um automóvel deve estar para que sua distância de frenagem seja de 53,2 m? 76 km/h

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

A obra apresenta também um boxe chamado *Para ler · Para assistir · Para acessar · Para ouvir*, que sugere ao estudante livros, links, podcasts, sites, entre outras mídias, com o objetivo de complementar os assuntos do capítulo. A figura a seguir é um exemplo de um desses boxes, que está no Capítulo 2 – Função Afim:

Figura 37 – Boxe Para Acessar do Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática



PARA ACESSAR

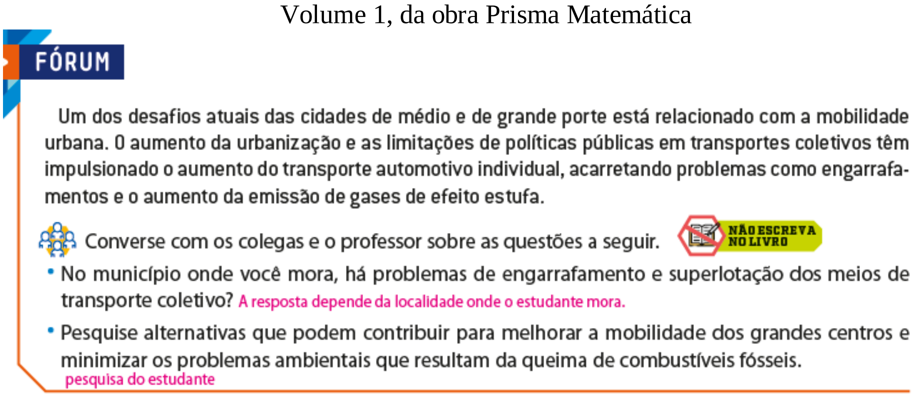
USO do plano cartesiano na Arquitetura. **Nova Escola**, 1º out. 2014. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/3793/uso-do-plano-cartesiano-na-arquitetura. Acesso em: 26 jun. 2020.

Acesse o *link* para conhecer um pouco mais a respeito do plano cartesiano e seu uso na Arquitetura.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Quanto às seções, a obra contém uma seção chamada *Fórum*, na qual os estudantes têm a oportunidade de trocar e compartilhar ideias com seus colegas e o professor a partir de temas contemporâneos. Após as atividades de cada capítulo, a obra didática pode trazer as seguintes seções: história da matemática, explorando a tecnologia e conexões. A seção *História da Matemática* traz textos de história da matemática relacionados aos conteúdos que estão sendo estudados. A seção *Explorando a tecnologia* busca aprofundar os conhecimentos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, com ou sem o auxílio de tecnologias digitais. E a seção *Conexões* tem por finalidade desenvolver a competência leitora, a cidadania e o senso crítico do estudante, por meio de atividades em grupo que propõem investigação e discussão com os colegas. As figuras a seguir ilustram as seções citadas.

Figura 38 – Seção Fórum apresentada após uma aplicação da função afim – a corrida de táxi, do Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática



FÓRUM

Um dos desafios atuais das cidades de médio e de grande porte está relacionado com a mobilidade urbana. O aumento da urbanização e as limitações de políticas públicas em transportes coletivos têm impulsionado o aumento do transporte automotivo individual, acarretando problemas como engarrafamentos e o aumento da emissão de gases de efeito estufa.

Converse com os colegas e o professor sobre as questões a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

- No município onde você mora, há problemas de engarrafamento e superlotação dos meios de transporte coletivo? A resposta depende da localidade onde o estudante mora.
- Pesquise alternativas que podem contribuir para melhorar a mobilidade dos grandes centros e minimizar os problemas ambientais que resultam da queima de combustíveis fósseis. pesquisa do estudante

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Figura 39 – Recorte da Seção História da Matemática apresentada no Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Galileu Galilei

Leia a seguir um texto sobre Galileu Galilei e algumas de suas contribuições para a ciência. Observe a expressão que ele usou para descrever a relação entre a distância percorrida por um corpo em queda livre e o tempo de queda. Nessa lei, g é uma constante correspondente à aceleração gravitacional.

[...]

Galileu, filho de um nobre florentino empobrecido, nasceu em Pisa em 1564, no dia em que faleceu Michelangelo. Aos dezessete anos de idade foi encaminhado pelos pais à Universidade de Pisa para estudar medicina. Um dia, quando assistia a um serviço na Catedral de Pisa, seu espírito se distraiu observando o grande lustre de bronze suspenso da elevada abóbada. A lâmpada tinha sido posta para fora a fim de iluminar mais facilmente e, solta, oscilava para cá e para lá com amplitude que decrescia gradualmente. Usando as batidas de seu pulso para marcar o tempo, ele ficou surpreso ao verificar que o período de uma oscilação da lâmpada independia da amplitude do arco de oscilação. Posteriormente, por experiências, ele mostrou que o período de um pêndulo em movimento também independe do peso de sua massa oscilante, dependendo assim apenas do comprimento de sua haste. Relata-se que o interesse de Galileu pela ciência e pela matemática surgiu desse problema e foi estimulado, posteriormente, pela oportunidade de assistir a um curso de geometria na Universidade. Como resultado solicitou da família (e conseguiu) permissão para abandonar a medicina e dedicar-se à ciência e à matemática, campos para os quais possuía forte talento natural.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Figura 40 – Recorte da Seção Explorando a Tecnologia apresentada no Capítulo 3, Volume 1, da obra Prisma Matemática

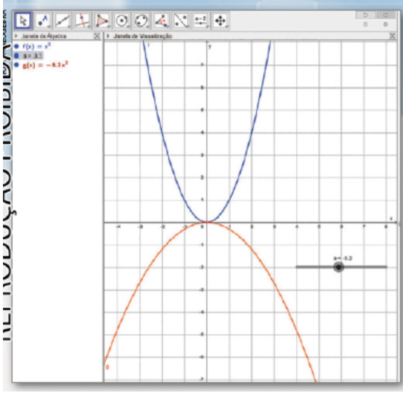
> EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Os coeficientes da função quadrática e a parábola

Vimos que o sinal do coeficiente a indica se a concavidade da parábola correspondente ao gráfico de uma função quadrática está voltada para cima ou para baixo.

Agora, vamos utilizar o **GeoGebra** para analisar como outras mudanças nos coeficientes da lei de uma função quadrática influenciam no gráfico correspondente.

Para isso, realize, inicialmente, a sequência de passos a seguir.



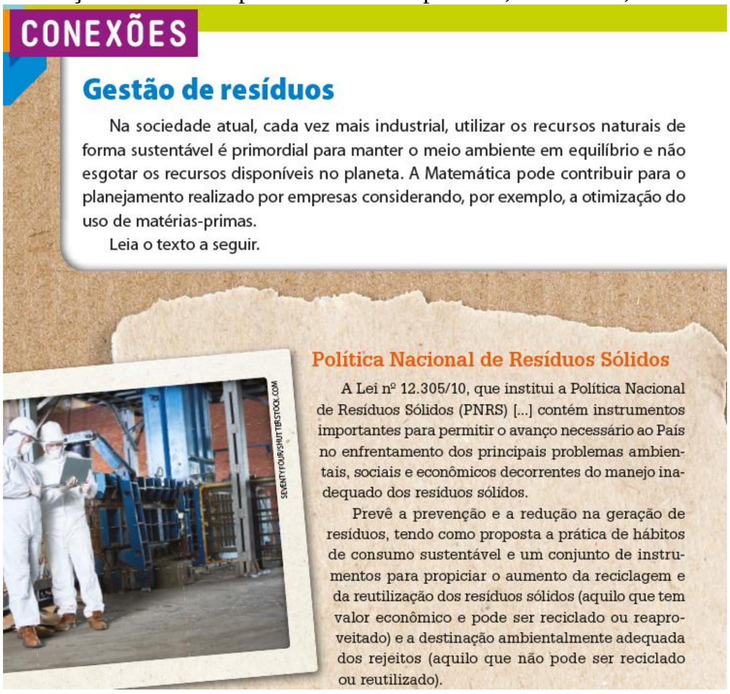
I. No **Campo de entrada** do **GeoGebra**, digite $f(x) = x$^2 e pressione ***Enter***.

II. No **Campo de entrada**, digite $g(x) = ax$^2 e pressione ***Enter***. Será exibida uma tela perguntando se você deseja criar um controle deslizante para o coeficiente a. Clique em **Criar controles deslizantes**. Altere a posição do ponto ao longo do controle para alterar o valor de a e observe o que acontece com o gráfico de g, comparando-o com o gráfico de f.

Gráfico de g quando $a = 0{,}3$.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Figura 41 – Recorte da Seção Conexões apresentada no Capítulo 3, Volume 1, da obra Prisma Matemática



CONEXÕES

Gestão de resíduos

Na sociedade atual, cada vez mais industrial, utilizar os recursos naturais de forma sustentável é primordial para manter o meio ambiente em equilíbrio e não esgotar os recursos disponíveis no planeta. A Matemática pode contribuir para o planejamento realizado por empresas considerando, por exemplo, a otimização do uso de matérias-primas.

Leia o texto a seguir.

Política Nacional de Resíduos Sólidos

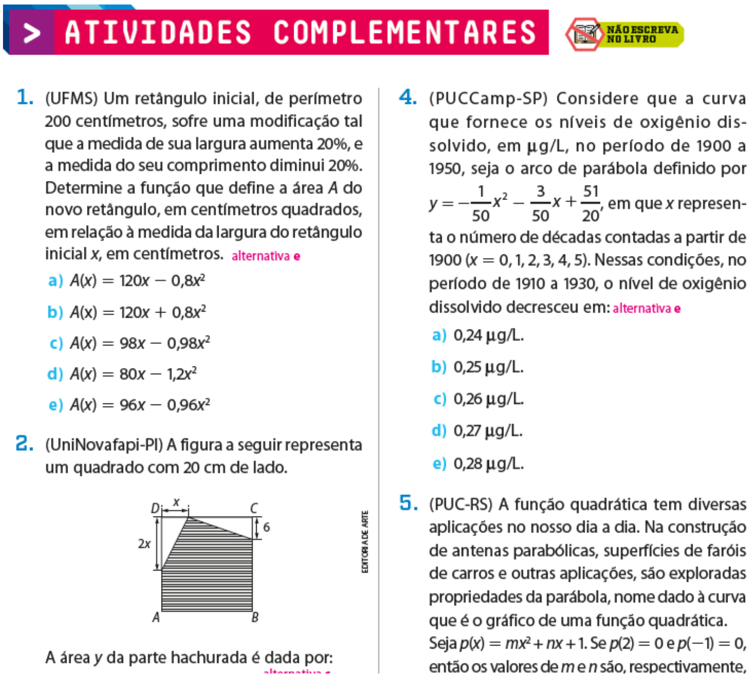
A Lei nº 12.305/10, que institui a Política Nacional de Resíduos Sólidos (PNRS) [...] contém instrumentos importantes para permitir o avanço necessário ao País no enfrentamento dos principais problemas ambientais, sociais e econômicos decorrentes do manejo inadequado dos resíduos sólidos.

Prevê a prevenção e a redução na geração de resíduos, tendo como proposta a prática de hábitos de consumo sustentável e um conjunto de instrumentos para propiciar o aumento da reciclagem e da reutilização dos resíduos sólidos (aquilo que tem valor econômico e pode ser reciclado ou reaproveitado) e a destinação ambientalmente adequada dos rejeitos (aquilo que não pode ser reciclado ou reutilizado).

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

No final de cada capítulo, há uma seção de *Atividades Complementares*, com questões de exames oficiais de vestibulares de todo o Brasil e do ENEM. Há ainda, por último, uma seção chamada *Para refletir,* com questões relacionadas ao conteúdo que suscitem uma reflexão sobre sua efetiva aprendizagem. As figuras a seguir são exemplos dessas seções:

Figura 42 – Recorte da Seção Atividades Complementares apresentada no Capítulo 3, Volume 1, da obra Prisma Matemática



> ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. (UFMS) Um retângulo inicial, de perímetro 200 centímetros, sofre uma modificação tal que a medida de sua largura aumenta 20%, e a medida do seu comprimento diminui 20%. Determine a função que define a área A do novo retângulo, em centímetros quadrados, em relação à medida da largura do retângulo inicial x, em centímetros. alternativa e

a) $A(x) = 120x - 0{,}8x^2$

b) $A(x) = 120x + 0{,}8x^2$

c) $A(x) = 98x - 0{,}98x^2$

d) $A(x) = 80x - 1{,}2x^2$

e) $A(x) = 96x - 0{,}96x^2$

2. (UniNovafapi-PI) A figura a seguir representa um quadrado com 20 cm de lado.

A área y da parte hachurada é dada por:

4. (PUCCamp-SP) Considere que a curva que fornece os níveis de oxigênio dissolvido, em µg/L, no período de 1900 a 1950, seja o arco de parábola definido por $y = -\frac{1}{50}x^2 - \frac{3}{50}x + \frac{51}{20}$, em que x representa o número de décadas contadas a partir de 1900 ($x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$). Nessas condições, no período de 1910 a 1930, o nível de oxigênio dissolvido decresceu em: alternativa e

a) 0,24 µg/L.

b) 0,25 µg/L.

c) 0,26 µg/L.

d) 0,27 µg/L.

e) 0,28 µg/L.

5. (PUC-RS) A função quadrática tem diversas aplicações no nosso dia a dia. Na construção de antenas parabólicas, superfícies de faróis de carros e outras aplicações, são exploradas propriedades da parábola, nome dado à curva que é o gráfico de uma função quadrática. Seja $p(x) = mx^2 + nx + 1$. Se $p(2) = 0$ e $p(-1) = 0$, então os valores de m e n são, respectivamente,

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Figura 43 – Recorte da Seção Para Refletir apresentada no Capítulo 3, Volume 1, da obra Prisma Matemática

PARA REFLETIR NÃO ESCREVA NO LIVRO

Neste Capítulo, vimos que as funções quadráticas podem ser utilizadas para modelar situações, bem como descrever alguns tipos de movimento e trajetórias estudados pela Física.

Estudamos o conceito matemático de função quadrática, representações gráficas, vértice da parábola, zeros da função quadrática, crescimento e decrescimento, valor máximo e valor mínimo que uma função quadrática pode assumir em um intervalo, estudo de sinais da função quadrática e inequação do 2º grau.

Nas páginas de abertura, foram apresentadas questões envolvendo a ideia de lucro com o intuito de verificar o seu conhecimento sobre o assunto. Depois de ter estudado o conteúdo deste Capítulo, você consegue reconhecer que esse percurso pode auxiliá-lo a responder tais questionamentos e propor outros?

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **3**:

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual(is)?
- Você consegue pensar em outras situações do dia a dia que envolvem a ideia de função quadrática?
- Você consegue identificar a relação entre o estudo de função quadrática e os conteúdos estudados na disciplina de Física ou de outra disciplina da área de Ciências da Natureza?
- Você percebe a importância do estudo de valor máximo e de valor mínimo como recurso para planejar formas de economizar e otimizar processos?
- Você identifica como poderá utilizar os conceitos estudados para analisar situações antes de tomar decisões e de resolver problemas do dia a dia? Respostas pessoais.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

No final do volume, traz as respostas de todas as atividades propostas no livro, o texto da BNCC com as competências gerais da Educação Básica e as competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas tecnologias e uma bibliografia comentada.

O Manual do Professor é intitulado de Orientações para o professor. Inicia com um texto informativo a respeito do Novo Ensino Médio e traz, na sequência, as competências gerais e os temas contemporâneos transversais da BNCC. Finaliza essa primeira parte com um breve texto a respeito do papel do professor como mediador de trabalhos interativos, visando à incorporação de atitudes e valores relacionados às competências emocionais.

Após essa parte inicial, o Manual do Professor traz as competências específicas e habilidades da BNCC para a área de matemática e suas tecnologias e, na sequência, apresenta textos curtos com breves informações: um sobre metodologias ativas, um do papel do professor de matemática e outro a respeito do pensamento computacional. Finaliza essa segunda parte com um texto a respeito de avaliação e a bibliografia comentada.

A parte final do Manual do Professor traz comentários e sugestões de abordagem para cada capítulo do volume. Inicia com uma sugestão de cronograma de aulas para os três capítulos do volume, conforme figura a seguir:

Figura 44 – Sugestão de cronograma de aulas para o Volume 1 da obra Prisma Matemática

Semana (5 aulas)	Capítulo	Tópicos
1ª	1	Abertura / Introdução / Conceitos iniciais
2ª	1	Igualdade de conjuntos / Operações entre conjuntos
3ª	1	Conjuntos numéricos: naturais, inteiros e racionais
4ª	1	Conjuntos numéricos: irracionais e reais / Explorando a tecnologia
5ª	1	Conexões / História da matemática / Conjuntos numéricos: complexos / Para refletir
6ª	2	Abertura / Introdução / A ideia de função / Definição de função
7ª	2	Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função / Gráfico de uma função / Conexões
8ª	2	Função afim
9ª	2	Gráfico da função afim / Explorando a tecnologia
10ª	2	Crescimento e decrescimento / Estudo do sinal da função afim / Inequações do 2º grau / História da Matemática / Para refletir
11ª	3	Abertura / Introdução / Função quadrática
12ª	3	Gráfico da função quadrática / Explorando a tecnologia
13ª	3	Zeros da função quadrática / Vértice da parábola
14ª	3	Crescimento e decrescimento / Valor mínimo e valor máximo / Imagem da função quadrática / Explorando a tecnologia
15ª	3	Conexões / Investigando o comportamento de variáveis / Estudo do sinal da função quadrática
16ª	3	Inequações do 2º grau / História da matemática / Para refletir

Fonte: Manual do professor da obra Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Na sequência, contempla orientações didáticas para cada capítulo. Inicia destacando as competências gerais, específicas, habilidades e temas contemporâneos transversais da BNCC relacionados ao capítulo. Depois, indica e sugere abordagens em aula para todas as seções de cada capítulo. A figura a seguir é um exemplo de orientações didáticas do Capítulo 2.

Figura 45 – Recorte de uma página de orientações didáticas do Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática

Função afim

Este tópico sobre o estudo da variação de grandezas e das representações algébricas e gráficas de funções polinomiais de 1º grau propicia o desenvolvimento das competências específicas **1**, **3**, **4** e **5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT302**, **EM13MAT401**, **EM13MAT501** e **EM13MAT510**.

O estudo inicia retomando a situação relacionada ao valor da corrida de táxi, apresentada no início do Capítulo, refletindo sobre a lei de formação para representar o preço. No primeiro boxe **Pense e responda**, pode ser necessário auxiliar os estudantes na escrita da lei de formação da função. Para isso, recomenda-se estimulá-los a observar qual valor é fixo e qual é variável, além de comparar com a situação apresentada. Também é oportuno retomar a pesquisa realizada no início do Capítulo sobre as tarifas de táxi no município onde moram, a fim de que escrevam sua lei de formação e possam comparar as leis obtidas para São Paulo e Porto Alegre.

No primeiro boxe **Pense e responda**, ainda, os estudantes devem determinar o preço cobrado por um corrida de 8 km, com base na lei de formação dada, e escrever uma nova lei de formação com base em informações sobre uma corrida em Porto Alegre que não cobre a tarifa por hora parada.

FÓRUM

Para aprofundar as discussões propostas, verifique a possibilidade de realizar uma parceria com os docentes da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas** para tratar de temas como urbanismo e políticas públicas. Além disso, uma parceria com os professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** pode contribuir para explorar outros aspectos sobre as fontes limpas de energia (composição, produção, facilidades, dificuldades, entre outros), propiciando, assim, o desenvolvimento das competências específicas **1**, **2** e **3** dessa área e permitindo abordar o Tema Contemporâneo Transversal **Educação Ambiental**. Toda a discussão proposta também favorece o trabalho com a competência geral **7**, pois o estudante é levado a argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, promovendo a consciência socioambiental.

Fonte: Manual do professor da obra Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Após as orientações, exibe a resolução de todas as atividades propostas no volume.

Em suma, o objetivo dessa seção foi proporcionar um panorama de cada obra que compõem o *corpus* dessa pesquisa, tanto para o leitor quanto para o pesquisador que, antes, visualiza a paisagem, para depois explorá-la. Essa seção encerrou o quarto objetivo específico desse estudo, que trata da descrição da forma como os livros didáticos que compõe o *corpus* apresentam os conteúdos de estudo de função afim e de função quadrática.

4.2 APRESENTAÇÃO DE CONTEXTOS

O panorama das obras que compõe o *corpus* evidenciou que, no início de cada capítulo, as obras didáticas descrevem situações contextualizadas e de aplicação dos conceitos matemáticos, na forma de textos e de imagens associadas, eventualmente, de perguntas.

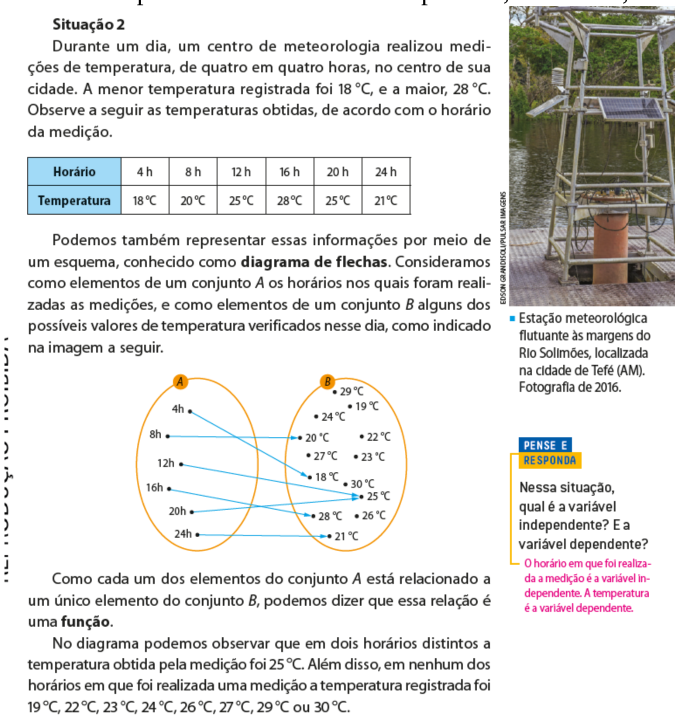
A obra Prisma Matemática apresenta contextos do cotidiano com relações de dependência entre grandezas, com o intuito de introduzir a ideia de *função*. Na introdução, cita a corrida de táxi e a relação de dependência entre o valor pago e a distância percorrida, a relação de dependência do valor pago e a quantidade de alimento que é colocada em um prato no restaurante de comida a quilo e a relação de dependência entre o valor de uma fatura de energia elétrica e a quantidade de energia consumida. A partir desses exemplos, explica o conceito de *variável dependente* e o de *variável independente* e as características comuns das situações citadas:

a) todos os valores que podem ser assumidos pela variável independente são associados a valores da variável dependente;

b) cada valor atribuído à variável independente está associado a um único valor da variável dependente.

Após, apresenta a ideia de função, comentando que uma *relação* que possui essas duas características é chamada de *função*. Na sequência, traz mais três situações em que quantifica as relações provenientes de contextos diferentes. Na situação 1, mostra uma tabela relacionando as tarifas vigentes em 31 de janeiro de 2020 para os serviços de envio de carta e cartão postal praticadas pelos Correios em função do peso em gramas. Na situação 2 (Figura 46), apresenta uma tabela relacionando a temperatura e o horário do dia em uma estação meteorológica. A partir da tabela, representa as situações por meio de um *diagrama de flechas* e retoma os conceitos de variável dependente e de variável independente com uma pergunta (seção Pense e Responda).

Figura 46 – Situação 2 de contexto apresentada no início do Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática



Situação 2

Durante um dia, um centro de meteorologia realizou medições de temperatura, de quatro em quatro horas, no centro de sua cidade. A menor temperatura registrada foi 18 °C, e a maior, 28 °C. Observe a seguir as temperaturas obtidas, de acordo com o horário da medição.

Horário	4 h	8 h	12 h	16 h	20 h	24 h
Temperatura	18 °C	20 °C	25 °C	28 °C	25 °C	21 °C

Podemos também representar essas informações por meio de um esquema, conhecido como **diagrama de flechas**. Consideramos como elementos de um conjunto *A* os horários nos quais foram realizadas as medições, e como elementos de um conjunto *B* alguns dos possíveis valores de temperatura verificados nesse dia, como indicado na imagem a seguir.

Como cada um dos elementos do conjunto *A* está relacionado a um único elemento do conjunto *B*, podemos dizer que essa relação é uma **função**.

No diagrama podemos observar que em dois horários distintos a temperatura obtida pela medição foi 25 °C. Além disso, em nenhum dos horários em que foi realizada uma medição a temperatura registrada foi 19 °C, 22 °C, 23 °C, 24 °C, 26 °C, 27 °C, 29 °C ou 30 °C.

Estação meteorológica flutuante às margens do Rio Solimões, localizada na cidade de Tefé (AM). Fotografia de 2016.

PENSE E RESPONDA

Nessa situação, qual é a variável independente? E a variável dependente?

O horário em que foi realizada a medição é a variável independente. A temperatura é a variável dependente.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

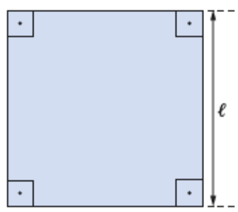
Por fim, na situação 3 (Figura 47), relaciona a área de um quadrado com seu lado, apresentando uma tabela com valores numéricos para o lado e para a área correspondente. Na seção Pense e Responda pergunta sobre a possibilidade de haver dois quadrados de áreas distintas cujos lados tenham a mesma medida, com o intuito de que o estudante perceba que cada valor atribuído à variável independente está associado a um único valor da variável dependente. Além disso, a partir da fórmula da área do quadrado, introduz o conceito de *lei de formação* ou *lei de correspondência* da função e utiliza uma interessante metáfora de uma máquina que "transforma" a medida do lado do quadrado em sua correspondente área.

Figura 47 - Situação 3 de contexto apresentada no início do Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática

Situação 3

Para determinar a área A de um quadrado, multiplicamos a medida de seu lado ℓ por ela mesma, ou seja, elevamos ℓ ao quadrado. Podemos representar esse cálculo por meio da fórmula $A = \ell^2$.

Considerando A e ℓ números reais positivos, essa fórmula estabelece uma correspondência entre esses valores, de modo que a área de um quadrado é uma função da medida de seu lado. Por exemplo, se ℓ for igual a 5 cm, a área A será 25 cm².



PENSE E RESPONDA

É possível ter dois quadrados de áreas distintas cujos lados tenham a mesma medida? não

Observe algumas medidas do lado de um quadrado e da área correspondente.

ℓ (u.c.) [unidade de comprimento]	1	2	3	10	50	100
A (u.a.) [unidade de área]	1	4	9	100	2 500	10 000

Como a área do quadrado depende da medida de seu lado, a variável independente é a medida do lado, e a variável dependente é a área.

A fórmula da área de um quadrado pode ser interpretada como a **lei de formação** ou a **lei de correspondência** da função que relaciona a área A de um quadrado e a medida do lado ℓ correspondente.

Uma possível maneira de compreender a lei de formação de uma função é pensar em uma máquina que transforma a matéria-prima (variável independente) em produto final (variável dependente). Observe a seguir um esquema que mostra como uma máquina "transforma" a medida do lado (ℓ) de um quadrado em sua respectiva área (A).

SAIBA QUE...

Uma lei de correspondência pode não ter uma expressão matemática que a represente. Por exemplo, a lei que relaciona a temperatura e o horário de medição, vista anteriormente na situação **2**.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

O Volume 1 da obra Matemática em Contextos introduz a ideia de *função afim* com quatro situações de contexto. Na situação 1, relaciona o tempo de esvaziamento de uma piscina em função do volume de água nela contido (Figura 48). O texto destaca que a vazão é constante, ou seja, há uma *taxa de variação constante* no processo, característica das funções afim. A partir do contexto, realiza perguntas relacionadas a ele. Nas três primeiras perguntas, solicita os valores do tempo a partir do volume restante ou do volume esvaziado. Nas duas perguntas seguintes solicita a lei da função que relaciona o tempo de esvaziamento com o volume de água restante na piscina e com o volume de água esvaziado.

A situação 2 trata da relação de dependência entre o preço que se paga em um restaurante de comida a quilo e a quantidade, em gramas, que é colocada no prato. A situação 3 mostra a relação entre a velocidade e o tempo em uma frenagem em que a velocidade tem taxa de variação constante. Após as três situações, apresenta um breve texto da história das funções afim e, na sequência, uma quarta situação de contexto que relaciona o preço de uma corrida por aplicativo de transporte em função do quilômetro rodado. Explica que, em alguns casos, esses aplicativos estabelecem o preço de acordo com um *valor fixo inicial* mais um *valor variável*, que depende *linearmente* da medida da distância percorrida.

Figura 48 – Situação de contexto apresentada no início do Capítulo 1, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Situação 1

Não escreva no livro.

Vazão de uma piscina

Para realizar a troca de água de uma piscina, é necessário esvaziá-la parcialmente ou totalmente, para então enchê-la com a quantidade de água retirada. O intervalo de tempo gasto nesse processo de esvaziamento pode ser longo e depende da vazão com que a água da piscina sai pelos ralos.

Uma das maneiras de realizar a manutenção de uma piscina é realizar a troca de água. Entretanto, deve-se verificar a possibilidade de métodos alternativos, devido à alta quantidade de água gasta nessa troca.

Para a manutenção da piscina de uma residência, os ralos foram destampados, iniciando o esvaziamento dela. Após essa abertura dos ralos, foi notado que, em 30 minutos, foram retirados 600 litros de água e que, em 1 hora, já haviam sido esvaziados 1 200 litros.

Sabe-se que a vazão é constante – isto é, que o processo ocorre a uma **taxa de variação constante** entre a medida de volume de água esvaziada e a medida de intervalo de tempo decorrida – e que a piscina inicialmente tinha 6 000 litros.

a) Qual é a medida de intervalo de tempo necessária, desde o início do esvaziamento da piscina, para que a medida de volume de água seja reduzida à metade? 2 h 30 min

b) Em quanto tempo a piscina terá 2 000 litros? 3 h 20 min

c) E em quanto tempo ela estará completamente vazia? 5 h

d) Para a situação apresentada, escreva no caderno a lei da função que relaciona a medida de intervalo de tempo decorrido, em horas, desde o início do esvaziamento, à medida de volume de água **esvaziada**. Exemplo de resposta: Sendo v a medida de volume esvaziada e t a medida de intervalo de tempo, $v(t) = 1\,200t$.

e) Escreva a lei da função que relaciona a medida de intervalo de tempo decorrido, em horas, à medida de volume de água **restante**. Exemplo de resposta: Sendo u a medida de volume restante e t a medida de intervalo de tempo, $u(t) = 6000 - 1\,200t$.

Professor, se julgar necessário, apresente aos estudantes que vazão é a razão entre a medida de volume de um fluido que escoa, pela medida de intervalo de tempo.

Professor, nos itens **d** e **e**, os estudantes podem apresentar as leis das funções de diferentes maneiras, não sendo obrigatório o uso da representação algébrica. Neste momento, é importante explorar o entendimento deles de como ocorre a relação, explicitando-a oralmente ou pela língua materna; depois, no decorrer deste capítulo, serão feitas as formalizações e as representações com linguagem matemática.

As imagens não estão representadas em proporção

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

O Volume 2 da obra Conexões Matemática traz apenas uma situação de contexto advinda da pandemia do Coronavírus de 2020: o uso de máscara e o controle de temperatura por termômetro infravermelho. Exibe uma foto de controle de temperatura, com a escala em graus Fahrenheit e a Lei da função matemática que converte a temperatura de graus Fahrenheit para graus Celsius. Na sequência, já parte para a definição formal de função afim e os conceitos relacionados (Figura 49).

Porém, mais adiante, após as definições formais e simbólicas, traz a relação entre a distância, em quilômetros, percorrida pela Estação Espacial Internacional e o tempo, em segundos. Apresenta esse contexto para introduzir a ideia de *função linear* e retoma o conceito de *proporcionalidade* (Figura 50). Além disso, mostra os valores das distâncias em função do tempo em um gráfico cartesiano.

Figura 49 – Situação de contexto apresentada no início do Capítulo 1, Volume 2, da obra Conexões Matemática

Objetivos do capítulo

- Identificar uma função afim.
- Resolver situações-problema que envolvam funções afins.
- Analisar o gráfico de uma função afim.
- Resolver inequações que envolvam funções afins.

Explore

Faça uma pesquisa na internet e explique o porquê da Organização Mundial de Saúde recomendar o uso de máscaras durante a pandemia do novo Coronavírus.

Um trabalhador usando uma máscara protetora é examinado com um termômetro infravermelho quando entra em um prédio em Nova Délhi, na Índia, em março de 2020.

A abertura desse capítulo, o boxe **Explore** e a situação apresentada nesse tópico contribuem com o desenvolvimento da competência geral 8 e do tema contemporâneo **saúde**.

1 Função afim

A pandemia causada pelo novo Coronavírus no início do ano de 2020 mudou hábitos de locomoção e consumo. Visando a diminuição de contágio, a Organização Mundial de Saúde (OMS) recomendou que as pessoas permanecessem em casa. Com o tráfego de pessoas reduzido, locais como lojas, escritórios e restaurantes fecharam as suas portas.

Protocolos como higienização das mãos e a aferição da temperatura corporal passaram a ser tomados no acesso aos estabelecimentos essenciais que permaneceram abertos, como supermercado e alguns locais de trabalho.

Observe a foto da aferição da temperatura de um trabalhador na Índia. O aparelho de infravermelho está indicando 98 °F. Essa unidade de medida de temperatura, Fahrenheit, é adotada em alguns países. No Brasil, a temperatura é medida em grau Celsius. Para converter a temperatura em grau Fahrenheit para grau Celsius, podemos usar a seguinte função:

$$f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$$

Sendo $f(x)$ a medida em grau Celsius e x a medida em grau Fahrenheit.

A máscara foi recomendada para diminuição do contágio pelo novo Coronavírus. Por exemplo, se uma de duas pessoas que estão conversando estiver contaminada e as duas estiverem usando máscaras, a chance de contágio cai sensivelmente.

14

Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 2 (2020).

Figura 50 – Situação de contexto apresentada no Capítulo 1, Volume 2, da obra Conexões Matemática

Imagem da Estação Espacial Internacional e do ônibus espacial ancorado Endeavour, em maio de 2011.

Observação

Consideramos para o gráfico ao lado não apenas os pontos da tabela, mas uma semirreta com extremidade na origem do plano cartesiano, pois o domínio da função para o nosso exemplo é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$.

2.4 Função linear e proporcionalidade

A Estação Espacial Internacional orbita a Terra a uma velocidade de 7,66 quilômetros por segundo. Verifique na tabela a seguir a distância *s* (em quilômetros) percorrida pela Estação em função do tempo *t* (em segundos), durante 5 segundos.

t (em segundos)	1	2	3	4	5
s (em km)	7,66	15,32	22,98	30,64	38,30

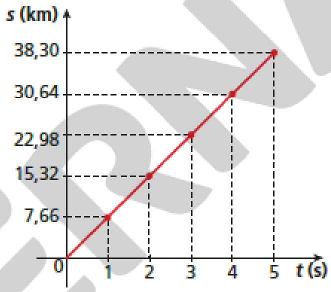
Observe que: $\frac{s}{t} = \frac{7,66}{1} = \frac{15,32}{2} = \frac{22,98}{3} = \frac{30,64}{4} = \frac{38,30}{5} = k$

Assim, $\frac{s}{t} = k \Rightarrow s = k \cdot t$. Como $k = 7,66$, podemos expressar o quanto a Estação Espacial percorre em determinado tempo por meio da função linear: $s(t) = 7,66t$, sendo $s(t)$ em quilômetros e *t* em segundos.

Note que *k* é a velocidade (razão entre distância e tempo) dada em quilômetros por segundo.

Dizemos que os valores de *s* são **diretamente proporcionais** aos respectivos valores de *t* porque se a variável tempo dobra a variável distância também dobra; se a variável tempo triplica, a variável distância também triplica, e assim por diante.

Veja ao lado o gráfico dessa função linear.



Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 2 (2020).

O Capítulo 2 da obra Matemática em Contextos introduz a ideia de *parábola* a partir da trajetória de uma bola de basquete em um arremesso. Na sequência, apresenta três situações de contexto e uma aplicação da função quadrática na geometria. A situação 1 (Figura 51) traz a relação da receita de uma confeitaria com a venda de bolos em função do desconto no preço de cada bolo. O livro propõe que cada bolo é vendido por 60 reais sendo que, com esse preço, a confeitaria vende 12 bolos e que, a cada cinco reais de desconto por bolo, a confeitaria passa a vender mais 2 bolos por dia. O estudante, a partir dos dados, é convidado a completar uma tabela de valores de preço, quantidade e receita, a partir do desconto dado e a responder perguntas. A primeira versa sobre o crescimento e decrescimento da receita em função do desconto, a segunda solicita a existência de uma receita máxima, e a terceira a expressão algébrica que relaciona a receita e a quantidade x de descontos de 5 reais. As perguntas têm o intuito de introduzir ideias relacionadas à função quadrática que, na sequência do capítulo, serão formalizadas, como vértice da parábola e lei da função quadrática.

Figura 51 – Situação de contexto apresentada no Capítulo 2, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Situação 1

Preço de venda de um bolo

Uma doceria quer dar um desconto no preço dos bolos. Para isso, decide fazer um teste para observar como ocorre o rendimento. O dono da loja percebe que, vendendo o bolo a 60 reais, ele geralmente vende, por dia, 12 bolos. A cada 5 reais de desconto que ele dá por bolo, ele passa a vender mais 2 bolos por dia.

Além disso, ele sabe que ao multiplicar a quantidade de bolos vendidos pelo preço de venda, o resultado é o valor total arrecadado nas vendas, e que não vale a pena vender o bolo por menos de R$ 10,00.

rocharibeiro/Shutterstock

Em docerias e em outros empreendiment a definição do preço de venda ideal de u produto para maximizar lucros envolve vá conhecimentos algébricos.

a) Com um colega, copie e complete a tabela a seguir no caderno e faça algumas simulações de quanto a doceria iria faturar a cada 5 reais de desconto dado no preço do bolo: 5 reais, 10 reais, 15 reais, 20 reais, e assim sucessivamente.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Receita em função do desconto no preço do bolo

Desconto (em R$)	Preço do bolo (em R$)	Quantidade de bolos vendidos	Receita (em R$)
0,00	60,00	$12 + 0 = 12$	$12 \cdot 60 = 720{,}00$
5,00	55,00	$12 + 2 = 14$	$14 \cdot 55 = 770{,}00$
10,00	50,00	$12 + 4 = 16$	$16 \cdot 50 = 800{,}00$
15,00			
20,00			
25,00			
30,00			
40,00			
50,00			
$5x$	$60 - 5x$	$12 + 2x$	

Tabela elaborada para fins didáticos.

b) O que vocês podem notar sobre o crescimento da receita (valor recebido) conforme o aumento do desconto por bolo? Até um desconto de R$ 15,00, conforme o desconto aumenta, a receita também aumenta. A partir de R$ 15,00, quanto mais o desconto aumenta, mais a receita

c) Existe uma receita máxima nessa simulação? Se sim, qual é o valor dela? Sim. R$ 810,00.

d) Qual é a expressão algébrica que fornece a receita para x descontos de R$ 5,00 sobre o preço de venda do bolo? $-10x^2 + 60x + 720$

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

A situação 2 propõe três opções de dimensões de cercas para cavalos. As três opções são de retângulos com diferentes medidas: 1ª opção – 10 metros por 90 metros; 2ª opção – 20 metros por 80 metros; e 3ª opção – 30 metros por 70 metros. Após, solicita ao estudante a opção que proporciona mais área, bem como sua medida, pergunta se há um par de medidas que determina uma área máxima, qual o seu valor e qual o seu formato. O estudante, a partir de tentativa e erro, pode verificar que, dado um perímetro fixo, o quadrilátero que maximiza a área é o quadrado.

Na situação 3, apresenta a relação entre a receita com gasolina de um posto de combustível em função do acréscimo, em centavos, no litro da gasolina. O texto estabelece que com um preço de R$ 4,00, o posto vende 10.000 litros de gasolina e que, para cada centavo de aumento, o posto vende 100 litros a menos. A partir dos dados, o estudante é convidado a montar a expressão algébrica que indica o preço do litro em função de x centavos de aumento e a expressão que indica a quantidade de litros vendidos por dia em função de x centavos de aumento. A partir da informação de que o valor total recebido com as vendas da gasolina em função do aumento do preço do litro corresponde ao produto do preço do litro e da quantidade de litros vendidos, o estudante deve escrever no caderno a lei da função que indica o valor total recebido com a venda (receita) em função da quantidade x de centavos acrescida.

As obras didáticas evidenciam uma organização e um sequenciamento de apresentação dos conteúdos muito próxima, visto que passaram pelo crivo do PNLD, por meio de seus critérios para aprovação. Com relação ao critério relacionado aos contextos, retomo o que foi citado na seção 2.2, no Guia PNLD 2021 – Objeto 2 (item 7, p. 22): "exploração de conceitos matemáticos e sua utilidade para resolução de problemas cotidianos". A partir desse critério, todo material que passa pelo PNLD deve apresentar situações de contexto. Observei que Matemática em Contextos e Prisma Matemática exibem uma quantidade maior de situações de contexto em relação à obra Conexões Matemática, que costuma mostrar uma única situação de contexto antes das definições simbólicas e formais.

A introdução da formação de conceitos científicos por meio de situações específicas e contextualizadas vai ao encontro da teoria de formação de conceitos de Vigotski. O autor preconiza que "a análise da realidade com a ajuda de conceitos precede a análise dos próprios conceitos" (1998b, p. 99). O autor acrescenta que a utilização de conceitos em situações concretas é, geralmente, um processo mais trivial para a mente humana do que a reprodução verbal do conceito:

> O adolescente formará e utilizará um conceito com muita propriedade numa situação concreta, mas achará estranhamente difícil expressar em conceito em palavras e a definição verbal será, na maioria dos casos, muito mais limitada do que seria de esperar a partir do modo como utilizou o conceito. A mesma discrepância também ocorre no pensamento dos adultos (Vigostki, 1998b, p. 99).

Por outro lado, segundo Vigotski, o processo contrário é mais complexo:

> Bem mais difícil do que a transferência em si é a tarefa de definir um conceito quando este não mais se encontra enraizado na situação original, devendo ser formulado num plano puramente abstrato, sem referência a qualquer impressões ou situações concretas (Vigostki, 1998b, p. 99).

Segundo o autor, um conceito expresso por uma palavra representa um ato de generalização. A partir desse viés, podemos inferir que o desenvolvimento de um conceito segue por um pensamento indutivo. Porém, Vigotski ressalta que o pensamento indutivo se alterna com o dedutivo no processo de formação de um conceito:

> Quando se examina o processo de formação de conceitos em toda sua complexidade, este surge como um movimento do pensamento dentro da pirâmide de conceitos, constantemente oscilando entre duas direções, do particular para o geral e do geral para o particular (Vigostki, 1998b, p. 100).

Partir de uma situação de contexto com o intuito de formar um conceito científico, não apenas vai ao encontro dos processos de pensamento complexo, apontadas por Vigotski, como também auxilia na *motivação*. Segundo Garnier, Bernardz e Ulanovskaya (1996, p. 160), uma das abordagens defendidas pelo Instituto de Psicologia e Pedagogia Geral de Moscou, cujos fundamentos são os da teoria vigotskiana, é a da *generalização teórica*, cujo objetivo é a aquisição de conceitos científicos teóricos. Apoiados nessa teoria, pesquisadores soviéticos desenvolveram etapas que visam a transposição de conceitos científicos para o processo de aprendizagem. A primeira etapa é justamente a análise de fontes materiais ou de objetos concretos – objetos em razão dos quais esses conceitos se tornam indispensáveis à aprendizagem. Os pesquisadores ressaltam que se trata da etapa de motivação da aprendizagem.

Em suma, a abordagem inicial por meio de situações contextualizadas, adotada pelos livros didáticos que compõe o *corpus* desse estudo, vai ao encontro de preceitos relacionados à formação de conceitos científicos da teoria vigotskiana.

4.3 APRESENTAÇÃO DE DEFINIÇÕES

Após a apresentação de situações de contexto, as obras didáticas que compõe o *corpus* formalizam as definições matemáticas através da linguagem simbólica e também da linguagem escrita.

A obra Matemática em Contextos define *função* por meio de conjuntos e introduz as notações simbólicas utilizadas, conforme a figura a seguir:

Figura 52 – Definição de função apresentada no Capítulo 1, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Definição e notação

Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma **função f de A em B** é uma relação que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Nessas condições, usamos as seguintes notações:

$$f: A \to B$$

ou

$$A \xrightarrow{f} B$$

Nos dois casos, lemos: f é uma função de A em B.

Além disso, se a função f relaciona o elemento x de A com o elemento y de B, então podemos escrever $f: x \mapsto y$ ou, mais comumente:

$$f(x) = y$$

(Lemos: f de x é igual a y.)

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Após a definição simbólica de função, propõe atividades relacionadas ao conceito de função. Na sequência, apresenta a definição simbólica dos conjuntos *domínio*, *contradomínio* e *imagem*, bem como a simbologia correspondente. A seguir, indica atividades propostas relacionadas a esses conceitos.

A obra Prisma Matemática apresenta as mesmas definições da obra Matemática em Contextos, seguidas de propostas de atividades. A obra Conexões Matemática, porém, além das definições mencionadas, acrescenta a definição de *zero de uma função*, *função crescente* e *decrescente* e outras definições abstratas como *função polinomial*, *função sobrejetora*, *função injetora*, *função bijetora* e *função inversa*. Já as obras Prisma Matemática e Matemática em contextos apresentam as definições de zero de uma função, função crescente/descrescente, bem como a análise do sinal da função para os casos específicos de função afim e de função quadrática.

Quanto à definição de *função afim*, as obras formalizam a partir dos coeficientes e exibem exemplos, conforme a figura a seguir, retirada do Matemática em Contextos:

Figura 53 – Definição de função afim apresentada no Capítulo 1, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **função afim** quando existem dois números reais a e b tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Podemos facilitar a escrita de $f: x \mapsto ax + b$ escrevendo que a função f é dada pela lei $f(x) = ax + b$. Mas sempre atentos para não confundir a função $f: x \mapsto ax + b$ com o número real $f(x)$, que é o valor assumido pela função no ponto x.

Sabendo que os números reais a e b são chamados de **coeficientes** da função, analise alguns exemplos a seguir.

a) $f(x) = 2x + 1$ ($a = 2$ e $b = 1$)

b) $f(x) = \pi x - 4$ ($a = \pi$ e $b = -4$)

c) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 5$ $\left(a = -\frac{1}{3} \text{ e } b = 5\right)$

d) $f(x) = 4{,}3x$ ($a = 4{,}3$ e $b = 0$)

e) $f(x) = 6$ ($a = 0$ e $b = 6$)

f) $f(x) = 0$ ($a = 0$ e $b = 0$)

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Após a definição de função afim, as obras apresentam os casos particulares, de acordo com os valores dos coeficientes – *função polinomial do 1º grau* e *função constante* –, conforme exemplo da figura a seguir, da obra Conexões Matemática e, na sequência, propostas de atividades relacionadas ao conceito de função afim.

Figura 54 – Casos particulares da função afim apresentados no Capítulo 1, Volume 2, da obra Conexões Matemática

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **função constante** quando existe um número real b tal que $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **função polinomial do 1º grau** quando existem números reais a e b, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 2 (2020).

As obras também retomam uma importante definição fundamental da matemática com aplicações em outras ciências, a definição de *proporcionalidade*, a partir da apresentação da definição de *função linear*. A obra Prisma Matemática apresenta a definição formal de função linear (Figura 55) e, na sequência, retoma o conceito de proporcionalidade (Figura 56).

Figura 55 – Definição de função linear no Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, com a real, é chamada de **função linear**.

Observe alguns exemplos de leis de função linear:

a) $f(x) = -7x$, em que $a = -7$;

b) $y = x\sqrt{3}$, em que $a = \sqrt{3}$;

c) $y = -\frac{x}{3}$, em que $a = -\frac{1}{3}$;

d) $y = x$, em que $a = 1$.

A função linear é uma função afim? Por quê? Justifique.

Sim, pois ela também é da forma $f(x) = ax + b$, com a e b reais.

SAIBA QUE...

Se $a = 0$, a função linear f é dada por $f(x) = 0$ para todo x real. Essa função é conhecida como **função nula**.

PENSE E RESPONDA

- Quantos litros de combustível são necessários para que este modelo de veículo blindado percorra 20 km? 5 litros
- Fatores, como a massa e a aerodinâmica do veículo, interferem no consumo de combustível. Em sua opinião, por que isso acontece? Ver as **Orientações para o professor**.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Figura 56 – Função linear e proporcionalidade no Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática

Função linear e proporcionalidade

Retomando a situação que relaciona o consumo de combustível y (em litro) de um modelo de carro blindado e a distância x que ele percorre (em quilômetro) por meio de uma função linear dada por $y = 0{,}25x$, podemos construir uma tabela para analisar a relação entre alguns valores. Observe:

x (em quilômetro)	y (em litro)
1	0,25
2	0,50
3	0,75
4	1,00
⋮	⋮
10	2,50

Perceba que, ao dobrarmos o valor de x, o valor correspondente de y também dobra. Se multiplicarmos x por 3, o valor correspondente de y também será multiplicado por 3, e assim sucessivamente.

Nesse caso, dizemos que as variáveis x e y representam **grandezas diretamente proporcionais** e a constante de proporcionalidade k pode ser obtida pela razão $\frac{y}{x}$, quando $x \neq 0$.

$$k = \frac{0,25}{1} = \frac{0,50}{2} = \frac{0,75}{3} = \frac{1,00}{4} = \ldots = \frac{2,50}{10} = 0{,}25, \text{ ou seja, } k = 0{,}25$$

Em uma função linear, cuja lei de formação é dada por $y = ax$, com $a \neq 0$, quando $a > 0$, dizemos que as variáveis x e y representam **grandezas diretamente proporcionais**. A constante de proporcionalidade k é o coeficiente a da função.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Todas as obras apresentam definições relacionadas à função afim: *coeficiente angular* ou *taxa de variação constante*, *coeficiente linear* e *zero ou raiz da função afim*, de maneira simbólica. A Figura 57 mostra a definição de zero da função afim na obra Prisma Matemática.

Figura 57 – Definição de zero de uma função afim no Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática

> Em uma função $f: A \rightarrow B$, um valor de $x \in A$ tal que $f(x) = 0$ é chamado **zero da função** f.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Após a apresentação, mostram a relação dos coeficientes com o gráfico da função afim e apresentam propostas de atividades relacionadas à influência dos coeficientes no gráfico.

Todas as obras também apresentam o estudo do sinal de uma função afim e, a partir disso, introduzem a definição de *inequação* e propõem atividades relacionadas às inequações. As obras Prisma Matemática e Matemática em Contextos, antes de formalizar a definição de inequação, descrevem uma situação de contexto. A figura a seguir mostra a situação prática proposta na obra Prisma, bem como a definição de inequação do 1º grau:

Figura 58 – Definição de inequação no Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática

Inequações do 1º grau

Nos elevadores do prédio onde Helena mora está fixada uma placa especificando a carga máxima que pode ser transportada com segurança.

Para fazer uma estimativa, Helena supôs a lotação máxima e considerou que as pessoas tivessem a mesma massa ao fazer o cálculo de até quanto cada pessoa poderia pesar. Para isso, ela resolveu uma **inequação**.

$$6x \leqslant 420 \Rightarrow x \leqslant \frac{420}{6} \Rightarrow x \leqslant 70$$

Assim, considerando a lotação máxima, se as pessoas tiverem a mesma massa, poderiam pesar, cada uma, até 70 kg para serem transportadas com segurança nesse elevador.

SAIBA QUE...

- Para resolver uma inequação, fazemos manipulações algébricas para isolar a variável em um membro da desigualdade.
- O conjunto solução de uma inequação é o conjunto de todos os valores de x que tornam a desigualdade verdadeira.

> Denominamos **inequação do 1º grau** na incógnita x toda desigualdade que pode ser escrita em uma das formas a seguir, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$:
> - $ax + b \geqslant 0$
> - $ax + b > 0$
> - $ax + b \leqslant 0$
> - $ax + b < 0$

Caso a inequação não esteja em uma das formas indicadas, podemos manipulá-la algebricamente para, em seguida, resolvê-la. Por exemplo:

$$4(x-1) \geqslant 5x - 3 \Rightarrow 4x - 4 \geqslant 5x - 3 \Rightarrow 4x - 5x - 4 + 3 \geqslant 0 \Rightarrow -x - 1 \geqslant 0$$

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

A obra Conexões Matemática também apresenta as definições de *inequação produto* e de *inequação quociente*, traz atividades relacionadas a esses tipos de inequações e de *inequações simultâneas*.

Quanto à *função quadrática* ou *função polinomial do 2º grau*, as obras definem e formalizam a partir dos coeficientes e apresentam exemplos, conforme a figura a seguir, retirada do Prisma Matemática:

Figura 59 – Definição de função quadrática no Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática

Função quadrática

Porque, para ser um polinômio do 2º grau, é preciso que exista o termo em x^2. Caso tivéssemos $a = 0$, o termo ax^2 se anularia e teríamos uma função definida por $f(x) = bx + c$, que é a lei de uma função afim.

PENSE E RESPONDA

Por que precisamos cumprir a condição $a \neq 0$ para definir a função quadrática?

A função quadrática também pode ser denominada função polinomial do 2º grau, pois as relações entre a variável dependente e a variável independente são expressas por polinômios do 2º grau.

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais e $a \neq 0$, é chamada de **função quadrática**.

Os números a, b e c são os **coeficientes** (ou parâmetros) da função, sendo que a é o coeficiente do termo x^2, b é o coeficiente do termo x e c é o coeficiente independente.

2

Observe a seguir a lei de formação de algumas funções quadráticas.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, em que os coeficientes são: $a = 1$, $b = -3$ e $c = 2$.

b) $g(x) = 0{,}8x^2 - 1$, em que os coeficientes são: $a = 0{,}8$, $b = 0$ e $c = -1$.

c) $y = -x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x$, em que os coeficientes são: $a = -1$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $c = 0$.

d) $y = -5x^2$, com os coeficientes: $a = -5$, $b = 0$ e $c = 0$.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Na sequência, as obras apresentam definições relacionadas à função polinomial do 2º grau: a *parábola* e sua relação com os *coeficientes* da expressão algébrica, o *discriminante* e sua relação com os *zeros ou raízes da função quadrática*, o *vértice* e sua relação com o *eixo de simetria* da parábola, bem como com o *valor máximo* ou o *valor mínimo* da função e seu consequente *conjunto imagem*.

A Figura 60, extraída da obra Matemática em Contextos, mostra a definição de raízes da função quadrática e um passo a passo para que o estudante chegue na fórmula geral resolutiva da equação quadrática. Na sequência relaciona o discriminante com as raízes:

Figura 60 – Definição de função afim apresentada no Capítulo 1, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Formalizando o conceito de zeros de uma função quadrática

O valor de x para o qual a função quadrática dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, se anula, ou seja, para o qual $f(x) = 0$, é chamado **zero** da função quadrática. Assim, para determinar o zero de uma função quadrática, basta determinar as **raízes** da equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

A seguir vamos apresentar algumas maneiras de determinar as raízes de uma equação de 2º grau.

Determinação das raízes de uma equação de 2º grau

Analisando a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

3º passo: $\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

Explore para descobrir

5º passo: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

Não escreva no livro.

Para resolver uma equação, podemos isolar o x em um dos membros. Vejamos como resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Siga os passos para encontrar uma fórmula que indica o valor de x.

1º passo: Deixe os termos que têm x no primeiro membro e o restante no segundo membro da equação. $ax^2 + bx = -c$

2º passo: Divida todos os termos da equação pelo coeficiente a. $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

3º passo: Divida $\frac{b}{a}$ por 2 e eleve o resultado ao quadrado para descobrir o valor a ser somado aos dois membros da equação.

4º passo: Some o valor obtido no passo anterior aos dois membros da equação. $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

5º passo: Fatore o lado esquerdo da equação utilizando o trinômio do quadrado perfeito.

6º passo: Some as frações que estão no segundo membro da equação utilizando o mmc. $-\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

7º passo: Extraia a raiz quadrada nos dois membros da equação.

8º passo: Isole x no primeiro membro da equação. $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

9º passo: Considerando $\Delta = b^2 - 4ac$, faça essa substituição e reescreva a equação. $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

A fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, que você obteve no *Explore para descobrir*, pode ser utilizada para calcular as raízes de equações de 2º grau. O número $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado **discriminante** da equação relacionada à função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ele tem um papel muito importante na determinação das raízes da equação.

7º passo: $\pm\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Fique atento

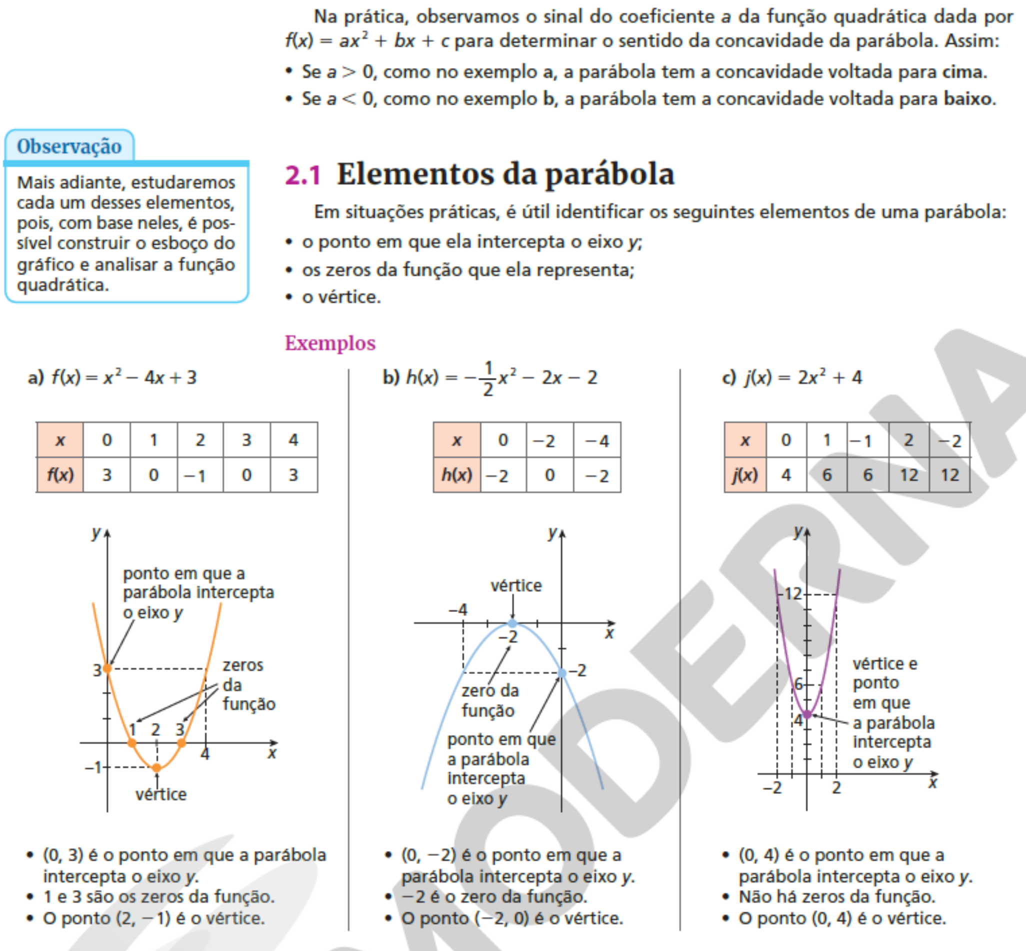
O valor do discriminante (Δ) de uma equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, influencia na quantidade de raízes da equação e, consequentemente, na quantidade dos zeros da função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Quando $\Delta > 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais diferentes (consequentemente, a função f tem dois zeros reais diferentes) dadas por: $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Quando $\Delta = 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais iguais (consequentemente, a função f tem dois zeros reais iguais) dadas por: $x' = x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a}$
- Quando $\Delta < 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tem raízes reais (consequentemente, a função f não tem zeros reais).

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

A Figura 61, da obra Conexões Matemática, mostra os elementos da parábola, a partir da construção de alguns gráficos por pares ordenados, e a Figura 62 indica como calcular as coordenadas do vértice.

Figura 61 – Definição de função afim apresentada no Capítulo 1, Volume 2, da obra Matemática em Contextos



Na prática, observamos o sinal do coeficiente a da função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ para determinar o sentido da concavidade da parábola. Assim:

- Se $a > 0$, como no exemplo **a**, a parábola tem a concavidade voltada para **cima**.
- Se $a < 0$, como no exemplo **b**, a parábola tem a concavidade voltada para **baixo**.

Observação
Mais adiante, estudaremos cada um desses elementos, pois, com base neles, é possível construir o esboço do gráfico e analisar a função quadrática.

2.1 Elementos da parábola

Em situações práticas, é útil identificar os seguintes elementos de uma parábola:

- o ponto em que ela intercepta o eixo y;
- os zeros da função que ela representa;
- o vértice.

Exemplos

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	0	-1	0	3

- (0, 3) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y.
- 1 e 3 são os zeros da função.
- O ponto (2, −1) é o vértice.

b) $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$

x	0	-2	-4
$h(x)$	-2	0	-2

- (0, −2) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y.
- −2 é o zero da função.
- O ponto (−2, 0) é o vértice.

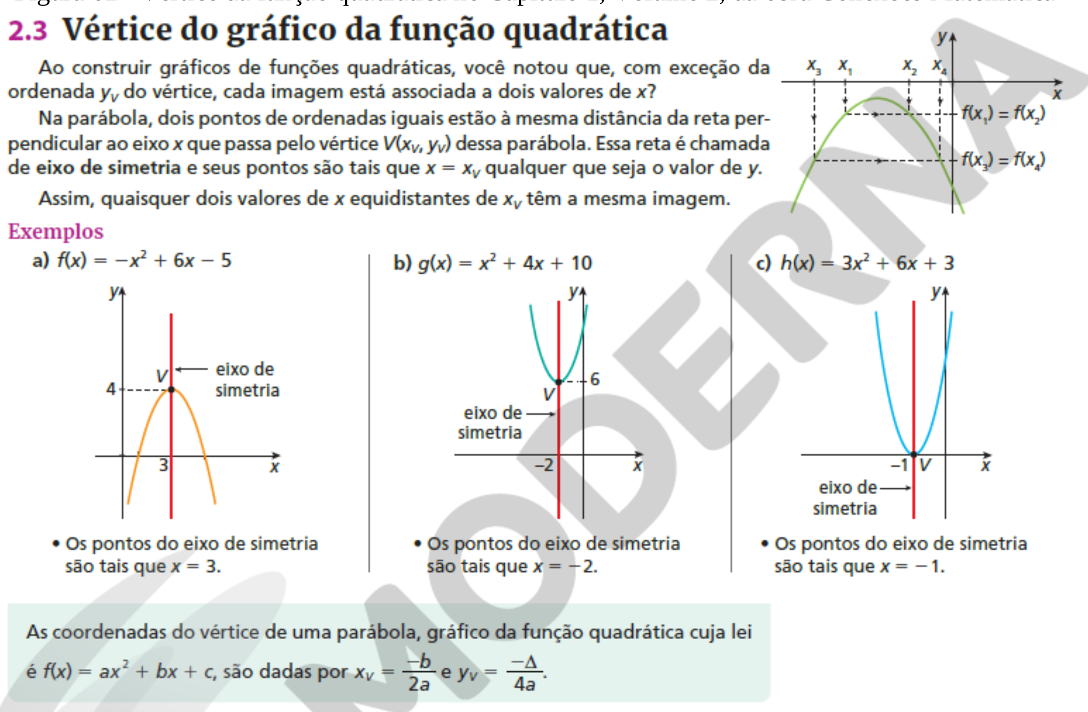
c) $j(x) = 2x^2 + 4$

x	0	1	-1	2	-2
$j(x)$	4	6	6	12	12

- (0, 4) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y.
- Não há zeros da função.
- O ponto (0, 4) é o vértice.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Figura 62 – Vértice da função quadrática no Capítulo 1, Volume 2, da obra Conexões Matemática



2.3 Vértice do gráfico da função quadrática

Ao construir gráficos de funções quadráticas, você notou que, com exceção da ordenada y_V do vértice, cada imagem está associada a dois valores de x?

Na parábola, dois pontos de ordenadas iguais estão à mesma distância da reta perpendicular ao eixo x que passa pelo vértice $V(x_V, y_V)$ dessa parábola. Essa reta é chamada de **eixo de simetria** e seus pontos são tais que $x = x_V$ qualquer que seja o valor de y.

Assim, quaisquer dois valores de x equidistantes de x_V têm a mesma imagem.

Exemplos

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

- Os pontos do eixo de simetria são tais que $x = 3$.

b) $g(x) = x^2 + 4x + 10$

- Os pontos do eixo de simetria são tais que $x = -2$.

c) $h(x) = 3x^2 + 6x + 3$

- Os pontos do eixo de simetria são tais que $x = -1$.

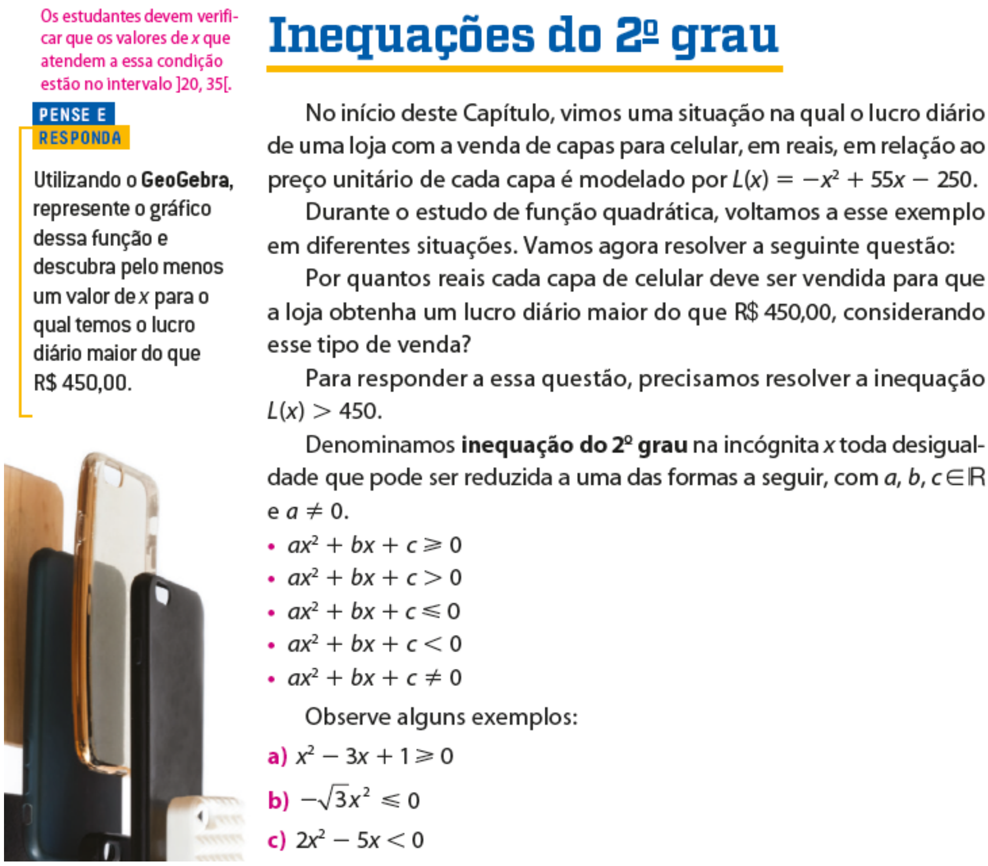
As coordenadas do vértice de uma parábola, gráfico da função quadrática cuja lei é $f(x) = ax^2 + bx + c$, são dadas por $x_V = \frac{-b}{2a}$ e $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$.

Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 2 (2020).

Após cada bloco de definições, as obras indicam propostas de testes relacionados ao conteúdo abordado.

No final do capítulo, a obra Prisma Matemática apresenta a definição de *inequação do 2º grau* (Figura 63). Já a obra Conexões Matemática apresenta, além de inequação do 2º grau, *inequação-produto* e *inequação quociente*, envolvendo produtos ou quocientes de funções quadráticas e funções afim. A obra Matemática em Contextos não apresenta esse assunto.

Figura 63 – Definição de inequação do 2º grau no Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática



Os estudantes devem verificar que os valores de x que atendem a essa condição estão no intervalo]20, 35[.

PENSE E RESPONDA

Utilizando o **GeoGebra**, represente o gráfico dessa função e descubra pelo menos um valor de x para o qual temos o lucro diário maior do que R$ 450,00.

Inequações do 2º grau

No início deste Capítulo, vimos uma situação na qual o lucro diário de uma loja com a venda de capas para celular, em reais, em relação ao preço unitário de cada capa é modelado por $L(x) = -x^2 + 55x - 250$.

Durante o estudo de função quadrática, voltamos a esse exemplo em diferentes situações. Vamos agora resolver a seguinte questão:

Por quantos reais cada capa de celular deve ser vendida para que a loja obtenha um lucro diário maior do que R$ 450,00, considerando esse tipo de venda?

Para responder a essa questão, precisamos resolver a inequação $L(x) > 450$.

Denominamos **inequação do 2º grau** na incógnita x toda desigualdade que pode ser reduzida a uma das formas a seguir, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

- $ax^2 + bx + c \geqslant 0$
- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c \leqslant 0$
- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \neq 0$

Observe alguns exemplos:

a) $x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$

b) $-\sqrt{3}x^2 \leqslant 0$

c) $2x^2 - 5x < 0$

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Os livros didáticos têm um sequenciamento de apresentação dos conteúdos muito parecido. Para quase todas as definições formais, começam com um contexto e, na sequência, apresentam a definição com a simbologia matemática mais utilizada. Com relação ao critério relacionado aos conceitos, retomo o que foi citado na seção 2.2, no Guia PNLD 2021 – Objeto 2 (item 9, p. 22): “o livro didático deve explorar os conceitos com encadeamento lógico, sem recorrer, por exemplo, a definições circulares ou confundir tese com hipótese nas demonstrações matemáticas".

A organização das definições relacionadas à função afim e à função quadrática dos livros didáticos que compõe o *corpus* vai ao encontro do apontamento descrito no Guia PNLD. As três obras iniciam com a definição de variável dependente e variável independente, retomam a definição de conjunto e apresentam a definição de função. Em seguida, definem os conjuntos domínio, imagem e contradomínio. A obra Conexões Matemática, porém, além das definições mencionadas, acrescenta a definição de zero de uma função, função crescente e decrescente e funções definidas por mais de uma sentença. Além dessas, apresenta as definições de *função polinomial* e de funções *sobrejetora, injetora*, *bijetora* e *inversa*.

Após introduzirem a ideia de função, os livros didáticos que compõe o *corpus* apresentam a função afim e seus casos especiais (função polinomial do primeiro grau, função constante e função linear), definem o zero da função afim e relacionam o gráfico da função afim com os coeficientes (angular e linear) de sua lei algébrica. No final do capítulo de função afim, apresentam o estudo do sinal e a inequação do primeiro grau. A obra Conexões Matemática também apresenta as definições de inequação produto e de inequação quociente. Já o Matemática em Contextos apresenta, após o estudo de sinal da função afim, *funções definidas por mais de uma sentença* e *função modular*.

As três obras analisadas, após o capítulo de função afim, apresentam a função quadrática e mostram a relação dos zeros da função quadrática, dos coeficientes de sua lei algébrica e do discriminante com sua forma gráfica – a parábola. As obras têm o cuidado de relacionar cada elemento citado com o gráfico, de forma separada e, ao final, conjuntamente. A obra Matemática em Contextos, além dos elementos da parábola citados, também apresenta o eixo de simetria, o *foco* e a *reta diretriz*. Na sequência, as obras expõem as definições de vértice e suas coordenadas, valor mínimo e valor máximo. A obra Prisma Matemática apresenta, no final do capítulo, a inequação do segundo grau. A obra Conexões Matemática apresenta, além de inequação do 2º grau, inequação-produto e inequação quociente, envolvendo produtos ou quocientes de funções quadráticas e funções afim. Já a obra Matemática em Contextos não apresenta esse assunto.

Algumas obras apresentam assuntos específicos que não são explorados em outras. Matemática em Contextos expõe função modular no Capítulo 1 e a forma canônica da função quadrática, no Capítulo 2, assuntos que não estão nas demais obras que compõe o *corpus*. Conexões apresenta inequações-produto e inequações-quociente, enquanto as outras duas obras não apresentam esses conteúdos.

Em suma, as três obras que compõe o *corpus* apresentam as definições conforme o sequenciamento dado pelo livro que tomei como referência: Conceitos Fundamentais da Matemática, de Bento de Jesus Caraça. A partir da consideração vigotskiana de que todo pensamento é uma generalização e que "cada novo estágio do desenvolvimento da generalização se constrói sobre as generalizações de nível precedente" (Vigotski, 1998b, p. 142), as situações de aprendizagem devem ser organizadas a partir da análise sequencialmente lógica do conteúdo.

As definições podem ser vistas como a expressão escrita de um conceito. Vigotski (1998b, p. 104, p. 137) afirma que "um conceito expresso por uma palavra representa um ato de generalização" e que "o desenvolvimento dos conceitos científicos centra-se em seu aspecto semântico". As definições apresentadas nos livros didáticos que compõe o *corpus* estão ora em linguagem formal, ora em um sistema de representação simbólico. Desse modo, a língua materna e a linguagem simbólica da matemática são tratadas de modo conjunto. Nas palavras de Nilson José Machado (1989, p. 165), a matemática "impregnando-se da língua materna [...] passa a transcender uma dimensão apenas técnica adquirindo assim o sentido de uma atividade caracteristicamente humana".

4.4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES

As obras didáticas propõem uma série de diferentes atividades aos estudantes: questões abertas com ou sem contextualização, testes de múltipla escolha com ou sem contextualização, atividades de verificação e experimentação do conteúdo abordado, atividades com tecnologias digitais, de compreensão e interpretação de textos e de explorações e investigações.

A *atividade* é um conceito central na teoria sociointeracionista de Vigotski e encontra-se vinculada a outro conceito central, o *social*. Segundo Garnier, Bernardz e Ulanovskaya (1996, p. 12), "o social constitui, por um lado, a fonte do desenvolvimento conceitual da criança e caracteriza, por outro lado, a organização da atividade comum e do aprendizado do aluno". Nessa perspectiva, o estudante pode apropriar-se dos conceitos enquanto ser ativo e comunicativo.

Nessa categoria, descrevo e analiso as diferentes atividades propostas pelos livros didáticos que compõe o *corpus*. Devido à diversidade de atividades propostas nos livros didáticos, dividi em três subcategorias: *propostas de questões e de testes, propostas de atividades com uso de tecnologia digital* e *propostas de explorações e investigações.*

A primeira subcategoria trata de perguntas, reflexões, questões ou testes de múltipla escolha, contextualizados ou não. A segunda aborda propostas de atividades com uso de planilhas eletrônicas, calculadoras, simuladores e softwares livres, entre outras tecnologias. Por fim, a terceira subcategoria trata de atividades que apresentam oportunidades de aplicação, investigação, ampliação e debate dos temas ou conteúdos abordados.

4.4.1 Propostas de questões e testes

Nas três obras que compõe o *corpus*, a maioria das atividades propostas está enquadrada nessa subcategoria. São perguntas, reflexões, questões ou testes de múltipla escolha, com ou sem contextualizações de situações cotidianas ou de aplicações a outras áreas da ciência.

A obra Matemática em Contextos propõe as primeiras atividades, por meio de questões, já na introdução da situação de contexto relacionada ao conteúdo do capítulo (Figura 48 – seção 4.2). Essa obra propõe muitas atividades relacionadas a contextos cotidianos (Figura 64) e de aplicação a outras áreas da Ciência. Nesse último caso, o livro geralmente apresenta uma ou mais atividades resolvidas que buscam exemplificar estratégias de resolução. A Figura 65 é um recorte de uma atividade que relaciona função afim com escalas de temperatura. Duas atividades resolvidas precedem uma lista de propostas de atividades relacionadas a essa aplicação das funções afim.

Figura 64 – Atividade envolvendo aplicação de função afim em aplicativo de transporte proposta no Capítulo 1, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Explore para descobrir

As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual. Não escreva no livro.

Para as atividades a seguir, considere que os valores cobrados nos aplicativos *A* e *B* dependem apenas do valor fixo inicial e do valor por quilômetro rodado. Faça as atividades com um colega.

1. Em um aplicativo *A*, uma viagem de 20 km custa R$ 52,00. Com essa informação, é possível calcular o valor fixo inicial? E o valor por quilômetro rodado cobrado por esse aplicativo? Justifique suas repostas.
2. Em um aplicativo *B*, uma viagem de 10 km custa R$ 23,00 e uma viagem de 12,5 km custa R$ 26,75. Com essas informações, é possível calcular o valor fixo inicial cobrado por esse aplicativo? E o valor por quilômetro rodado? Justifique suas respostas.
3. A partir da resposta da atividade anterior, escreva no caderno a lei da função que relaciona a medida de distância percorrida, em quilômetros, ao valor da viagem, em reais, no aplicativo ***B***.
4. Escreva no caderno as leis de pelo menos duas funções que poderiam ser a função que relaciona a medida de distância percorrida, em quilômetros, ao valor da viagem, em reais, no aplicativo *A* (isto é, que satisfaçam a condição de que uma viagem de 20 km custe R$ 52,00).
5. Um aplicativo que pratique um valor inicial fixo menor do que outro é necessariamente mais vantajoso do ponto de vista financeiro? Justifiquem.

Professor, nas atividades **3** e **4** os estudantes também podem apresentar a lei de cada função de diferentes maneiras, não sendo obrigatório o uso da representação algébrica.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Figura 65 – Atividade envolvendo aplicação de função afim em escalas de temperatura no Capítulo 1, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Atividades resolvidas

1. Em qual temperatura as medidas na escala Celsius e na escala Fahrenheit são iguais?

Resolução

Essa pergunta é equivalente a esta outra: "Para qual valor de x temos $f(x) = x$?".

$f(x) = 1{,}8x + 32$

$1{,}8x + 32 = x \Rightarrow 0{,}8x = -32 \Rightarrow x = -40$

Ou seja, -40 °C = -40 °F (40 graus Celsius negativos é o mesmo que 40 graus Fahrenheit negativos).

2. Um número x, quando indica uma medida de temperatura em °F, corresponde a quarta parte da medida de temperatura que indicaria em °C. Determine esse número.

Resolução

A pergunta é equivalente a esta outra: "Para qual valor de x temos $f(x) = \frac{1}{4}x$?".

$f(x) = 1{,}8x + 32$

$1{,}8x + 32 = \frac{1}{4}x \Rightarrow 1{,}8x - 0{,}25x = -32 \Rightarrow 1{,}55x = $

$= -32 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq -20{,}6$

Então:

$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (-20{,}6) = -5{,}15$

Assim, $-20{,}6$ °C é equivalente a $-5{,}15$ °F.

Atividades

Não escreva no livro.

15. Para transformar graus Fahrenheit em graus Celsius, e vice-versa, usa-se a relação $\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9}$, em que F é a medida de temperatura em graus Fahrenheit e C é a medida de temperatura em graus Celsius.

a) Transforme 35 graus Celsius em graus Fahrenheit. 95 °F

b) Qual é a medida de temperatura (em graus Celsius) em que a medida de temperatura em graus Fahrenheit é o dobro da medida de temperatura em graus Celsius? 160 °C

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

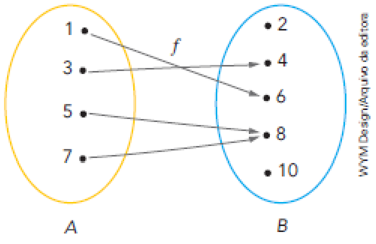
O Matemática em Contextos também propõe algumas atividades mais abstratas, sem contextos cotidianos e de aplicação, com utilização da linguagem simbólica. A figura a seguir é um recorte de uma atividade com essa característica:

Figura 66 - Atividade envolvendo conceitos associados a definição de função por conjuntos no Capítulo 1, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Atividades

Não escreva no livro.

10. De acordo com o diagrama a seguir, que representa a função f, responda aos itens no caderno.



a) Qual é o domínio e o contradomínio de f? $D(f) = \{1, 3, 5, 7\}$; $CD(f) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

b) Qual é o conjunto imagem de f? $Im(f) = \{4, 6, 8\}$

c) Quanto vale $f(3)$? $f(3) = 4$

d) Existem elementos de $CD(f)$ que não são elementos de $Im(f)$? Se sim, quais são eles? Sim; 2 e 10.

e) Existe algum elemento de $D(f)$ que está relacionado pela função f a mais de um elemento de $CD(f)$? Se sim, qual é esse elemento? Não.

f) Existe algum elemento de $Im(f)$ que é imagem de mais de um elemento de $D(f)$? Se sim, qual é esse elemento? Sim; 8 ($f(5) = f(7) = 8$).

11. Considere a função $g: A \to B$, em que $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 4, 12, 20, 24\}$ e $g(x)$ é o quádruplo de x para todo $x \in A$.

a) Construa no caderno o diagrama que representa essa função. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Determine $D(g)$, $CD(g)$, $Im(g)$. $D(g) = \{1, 3, 5\}$; $CD(g) = \{1, 4, 12, 20, 24\}$; $Im(g) = \{4, 12, 20\}$

c) Determine $g(3)$. $g(3) = 12$

d) Determine x para $g(x) = 20$. $x = 5$

e) Para $g(x) = 4$, determine o valor de x. $x = 1$

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Nas laterais dos textos de uma coluna, que contêm os conteúdos, podem aparecer perguntas ou reflexões associadas a esses em boxes chamados de *Reflita* (Figura 67).

Figura 67 – Boxe Reflita contido no Capítulo 1, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Reflita

O dispositivo prático mostra um esboço do gráfico da função f e da intersecção dele com o eixo x do plano cartesiano. Qual é o significado dos sinais + e − nesse dispositivo?

O sinal + significa $f(x) > 0$, e o sinal − significa $f(x) < 0$.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Após o desenvolvimento de cada conteúdo, a obra Matemática em Contextos propõe um bloco de atividades. No final, propõe uma lista mais extensa de atividades de todos os assuntos do capítulo e de testes de múltipla escolha do ENEM e de vestibulares. A Figura 68 é um recorte da seção de testes de ENEM e vestibulares do capítulo de função quadrática dessa obra:

Figura 68 – Recorte da seção de testes do ENEM e de vestibulares no Capítulo 2, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Vestibulares e Enem Não escreva no livro.

8. **(Enem)** Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.

A segunda dedetização começou no: Alternativa **b**.

a) 19º dia. **c)** 29º dia. **e)** 60º dia.
b) 20º dia. **d)** 30º dia.

9. **(Enem)** No desenvolvimento de um novo remédio, pesquisadores monitoram a quantidade Q de uma substância circulando na corrente sanguínea de um paciente, ao longo do tempo t. Esses pesquisadores controlam o processo, observando que Q é uma função quadrática de t. Os dados coletados nas duas primeiras horas foram:

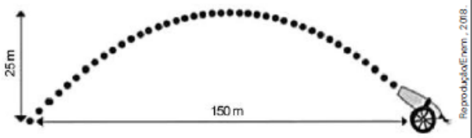
***t* (hora)**	0	1	2
***Q* (miligrama)**	1	4	6

Para decidir se devem interromper o processo, evitando riscos ao paciente, os pesquisadores querem saber, antecipadamente, a quantidade da substância que estará circulando na corrente sanguínea desse paciente após uma hora do último dado coletado.

Nas condições expostas, essa quantidade (em miligrama) será igual a: Alternativa **b**.

a) 4. **b)** 7. **c)** 8. **d)** 9. **e)** 10.

10. **(Enem)** Um projétil é lançado por um canhão e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de partida. Ele percorre uma trajetória parabólica, e a altura máxima que atinge em relação ao solo é de 25 metros.



Admita um sistema de coordenadas *xy* em que no eixo vertical *y* está representada a altura e no eixo horizon-

11. **(Enem)** Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como: Alternativa **d**.

a) muito baixa. **d)** alta.
b) baixa. **e)** muito alta.
c) média.

12. **(Enem)** A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

As imagens não estão representadas em proporção

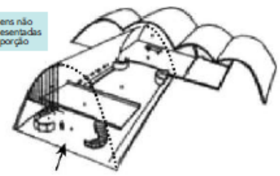


Figura 1

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

A obra Prisma Matemática também propõe muitas atividades relacionadas a contextos cotidianos, porém uma quantidade maior de questões abstratas em relação ao Matemática em Contextos. As atividades estão reunidas em blocos com várias questões, sempre precedidas de atividades resolvidas, com o objetivo de mostrar estratégias de resolução. A Figura 69 apresenta um recorte de atividades resolvidas, e a Figura 70 um recorte de atividades do capítulo de função quadrática:

Figura 69 – Atividades resolvidas no Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Em uma marcenaria, o número N de móveis fabricados no mês varia em função do número x de funcionários que trabalham na marcenaria, de acordo com uma função quadrática dada por $N(x) = x^2 + 2x$.

ANTONIODIAZ/SHUTTERSTOCK.COM

▪ Algumas profissões exigem o uso de equipamentos de proteção individual (EPI) que auxiliam na prevenção de acidentes de trabalho.

Quantos móveis podem ser produzidos em um mês quando estão trabalhando 12 funcionários na marcenaria?

Resolução

Para responder à questão, precisamos calcular $N(12)$.

Nesse caso, temos:

$N(12) = 12^2 + 2 \cdot 12 = 144 + 24 = 168$

Portanto, em um mês, podem ser produzidos 168 móveis quando há 12 funcionários trabalhando na marcenaria.

2. Considere uma função quadrática f em que $f(0) = 5$, $f(1) = 3$ e $f(-1) = 1$. Escreva a lei de formação dessa função e calcule $f(5)$.

Resolução

Como f é uma função quadrática, ela é definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

As equações (I) e (II) formam um sistema de equações:

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ a - b = -4 \end{cases}$$

Adicionando membro a membro essas equações, temos:

$2a = -6 \Rightarrow a = -3$

Substituindo $a = -3$ em (I), temos:

$-3 + b = -2 \Rightarrow b = 1$

Como $a = -3$, $b = 1$ e $c = 5$, a lei de formação da função f é $f(x) = -3x^2 + x + 5$.

Para calcular $f(5)$, substituímos x por 5 na lei da função f. Assim:

$f(5) = -3 \cdot (5)^2 + 5 + 5 = -65$

Portanto, $f(5) = -65$.

3. Seja f uma função quadrática dada por $f(x) = -2x^2 + 10x$. Determine:

a) $f(3) + f(-1) - f(-2)$;

b) os valores de x, se existirem, para os quais $f(x) = 8$.

Resolução

a) Inicialmente, calculamos os valores de $f(3)$, $f(-1)$ e $f(-2)$.

$f(3) = (-2) \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 = -18 + 30 = 12$

$f(-1) = (-2) \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1) = -2 - 10 = -12$

$f(-2) = (-2) \cdot (-2)^2 + 10 \cdot (-2) = -8 - 20 = -28$

Logo, $f(3) = 12$, $f(-1) = -12$ e $f(-2) = -28$.

Realizando o cálculo solicitado, temos:

$f(3) + f(-1) - f(-2) = 12 + (-12) - (-28) =$

$= 12 - 12 + 28 = 28$

Portanto, $f(3) + f(-1) - f(-2) = 28$.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Figura 70 – Atividades resolvidas no Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática

ATIVIDADES NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. c) Foram obtidos dois valores de tempo decorrido porque um deles é verificado quando o objeto está subindo e o outro, quando o objeto está descendo.

5. d) $x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{17}{2}$

1. Um objeto é lançado para cima, a partir do solo, e a altura h, em metro, varia em função do tempo t, em segundo, decorrido após o lançamento. Supondo que a lei dessa função seja $h(t) = 30t - 5t^2$, responda:

a) Qual é a altura do objeto 3 segundos após o lançamento? 45 metros

b) Quanto tempo após o lançamento o objeto encontra-se a 40 metros de altura? Após 2 segundos ou após 4 segundos.

c) Como podemos interpretar o resultado obtido no item **b**?

2. Considere a função definida por $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e calcule:

a) $f(0)$; 4

b) $f(-4)$; 40

c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $\frac{7}{4}$

d) $f(\sqrt{2})$. $6 - 5\sqrt{2}$

3. (Unifesp-SP) A tabela mostra a distância s em centímetros que uma bola percorre descendo por um plano inclinado em t segundos.

t	0	1	2	3	4
s	0	32	128	288	512

A distância s é função de t dada pela expressão $s(t) = at^2 + bt + c$, onde a, b, c são constantes.

A distância s, em centímetros, quando $t = 2{,}5$ segundos, é igual a: alternativa **d**

a) 248.

b) 228.

c) 208.

d) 200.

e) 190.

5. Dada a função $f(x) = -x^2 + 9x - 8$, determine os valores reais de x para que se tenha:

a) $f(x) = 0$; $x = 1$ ou $x = 8$

b) $f(x) = 10$; $x = 3$ ou $x = 6$

c) $f(x) = 11$; $x = \frac{9 \pm \sqrt{5}}{2}$

d) $f(x) = -\frac{15}{4}$.

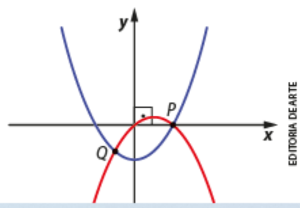
6. (UFPR) A distância que um automóvel percorre a partir do momento em que um condutor pisa no freio até a parada total do veículo é chamada de distância de frenagem. Suponha que a distância de frenagem d, em metros, possa ser calculada pela fórmula $d(v) = \frac{1}{120}(v^2 + 8v)$, sendo v a velocidade do automóvel, em quilômetros por hora, no momento em que o condutor pisa no freio.

a) Qual é a distância de frenagem de um automóvel que se desloca a uma velocidade de 40 km/h? 16 m

b) A que velocidade um automóvel deve estar para que sua distância de frenagem seja de 53,2 m? 76 km/h

7. Uma função quadrática f é tal que $f(0) = 6$, $f(1) = 2$ e $f(-2) = 20$. Determine o valor de $f\left(\frac{1}{2}\right)$. $\frac{15}{4}$

8. (UEA-AM) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais estão representados os gráficos das funções dadas por $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = -x^2 + 2x$, com os pontos comuns P e Q, conforme a figura.



Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Ao longo dos textos que contém os conteúdos, pode haver boxes laterais chamados *Pense e Responda*, que propõem perguntas relacionadas às definições ou aos exemplos dados. A Figura 71 mostra um desses boxes contido na parte introdutória de funções, cujo objetivo é que o estudante perceba que a área de um quadrado é uma função de seu lado, visto que não pode haver quadrados lados iguais com áreas diferentes.

Figura 71 – Boxe Pense e Responda contido no Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática

PENSE E RESPONDA

É possível ter dois quadrados de áreas distintas cujos lados tenham a mesma medida? não

Observe algumas medidas do lado de um quadrado e da área correspondente.

ℓ (u.c.) [unidade de comprimento]	1	2	3	10	50	100
A (u.a.) [unidade de área]	1	4	9	100	2 500	10 000

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Ainda nessa subcategoria, a obra Prisma Matemática propõe uma bateria de testes de múltipla escolha do ENEM ou de vestibulares oficiais (Figura 72). Essa seção é chamada de Atividades Complementares.

Figura 72 – Atividades resolvidas no Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática

> ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. (UFMS) Um retângulo inicial, de perímetro 200 centímetros, sofre uma modificação tal que a medida de sua largura aumenta 20%, e a medida do seu comprimento diminui 20%. Determine a função que define a área A do novo retângulo, em centímetros quadrados, em relação à medida da largura do retângulo inicial x, em centímetros. alternativa e

a) $A(x) = 120x - 0{,}8x^2$

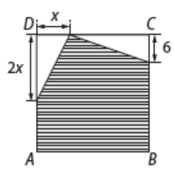
b) $A(x) = 120x + 0{,}8x^2$

c) $A(x) = 98x - 0{,}98x^2$

d) $A(x) = 80x - 1{,}2x^2$

e) $A(x) = 96x - 0{,}96x^2$

2. (UniNovafapi-PI) A figura a seguir representa um quadrado com 20 cm de lado.



EDITORIA DE ARTE

A área y da parte hachurada é dada por: alternativa c

a) $y = x^2 + 3x + 240$.

b) $y = -x^2 + 3x + 280$.

c) $y = -x^2 + 3x + 340$.

d) $y = x^2 + 3x + 340$.

e) $y = -x^2 + x + 340$.

4. (PUCCamp-SP) Considere que a curva que fornece os níveis de oxigênio dissolvido, em µg/L, no período de 1900 a 1950, seja o arco de parábola definido por $y = -\frac{1}{50}x^2 - \frac{3}{50}x + \frac{51}{20}$, em que x representa o número de décadas contadas a partir de 1900 ($x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$). Nessas condições, no período de 1910 a 1930, o nível de oxigênio dissolvido decresceu em: alternativa e

a) 0,24 µg/L.

b) 0,25 µg/L.

c) 0,26 µg/L.

d) 0,27 µg/L.

e) 0,28 µg/L.

5. (PUC-RS) A função quadrática tem diversas aplicações no nosso dia a dia. Na construção de antenas parabólicas, superfícies de faróis de carros e outras aplicações, são exploradas propriedades da parábola, nome dado à curva que é o gráfico de uma função quadrática. Seja $p(x) = mx^2 + nx + 1$. Se $p(2) = 0$ e $p(-1) = 0$, então os valores de m e n são, respectivamente, iguais a alternativa a

a) $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

b) -1 e 1.

c) 1 e $\frac{1}{2}$.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

No final de cada capítulo, o Prisma Matemática apresenta uma seção chamada *Para Refletir*, que contém um breve resumo dos conteúdos estudados e algumas perguntas relacionadas às principais definições do capítulo, bem como suas aplicações. Trata-se de uma oportunidade para o estudante realizar uma reflexão a respeito do que aprendeu. Porém, poderia ser melhor aproveitada se o estudante fosse instigado a comunicar ao professor ou a algum colega aquilo que aprendeu. A figura a seguir mostra a seção Para Refletir no final do Capítulo 2 – Função Afim:

Figura 73 – Seção Para Refletir do Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática

PARA REFLETIR NÃO ESCREVA NO LIVRO

Neste Capítulo, vimos que, em algumas situações do dia a dia, o comportamento de uma grandeza depende do comportamento de outra. Estudamos também como podemos utilizar a ideia de função e o conceito de função afim para representar e analisar essas relações entre grandezas e entre conjuntos. Isso nos permite construir modelos que podem ser utilizados para fazer estimativas e possibilitar algumas tomadas de decisão de forma mais consciente.

Estudamos o conceito de função, bem como o domínio, contradomínio e imagem de funções, função afim, representações gráficas, taxa de variação da função afim, zero da função, crescimento e decrescimento de funções, estudo de sinais da função afim e inequação do 1º grau.

Nas páginas de abertura, foi apresentada uma situação que pode ser modelada por uma função afim. Depois de ter estudado o conteúdo deste Capítulo, você consegue reconhecer que esses conceitos podem auxiliá-lo a compreender e a analisar a situação apresentada na abertura? Você já tinha essa percepção antes de estudar esses conceitos?

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **2**: Respostas pessoais.

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual(is)?
- Você consegue pensar em outras situações do dia a dia que envolvem a ideia de função e de função afim?
- Você consegue identificar a relação entre função linear e grandezas diretamente proporcionais?
- Você percebe a ideia de taxa de variação em situações envolvendo grandezas no dia a dia?
- Você utiliza os conceitos estudados para analisar situações antes de tomar decisões e de resolver problemas do dia a dia?

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Das três obras, Conexões Matemática é a que propõe uma maior quantidade de questões e de testes de múltipla escolha mais abstratos. O livro apresenta uma seção chamada de Exercícios Propostos, geralmente precedida por uma seção de Exercícios Resolvidos. A Figura 74 é um exemplo de Exercícios Resolvidos retirado do capítulo de função afim, e a Figura 75, de Exercícios Propostos do mesmo capítulo:

Figura 74 – Exercício Resolvido no Capítulo 1, Volume 2, da obra Conexões Matemática

Exercício resolvido

R1. Dada a função afim g tal que $g(x) = \frac{1}{3}x - 1$, calcular:

a) $g\left(\frac{1}{2}\right)$

b) x, para $g(x) = 4$

▸ **Resolução**

a) $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{6} - \frac{6}{6} = -\frac{5}{6}$

b) $\frac{1}{3}x - 1 = 4 \Rightarrow \frac{1}{3}x = 5 \Rightarrow x = 15$

Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 2 (2020).

Figura 75 – Exercícios Propostos no Capítulo 1, Volume 2, da obra Conexões Matemática

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

A função i não é afim porque não assume forma $ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

1. Das funções abaixo, identifique quais são leis de funções afins. Nesses casos, determine o valor dos coeficientes a e b.

a) $g(x) = 2x + 4$ $a = 2$ e $b = 4$

b) $i(x) = 2 + x^2$ Não é função afim.

c) $f(x) = -\sqrt{3}$ $a = 0$ e $b = -\sqrt{3}$

d) $k(x) = -13x$ $a = -13$ e $b = 0$

- Por que entre os itens, há função que não é afim?

2. Considerando a função f, dada por $f(x) = -3x + 1$, calcule:

a) $f(-2)$ 7

b) x, para $f(x) = 0$ $\frac{1}{3}$

c) $f(\sqrt{2})$ $-3\sqrt{2} + 1$

d) x, para $f(x) = 19$ -6

- Para quais valores de x temos $f(x)$ maior que zero? E menor que zero?
- Você conhece alguma forma de representar essa função de maneira que possa estudá-la melhor?

Ver resolução no Guia do professor.

3. Determine o valor de a para que se tenha $f(3) = 8$ na função dada por $f(x) = ax + \frac{1}{2}$. $\frac{5}{2}$

4. Determine os valores de p e q para que a função j, dada por $j(x) = (p^2 - 1)x + (2q - 6)$, seja uma função identidade. $p = \pm\sqrt{2}$; $q = 3$

5. Em certa cidade, a assinatura residencial de uma linha telefônica custava R$ 34,50 e dava direito à utilização de 100 minutos mensais. Caso o consumidor excedesse os 100 minutos, ele pagaria R$ 0,08 por minuto excedente.

a) Quanto o consumidor pagaria por sua conta se utilizasse 82 minutos em um mês? E se utilizasse 300 minutos? R$ 34,50; R$ 50,50

b) Um consumidor pagou R$ 52,90 por sua conta telefônica. Quantos minutos esse consumidor usou? 330 minutos

c) Escreva no caderno a lei de formação da função

6. Dada a função f, com $f(x) = 3x - 1$, determine:

a) $f(1) - f(0)$ 3

b) $f(2) - f(1)$ 3

c) $f(3) - f(2)$ 3

d) $f(4) - f(3)$ 3

Ver resolução no Guia do professor.

- Observando os itens anteriores, identifique a variação que ocorre no valor de $f(x)$ quando é acrescentada uma unidade ao valor de x.
- Sem fazer contas, determine o valor de $f(28) - f(27)$.
- Refaça os itens anteriores para $g(x) = -3x - 1$.
- Os valores encontrados relacionam-se com o valor do coeficiente de x na lei da função? De que forma?
- Que conclusão podemos estabelecer?

7. A tabela a seguir apresenta alguns valores reais de x e os respectivos valores de $f(x)$ e $g(x)$ das funções afins f e g.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	1	3	5	7
$g(x)$	4	3	2	1	0

a) Considerando os valores apresentados na tabela, determine a lei de formação da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -x + 2$

b) Em um plano cartesiano, faça a representação gráfica dos pontos dados na tabela relativos à função f. Em seguida, elabore uma hipótese sobre como deve ser o gráfico de f, trace uma linha que passe pelos pontos obtidos e contemple sua hipótese. Ver resolução no Guia do professor.

c) Em outro plano cartesiano, faça o que se pede no item **b** para os dados relativos à função g.

Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 2 (2020).

Embora a maioria das atividades enquadradas nessa categoria não solicite trabalhos em duplas ou em grupos maiores, os manuais do professor das três obras trazem essa sugestão. O

Prisma Matemática estabelece: “Ao propor a resolução das atividades presentes no livro, é importante formar duplas ou quartetos colaborativos” (Manual do Professor, p. 168). O Manual dedica uma seção às competências socioemocionais e segue nessa linha afirmando que “o professor, como mediador, pode integrar a esses momentos propostas em que os estudantes, distribuídos em duplas, trios ou quartetos, possam discutir e colaborar entre si na resolução de problemas” (Manual do Professor, p. 169).

No Manual do Professor do Matemática em Contextos também há sugestões ao professor para que organize atividades em grupos. Na atividade da Figura 65 (seção 4.4.1), por exemplo, o Manual (p. 183) sugere que “o professor organize a turma em duplas, para que elas pensem e trabalhem em conjunto na resolução das atividades, favorecendo assim o diálogo entre os estudantes na busca por soluções”.

O Manual do Professor da obra Conexões Matemática também sugere que as atividades propostas sejam trabalhadas em grupos. O Manual propõe que o professor propicie, em diferentes momentos, duas formas de organização dos grupos: deixar que os estudantes escolham livremente ou agrupá-los testando grupos que reúnam estudantes em diferentes estágios de aprendizagem. Destaca ainda que o professor precisa ensinar os estudantes a dividir as tarefas e ouvir o outro.

4.4.2 Propostas de atividades com uso de tecnologia digital

Tecnologias digitais como computadores e, especialmente, smartphones, fazem parte do dia a dia de muitas famílias, tanto em ambientes profissionais como sociais. De acordo com Levy (1993), podemos caracterizar as tecnologias digitais como tecnologias da inteligência que ampliam e modificam funções cognitivas dos indivíduos, enquanto sujeitos que podem transformar no contexto de suas práticas sociais. Assim, é preciso pensar na formação de cidadãos capazes de atuar em uma sociedade tecnológica.

Em função da crescente importância das tecnologias digitais e o espaço de atividades relacionadas a essas tecnologias nos livros didáticos que compõem o *corpus*, optei por deixar uma subcategoria exclusivamente vinculada a essas atividades.

As obras Matemática em Contextos e Prisma Matemática apresentam seções específicas relacionadas à tecnologia digital, enquanto o Conexões Matemática realiza algumas indicações de softwares na seção *Ampliando os Conhecimentos* e em algumas questões relativas a gráficos.

Conforme indicado no Panorama das obras, o Matemática em Contextos tem seções chamadas *Tecnologias Digitais*. Nos capítulos estudados nesse trabalho, a obra indica o passo a passo para construir gráficos de funções afim no GeoGebra[10] e em planilhas eletrônicas, do cálculo de raízes e da construção do gráfico de funções quadráticas no GeoGebra e o passo a passo para a construção de funções definidas por mais de uma sentença nesse software.

No caso de funções definidas por mais de uma sentença, o livro didático discorre a respeito do comando *Se* do GeoGebra (Figura 76) e sua representação em um fluxograma, introduzindo e propondo uma atividade para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Além da construção de gráficos, apresenta seções relacionando os gráficos com os coeficientes das leis algébricas de funções afim e de funções quadráticas (Figura 77).

Figura 76 – Recorte de atividade de construção de gráficos no Capítulo 1, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas Orientações específicas deste Manual.

Construção do gráfico de funções definidas por mais de uma sentença

Utilizaremos o GeoGebra Calculadora Gráfica para construir o gráfico de uma função definida por mais de uma sentença no plano cartesiano. Você pode usar a versão *on-line* acessando https://www.geogebra.org/?lang=pt.

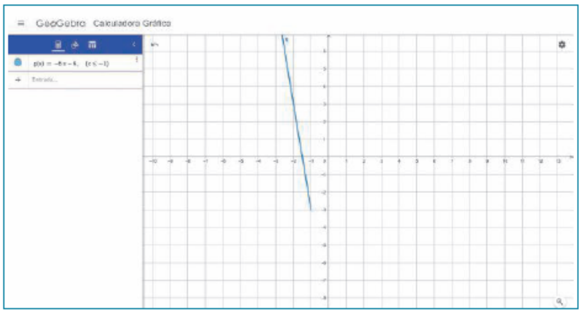
Vamos construir a representação gráfica da função dada pela lei $f(x) = \begin{cases} -6x - 9, \text{ se } x \leq -1 \\ x - 2, \text{ se } -1 < x \leq 6 \\ 4, \text{ se } x > 6 \end{cases}$ de duas maneiras diferentes. Na primeira, vamos construir no plano cartesiano o gráfico de um jeito similar ao que fizemos anteriormente para uma função afim. Para isso, abra um novo documento e acesse as configurações de exibição (na parte superior direita da tela) para habilitar as opções de exibir os eixos e a malha principal.

1º passo: Vamos construir no plano cartesiano a parte do gráfico que corresponde à primeira sentença da função f. No campo Entrada de comando (situado na parte esquerda da tela, no caso da versão *on-line*), digite a lei da função **g(x)=se(x<=-1,-6x-9)** e tecle "Enter". Observe que "<=" indica o sinal $\leq$ (menor do que ou igual a).

Essa expressão indica que, para cada x no plano cartesiano, caso $x \leq -1$, então y deve ser definido por $-6x - 9$.

Observe que só aparece a parte do gráfico em que $x \leq -1$.

2º passo: Agora vamos construir no plano cartesiano a parte do gráfico que corresponde à segunda sentença da função f. No campo Entrada de comando digite a lei da função **h(x)=se(-1<x<=6,x-2)** e tecle "Enter".



Tela do GeoGebra após o 1º passo.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

[10] O GeoGebra é um software livre de matemática, utilizado para ensino e aprendizagem desde a escola primária até a universidade.

Figura 77 – Recorte de atividade de construção de gráficos no Capítulo 2, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Analisando os coeficientes de uma equação de 2º grau

Vamos utilizar agora a Calculadora Gráfica para analisar os coeficientes de uma equação de 2º grau na determinação das raízes dessa equação. Você pode usar a versão *on-line*, disponível em: www.geogebra.org (acesso em: 12 jun. 2020).

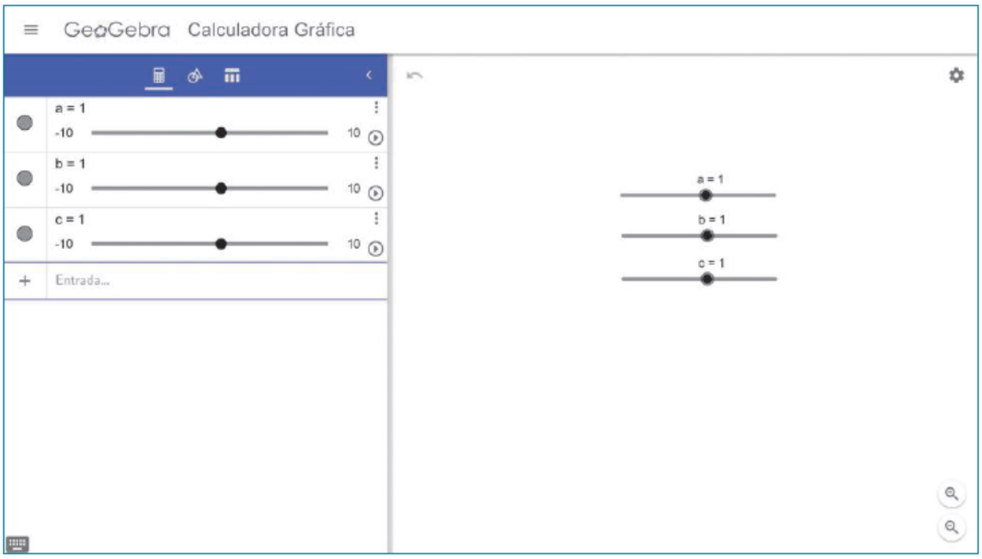
Abra um novo documento e acesse as configurações de exibição (na parte superior direita da tela) e tire as opções de exibir os eixos e de exibir a malha principal.

1º passo: Clique na opção Ferramentas (com ícone de circunferência e triângulo) acima do campo Entrada. Clique na opção de controle deslizante, em seguida, clique no plano cartesiano. Na tela que abrir, digite o nome **a=1** e defina o intervalo do controle para −10 e 10, o incremento igual a 1 e clique OK. Dessa maneira você vai criar o controle deslizante *a*, com incremento igual a 1 e intervalo de −10 a 10.

Fique atento

O incremento indica de quanto em quanto você pode mover o controle deslizante.

Repita o procedimento para criar os controles deslizantes *b* e *c*.

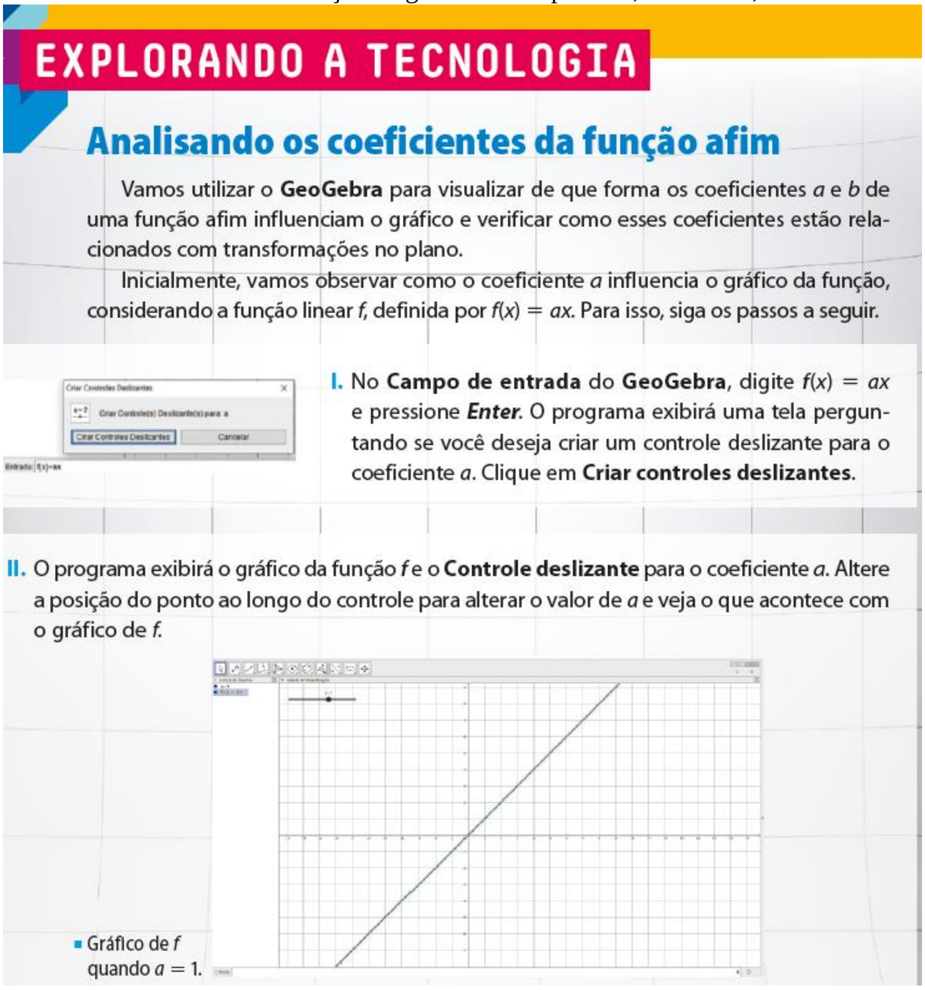


Tela do GeoGebra após o 1º passo.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

A obra Prisma Matemática tem seções chamadas Explorando a Tecnologia que tratam das tecnologias digitais. Nos capítulos estudados nesse trabalho, a obra apresenta três dessas seções, uma para a função afim e duas para a função quadrática, todas com o uso do GeoGebra. A primeira seção trata da relação dos coeficientes da lei algébrica da função afim com sua forma gráfica (Figura 78). A segunda seção trata da relação dos coeficientes da lei algébrica da função quadrática com sua forma gráfica e a terceira dos coeficientes com o vértice da parábola.

Figura 78 – Recorte de atividade de construção de gráfico no Capítulo 1, Volume 1, da obra Prisma Matemática



EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Analisando os coeficientes da função afim

Vamos utilizar o **GeoGebra** para visualizar de que forma os coeficientes *a* e *b* de uma função afim influenciam o gráfico e verificar como esses coeficientes estão relacionados com transformações no plano.

Inicialmente, vamos observar como o coeficiente *a* influencia o gráfico da função, considerando a função linear *f*, definida por $f(x) = ax$. Para isso, siga os passos a seguir.

I. No **Campo de entrada** do **GeoGebra**, digite $f(x) = ax$ e pressione ***Enter***. O programa exibirá uma tela perguntando se você deseja criar um controle deslizante para o coeficiente *a*. Clique em **Criar controles deslizantes**.

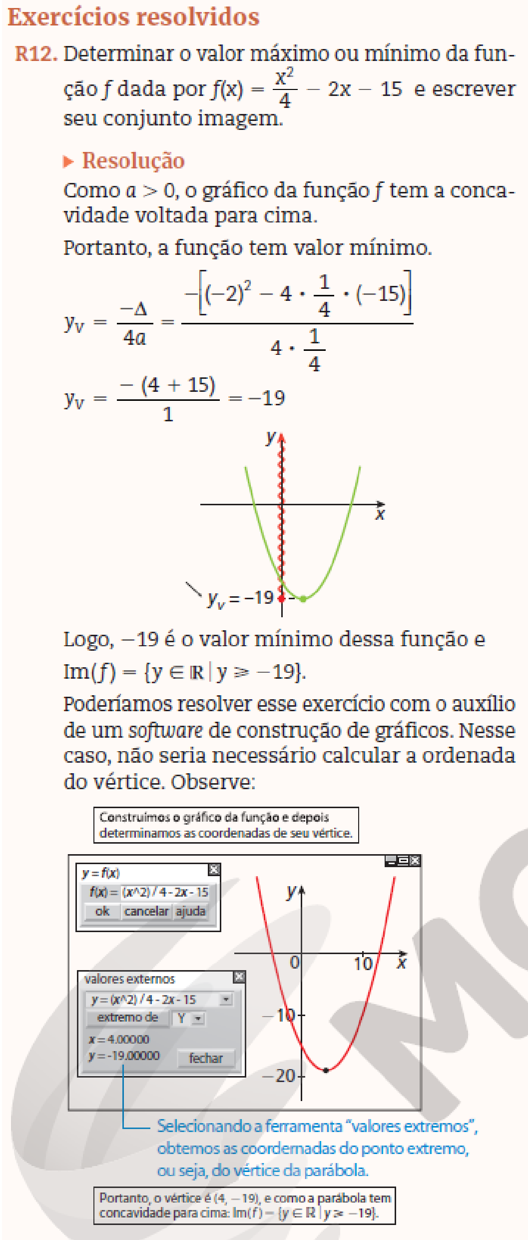
II. O programa exibirá o gráfico da função *f* e o **Controle deslizante** para o coeficiente *a*. Altere a posição do ponto ao longo do controle para alterar o valor de *a* e veja o que acontece com o gráfico de *f*.

Gráfico de *f* quando $a = 1$.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Nos capítulos estudados nesse trabalho, o Matemática em Contextos não indica um software específico, porém solicita o uso de um software em um tópico de translação de gráfico, em alguns exercícios resolvidos (Figura 79) e em algumas questões abertas.

Figura 79 - Exercício Resolvido no Capítulo 2, Volume 2, da obra Conexões Matemática



Exercícios resolvidos

R12. Determinar o valor máximo ou mínimo da função f dada por $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x - 15$ e escrever seu conjunto imagem.

▸ **Resolução**

Como $a > 0$, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima.

Portanto, a função tem valor mínimo.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left[(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-15)\right]}{4 \cdot \frac{1}{4}}$$

$$y_V = \frac{-(4 + 15)}{1} = -19$$

Logo, -19 é o valor mínimo dessa função e $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -19\}$.

Poderíamos resolver esse exercício com o auxílio de um *software* de construção de gráficos. Nesse caso, não seria necessário calcular a ordenada do vértice. Observe:

Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 2 (2020).

Os Manuais do Professor das três obras que compõe o *corpus* possuem textos genéricos destacando a importância das tecnologias digitais. O Prisma Matemática, além dos textos genéricos, apresenta textos especificando como usar a ferramenta de controle deslizante do GeoGebra para relacionar os coeficientes da função afim e da função quadrática com seus respectivos gráficos.

O Manual do Professor do Matemática em Contextos (p. 185) indica que "as atividades propostas na seção de Tecnologias Digitais podem ser realizadas em uma perspectiva coletiva, organizando os estudantes em pequenos grupos", porém não apresenta maiores detalhes de como o professor pode conduzir a atividade para provocar uma melhor exploração nessas tecnologias digitais.

Fagundes, Valentini e Soares (2010) enfatizam que jovens nativos digitais parecem aprender numa relação que se contextualiza pela prática e pela experimentação, o que fica em conflito com a dinâmica pedagógica que parte de instruções para depois efetuar ações que podem levar a aprendizagem. O próprio Guia PNLD 2021 – Objeto 2 (p. 25), na análise das coleções aprovadas, afirma que “há obras que se limitam ao uso de calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, com orientações superficiais ao (à) professor (a) de como explorá-los”.

4.4.3 Propostas de explorações e investigações

Essa subcategoria aborda atividades que propõe oportunidades de investigação, aplicação, ampliação e debate dos temas ou conteúdos abordados. Nessa subcategoria estão as propostas de atividades que mais oportunizam a interação entre os estudantes. As obras que compõe o *corpus* apresentam algumas seções específicas que propõe investigações e debates. Outras propostas com essa característica estão em seções de atividades dos livros estudados, por meio de questões abertas e, ainda, questões abertas ou solicitações de pesquisa na apresentação de situações de contexto no início dos capítulos.

O Matemática em Contextos tem seções chamadas *Leitura e compreensão* que, normalmente, após a apresentação de um ou mais textos, suscitam o debate entre os alunos a partir de questões abertas ou de uma investigação do tema proposto. No capítulo de função afim, há um texto sobre fotossíntese e, na sequência, um texto que exibe uma aplicação dessa função na botânica (Figura 80). Após os textos e os gráficos, o estudante é convidado a pesquisar a respeito da concentração do gás carbônico na atmosfera e elaborar uma redação com os resultados da pesquisa. No final, solicita uma pesquisa a respeito de pares de grandezas cuja relação é o de uma função afim.

Ainda no capítulo de função afim do Matemática em Contextos, na seção *Além da sala de aula*, há um texto a respeito das flautas do povo indígena Rikbaktsa, que habita o noroeste do estado do Mato Grosso. O texto contém uma tabela com dados numéricos do comprimento das flautas e o respectivo comprimento dos palmos de mão (unidade de medida usada por esse povo). O estudante é convidado a responder questões relacionadas à função afim, especialmente a construção do conceito de coeficiente angular como uma taxa de variação constante, debater com colegas e investigar, na comunidade, contextos relacionados à função afim (Figura 81).

Figura 80 – Recorte da seção Leitura e compreensão no Capítulo 1, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

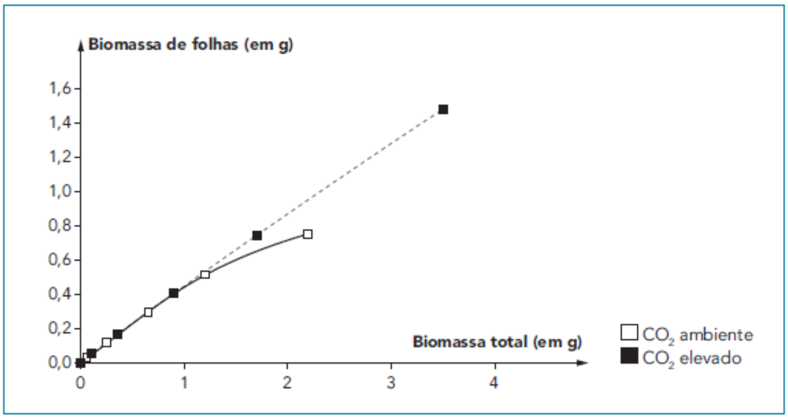
Leitura e compreensão Não escreva no livro.

Há na Botânica, além da relação apresentada, outras cujo comportamento pode ser aproximado ao de funções afins para alguns intervalos. É o caso da relação entre a **biomassa** presente em folhas de *Senna alata* (leguminosa arbórea) e a biomassa total quando em ambientes com CO_2 elevado.

Biomassa

Massa seca de qualquer organismo vivo. No caso das plantas, indica a matéria orgânica que foi incorporada na planta a partir da fotossíntese.

Biomassa presente nas folhas em função da biomassa total das plantas de *Senna alata*



Fonte de consulta: MARABESI, Mauro Alexandre. *Efeito do alto CO_2 no crescimento inicial e na fisiologia da fotossíntese em plântulas Senna alata (L.) Roxb.* 2007. Dissertação (Mestreado em Biodiversidade Vegetal e Meio Ambiente) – Instituto de Botânica da Secretaria de Estado do Meio Ambiente, São Paulo, 2007. Disponível em: http://arquivos.ambiente.sp.gov.br/pgibt/2013/09/Mauro_Alexandre_Marabesi_MS.pdf.

A linha tracejada representa a função afim dada por $y = 0{,}42x + 0{,}027$, que é a função que melhor aproxima os dados relacionados à biomassa das folhas de *Senna alata* em ambiente de CO_2 elevado (concentração de 720 ppm). A linha contínua representa a função polinomial de 2º grau que melhor aproxima os dados relacionados ao CO_2 ambiente (concentração de 380 ppm).

Fique atento

Você vai estudar a função polinomial de 2º grau no próximo capítulo.

O estudo dos experimentos que geraram os dados para a elaboração do gráfico acima aponta que plantas podem mitigar o efeito das elevadas liberações de CO_2 provocadas pela sociedade humana industrializada atual. As plantas incorporam CO_2 na forma de matéria orgânica enquanto crescem e, considerando esse estudo realizado para pesquisar o efeito do CO_2 sobre o crescimento e o desenvolvimento de plantas da espécie *Senna alata* constatou-se que, quando expostas a um ambiente de alta concentração de CO_2, elas investiram mais em folhas e acumularam 60% mais de biomassa do que a amostra de plantas do tratamento de CO_2 ambiente. Com isso, conclui-se que a *Senna alata* é indicada no uso de sistemas florestais cujo objetivo é aumentar a captação de CO_2 da atmosfera (sequestro de carbono).

1. Pesquise e indique condições ambientais favoráveis ao crescimento de plantas.
   Um exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
2. Pesquise sobre o papel do CO_2 na atmosfera e identifique:
   Um exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
   - problemas causados pela alta concentração de CO_2 na atmosfera;
   - fatores que podem provocar altas concentrações de CO_2 na atmosfera;
   - possíveis soluções para reduzir a concentração de CO_2 na atmosfera.

   Em seguida, no caderno, elabore uma breve redação na qual você deve expressar os resultados de sua pesquisa, argumentando sobre as diversas influências que o CO_2 tem na natureza e na sociedade.
   Um exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
3. Pesquise e indique pares de grandezas cuja relação entre as medidas pode ser aproximada de uma função afim. Um exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Figura 81 – Recorte da seção Além da sala de aula no Capítulo 1, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

A tabela a seguir apresenta a medida de comprimento de cada tipo de flauta usando a unidade de medida padrão para os Rikbaktsa e as medidas correspondentes em centímetros.

Medida de comprimento das flautas Rikbaktsa

Tipo da flauta	Medida de comprimento na unidade de medida Rikbaktsa (palmos da mão)	Medida de comprimento aproximada (em centímetros)
Izowytsik	4	68
Iharaiktsa	4,5	76,5
Tsapukte	5	85
Izowy	5,5	93,5

Fonte de consulta: MATTOS, José Roberto Linhares de; POLEGATTI, Geraldo Aparecido. *Um encontro etnomatemático na educação escolar indígena*: a função das flautas dos Rikbaktsa. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/ XIENEM/ pdf/1388_280_ID.pdf. Acesso em: 12 maio 2020.

Assim como fizeram os estudantes indígenas Rikbaktsa, vamos analisar a relação da função afim com as medidas de comprimento das flautas.

1. Considerando x a medida de comprimento da flauta em palmos e $f(x)$ a medida de comprimento da flauta em centímetros, como poderíamos escrever a lei $f(x) = ax + b$ utilizando os dados dispostos na tabela? $f(x) = 17x$
2. Represente no caderno o gráfico dessa função. O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
3. O que representa, na prática, o coeficiente a dessa função? A medida de comprimento aproximada do palmo do artesão, em centímetros.
4. Junte-se a um colega e respondam: Qual é a importância de utilizar um contexto familiar ao conhecer um conceito matemático novo? Resposta pessoal.
5. Pense como os professores Rikbaktsa e procure na sua comunidade contextos que podem ser modelados por uma função afim. Descreva a situação e, se for possível coletar dados, modele a função.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Além das duas seções citadas, o Matemática em Contextos possui seções chamadas de *Conexões* que trazem temas atuais que se relacionam com os conteúdos do capítulo em estudo e mostram aplicações da Matemática. Por vezes, essas seções permitem também um trabalho integrado com outras áreas do conhecimento, em especial com Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A Figura 82 é um recorte da seção Conexões do capítulo de função quadrática e trata do uso das curvas catenárias na arte. A atividade retoma a definição de eixo de simetria e a influência de coeficientes sobre uma curva. O estudante, a partir de seus estudos com a parábola, é convidado a refletir e verbalizar a respeito do conceito de eixo de simetria. Quanto à influência dos coeficientes sobre a curva, o estudante pode concluir por comparação, tendo por base os coeficientes da parábola e, assim, retomar o que foi visto no capítulo. A atividade também solicita uma pesquisa de obras arquitetônicas que possuem arcos de curvas e a apresentação dos resultados em um vídeo ou podcast ou página da internet, reforçando as competências relacionadas à comunicação. O estudante é convidado a utilizar diferentes gêneros textuais e tecnologias digitais de informação e comunicação para difundir informações e produzir conhecimentos.

Figura 82 – Recorte da seção Conexões no Capítulo 2, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

O uso de catenárias na Arte

As imagens não estão representadas em proporção.

A catenária é uma curva muito utilizada na Arquitetura, na Engenharia e até na Arte. Antoni Gaudí (1852-1926) foi um arquiteto espanhol que fez parte do Modernismo catalão. Ele ficou famoso por usar catenárias e parábolas nos projetos arquitetônicos utilizando modelos em 3 dimensões, moldados pela gravidade. Para isso, ele usava fios e correntes pendurados; quando eles se estabilizavam, ele copiava as formas e as reproduzia em catedrais.

A Gaudí Chair é uma cadeira que tem medida de massa de 1 kg e foi projetada pelo *designer* Bram Geenen. A peça recebeu esse nome por ter sido construída com técnicas similares às de Gaudí. A cadeira foi feita com fibras de carbono, náilon e vidro, unidas por um jato de *laser*. O projeto dela foi desenvolvido com a ajuda de um *software* que distribuiu linhas verticais e horizontais ao longo da superfície do objeto, formando um feixe de grades.

O modo de fabricar a estrutura que sustenta a cadeira é obtido por um raciocínio análogo ao de suspender o conjunto de grades no teto e deixar que a gravidade atue sobre ele, adquirindo o formato mais lógico e a força máxima necessária, como acontece com estruturas suspensas como as descritas pela equação de uma catenária.

Fontes de consulta: AMORIM JUNIOR, Elias Feitosa de. Antoni Gaudí. *Infoescola*. Disponível em: https://www.infoescola.com/biografias/antoni-gaudi/. THE GAUDÍ Chair. *FAZdesign*, 7 out. 2011. Disponível em: http://fazdesign.com.br/the-gaudi-chair/. Acessos em: 30 abr. 2020.

Estudo de Gaudí em correntes suspensas com pesos, em Catalunha, Espanha. Foto de 2016.

Gaudí Chair, de Bram Geenen, c. 2010 (impressão 3D de poliamida com fibra de vidro e de carbono de 65 cm × 65 cm × 85 cm). Amsterdã, Holanda. Foto de 2010.

Conecte com o texto

1. Observe a representação da catenária, presente no texto, e responda no caderno: É correto afirmar que essa curva apresenta um eixo de simetria? Sim, assim como a parábola, a catenária apresenta um eixo de simetria que passa pelo vértice dela.
2. Observe as catenárias representadas no plano cartesiano na página anterior e responda no caderno: Quanto maior for o coeficiente a na equação da catenária, a curva se aproxima ou se afasta do eixo de simetria? A curva se afasta do eixo de simetria.
3. Na brincadeira de "pular corda", se as extremidades dessa corda estão presas a uma mesma medida de comprimento de altura e a corda não toca o solo, qual é a curva que ela descreve? Catenária.

Pesquise e debata

4. Pesquise outras obras arquitetônicas nas quais apareçam arcos que podem ser relacionados a uma catenária. Depois, crie um *podcast*, vídeo, página na internet, entre outros, para apresentar suas descobertas aos colegas. Exemplos de resposta: Cabos de sustentação da cobertura do Velodrome Stadium (Santiago Calatrava) e cascas sustentadas pelas paredes externas da Sydney Opera House (Jorn Utzon e Ove Arup & Partners).
5. Pesquise a obra do arquiteto Antoni Gaudí e exemplos de como ele empregava a catenária nas obras arquitetônicas. Exemplos de resposta: Arcos no sótão e na Casa Milà; arcos na arcada do Colégio de las Teresianas.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Outro exemplo de atividade de investigação proposta na obra Matemática em Contextos está em uma situação que antecipa a teoria de funções definidas por mais de uma sentença. Na situação 1 (Figura 83), o livro didático apresenta um breve texto com informações sobre o imposto de renda. O estudante é questionado sobre a relação dos rendimentos de uma pessoa com os valores do imposto a pagar e convidado a pesquisar sobre a importância do imposto de renda.

Figura 83 – Situação de contexto relacionada a funções definidas por mais de uma sentença no Capítulo 1, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Situação 1

Não escreva no livro.

Dragana Gordic/Shutterstock

Todo ano algumas pessoas físicas precisam declarar, entre outras informações, os valores recebidos no ano anterior.

Imposto de renda

Os impostos são valores cobrados das pessoas ou das empresas, pelo governo, para que as instituições públicas funcionem e garantam à população educação, saúde, segurança, iluminação, infraestrutura, entre outros serviços.

Um dos impostos mais importantes no Brasil é o Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas (IRPF), também chamado de imposto de renda, que é recolhido pela Receita Federal. A parcela do imposto que uma pessoa deve pagar por ano é calculada de acordo com os rendimentos dela. Quanto maior o rendimento, maior é a parcela.

A porcentagem dos rendimentos a pagar ao governo é definida por faixas com alíquotas diferentes para cada uma delas. Por exemplo, quem tem rendimentos mensais de R$ 2.000,00 tem a alíquota igual a 7,5%. Mas quem tem rendimentos mensais iguais a R$ 3.000,00 tem a alíquota igual a 15%, e quem tem rendimentos mensais de R$ 5.000,00 tem a alíquota igual a 27,5% (alíquotas do ano de 2020).

a) A relação entre os rendimentos mensais de uma pessoa e a alíquota é uma função afim? Justifique.
A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Você já tinha ouvido falar do IRPF? Pesquise a importância desse imposto.
Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Os recursos arrecadados com o imposto de renda são necessários para vários setores do país, como educação, segurança e saúde.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

A obra Prisma Matemática, na abertura de cada capítulo, propõe questões para debates, com situações de contexto relacionadas ao tema que será estudado no capítulo. A figura a seguir é a atividade proposta no início do capítulo de função quadrática, após o texto de abertura desse capítulo, que trata das relações de lucro e de quantidade produzida em processos industriais:

Figura 84 – Atividade proposta no início do Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática

Agora reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada item.

NÃO ESC NO LIVR

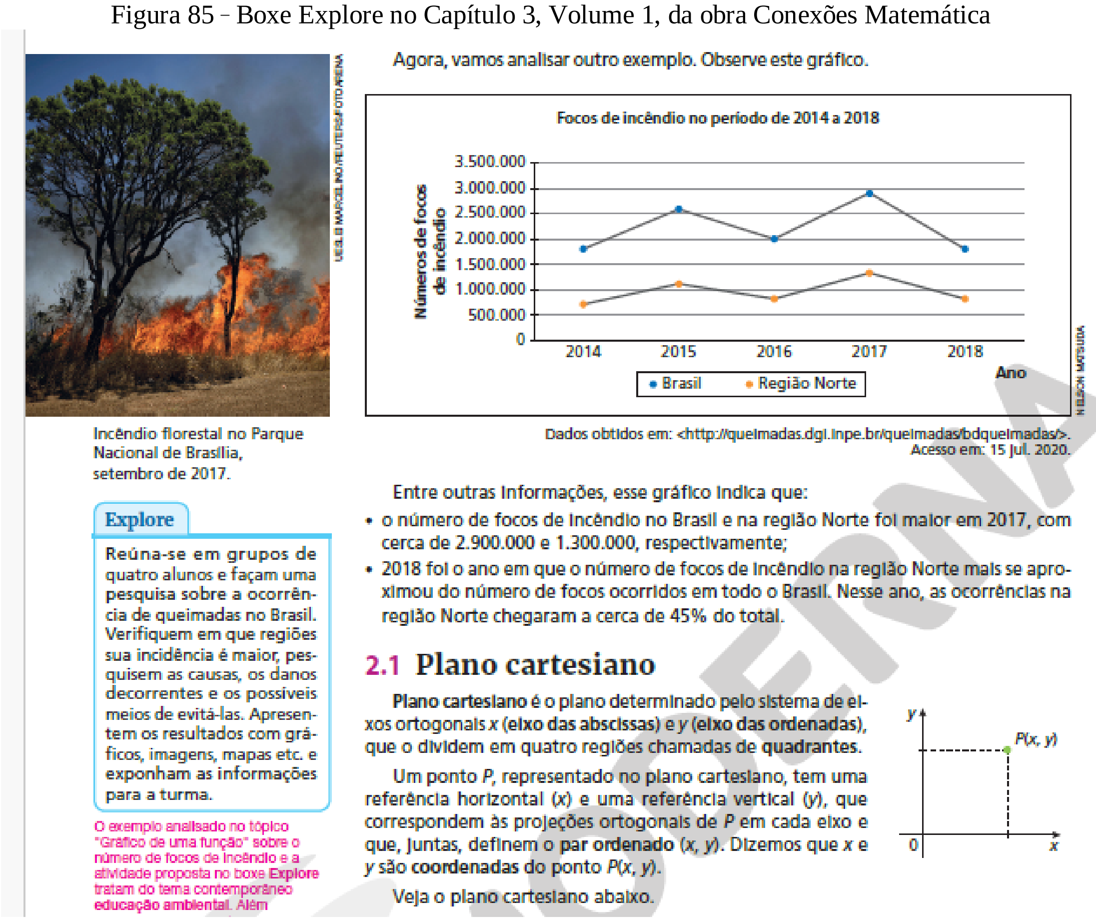
1. O que vocês entendem por lucro? Resposta pessoal.
2. Na opinião de vocês, para obter maior lucro, é necessário apenas aumentar a quantidade de bens produzidos por uma empresa? Justifique sua resposta. Resposta pessoal.
3. Vocês acreditam que há um lucro máximo a ser atingido em um negócio ou que ele aumenta indefinidamente? Pesquisem sobre o assunto e discutam com a turma. Resposta pessoal.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Além disso, a obra tem duas seções específicas que podem ser enquadradas nessa subcategoria. A seção *Fórum* oportuniza o debate entre colegas ou entre colegas e o professor, e a seção *Conexões*, que apresenta textos com temas relacionados aos assuntos estudados e propõe atividades de investigação e de discussão com colegas. Essas seções propõem debates sobre contextos atuais, porém, para os capítulos incluídos nesse trabalho, não têm relação direta com os assuntos estudados (função afim e função quadrática).

A obra Conexões Matemática possui boxes laterais chamados *Explore* e três seções específicas, que propõem atividades de investigação e exploração. No Capítulo 3 do Volume 1 há um boxe *Explore*, que solicita uma pesquisa em grupo sobre a ocorrência de queimadas no Brasil (Figura 85). Após a investigação, os grupos devem apresentar os resultados com gráficos, imagens ou mapas e expor as informações para a turma.

Figura 85 – Boxe Explore no Capítulo 3, Volume 1, da obra Conexões Matemática



Incêndio florestal no Parque Nacional de Brasília, setembro de 2017.

Explore

Reúna-se em grupos de quatro alunos e façam uma pesquisa sobre a ocorrência de queimadas no Brasil. Verifiquem em que regiões sua incidência é maior, pesquisem as causas, os danos decorrentes e os possíveis meios de evitá-las. Apresentem os resultados com gráficos, imagens, mapas etc. e exponham as informações para a turma.

O exemplo analisado no tópico "Gráfico de uma função" sobre o número de focos de incêndio e a atividade proposta no boxe **Explore** tratam do tema contemporâneo educação ambiental. Além

Agora, vamos analisar outro exemplo. Observe este gráfico.

Dados obtidos em: <http://queimadas.dgi.inpe.br/queimadas/bdqueimadas/>. Acesso em: 15 jul. 2020.

Entre outras informações, esse gráfico indica que:

- o número de focos de incêndio no Brasil e na região Norte foi maior em 2017, com cerca de 2.900.000 e 1.300.000, respectivamente;
- 2018 foi o ano em que o número de focos de incêndio na região Norte mais se aproximou do número de focos ocorridos em todo o Brasil. Nesse ano, as ocorrências na região Norte chegaram a cerca de 45% do total.

2.1 Plano cartesiano

Plano cartesiano é o plano determinado pelo sistema de eixos ortogonais *x* (**eixo das abscissas**) e *y* (**eixo das ordenadas**), que o dividem em quatro regiões chamadas de **quadrantes**.

Um ponto *P*, representado no plano cartesiano, tem uma referência horizontal (*x*) e uma referência vertical (*y*), que correspondem às projeções ortogonais de *P* em cada eixo e que, juntas, definem o **par ordenado** (*x*, *y*). Dizemos que *x* e *y* são **coordenadas** do ponto *P*(*x*, *y*).

Veja o plano cartesiano abaixo.

Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 1 (2020).

A seção chamada *Compreensão de Textos* é apresentada no final de cada capítulo e propõe uma atividade com um colega com um tema relacionado ao conteúdo estudado. A Figura 86 mostra essa seção no capítulo de função quadrática. Após o texto, os estudantes são convidados a responder uma questão relativa ao assunto do texto, relatar ao colega uma questão de cunho pessoal e demonstrar o teorema proposto que trata do ponto simétrico ao ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas.

Figura 86 – Seção Compreensão de Texto no Capítulo 2, Volume 2, da obra Conexões Matemática

Compreensão de texto

Teorema de Etiene

Observação de estudante durante aula do professor Leonardo Muniz mudou seu desempenho na disciplina e ganhou publicação em revista renomada.

Quando o assunto é Matemática, não é incomum encontrar alunos que apresentem resistência ou dificuldade de entendimento da matéria. Essa era a realidade de Camille Etiene, estudante do curso técnico em Química [do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense – IFF, Campus Bom Jesus do Itabapoana], que hoje não só se declara apaixonada pela disciplina como também tem um teorema para chamar de seu: o Teorema de Etiene.

[...] ela recorda com alegria a satisfação de sua descoberta, realizada durante uma aula do primeiro ano do curso técnico, em 2018, quando estudavam funções quadráticas, que têm como gráfico a curva chamada parábola. O professor Leonardo Muniz explica que ensina aos alunos um esquema de cinco passos para o esboço da parábola. O último é a marcação do ponto P, que é o simétrico do ponto de intersecção da parábola com o eixo y (ponto (0, c)), em relação ao eixo de simetria da parábola, como [mostrado] na imagem abaixo, que representa o gráfico de uma função quadrática qualquer com raízes reais.

"Enquanto fazíamos a lista de exercícios e discutíamos as perguntas, olhei para o quadro e vi que, para encontrar o ponto P, era só somar as raízes (os valores de x_1 e x_2)", conta Etiene. O professor concordou e, imediatamente, os colegas começaram a aplicar a ideia às questões já resolvidas. Identificaram que o argumento era válido e Leonardo chamou a atenção da turma para a prova, que é o processo de mostrar que o teorema está correto. A comemoração foi imediata; um momento de descoberta coletiva que mudou o modo como Camille e os colegas enxergavam a tão temida matemática: "a felicidade foi contagiando a sala toda", relata a aluna.

Etiene, que antes precisava de aulas particulares para superar os desafios da disciplina, hoje oferece auxílio aos que também têm dificuldades com os números. E não só em matemática: "Fiquei muito boa nas matérias de exatas. Nas provas eu estudava para mim e ajudava os colegas e com isso me senti muito especial", afirma.

[...] O Teorema de Etiene mudou a vida de Camille e inspirou colegas, familiares e educadores. Um artigo sobre ele foi publicado na Revista do Professor de Matemática (RPM), periódico de prestígio entre os profissionais da área. "É um teorema bem simples, mas mudou minha visão e a visão de amigos. Foi muito importante para mim, minha família e amigos. Aproximou mais a turma e isso foi muito legal", conclui.

Fonte: <http://portal1.iff.edu.br/nossos-campi/bom-jesus-do-itabapoana/noticias/teorema-de-etiene-estudante-do-curso-tecnico-em-quimica-cria-teorema-matematico>. Acesso em: 29 jul. 2020.

Camille Etiene, estudante do curso técnico em Química do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense – IFF, Campus Bom Jesus do Itabapoana. Rio de Janeiro, 2020.

2. Etiene passou a ver a Matemática de outra forma, começou a gostar da disciplina. Além disso, se sentiu muito importante por conseguir ajudar os colegas e começou a ter mais segurança, não só em Matemática, mas também nas demais disciplinas. A descoberta também inspirou os colegas.
3. Resposta pessoal. Estimular a discussão entre as duplas e, depois, pedir a alguns alunos que contem suas experiências para a turma. Essa atividade propicia a reflexão sobre a influência que o pensamento negativo tem na forma que encaramos as coisas, e como isso pode colocar barreiras para a aprendizagem.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. Qual é o assunto principal do texto?
   A descoberta de um teorema pela aluna Camille Etiene.
2. Como a experiência vivida por Etiene mudou sua vida escolar?
3. Você acredita que algumas vezes podemos ter resistência a determinados assuntos, achando que não somos capazes de entendê-los, e não necessariamente dificuldade? Você já passou por alguma situação parecida com a de Etiene? Converse com um colega a respeito.
4. O "Teorema de Etiene" pode ser enunciado como: "O ponto P, simétrico do ponto (0, c), em relação ao eixo de simetria da parábola, tem como abscissa o número real $x_P = x_1 + x_2$, sendo x_1 e x_2 os zeros da função quadrática que tem a parábola como gráfico."
   Junte-se a um colega e demonstrem esse teorema.
   Dicas:
   - Percebam que, independente de como é o gráfico da função quadrática f, a ordenada de P será sempre c, ou seja, $f(x_P) = c$.
   - Seja uma equação do 2º grau dada por $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, a soma das raízes dessa equação é dada por $-\frac{b}{a}$ e o produto é dado por $\frac{c}{a}$.

   Ver resolução no Guia do Professor.

Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 2 (2020).

As outras duas seções, *Educação Financeira* e *Pesquisa e Ação*, são apresentadas no final de cada volume. A primeira trata de temas relacionados ao planejamento financeiro, com o intuito de promover atitudes responsáveis e conscientes, porém sem relação com os conteúdos de função afim e de função quadrática. A segunda propõe uma atividade prática de investigação, realizada em grupos, que objetiva um produto final a ser apresentado para a turma. A atividade é dividida em três etapas. Na primeira etapa, os estudantes devem debater com o professor e os colegas a respeito do tema educação para o trânsito. Após o debate, devem se reunir em grupos e responder questões relativas a três temas: tema 1 – acidentes de trânsito no Brasil; tema 2 – leis de trânsito brasileiras; tema 3 – velocidade e tempo de frenagem de veículos e velocidade nas vias; e tema 4 – tecnologias para testar a segurança dos veículos. Na segunda etapa, os grupos devem criar um videodocumentário. O material didático indica a divisão de tarefas (roteiristas, redatores, diretores, produtores, entrevistadores, editores, narradores, entre outras). A terceira etapa é a exibição do videodocumentário e a quarta etapa, a análise e síntese do trabalho realizado. Trata-se, dentre todas as atividades propostas pelas três obras que compõe o *corpus*, da mais completa com relação à investigação, à interação e à comunicação.

Dentre as três subcategorias, essa que contém propostas de investigação e de exploração permite mais situações de comunicação e de debates. Vigotski (1998a, p. 175) afirma que "na medida que vê o aprendizado como um processo profundamente social, enfatiza o diálogo e as diversas funções da linguagem na instrução e no desenvolvimento cognitivo mediado".

As perguntas são mais abertas e algumas provocam o diálogo iniciando com frases como "Na opinião de vocês..." (Figura 84, questão 2) ou "Você já passou por alguma situação...? Converse com o colega..." (Figura 85, questão 2). Podemos interpretar, da teoria sociointeracionista de Vigotski, que a fala atua na organização e na integração de aspectos variados do comportamento humano, tais como a memória e a solução de problemas.

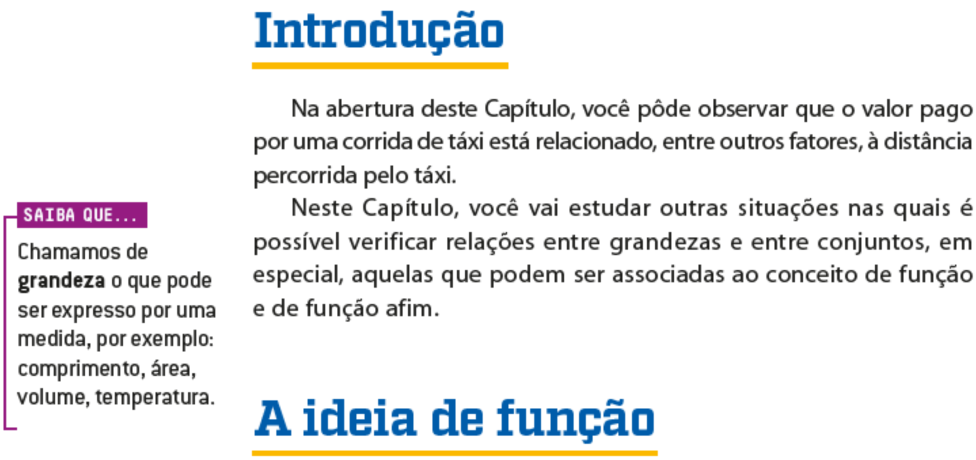
Por fim, a respeito da mediação do professor, entendo que, embora as obras didáticas pesquisadas proponham atividades de investigação e exploração em grupos, a atuação do professor é fundamental na organização desses grupos e na determinação de regras e posturas para os trabalhos.

4.5 RETOMADAS DE PRÉ-REQUISITOS

A palavra retomar é sinônimo de reaver ou recuperar e tem sua origem etimológica no latim, em que o prefixo *re* indica *repetição* ou *movimento para trás*. Os conceitos matemáticos são, de modo geral, constituídos por outros, formando uma rede de conceitos. Dessa maneira, frequentemente, a compreensão de um é pré-requisito para a compreensão de outro. Sob esse viés, esse *movimento para trás* de retomada de conceitos torna-se necessário no processo de internalização de um novo conceito. O Guia PNLD 2021 – Objeto 2 estabelece um critério específico relacionado a essa categoria: retomada de conceitos do Ensino Fundamental ou de conceitos primordiais quando necessário.

Ao contrário das categorias anteriores, o conteúdo dessa categoria não está organizado em seções específicas das obras didáticas e tampouco está presente, quando necessário, em todas as obras. As retomadas, quando ocorrem, são anunciadas ao longo dos textos de apresentação dos conceitos ou por meio de indicações nos manuais do professor. A obra Prisma Matemática, no início do capítulo de funções, após descrever uma situação de contexto de uma corrida de táxi, na introdução do capítulo, expõe que o aluno vai estudar outras situações nas quais é possível verificar relações entre grandezas e entre conjuntos. Ao lado dessa afirmação, retoma a definição de grandeza por meio de um boxe lateral chamado *Saiba que* (Figura 87). Além disso, o Manual do Professor indica a importância de que o professor verifique se o conceito de grandeza é claro para os estudantes, solicitando que indiquem exemplos.

Figura 87 – Retomada da definição de grandeza no início do Capítulo 2, Volume 1, da obra Prisma Matemática


Introdução

Na abertura deste Capítulo, você pôde observar que o valor pago por uma corrida de táxi está relacionado, entre outros fatores, à distância percorrida pelo táxi.

Neste Capítulo, você vai estudar outras situações nas quais é possível verificar relações entre grandezas e entre conjuntos, em especial, aquelas que podem ser associadas ao conceito de função e de função afim.

SAIBA QUE...

Chamamos de **grandeza** o que pode ser expresso por uma medida, por exemplo: comprimento, área, volume, temperatura.

A ideia de função

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Já as obras Matemática em Contextos e Conexões, embora também comecem explorando a ideia de funções por meio de grandezas, não retomam a definição de grandeza.

Após expor a ideia de função como relação entre duas grandezas, as obras formalizam a definição de função por meio de conjuntos. As obras utilizam as simbologias associadas a conjuntos sem retomá-las, visto que se trata do conteúdo visto no capítulo anterior a funções. A obra Matemática em Contextos tem o cuidado de retomar as simbologias associadas a conjuntos numéricos por meio do boxe *Fique atento* (Figura 88).

Figura 88 – Retomada dos símbolos associados aos conjuntos numéricos no Capítulo 1, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Fique atento

Lembre-se de alguns conjuntos numéricos.

- $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
- $\mathbb{N}^*$ representa o conjunto dos números naturais não nulos: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
- $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos números inteiros: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Nele estão os números naturais e os respectivos opostos.
- $\mathbb{Z}_-^*$ representa o conjunto dos números inteiros negativos: $\mathbb{Z}_-^*$ $\{\ldots, -3, -2, -1\}$.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

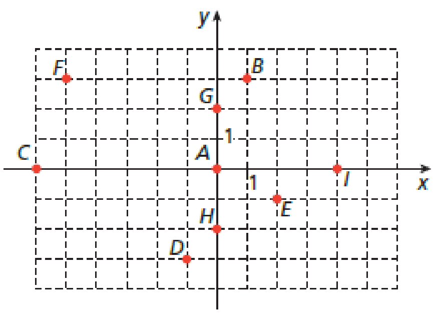
Um objeto matemático estudado nos anos finais do Ensino Fundamental é o plano cartesiano. A construção de gráficos de funções demanda um conhecimento prévio do plano cartesiano. A obra Conexões Matemática retoma o plano cartesiano e as definições de *abscissa*, *ordenada*, *eixos* e *quadrantes* e, após, propõe atividades envolvendo o plano cartesiano (Figura 89), da mesma forma que a obra Prisma Matemática. A obra Matemática em Contextos não retoma o plano cartesiano e começa solicitando a construção e gráficos por meio dos softwares livres.

Figura 89 – Atividades relacionadas ao plano cartesiano no Capítulo 3, Volume 1, da obra Conexões Matemática

Exercícios propostos Registre as respostas em seu caderno.

14. Construa um plano cartesiano em uma folha quadriculada e marque os pontos indicados: $E(-1, 2)$; $F(-2, 1)$; $G(-2, 3)$; $H(-3, 0)$; $I(-3, 4)$; $J(-4, 1)$; $K(-4, 3)$; $L(-5, 2)$. Ver resolução no Guia do professor.

15. Indique as coordenadas dos pontos que estão representados no plano cartesiano abaixo. $A(0, 0)$; $B(1, 3)$; $C(-6, 0)$; $D(-1, -3)$; $E(2, -1)$; $F(-5, 3)$; $G(0, 2)$; $H(0, -2)$; $I(4, 0)$



Fonte: Conexões Matemática e suas Tecnologias, Volume 1 (2020).

Um conceito fundamental é o conceito de proporcionalidade. Esse conceito está associado ao estudo das frações, nas razões e proporções, na semelhança de figuras geométricas, nas relações entre grandezas e no estudo de algumas funções, como a função afim. Machado

(2014, p. 56) afirma que "as ideias ou conceitos fundamentais podem ser explorados nos diversos conteúdos apresentados, tendo em vista o desenvolvimento da capacidade de expressão, de compreensão e de argumentação". Ou seja, a internalização dos conceitos fundamentais também está associada a retomadas desses em diferentes áreas.

As três obras que compõe o *corpus* retomam a ideia de proporcionalidade ao apresentarem a definição de função linear. Nessas retomadas, as obras descrevem situações de contexto antes de apresentarem a definição. A obra Prisma Matemática traz uma situação que relaciona o consumo de combustível relacionado à distância percorrida por um automóvel. Na sequência, define *grandezas diretamente proporcionais* e formaliza a definição de função linear (Figura 90).

Figura 90 – Retomada da ideia de proporcionalidade no Capítulo 1, Volume 2, da obra Prisma Matemática

Função linear e proporcionalidade

Retomando a situação que relaciona o consumo de combustível y (em litro) de um modelo de carro blindado e a distância x que ele percorre (em quilômetro) por meio de uma função linear dada por $y = 0{,}25x$, podemos construir uma tabela para analisar a relação entre alguns valores. Observe:

x (em quilômetro)	y (em litro)
1	0,25
2	0,50
3	0,75
4	1,00
⋮	⋮
10	2,50

Perceba que, ao dobrarmos o valor de x, o valor correspondente de y também dobra. Se multiplicarmos x por 3, o valor correspondente de y também será multiplicado por 3, e assim sucessivamente.

Nesse caso, dizemos que as variáveis x e y representam **grandezas diretamente proporcionais** e a constante de proporcionalidade k pode ser obtida pela razão $\frac{y}{x}$, quando $x \neq 0$.

$$k = \frac{0{,}25}{1} = \frac{0{,}50}{2} = \frac{0{,}75}{3} = \frac{1{,}00}{4} = \ldots = \frac{2{,}50}{10} = 0{,}25 \text{, ou seja, } k = 0{,}25$$

Em uma função linear, cuja lei de formação é dada por $y = ax$, com $a \neq 0$, quando $a > 0$, dizemos que as variáveis x e y representam **grandezas diretamente proporcionais**. A constante de proporcionalidade k é o coeficiente a da função.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Outros dois objetos matemáticos associados ao estudo das funções afim são as equações do primeiro grau, os sistemas lineares e as inequações do primeiro grau. Esses objetos, bem como suas manipulações algébricas são normalmente estudados no Ensino Fundamental. As três obras retomam essas manipulações por meio de atividades resolvidas, como a da Figura 91, de equações do primeiro grau, e da Figura 92, de sistema linear.

Figura 91 – Retomada de equações do primeiro grau por meio de atividades resolvidas do Capítulo 1, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Atividades resolvidas

1. Em qual temperatura as medidas na escala Celsius e na escala Fahrenheit são iguais?

Resolução

Essa pergunta é equivalente a esta outra: "Para qual valor de x temos $f(x) = x$?".

$f(x) = 1{,}8x + 32$

$1{,}8x + 32 = x \Rightarrow 0{,}8x = -32 \Rightarrow x = -40$

Ou seja, -40 °C $= -40$ °F (40 graus Celsius negativos é o mesmo que 40 graus Fahrenheit negativos).

2. Um número x, quando indica uma medida de temperatura em °F, corresponde a quarta parte da medida de temperatura que indicaria em °C. Determine esse número.

Resolução

A pergunta é equivalente a esta outra: "Para qual valor de x temos $f(x) = \frac{1}{4}x$?".

$f(x) = 1{,}8x + 32$

$1{,}8x + 32 = \frac{1}{4}x \Rightarrow 1{,}8x - 0{,}25x = -32 \Rightarrow 1{,}55x =$
$= -32 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \simeq -20{,}6$

Então:

$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (-20{,}6) = -5{,}15$

Assim, $-20{,}6$ °C é equivalente a $-5{,}15$ °F.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Figura 92 – Retomada de sistemas lineares por meio de atividades resolvidas do Capítulo 1, Volume 2, da obra Prisma Matemática

10. (UEG-GO) Em uma fábrica, o custo de fabricação de 500 unidades de camisetas é de R$ 2700,00, enquanto o custo para produzir 1000 unidades é de R$ 3800,00. Sabendo que o custo das camisetas é dado em função do número produzido através da expressão $C(x) = qx + b$, em que x é a quantidade produzida e b é o custo fixo, determine:

a) Os valores de b e de q.

b) O custo de produção de 800 camisetas.

Resolução

a) De acordo com o enunciado:

- quando $x = 500$, temos $C(500) = 2\,700$;
- quando $x = 1000$, temos $C(1000) = 3800$.

Para determinar os valores de b e q, utilizamos as informações, substituindo os valores correspondentes na lei $C(x) = qx + b$, e resolvemos o sistema a seguir.

$$\begin{cases} 2\,700 = 500q + b \\ 3\,800 = 1000q + b \end{cases}$$

Multiplicamos por (-1) a primeira equação do sistema e adicionamos membro a membro as duas equações, como indicado a seguir.

$$\begin{array}{rcl} -2700 & = & -500q - b \\ \oplus \quad 3800 & = & 1000q + b \quad \oplus \\ \hline 1100 & = & 500q \end{array}$$

Se $500q = 1\,100$, então $q = \frac{11}{5}$.

Substituindo q por $\frac{11}{5}$ na primeira equação do sistema, temos:

$2700 = 500 \cdot \frac{11}{5} + b \Rightarrow b = 1600$

Portanto, $b = 1600$ e $q = \frac{11}{5}$.

Fonte: Prisma Matemática, Volume 1 (2020).

Além dos testes resolvidos, o Manual do Professor do Prisma Matemática (p. 229) destaca que o ponto em comum solicitado na atividade de número 39 pode ser encontrado por meio de um sistema de equações, “assunto estudado nos anos finais do Ensino Fundamental que cabe ser relembrado”.

Quanto às inequações do primeiro grau, além das retomadas por meio de atividades, que estão em todas as obras, a obra Conexões relembra alguns princípios na manipulação de desigualdades e a obra Matemática em Contextos, por meio de um boxe *Fique atento* (Figura 93). Já a obra Prisma Matemática, em seu Manual do Professor, solicita que o docente verifique se os estudantes reconhecem o significado de termos envolvidos em uma inequação como desigualdade, membro e conjunto solução.

Figura 93 – Retomada de princípios de manipulação de inequações no Capítulo 1, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Fique atento

Em uma inequação, podemos adicionar ou subtrair um mesmo número de ambos os membros e o sinal da desigualdade se mantém. O mesmo ocorre ao multiplicar ou dividir ambos os membros por um número positivo; mas, se multiplicarmos ou dividirmos por um número negativo, devemos trocar o sinal de desigualdade (se for “$<$”, troca-se por “$>$”, se for “$>$”, troca-se por “$<$”; o mesmo vale para “$\leqslant$” e “$\geqslant$”).

Por exemplo, veja a seguir uma resolução da inequação $-5x + 10 < 7$:

$$-5x + 10 < 7 \Rightarrow -5x + 10 + (-10) < 7 + (-10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x < -3 \Rightarrow -5x \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) > -3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \Rightarrow x > \frac{3}{5}$$

Portanto, o conjunto solução dessa inequação é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \frac{3}{5}\right\}$.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Quanto à função quadrática, a retomada da fórmula resolutiva para determinar as raízes (fórmula de Bhaskara), assunto normalmente visto nos anos finais do Ensino Fundamental, pode ser necessária. As obras Matemática em Contextos e Conexão Matemática retomam por meio de atividades resolvidas (Figura 94), sendo que a primeira relembra, inclusive, a relação da soma e do produto das raízes com os coeficientes. A obra Prisma Matemática não apresenta atividades resolvidas, porém, no Manual do Professor, indica que “cabe relembrar aos estudantes a utilização da fórmula de Bhaskara para resolver equações de 2º grau”.

Figura 94 – Retomada do cálculo de raízes da função quadrática no Capítulo 2, Volume 2, da obra Matemática em Contextos

Atividades resolvidas

1. Determine, se existirem, as raízes da equação de 2º grau em cada item, usando o cálculo do discriminante.

a) $x^2 - 12x + 35 = 0$

b) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

Resolução

a) $x^2 - 12x + 35 = 0$

$a = 1$, $b = -12$ e $c = 35$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 35 =$

$= 144 - 140 = 4$

$\Delta = 4 > 0$ (há 2 raízes reais e diferentes)

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 + \sqrt{4}}{2} = \frac{12 + 2}{2} = 7$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 - \sqrt{4}}{2} = \frac{12 - 2}{2} = 5$$

Logo, as raízes da equação $x^2 - 12x + 35 = 0$ são 7 e 5.

b) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

$a = 2$, $b = -3$ e $c = 5$.

$\Delta = b^2 - 4ac =$

$= (-3)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (5) = 9 - 40 =$

$= -31$ $(\Delta < 0)$

Logo, a equação não tem raízes reais.

2. Determine, se existirem, as raízes da equação de 2º grau $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Resolução

Usando a relação da soma e do produto dos zeros de uma equação de 2º grau, podemos tentar encontrar dois números cuja soma seja 7 (oposto de −7) e cujo produto seja 12.

As possibilidades de produto de dois números inteiros iguais a 12 são:

$1 \cdot 12 = 12$

$2 \cdot 6 = 12$

$3 \cdot 4 = 12$

$(-1) \cdot (-12) = 12$

$(-2) \cdot (-6) = 12$

$(-3) \cdot (-4) = 12$

Vejamos quais dessas possibilidades têm números cuja soma soma é 7.

$1 + 12 = 13$

$2 + 6 = 8$

$3 + 4 = 7$

$(-1) + (-12) = -13$

$(-2) + (-6) = -8$

$(-3) + (-4) = -7$

Assim, temos: $(x - 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x' = 3$ e $x'' = 4$

Raízes da equação: 3 e 4.

Verificação:

$x^2 - 7x + 12 = 0$

Para $x = 3$: $3^2 - 7 \cdot 3 + 12 \Rightarrow 9 - 21 + 12 = 0$

Para $x = 4$: $4^2 - 7 \cdot 4 + 12 \Rightarrow 16 - 28 + 12 = 0$

Fique atento

Essa estratégia de obtenção das raízes da equação de 2º grau é interessante quando $a = 1$ e é possível encontrar facilmente dois números cuja soma e produto correspondam aos coeficientes da equação, como mostrado na resolução. Caso contrário, é possível usar outras estratégias de determinação dos zeros da função quadrática.

Fonte: Matemática em Contextos, Volume 2 (2020).

Além da aplicação da fórmula de Bhaskara, a obra Matemática em Contextos indica um passo a passo para que o estudante deduza a fórmula de Bhaskara. No seu Manual do Professor, especifica que alguns passos necessitam de técnicas que foram trabalhadas no Ensino Fundamental como o cálculo do mínimo múltiplo comum e a fatoração do trinômio quadrado perfeito.

De modo geral, as obras que compõe o *corpus* retomam assuntos que são pré-requisitos do Ensino Fundamental; porém, poderiam, juntamente às retomadas, apresentar sondagens de modo a verificar o nível real de desenvolvimento de cada estudante para o assunto que é pré-requisito. Das três obras estudadas, apenas uma indica, no Manual do Professor, uma atividade de sondagem. Trata-se da obra Conexões, que propõe, no primeiro ano do Ensino Médio, a elaboração de uma avaliação diagnóstica tendo por base as habilidades trabalhadas nos anos Finais do Ensino Fundamental. A obra indica dez questões, abertas ou fechadas ou de múltipla escolha, envolvendo habilidades importantes. Ressalta-se que, embora a obra indique a importância dessa avaliação diagnóstica, visto que permite analisar aspectos como o reconhecimento e a aplicação dos conceitos, não define quais seriam essas habilidades importantes nem os conteúdos a serem sondados. Desse modo, a partir da indicação genérica dessa avaliação diagnóstica, inferimos que fica a critério do professor quais os conteúdos e as habilidades a serem verificados.

Vigotski (1998b, p. 142) afirma que "cada novo estágio do desenvolvimento da generalização se constrói sobre as generalizações do nível precedente". Sob esse viés, as lacunas relacionadas a conceitos matemáticos que não foram internalizados acabam por dificultar a compreensão de novos conceitos. Nesse sentido, retomar apresentando os conceitos é insuficiente. As obras didáticas poderiam retomar por meio de sondagens, utilizando questões e atividades relacionadas aos conceitos ou aos conteúdos que são pré-requisitos de determinado capítulo do livro.

4.6 RELAÇÃO ENTRE AS CATEGORIAS

Nessa última seção do capítulo de análise, relaciono as categorias que emergiram desse estudo com os livros didáticos e, a partir das relações observadas, respondo à pergunta de pesquisa no metatexto que segue. Antes de relacionar as categorias, retomo os norteadores teóricos que estabeleceram as bases para a análise do *corpus* de estudo.

Uma classe de norteadores teóricos são os *conceitos matemáticos relacionados a funções afim e quadrática*. Tratam-se de conceitos abstratos, organizados em uma rede consistente. Os conceitos relacionados à função afim e à função quadrática apresentados nesse estudo: função, relação, grandeza, conjunto domínio, conjunto imagem, lei algébrica da função, coeficientes da lei algébrica, entre outros, estão presentes nas três obras que compõem o *corpus*. Esses conceitos estão entrelaçados em uma rede que pode ser construída pelo estudante ao longo das aulas e das atividades em sala de aula e em casa.

Os demais norteadores provêm de ideias da teoria vigotskiana. A ideia mais relacionada a esse estudo é sua teoria de *formação de conceitos científicos*. Segundo Vigotski (1998b, p. 116), nos conceitos científicos, a relação com um objeto é mediada por algum outro conceito. A formação de um novo conceito está relacionada ao seu grau de abstração, bem como à retomada de pré-requisitos para a compreensão do novo conceito. Assim, nos conceitos científicos, ocorre uma organização consistente e sistemática.

Nessa perspectiva, a formação ou construção dos conceitos é um processo complexo, que depende da interação social e do intercâmbio de significados. Desse modo, a *internalização* ou apropriação dos conceitos é potencializada por meio da *atividade* e da *interação social*. Assim, para que o estudante internalize um conceito científico, deve lhe ser apresentado de alguma maneira (no livro didático, por exemplo) e, após o estudo do conceito, o aluno necessita ter a oportunidade de externalizá-lo, de modo que possa se verificar se o significado que captou é socialmente aceito. A interação social é, sob a perspectiva vigotskiana, o veículo fundamental para a internalização do conhecimento culturalmente construído. Portanto, na interação social em sala de aula, o professor é o participante que já internalizou significados socialmente compartilhados nos materiais didáticos.

Para Vigotski (1998a), sem interação social, dentro da *zona de desenvolvimento proximal* (ZDP) do aprendiz, não há ensino e não há aprendizagem. A ZDP está relacionada aos conhecimentos já internalizados pelo estudante e às suas potencialidades.

A internalização se dá pela *mediação*, que, em termos genéricos, é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação; a relação deixa, então, de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento" (Oliveira, 2002, p. 26). O elemento intermediário, no caso dessa pesquisa, é o livro didático. A mediação, nesse trabalho, está associada ao potencial do livro como objeto mediador para a construção de conceitos matemáticos, levando em conta todas as ideias vigotskianas descritas – formação de conceitos, interação social e zona de desenvolvimento proximal –, a partir de práticas pedagógicas sugeridas na obra didática.

A partir dos norteadores teóricos, analisei a proposta pedagógica das obras que compõem o *corpus*. Todas possuem um encadeamento que se inicia pelo contexto ou aplicação do conceito, segue com a definição e, na sequência, com uma ou mais atividades. A figura a seguir é uma representação da sequência de apresentação proposta pelos livros didáticos que compõem o *corpus*, nos capítulos de função afim e de função quadrática.

Figura 95 – Sequência de apresentação dos livros didáticas que compõem o corpus, nos capítulos de função afim e de função quadrática

Fonte: elaborada pelo autor (2024).

Essa representação relaciona três das categorias que emergiram dessa pesquisa nos livros didáticos: as situações de contexto, as definições e as atividades. Os livros que compõem o *corpus* apresentam, portanto, seus conteúdos e propostas de forma sistemática e organizada conforme o esquema acima.

A partir dessa proposta, o estudante é convidado a analisar a realidade via exemplos de aplicação, ter contato com a definição do conceito a ser internalizado e, por fim, resolver problemas relacionados a ele. Vigotski (1998b, p. 66-67) afirma que "[...] um conceito não é uma formação isolada, fossilizada e imutável, mas sim uma parte ativa do processo intelectual, constantemente a serviço da comunicação, do entendimento e da solução de problemas". Sob esse viés, um conceito é uma parte ativa de um processo que combina a apresentação de contextos, de definições teóricas e de atividades concebidas em suas dimensões sociais.

A quarta categoria, que chamei de retomada dos pré-requisitos, encontra-se dispersa na organização dos livros didáticos. Não há um padrão de retomada de conceitos matemáticos primordiais vistos em anos anteriores do Ensino Fundamental, de modo que alguns assuntos são retomados em uma obra e não necessariamente em outra. Além disso, não há sondagens propostas nos livros didáticos para auxiliar o professor no processo de identificação de lacunas dos discentes. A existência de sondagens, por meio de questões ou testes, teria o potencial de auxiliar o professor na identificação de eventuais lacunas de cada estudante. A partir das sondagens, o docente poderia retomar assuntos de anos anteriores e propor mais atividades relacionadas a eles. Tais atividades poderiam ser propostas no livro didático, de modo que, com orientação do professor, o estudante tivesse a possibilidade de reforçar esses assuntos.

Com o intuito de relacionar as categorias que emergiram desse estudo, retomo à pergunta de pesquisa: como os livros didáticos de matemática do Ensino Médio, indicados pelo PNLD 2021, podem mediar a construção de conceitos de função afim e de função quadrática a partir de ideias da teoria vigotskiana? Os resultados indicam que o livros didáticos têm potencial de mediação na construção dos conceitos de função afim e de função quadrática, em especial se: retomarem conceitos que são pré-requisitos por meio de sondagens, apresentarem situações de contexto relacionadas aos conceitos a serem estudados, enunciarem as definições na linguagem simbólica combinada à linguagem materna e propuserem atividades variadas como questões contextualizadas, problematizações com uso de tecnologia digital, explorações e investigações que priorizem a interação social, a comunicação verbal e a produção escrita.

Saliento que esta é uma possível resposta, iluminada por ideias da teoria sociointeracionista de Vigotski, visto que se trata de uma pesquisa qualitativa, em que o olhar do pesquisador é "calibrado" segundo os norteadores que compuseram o quadro teórico do estudo. Ressalto, ainda, que usei o pronome "como" na pergunta de pesquisa, por ser amplo e, portanto, por permitir uma resposta possível, porém coerente e alinhada ao quadro teórico da pesquisa. Sob essas considerações, podemos entender que há outras respostas à pergunta.

Essa possível resposta à pergunta de pesquisa relaciona as quatro categorias que emergiram desse estudo: *apresentação de contextos, apresentação de definições, propostas d*e *atividades* e *retomadas de pré-requisitos*. Entendo que as vírgulas presentes na resposta substituem o conectivo *e,* de modo que todas as propostas são necessárias e contribuem conjuntamente na mediação da construção de conceitos de função afim e de função quadrática.

Além disso, destaco que esses quatro elementos, apresentados de forma articulada, potencializam a mediação da obra didática no processo de construção de conceitos de função afim e de função quadrática.

Antes de tudo, as retomadas dos pré-requisitos por meio de sondagens, para que o professor possa identificar as lacunas de cada estudante. Nas palavras de Vigotski (1998b, p. 142) "cada novo estágio do desenvolvimento da generalização se constrói sobre as generalizações do nível precedente".

Após as retomadas e antes da apresentação das definições, é necessária a descrição de contextos. A utilização de conceitos em situações concretas, além de se tratar de um aspecto motivacional, de acordo com Garnier, Bernardz e Ulanovskaya (1996, p. 160) é, geralmente, um processo mais trivial para a mente humana do que a reprodução verbal do conceito. Retomando Vigotski (1998b, p. 99), "a análise da realidade com a ajuda de conceitos precede a análise dos próprios conceitos".

Depois dos contextos, as obras didáticas que compõem o *corpus* apresentam as definições, na linguagem materna e na linguagem simbólica. Destaco que, conforme já citado nesse trabalho, utilizo a palavra *definição* como a expressão escrita de um conceito. Vigotski (1998b, p. 104) afirma que "um conceito expresso por uma palavra representa um ato de generalização". Nesse sentido, a construção de um conceito passa por um processo de generalização por meio do uso da linguagem, verbal e escrita.

Em seguida à apresentação das definições, a obra didática propõe atividades. A *atividade* é um conceito central na teoria vigotskiana. As obras didáticas que compõem o *corpus* propõem uma série de diferentes atividades aos estudantes: questões abertas com ou sem contextualização, testes de múltipla escolha com ou sem contextualização, atividades de verificação e de experimentação do conteúdo abordado, atividades com tecnologias digitais, de compreensão e interpretação de textos e de explorações e investigações.

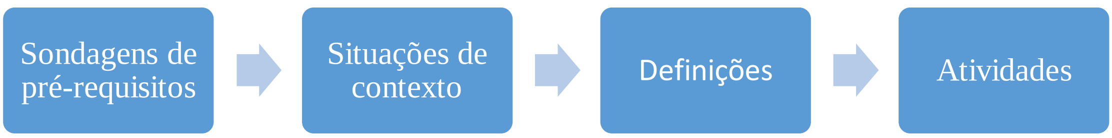
Na teoria sociointeracionista de Vigotski, o conceito de atividade está vinculado a outro conceito fundamental, o *social*, pois o estudante pode se apropriar dos conceitos enquanto ser ativo e comunicativo. Nesse sentido, a realização de atividades em grupos oportuniza a interação entre os discentes. Vigotski (1998a, p. 175) afirma que "na medida que vê o aprendizado como um processo profundamente social, enfatiza o diálogo e as diversas funções da linguagem na instrução e no desenvolvimento cognitivo", ou seja, a fala atua nos processos cognitivos superiores, auxiliando na organização da memória e na solução de problemas.

Dentre as atividades propostas nas obras didáticas, as de investigação e de exploração são as que possuem mais potencial de provocar mais situações de comunicação e de debates. Porém, é preciso ressaltar que, nessas dinâmicas pedagógicas, a atuação do professor é essencial na organização dos grupos, por meio do estabelecimento de regras e de posturas para a execução dos trabalhos.

Os livros didáticos que compõem o *corpus* apresentam de forma clara três elementos: contextos, definições e propostas de atividades. Já as retomadas não são padronizadas e, normalmente, não são acompanhadas de sondagens. Não significa, entretanto, que não tenham potencial de mediação, pois apresentam três elementos que, conforme esse estudo, agregam nessa mediação. A inserção de retomadas, por meio de sondagens, adiciona mais um elemento que auxilia no processo. Além disso, trata-se de uma intervenção pedagógica que tem a possibilidade de personalizar o potencial do livro didático, visto que, com o acompanhamento do professor, pode apontar lacunas em conceitos que são pré-requisitos para a construção dos próximos conceitos. Nesse sentido, as sondagens têm uma atribuição de apontar a zona de desenvolvimento proximal de cada estudante.

Em suma, após a análise individual das categorias emergentes, bem como a análise de suas relações, proponho um novo sequenciamento de apresentação para os capítulos de função afim e quadrática, representado pela figura a seguir:

Figura 96 – Sugestão de sequência de apresentação dos livros didáticas que compõem o corpus, nos capítulos de função afim e de função quadrática



Fonte: elaborada pelo autor (2024).

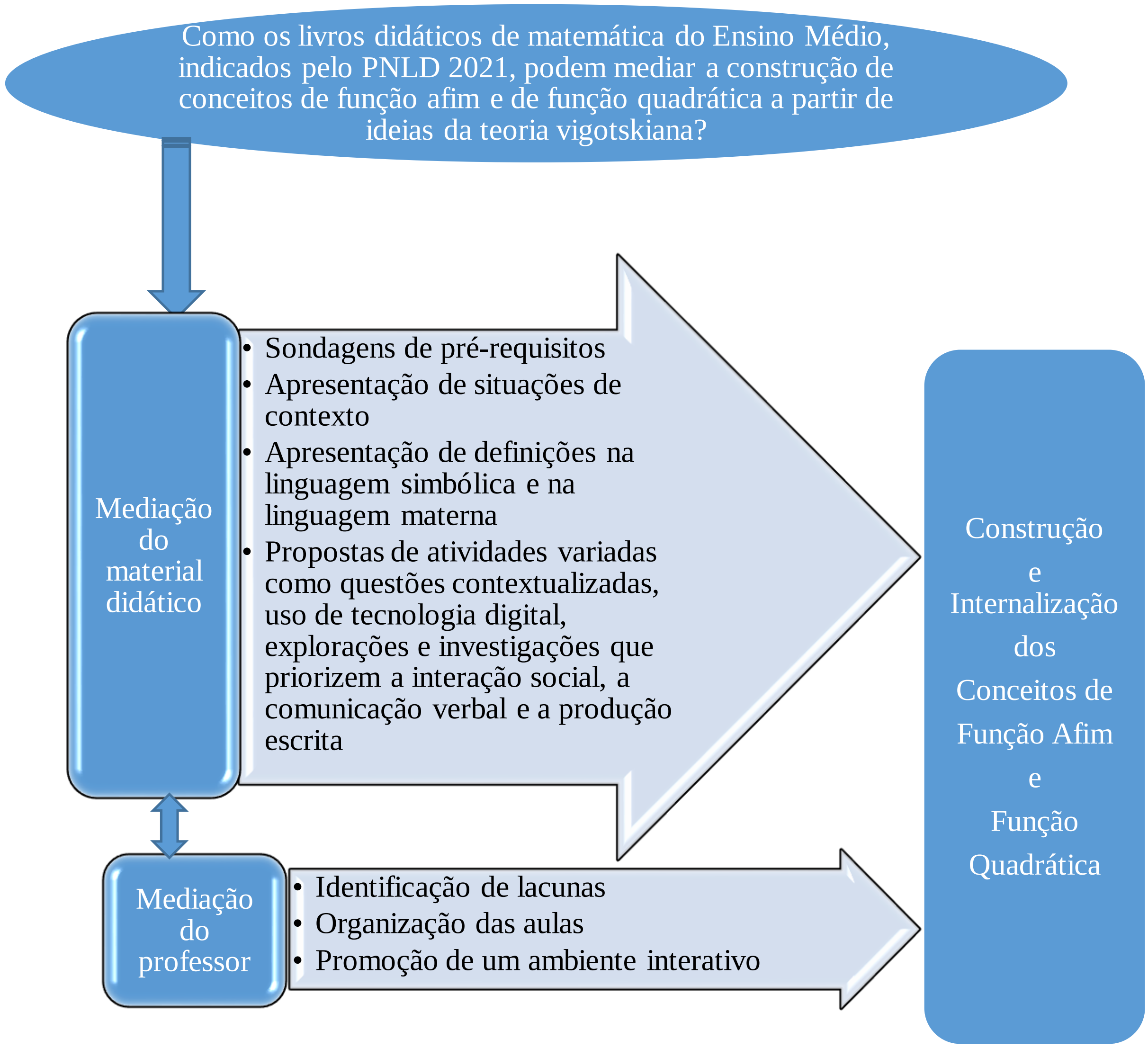
Ressalto que, além da apresentação desses elementos e de seus conteúdos, o potencial de mediação do livro didático está integrado à atuação do professor como mediador no processo de aprendizagem, por meio de explicações, orientações e intervenções que contribuem na construção e internalização desses conceitos.

As obras didáticas estudadas nesse trabalho realizam apontamentos e sugestões para o docente em todas as seções dos capítulos de função afim e de função quadrática. Os manuais destacam a posição de mediação dele, especialmente nas propostas de atividades, sugerindo que organize a turma em duplas, trios ou grupos de trabalho e incite a discussão e colaboração entre si na resolução de problemas, favorecendo o diálogo entre os estudantes e promovendo um ambiente interativo.

Acrescento, ainda, a atuação do professor no processo de sondagem. O livro didático, conforme sugeri, pode iniciar cada capítulo com sondagens de conceitos e de habilidades que são pré-requisitos para o estudo daquele capítulo. A partir da proposta de sondagem no material didático, o professor pode identificar lacunas, de forma individualizada, e sugerir atividades relacionadas a elas.

Por fim, a figura abaixo é uma representação da resposta à pergunta de pesquisa e das relações entre os elementos e as ideias que emergiram ao longo da análise, com o intuito de resumir e ilustrar essas relações:

Figura 97 – Resposta à pergunta de pesquisa e relações entre os elementos que emergiram da análise



Fonte: elaborada pelo autor (2024).

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

> Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino. Esses quefazeres se encontram um no corpo do outro. Enquanto ensino, continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando intervenho, intervindo educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade (Freire, 1999, p. 32).

O presente trabalho foi resultado de uma longa jornada, com idas e vindas, semanas produtivas e iluminadas aliadas a semanas com produtividade aquém do programado, retornos e correções de rumos. A investigação das diversas seções dos livros didáticos nos capítulos de função afim e de função quadrática, bem como do Manual do Professor, foi realizada por um processo dinâmico. Assim sendo, nesse momento da jornada, é propício avaliar:

a) o processo desenvolvido para obter os resultados da pesquisa;
b) se o objetivo geral foi atingido, a partir do problema da pesquisa.

Além disso, também se faz necessário discorrer:

a) sobre a contribuição dessa pesquisa para minha formação como pesquisador e educador;
b) sobre as maneiras que esta pesquisa pode contribuir para a comunidade científica e acadêmica;
c) sobre as perspectivas para trabalhos futuros.

O trabalho iniciou pela construção do quadro teórico, que se constituiu na base para o desenvolvimento desse estudo. No início do capítulo de referenciais teóricos, busquei diretrizes e propostas no mais recente documento universal para a educação do século XXI, o Relatório da Comissão Internacional sobre os Futuros da Educação, intitulado *“Reimaginar nossos Futuros Juntos – um novo contrato social para a educação”* e organizado pela UNESCO, que foi iniciado em 2019 e apresentado em 2022.

O Relatório estabelece, no eixo pedagógico, que o novo contrato para a educação deve ser baseado nos princípios da cooperação e da solidariedade. Nesse sentido, as práticas pedagógicas podem propiciar que os estudantes atuem em cooperação e interação, alinhadas com dois dos mais destacados princípios da teoria vigotskiana: o social e a atividade. A partir dessa conexão, discorri, na sequência do Capítulo 2, sobre algumas das principais ideias da teoria sociointeracionista de Vigotski: a mediação, a internalização, a interação social, a zona de desenvolvimento proximal e a formação de conceitos, especialmente os conceitos científicos, usados como norteadores teóricos desse trabalho.

Outro aspecto destacado no relatório da Comissão Internacional se refere ao financiamento público para a educação e às políticas públicas voltadas às necessidades dessa área, especialmente para países em desenvolvimento. No Brasil, entre as políticas voltadas à área da educação, há o Programa Nacional do Livro e do Material Didático. Através dessa política, o livro didático tornou-se a fonte de informação mais disponível aos estudantes das escolas públicas brasileiras. Assim, no quadro teórico, discorri a respeito desse programa centenário da educação brasileira.

No fechamento do quadro teórico e, portanto, do primeiro objetivo específico, apresentei conceitos matemáticos associados às funções afim e quadrática, tendo como referência a obra "Conceitos Fundamentais da Matemática", de Bento de Jesus Caraça. Esses conceitos também compuseram o quadro de norteadores teóricos para essa pesquisa.

Após os referenciais, busquei a composição de um *corpus* de estudo constituído por livros didáticos indicados pelo PNLD 2021 – Objeto 2, para a área de Matemática e suas tecnologias. O PNLD 2021 indicou dez obras para a área de Matemática e, dessas, seis foram selecionadas pelas escolas de Ensino Médio de administração pública estadual e federal do município de Caxias do Sul.

Entre as seis obras selecionadas, três estão presentes em quase 80% das escolas de administração pública estadual e federal do município: Matemática em Contextos (29%), Conexões Matemática (26%) e Prisma Matemática (23%). Escolhi essas três obras devido sua representatividade na comunidade escolar de Ensino Médio público de Caxias do Sul. Adotei o critério da representatividade em função da impossibilidade temporal de analisar todas as obras.

A partir da construção do quadro teórico, busquei a constituição de norteadores. São seis norteadores, sendo que cinco deles – mediação, internalização, interação social, zona de desenvolvimento proximal e formação de conceitos científicos – são provenientes da teoria de Vigotski. O outro norteador – conceitos matemáticos relacionados às funções afim e quadrática – teve como referência a obra "Conceitos Fundamentais da Matemática", de Bento de Jesus Caraça.

Após a composição do *corpus*, parti para a etapa de descrição da forma como os livros didáticos que o compõem apresentam os conteúdos de estudo de função afim e quadrática. A apresentação deu-se por meio de descrições acompanhadas de recortes de imagens das diferentes seções dos capítulos pesquisados nas obras didáticas.

As obras selecionadas foram analisadas com base na análise textual discursiva de Moraes e Galiazzi (2011). As categorias que emergiram após o processo de unitarização e de categorização do *corpus* foram: *apresentação de contextos*, *apresentação de definições*, *propostas* de *atividades* e *retomadas de pré-requisitos*. A terceira categoria, em função da diversidade de atividades propostas nos livros didáticos, foi dividida em três subcategorias: *propostas de questões e testes*, *propostas de atividades com uso de tecnologia digital* e *propostas de explorações e investigações.*

A análise foi realizada para cada categoria emergente. Descrevi e analisei a apresentação de contextos, a apresentação de definições, as propostas de atividades e as retomadas de pré-requisitos, nas três obras que compõem o *corpus*, para inferir sobre seu potencial como instrumento mediador para a construção de conceitos de função afim e de função quadrática. As obras didáticas que compõem o *corpus* seguem um encadeamento que se inicia pelo contexto ou aplicação do conceito, segue com a definição e, na sequência, com uma ou mais atividades.

A quarta categoria, que chamei de retomada dos pré-requisitos, encontra-se dispersa na organização dos livros didáticos. Não há um padrão de retomada de conceitos matemáticos primordiais vistos em anos anteriores do Ensino Fundamental, de modo que alguns assuntos são retomados em uma obra e não necessariamente em outra. Além disso, não há sondagens propostas nos livros didáticos para auxiliar o professor no processo de identificação de lacunas dos discentes provenientes de anos anteriores.

No que diz respeito ao objetivo geral – analisar os livros didáticos de matemática do PNLD 2021 para o Ensino Médio, mais escolhidos pelas escolas do município de Caxias do Sul, como instrumentos mediadores na construção dos conceitos de função afim e de função quadrática, sob à luz de ideias da teoria de Vigotski –, retomo à pergunta de pesquisa para tecer considerações sobre a análise realizada no capítulo anterior: como os livros didáticos de matemática do PNLD 2021[11] para o Ensino Médio, mais escolhidos pelas escolas do município de Caxias do Sul, podem mediar a construção de conceitos de função afim e de função quadrática a partir de ideias da teoria vigotskiana?

Os resultados indicam que o livro didático tem potencial de mediação na construção dos conceitos de função afim e de função quadrática, em especial se: retomar conceitos que são pré-requisitos por meio de sondagens, apresentar situações de contexto relacionadas aos conceitos a serem estudados, enunciar as definições na linguagem simbólica combinada à linguagem materna e propor atividades variadas como questões contextualizadas, problematizações com uso de tecnologia digital, explorações e investigações que priorizem a interação social, a comunicação verbal e a produção escrita. Esses quatro aspectos, apresentados de forma

[11] A escolha do ano de 2021 deve-se ao fato de que, pela primeira vez, foram ofertados livros didáticos por área do conhecimento em substituição aos livros didáticos por componente curricular.

articulada, potencializam a mediação da obra didática no processo de construção de conceitos de função afim e de função quadrática.

O potencial de mediação do livro didático está integrado à atuação do professor, como mediador, no processo de aprendizagem, por meio de explicações, orientações e intervenções que contribuem na construção e internalização desses conceitos.

Embora esteja resumindo de forma linear as etapas desse estudo, o percurso não se deu desse modo. Os objetivos foram visualizados no início do processo, porém, houve mudanças, pois a jornada foi de idas e de retornos. O pesquisador se move na selva como um aventureiro. Ele tem algumas ferramentas que servem como uma bússola em sua caminhada. Importante ressaltar que, antes de usar a bússola, é preciso calibrá-la, por meio de uma base teórica consistente. Os norteadores teóricos (da bússola) foram construídos a partir de elementos da teoria sociointeracionista de Vigotski e também em conceitos matemáticos relacionados às funções afim e quadrática. Os norteadores, portanto, auxiliaram na organização do caminho pela selva, ajustando o olhar do pesquisador/explorador por meio da unitarização e da categorização.

A respeito da contribuição desse estudo para minha trajetória como pesquisador e educador, acredito que essa pesquisa produziu e seguirá produzindo transformações na minha jornada e em meu fazer pedagógico de educador. Ensinar e aprender se dignificam na pesquisa, em um amálgama destacado por Freire (1999) na epígrafe desse capítulo: não há ensino sem pesquisa, nem pesquisa sem ensino.

Assim, ao pesquisar, me eduquei. A pesquisa partiu da vontade e do apreço pelo conhecimento, pela elaboração própria e pelo questionamento. Nesse sentido, esse estudo foi uma construção pessoal e coletiva. Pessoal, pois carregou marcas e atitudes investigativas, produziu construções e internalizações de novos conhecimentos que passaram a fazer parte de meu fazer pedagógico, como preconiza Freire (1999) ao afirmar que “pesquiso para constatar, constatando intervenho e intervindo educo e me educo”. Coletiva, pois não há pesquisa sem diálogo. E os diálogos são múltiplos: com a orientadora, com os autores, com os professores/pesquisadores do PPGEdu-UCS e de outras universidades. São leituras, diálogos e aulas que iluminam a jornada do pesquisador.

Freire (1999) segue seu raciocínio, afirmando que “pesquiso para conhecer o que não conheço”. Conhecer o que não se conhece implica em andar pela selva e estabelecer seus caminhos por ela. Pedro Demo (2006, p. 18) reitera que “compreendida como capacidade de elaboração própria, a pesquisa condensa-se numa multiplicidade de horizontes no contexto científico”. Ou seja, os caminhos encontrados na selva podem ser utilizados por pesquisadores/educadores, estudantes, pessoas e instituições que, de alguma forma, podem se beneficiar daquele conhecimento.

Quanto às maneiras que esta pesquisa pode contribuir para a comunidade científica e acadêmica, a maior contribuição parte da comunicação, ou, como Freire (1999) fecha a epígrafe desse capítulo, "pesquiso para ... comunicar e anunciar a novidade". Anunciar porque o conhecimento é uma criação coletiva e ao coletivo pertence. Assim, após o término dessa dissertação, pretendo enviá-la à Coordenação-Geral do Livro, órgão do Ministério da Educação, que gentilmente me atendeu quando solicitei os pdf's dos livros didáticos para a realização dessa pesquisa. Também pretendo enviar à Secretaria de Educação do Estado do Rio Grande do Sul, visto que as três obras que compõem o *corpus* estão presentes em 20 das 27 escolas de administração pública estadual do município de Caxias do Sul. A maior motivação para entrar nessa jornada foi a possível contribuição para o aperfeiçoamento do livro didático de matemática e a produção de algum conhecimento que possa ser solidarizado à comunidade educativa que o utiliza.

Durante esse estudo, minha curiosidade levou à observação de livros didáticos de décadas anteriores, desde o tempo que cursei o Ensino Médio (no final da década de 80 e início da década de 90), em livros que guardo até hoje, passando pelos anos 2000 e 2010. Meus livros do Ensino Médio não apresentavam textos nem imagens de situações contextualizadas, sua linguagem na apresentação de definições era predominantemente simbólica, e a impressão era em preto e branco. Nas últimas três décadas, a partir dessas observações, posso afirmar que o livro didático de matemática evoluiu e sofreu significativas transformações, via inserção de aplicações no cotidiano, de ampla utilização de situações-problema contextualizadas, com imagens coloridas e de qualidade gráfica, de uma linguagem que trabalha não apenas o domínio simbólico e com recursos de mídias digitais.

Depreendo, a partir desse estudo, que o MEC, por meio da qualificação de seus coordenadores pedagógicos, coordenadores adjuntos, avaliadores e leitores críticos que atuam no FNDE, realiza um trabalho técnico e fundamentado, estabelecendo critérios e crivos para a produção do livro didático de matemática e divulgando para as escolas via Guia Nacional do Livro Didático. Nesse sentido, espero ter contribuído para que mais elementos possam ser inseridos aos crivos e critérios do Guia para a elaboração dos livros didáticos de matemática.

Por fim, há perspectivas para trabalhos futuros, visto que o tema dessa pesquisa pode ser ampliado e pode haver, até mesmo, novas questões capazes de gerar mais pesquisas. Entendo que há necessidade de realizar estudos de campo, analisando e observando a utilização do livro didático em sala de aula, junto aos professores e aos estudantes. Algumas dessas perspectivas relacionadas ao livro didático incluem estudar:

- a utilização do livro didático de matemática em sala de aula;
- a relação do professor com o livro didático de matemática;
- a relação dos estudantes com o livro didático de matemática;
- as práticas pedagógicas que envolvem interação social propostas pelo livro didático de matemática.

Outras perspectivas relacionadas à formação de conceitos matemáticos incluem estudar:

- as práticas pedagógicas coletivas e interacionais, e sua relação com a construção de conceitos matemáticos;
- a atividade e sua contribuição para a construção de conceitos matemáticos;
- a internalização de conceitos matemáticos do estudante e sua relação com sua forma de estudar;
- a internalização de conceitos matemáticos do estudante e sua relação com as práticas pedagógicas em sala de aula.

As perspectivas citadas evidenciam que há muitas questões não respondidas. Ao término desse estudo, por um lado, fico com a impressão de que conheço menos do que imaginava conhecer no início da jornada. Por outro lado, entendo que algum conhecimento foi construído, visto que o estudo suscitou mais perguntas.

Essa pesquisa teve como catalizador uma inquietação resultante das dificuldades dos estudantes na internalização de conceitos básicos da matemática. Após realizado esse estudo, sigo com essa inquietação, visto que, embora o livro didático possa melhorar ainda mais e auxiliar os professores na mediação no processo de formação de conceitos matemáticos, há outros fatores envolvidos no complexo sistema que envolve a aprendizagem desses conceitos.

A partir das vivências adquiridas nesse estudo, depreendo que compreender os fenômenos relacionados à aprendizagem e à educação é mais complexo do que inicialmente imaginava. E produzir transformações significativas é ainda mais difícil. É provavelmente por isso que a busca por novas formas de ensinar e aprender é uma jornada sem fim. Por essa razão, é dever de todo educador/pesquisador perseverar nessa caminhada.

6 REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. The psychology of meaningful verbal learning. **New York: Grune & Stratton**, 1963.

BAER, Martin W.; GASKELL, George. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som**. Petrópolis: Vozes, 2002.

BARBOSA, Jonei Cerqueira; OLIVEIRA, Andrea Maria Pereira. Por que a pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática? **Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul**, Campo Grande, v. 8, n. 18, dez. 2015.

BOALER, Jo. **Mente sem barreiras**: as chaves para destravar seu potencial ilimitado de aprendizagem. Porto Alegre: Penso, 2020.

BOELL, Marcia; ARRUDA, Arlene A.; OLIVEIRA, Lucila G.; SACRAMENTO SOARES, Eliana Maria. Ecologizing knowledge, reverbering for teaching being-doing in (post) pandemic times. **International Journal for innovation education and research**. v. 19, n. 2, p. 315-328, 2021.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgar Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: Acesso em: 17 mai. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia Digital PNLD 2021**: Obras Didáticas por Áreas do Conhecimento e Específicas. Brasília, 2021. Disponível em: <https://pnld.nees.ufal.br/pnld_2021_ didatico/componente-curricular/pnld-2021-obj2-matematica-e-suas-tecnologias>. Acesso em: 21 set. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Programa Nacional do Livro e do Material Didático**. Brasília, 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/fnde/pt-br/acesso-a-informacao/transparencia-e-prestacao-de-contas-2/relatorio-de-gestao-1/relatorio-de-gestao-2021/resultados-da-gestao-1/programas-para-a-educacao-basica-/programa-nacional-do-livro-e-do-material-didatico>. Acesso em: 17 set. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Sistema de Controle do Material Didático**. Brasília, 2021. Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/distribuicaosimadnet>. Acesso em: 11 out. 2022.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Sá da Costa Editora, 1984.

CHRISTIAN, David, **Maps of Time**: An Introduction to Big History. Berkley: University of California Press, 2004.

DEMO, Pedro. **Pesquisa princípio científico e educativo**. 12. ed. São Paulo: Cortez, 2006.

DENZIN, Norman K.; LINCOLN, Yvonna (orgs). **Planejamento da pesquisa qualitativa**: teorias e abordagens. 2. ed. Porto Alegre: ARTMED, 2006.

FAGUNDES, Léa da Cruz, VALENTINI, Carla Beatris, SOARES, Eliana Maria do Sacramento. Linguagem, educação e recursos midiáticos: quem mexeu na minha escola? *In*: PESCADOR, Cristina Maria, SOARES, Eliana Maria do Sacramento, NODARI, Paulo César. **Ética, educação e tecnologia: pensando alternativas para os desafios da educação na atualidade**. Curitiba, PR: CRV, 2010.

FREIRE, Paulo. **A Educação na Cidade**. São Paulo: Cortez, 1991.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 12. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1999.

GARNIER, Catherine; BEDNARZ Nadine; ULANOVSKAYA, Irina (org.), **Após Vygotsky e Piaget**: perspectivas social e construtivista. Escolas Russa e Ocidental. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GARTON, A. F. **Social interacion and the development of language and cognition**. Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum, 1992.

GODOY, A. S. **Pesquisa qualitativa**: tipos fundamentais. Revista de Administração de Empresas, São Paulo, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995.

HARARI, Y. N., **Sapiens**: uma breve história da humanidade. Porto Alegre: L&PM, 2016.

HERSH, R. **What is mathematics really?** Oxford: Oxford University Press, 1986.

KARLSON, **A Magia dos Números**. Porto Alegre: Editora Globo, 1961

LÉVY, Pierre. As **tecnologias** da **inteligência**: o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LÜDKE, M.; ANDRE, M. E.D.A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna**: uma aproximação necessária. Revista da Faculdade de Educação, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161-166, jul./dez. 1989. Disponível em: <http://www.resvistas.usp.br/rfe/article/view/33439/36177>. Acesso em: 15 dez. 2023.

MACHADO, N. J.; D'AMBROSIO, U.; ARANTES, V.A. (org.) **Ensino de matemática**: pontos e contrapontos. São Paulo: Sumus, 2014.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: E.P.U, 2019.

MORAES, R., GALIAZZI, M. C. (2011). **Análise textual discursiva**. Ijuí: Editora Unijuí.

MORAN, J. **Metodologias ativas de bolso**: como os alunos podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

NÓVOA, António. Carta a um jovem historiador da educação. Historia y Memoria de la Educación. **Memoria de la Educación**, v. 1, 2015, p. 23-58.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotski**: aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 2003.

PAVIANI, J. **Epistemologia prática**: ensino e conhecimento científico. Caxias do Sul: Educs, 2009.

PONTE, J. P., BOAVIDA, A., GRAÇA, M., & ABRANTES P. **Didáctica da matemática**. Lisboa: DES do ME.P., 1997.

POZO, Juan Ignácio. **Teorias cognitivas da aprendizagem**. 3. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

REGO, Teresa Cristina. **Vygotsky**: uma perspectiva histórico-cultural da Educação. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012. 511p.

UNESCO. **Reimaginar nossos futuros juntos**: um novo contrato social para a educação – Brasilia. Comissão Internacional sobre os Futuros da Educação, UNESCO: Boadilla del Monte: Fundacion SM, 2022.

VIGOTSKI, L. S. **A Formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1998a.

VIGOTSKI, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1998b.