

UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL
ÁREA DO CONHECIMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E ENGENHARIAS

LEONARDO CARDOSO DE SOUZA

**REPRODUÇÃO DE UMA SIMULAÇÃO DE VIBRAÇÃO POR MEIO DE UM
EXPERIMENTO**

CAXIAS DO SUL

2024

LEONARDO CARDOSO DE SOUZA

**REPRODUÇÃO DE UMA SIMULAÇÃO DE VIBRAÇÃO POR MEIO DE UM
EXPERIMENTO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade de Caxias do Sul como requisito para a
conclusão do curso de Engenharia Mecânica. Área de
concentração: Vibração

Orientador Prof. Me. Paulo Roberto Linzmaier.

CAXIAS DO SUL

2024

LEONARDO CARDOSO DE SOUZA

**REPRODUÇÃO DE UMA SIMULAÇÃO DE VIBRAÇÃO POR MEIO DE UM
EXPERIMENTO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade de Caxias do Sul como requisito para a
conclusão do curso de Engenharia Mecânica. Área de
concentração: Vibração

Orientador Prof. Me. Paulo Roberto Linzmaier.

Banca examinadora

Prof. Me. Paulo Roberto Linzmaier
Universidade de Caxias do Sul

Prof. Me. Adelair Lino Colombo
Universidade de Caxias do Sul

Prof. Dr. Alexandre Viecegli
Universidade de Caxias do Sul

RESUMO

Este estudo aborda a réplica de uma simulação de vibração por meio de um experimento prático. A delimitação do tema concentra-se na reprodução, de forma física, os resultados de simulações de vibração, com o intuito de demonstrar os modelos teóricos por métodos diferentes. O objetivo geral é a execução prática do experimento com finalidade didática a fim de ajudar os alunos a melhorar em seu entendimento de conceitos de vibração. Os objetivos específicos incluem a concepção e montagem do experimento, a coleta de dados experimentais, a comparação dos resultados com a simulação e a análise da concordância entre os dados obtidos experimentalmente focando em mostrar didaticamente a mesma. A justificativa para este estudo reside na importância de uma boa base de ensino para que o aluno possa se aprofundar e/ou entender melhor conceitos, usando métodos diferentes para a obtenção de resultados, como equações diferenciais e o método de elementos finitos, e após a aplicação destes métodos poder ver e comprovar seus resultados na prática. Para o experimento foram modeladas placas e vigas através do método de elementos finitos por elemento de casca (Shell) e por elemento de viga (para o caso da viga). Os cálculos diferenciais da placa foram feitos através do método de Kirchhoff, e os das vigas pelo método de Euler-Bernoulli. O experimento prático foi feito com a assistência de um *shaker*, onde foi possível comprovar os resultados das frequências naturais obtidas pelos diferentes métodos, assim como observar os deslocamentos dos modos das vigas em suas frequências naturais.

Palavras-chave: simulação de vibração, experimento prático, engenharia mecânica, MEF, equações diferenciais.

ABSTRACT

This study addresses the replication of a vibration simulation through a practical experiment. The delimitation of the topic focuses on physically reproducing the results of vibration simulations, with the aim of demonstrating theoretical models using different methods. The general objective is the practical execution of the experiment for didactic purposes in order to help students improve their understanding of vibration concepts. The specific objectives include the design and setup of the experiment, the collection of experimental data, the comparison of the results with the simulation and the analysis of the agreement between the data obtained experimentally, focusing on teaching it. The justification for this study lies in the importance of a good teaching base so that the student can delve deeper and/or better understand concepts, using different methods to obtain results, such as differential equations and the finite element method, and after application of these methods to be able to see and prove their results in practice. For the experiment, plates and beams were modeled using the finite element method per shell element and per beam element (in the case of the beam). The differential calculations for the plate were made using the Kirchoff method, and those for the beams by the Euler-Bernoulli method. The practical experiment was carried out with the assistance of a shaker, where it was possible to verify the results of the natural frequencies obtained by the different methods, as well as observe the displacements of the beams' modes in their natural frequencies.

Key-words: vibration simulation, practical experiment, mechanical engineering, FEM, differential equations.

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	12
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	12
1.2	OBJETIVO GERAL	13
1.3	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	13
1.4	JUSTIFICATIVA	14
2.	REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1	ASPECTOS GERAIS SOBRE VIBRAÇÃO	15
2.2	ASPECTOS PERTINENTES AO EXPERIMENTO.....	16
2.3	ANÁLISE E SIMULAÇÃO	17
2.3.1	Método de elementos finitos	17
2.3.2	Equações diferenciais para vibração de placas.....	19
2.3.3	Equações diferenciais para vibração de vigas.....	25
2.4	EQUIPAMENTO UTILIZADO NA REALIZAÇÃO DO EXPERIMENTO	29
3.	RECURSOS E MÉTODOS	31
3.1	PROGRAMA PARA CÁLCULO DO MODELO MATEMÁTICO	31
3.2	PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS E MODELO	31
3.3	EQUIPAMENTOS UTILIZADOS	31
3.4	PROGRAMAS E MÉTODOS PARA A REPLICAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS	33
4.	RESULTADOS.....	41
4.1	VERIFICAÇÃO DA COMPATIBILIDADE DA TEORIA DE PLACA E MEF	41
4.2	ANÁLISE MEF PARA PLACA APOIADA NO CENTRO	44
4.3	ANÁLISE E EXPERIMENTO PARA VIGAS.....	45
4.3.1	Resultado dos cálculos teóricos do modelo de viga.....	46
4.3.2	Resultados das simulações do MEF para vigas.....	47
4.3.3	Resultado dos experimentos de vigas.....	50
4.3.4	Comparação dos resultados	53
5.	CONCLUSÃO	55
6.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	56

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Exemplo de ressonância	16
Figura 2 - Exemplo de deslocamentos de uma placa	17
Figura 3 - Exemplo de simplificação feita no MEF	17
Figura 4 - Exemplos de condições de introdução de nós	18
Figura 5 - Diagrama de corpo livre do elemento infinitesimal	20
Figura 6 - Resultantes de momento no elemento infinitesimal	20
Figura 7 - Visualização no deslocamento do plano ao longo do eixo x	21
Figura 8 - Demonstração de um deslocamento infinitesimal.....	25
Figura 9 - Ilustração do funcionamento interno de um <i>shaker</i>	30
Figura 10 - Controlador de um Shaker	30
Figura 11 - Modelo de <i>shaker</i> utilizado	32
Figura 12 - Modelo de amplificador e controlador.....	33
Figura 13 - Tela inicial do programa de geração de sinal de frequência	34
Figura 14 - Tela de entrada das propriedades do sinal de frequência	35
Figura 15 - Tela inicial do programa <i>EDM-Vibration Controlle</i>	35
Figura 16 - Passo de verificação dos acelerômetros e conexão com o computador	36
Figura 17 - Tela para adicionar o perfil do sinal da frequência	37
Figura 18 - Tela para selecionar o sinal.....	38
Figura 19 - Tela de parâmetros do <i>shaker</i> x requeridos pelo experimento	38
Figura 20 - Tela para habilitar monitoramento da frequência lida pelo acelerômetro	39
Figura 21 - Parâmetros utilizados no Ansys	41
Figura 22 - Malha utilizada para a comparação	42
Figura 23 - Malha utilizada para MEF do experimento	44
Figura 24 - Malha utilizada no experimento de viga	48
Figura 25 - Malha utilizada pelo elemento de viga	49
Figura 26 - Viga nº1 com limalha de ferro montada no <i>shaker</i>	51
Figura 27 - Vista frontal da viga.....	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Especificações do <i>shaker</i>	31
Tabela 2 - Especificações do amplificador utilizado	32
Tabela 3 - Especificações do acelerômetro.....	33
Tabela 4 - Valores de frequências dos modos pelo Ansys e MatLab	42
Tabela 5 - Dimensões das vigas utilizadas	45
Tabela 6 - Valores de entrada para cálculo numérico	46
Tabela 7 - Valores de frequências naturais βn pelo método Euler-Bernoulli	46
Tabela 8 - Tabela comparativa de resultados numéricos	53

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Representação gráfica dos deslocamentos das placas	43
Quadro 2 - Valores de frequências naturais e de deslocamentos	45
Quadro 3 - Comparação dos resultados do MatLab e teóricos	47
Quadro 4 - Frequências e representações MEF por elemento de casca (Shell) ..	48
Quadro 5 - Frequências e representações MEF por elemento de viga	50
Quadro 6 - Resultados do experimento	52
Quadro 7 - Tabela comparativa da representação dos resultados da viga 1	53
Quadro 8 - Tabela comparativa da representação dos resultados da viga 2	54

LISTA DE SIGLAS E ABREVIACÕES

ABNT	Associao Brasileira de Normas Técnicas
MEF	Método de elementos finitos

SIMBOLOGIA

ρ	Densidade (kg/m ³)
E	Módulo de young (Pa)
ν	Coeficiente de Poisson
h	Espessura (m)
A	Área da seção transversal (m ²)
I	Momento de inércia (m ⁴)
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Tensões normais aos planos (Pa)
$\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy}$	Tensões de cisalhamento (Pa)
N	Intensidade de força normal (N/m)
Q	Intensidade de força cisalhante (N/m)
M	Intensidade de momento (Nm/m)
D	Constante das propriedades mecânicas de uma placa
u	Deslocamento do material ao longo do eixo x
v	Deslocamento do material ao longo do eixo y
ω	Frequência natural (rad/s ou Hz)
w	Deslocamento vertical (m)
$w_{,t}$	Velocidade (m/s)
$w_{,tt}$	Aceleração (m/s ²)
$w_{,x}$	Inclinação da reta tangente a superfície na direção x (rad)
$w_{,y}$	Inclinação da reta tangente a superfície na direção y (rad)
$w_{,ytt}$	Aceleração angular sobre o eixo x (rad/s ²)
$w_{,xtt}$	Aceleração angular sobre o eixo y (rad/s ²)
$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}$	Parcelas da deformação específica

1. INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

A reprodução de uma simulação de vibração através de um experimento prático é um tema de grande relevância no campo da engenharia e da pesquisa em dinâmica de estruturas. Esse processo envolve a replicação física de um sistema vibratório com base em um modelo matemático ou computacional preexistente, com o objetivo de verificar a precisão das previsões teóricas e a validade das simulações. Neste contexto, diversos estudos têm abordado a temática, destacando a importância de experimentos práticos para a formação do aluno de engenharia mecânica, visto que os mesmos ajudam no aprendizado e interesse do aluno (Valdiero et al, 2007)

Um dos aspectos cruciais nesse processo é a fidelidade da reprodução das vibrações. Conforme destacado por Pereira et al. (2018), a qualidade do experimento prático está diretamente relacionada à capacidade de replicar com precisão as condições de excitabilidade e as características do sistema vibratório original. Portanto, é essencial utilizar equipamentos de medição e análise avançados, como acelerômetros de alta sensibilidade e sistemas de aquisição de dados de última geração, a fim de garantir resultados confiáveis. Além disso, é fundamental considerar as limitações do sistema físico utilizado para a reprodução das vibrações. Conforme salientado por Silva et al. (2019), existem variações inerentes ao ambiente prático que podem afetar os resultados, tais como dissipação de energia devido à fricção e amortecimento não ideal. Portanto, é necessário aplicar correções adequadas e calibrações periódicas para minimizar esses efeitos indesejados.

Outro aspecto relevante é a validação experimental, que envolve a comparação dos resultados obtidos no experimento prático com os valores previstos pelo modelo teórico ou de simulação. Segundo Souza (2020), essa etapa é fundamental para verificar a confiabilidade do sistema experimental e aprimorar a precisão das simulações. A utilização de técnicas estatísticas e análise de incertezas, conforme descrito por Martins (2017), é essencial para quantificar a concordância entre os dados experimentais e os valores teóricos.

A reprodução de simulações de vibração por meio de experimentos práticos é uma área de pesquisa e desenvolvimento de tecnologia que enfrenta desafios significativos. A capacidade de replicar com precisão os padrões de vibração simulados em ambiente real

é fundamental em diversas aplicações, incluindo testes de produtos, análise estrutural, treinamento de operadores, ensino dentro de sala de aula entre outros. No entanto, existem obstáculos técnicos e científicos a serem superados para alcançar uma reprodução eficaz das simulações de vibração em experimentos práticos (Wen, 1989).

Este estudo se concentrou na reprodução de simulações de vibração em experimentos práticos, explorando os desafios técnicos e científicos envolvidos nesse processo, assim como suas aplicações acadêmicas para a formação dos alunos de engenharia mecânica. Os experimentos foram focados de modo que os alunos consigam melhor visualizar os modos de vibração. Para este fim, foram usadas placas metálicas, pois à partir das mesmas consegue-se extrair mais facilmente suas frequências naturais, assim como demonstrar seus efeitos no sistema.

Quanto ao dispositivo de excitação do sistema, usou-se um *shaker*, capaz de simular com precisão as vibrações experimentais. O conjunto consiste de um amplificador, um atuador (o *shaker*), um computador, um monitor, acelerômetros e um controlador. No computador programa-se o *shaker* para que trabalhe dentro de acelerações, deslocamentos e frequências, que coincidam com os modos de vibração das placas. O controlador trabalha com o sinal gerado pelo computador e monitorar os parâmetros do sinal. O amplificador capta o sinal elétrico de baixo nível do controlador e o amplifica em um sinal de maior potência que é recebido pelo atuador, e com a ajuda de um acelerômetro para garantir a fidelidade do sinal, ele replica a frequência dada pelo controlador.

1.2 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral desse trabalho é projetar e preparar experimentos de vibrações mecânicas, com chapas metálicas, que possam ser utilizados em sala de aula.

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- I. Adaptar o sinal de entrada gerado, dos ensaios a serem realizado, para os equipamentos de teste.
- II. Modelar matematicamente e computacionalmente o experimento a ser realizado.
- III. Realizar o experimento vibratório a partir do sinal preparado para esta finalidade

- IV. Comparar os resultados de frequências naturais e modos de vibração obtidos experimentalmente com seus resultados teóricos

1.4 JUSTIFICATIVA

A reprodução precisa de simulações de vibração em experimentos práticos é de grande importância em diversas áreas, incluindo engenharia, indústria, pesquisa acadêmica e treinamento. Compreender os desafios e as melhores práticas nesse campo é fundamental para melhorar a qualidade dos experimentos, reduzir custos e garantir a segurança em testes de produtos e sistemas, essa simulação e consequente análise pode identificar problemas que um sistema vibratório possa desenvolver antes que o mesmo se torne grave e acabe causando um erro fatal (Cornelius, 2004)

Outro aspecto importante a ser considerado é o acadêmico, em um estudo conduzido por Mayer (2003), uma sala de aula foi dividida em dois grupos para uma lição de funcionamento de freios, onde no grupo 1 as informações eram apresentadas em palavras impressas e no grupo 2 as palavras eram acompanhadas por ilustrações. Neste estudo o grupo 2, que consistia de palavras impressas e ilustrações, gerou uma média de 79% mais soluções criativas para os testes de transferência que lhes haviam sido aplicados. Similarmente em um segundo estudo com a lição também sobre freios, mas dessa vez feita com a ajuda de computadores, havia um grupo 1 onde uma narração descrevia os passos em como o freio funcionava, enquanto o grupo 2 recebia a mesma narração em conjunto com uma animação gráfica. Neste segundo estudo, o grupo que teve a animação gerou 97% mais soluções criativas do que o que contou apenas com a narração.

Diferentes autores propõem ferramentas computacionais como maneiras de ajudarem os alunos a aprenderem e demonstram seus resultados benéficos. Assim como tem-se os que destacam a positividade de dispositivos didáticos físicos na formação do aluno (Valdiero, 2008)

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Neste referencial teórico será abordada a importância do estudo de vibrações, assim como as maneiras em que as grandezas dos mesmos são calculadas.

2.1 ASPECTOS GERAIS SOBRE VIBRAÇÃO

A vibração é um fenômeno presente em diversas áreas da ciência e da engenharia, desempenhando um papel fundamental na compreensão de sistemas dinâmicos complexos. Trata-se de um movimento oscilatório em torno de um ponto de equilíbrio, que pode ser descrito por parâmetros como frequência, amplitude e fase (Kraut, 2017). A compreensão desses aspectos gerais sobre vibração é essencial para uma ampla gama de aplicações práticas.

A vibração é uma ocorrência comum na natureza e na tecnologia, desde o balanço das folhas das árvores sob a ação do vento até a operação de máquinas industriais. Conforme destacado por Rao (2019), o estudo das vibrações é crucial na engenharia estrutural, onde o comportamento dinâmico das estruturas, como pontes e edifícios, é analisado para garantir sua estabilidade e segurança.

A análise de vibração também desempenha um papel crítico em sistemas de transporte, como veículos automotores e aeroespaciais. Como ressaltado por Groover (2020), a compreensão das vibrações é essencial para projetar veículos que sejam seguros e confortáveis para os ocupantes. Além disso, a vibração é fundamental em aplicações de controle e monitoramento. De acordo com Ogata (2010), sistemas de controle de máquinas e processos frequentemente usam a análise de vibração para detectar e corrigir problemas operacionais, garantindo eficiência e confiabilidade.

É importante notar que a vibração também tem implicações na saúde humana. De acordo com Griffin (1990), a exposição crônica a vibrações inadequadas pode causar danos à saúde, particularmente em ambientes de trabalho, exigindo regulamentações rigorosas e medidas de proteção.

Os aspectos gerais sobre vibração são fundamentais em diversas áreas da ciência e da engenharia, desde a análise estrutural até o design de sistemas de transporte e controle. A compreensão da vibração e sua aplicação adequada são cruciais para garantir a segurança, eficiência e conforto em uma variedade de contextos, ilustrando a relevância contínua desse fenômeno no mundo moderno.

2.2 ASPECTOS PERTINENTES AO EXPERIMENTO

Um dos conceitos mais básicos e mais importantes da vibração é o de frequências naturais, que será o destaque deste trabalho. Frequências naturais podem ser descritas como frequências em que um sistema naturalmente tende a oscilar, quando sujeito a uma força externa ou perturbação. Estas frequências são de suma importância por conta do efeito de ressonância que pode ocorrer, este efeito consiste de quando uma força externa coincidente com a frequência natural de um sistema, o que pode acarretar oscilações de amplitude maiores do que esperadas levando a danos estruturais se a mesma não for controlada. Como demonstrado na Figura 1, uma taça quebrando apenas com a vibração de uma voz.

Figura 1 - Exemplo de ressonância



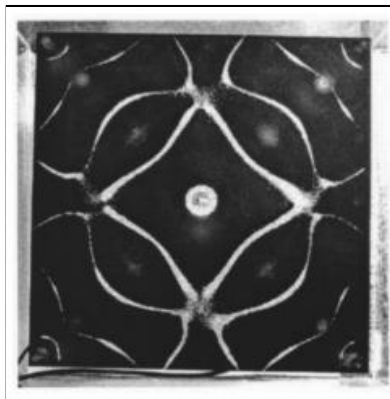
Fonte: Mundo educação (2010)

Portanto, uma análise de vibração é sempre importante ao lidar com estruturas a fim de assegurar sua segurança para que consigam suportar cargas dinâmicas diferentes, como por exemplo pontes e prédios, sob a ação do vento ou terremotos.

Para ajudar na compreensão do assunto, principalmente em termos didáticos, tem-se as “figuras de Chladni” como um meio de demonstrar os efeitos da frequência natural de uma placa metálica, que será utilizado neste trabalho.

Ernest Chladni, um físico alemão no século XIX criou um experimento com o intuito de observar o comportamento vibracional de superfícies planas. O mesmo colocou uma quantidade de areia aleatoriamente distribuída pela placa sobre a placa metálica e com a ajuda de um arco de violino excitou o sistema para que o mesmo entrasse em sua frequência natural (Gander, 2012). Quando isso acontece, a areia consegue formar figuras nas regiões onde o deslocamento da placa é nulo ou quase, exemplificado pela placa da Figura 2.

Figura 2 - Exemplo de deslocamentos de uma placa



Fonte: J.R. Comer (2004)

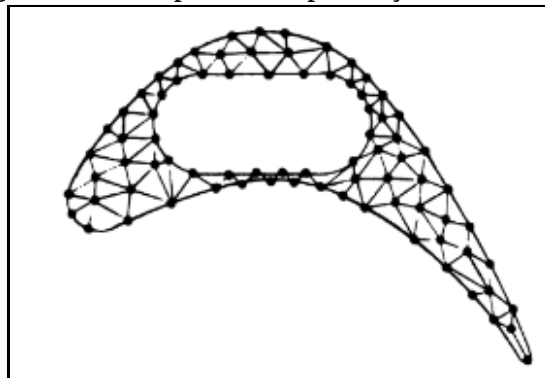
2.3 ANÁLISE E SIMULAÇÃO

Para o experimento proposto, foram utilizados dois métodos distintos para extrair os modos de vibrações das placas e vigas, assim como os valores das frequências naturais dos mesmos. Sendo o primeiro o método de elementos finitos e o segundo, o método matemático.

2.3.1 Método de elementos finitos

O método de elementos finitos (MEF), um método computacional, em que uma região solução pode ser modelada analiticamente ou aproximada, ao trocar seu todo com uma montagem de elementos discretos, já que os mesmos podem ser colocados em uma variedade de maneiras, assim usando-os para representar formas difíceis de calcular. A maneira com que os elementos são transpostos, é chamada de malha, como observado na Figura 3 (Kenneth, 2001).

Figura 3 - Exemplo de simplificação feita no MEF



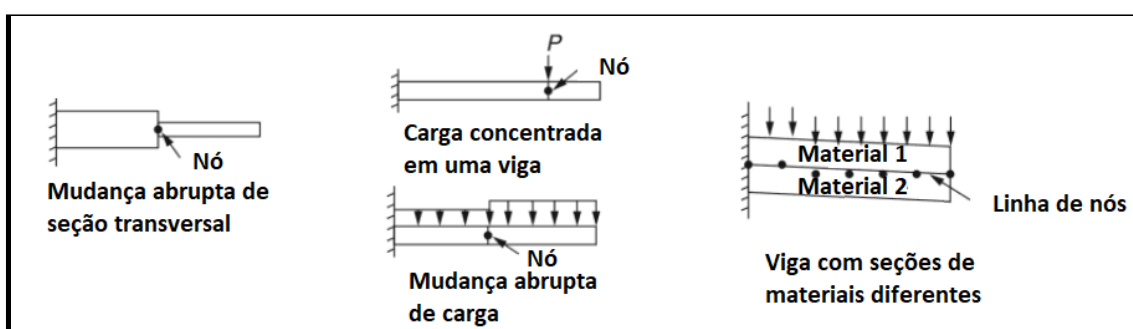
Fonte: Kennet H. H. (2001)

Os primeiros desenvolvimentos práticos dos métodos de elementos finitos foram direcionados para a análise de estruturas aeronáuticas, ou seja, estruturas de casca finas. Cascas são difíceis de analisar por conta da variedade de comportamentos que as mesmas exibem, dependendo da espessura, do comprimento, das curvaturas, da carga aplicada ou das condições de contorno, elas podem ter suas tensões na maioria como membrana, como dobra, ou como uma combinação das ações de ambos; este ponto faz com que a aplicação correta de uma malha seja de suma importância (Bathe, 2008).

Ainda de acordo com Bathe, 2008, alguns problemas com malhas automaticamente geradas são que: as geometrias dadas podem ser complexas e com pequenas características, que podem ser utilizados domínios geométricos grandes demais, as malhas compostas têm de ser utilizadas para soluções efetivas (isto é, ela deve ser fina em regiões em que há concentrações de tensões e condições de contorno).

De acordo com Singiresu, 2011, os tamanhos dos elementos fazem diferença, de forma geral quanto menor forem eles, mais preciso será o modelo, no entanto mais poder de processamento será exigido. O local dos nós também é importante, se um corpo não possui mudanças abruptas de geometria, propriedades materiais ou condições externas como temperaturas ou esforços, então o espaçamento entre os nós pode ser feito de maneira uniforme. Por outro lado se essas condições existirem, então é necessário introduzir nós nas mesmas, conforme Figura 4.

Figura 4 - Exemplos de condições de introdução de nós



Fonte: Singiresu, 2011

2.3.2 Equações diferenciais para vibração de placas

O segundo método a ser utilizado será o método matemático, onde com a ajuda do programa MatLab, será a hipótese de Kirchhoff para placas. O desenvolvimento a seguir foi retirado da bibliografia de Hagerdorn, 2007.

Partindo do pressuposto de que a placa possui um plano neutro que reside no meio de sua espessura, e também que pontos materiais situados a uma normal deste plano irão se manter na normal em seu estado deformado. Um elemento infinitesimal de uma placa é mostrado na figura à seguir. Como a tensão normal σ_{zz} nas superfícies de cima e de baixo é zero, parte-se do pressuposto de que é insignificante dentro da placa, restando apenas as componentes de tensão normal σ_{xx} e σ_{yy} , e com os componentes de tensão de cisalhamento σ_{xy} , σ_{xz} e σ_{yz} .

Para que isto funcione em duas dimensões, é conveniente integrar as tensões ao longo da espessura da placa, o que resulta em intensidade resultante de tensões e momentos, definidas como

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz, \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} dz, \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz, \quad (1)$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz, \quad (2)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xx} dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{yy} dz, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xy} dz \quad (3)$$

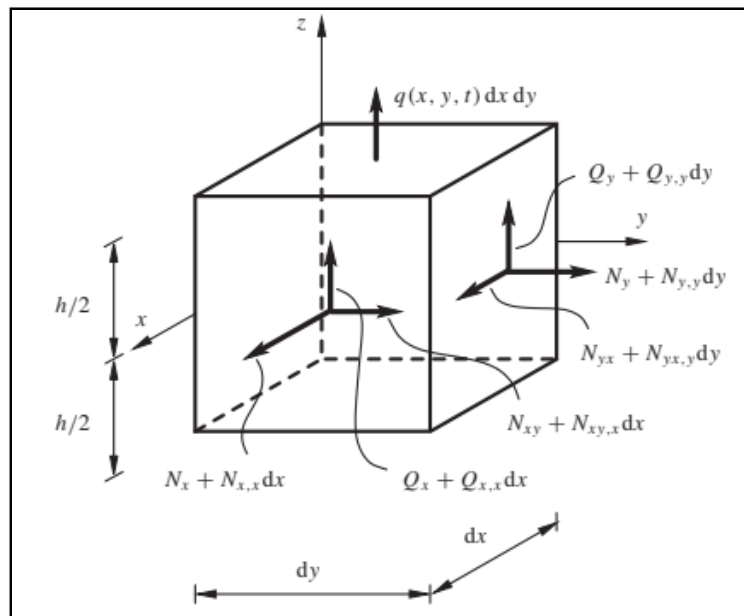
onde da primeira linha tem-se as intensidades de forças normais (N/m), da segunda as intensidades de forças cisalhantes Q_x e Q_y e da terceira as intensidades de momento de flexão M_x e M_y e intensidade de momento de torção M_{xy} (Nm/m), ilustradas na Figura 5 e 6. As tensões (tensões de flexão) podem ser obtidas em função das deformações através da lei de Hooke como

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}], \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}], \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{1-\nu} \epsilon_{xy}, \quad (4)$$

e já que a placa é considerada infinitamente rígida no cisalhamento transversal consequentemente tem-se que $\epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = 0$. Isso implica que Q_x e Q_y não podem ser

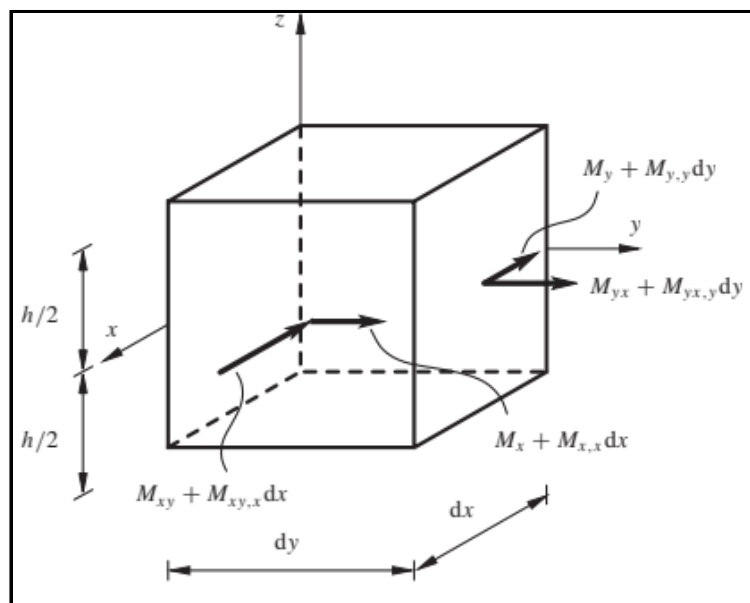
determinados pela teoria de elasticidade, mas podem ser determinados pelo balanceamento de momentos.

Figura 5 - Diagrama de corpo livre do elemento infinitesimal



Fonte: Hagerdorn, 2007

Figura 6 - Resultantes de momento no elemento infinitesimal



Fonte: Hagerdorn, 2007

Após isso, são relacionadas as deformações com o campo de deslocamento no plano neutro da placa, onde esse campo de deslocamento será denotado por $w(x, y, t)$.

Em virtude desse deslocamento transversal e de acordo com as relações cinemáticas anteriormente mencionadas, como demonstrada na Figura 7, o deslocamento do material ao longo do eixo x e do eixo y são obtidas por, respectivamente,

$$u(x, y, z, t) = -zw_{,x}(x, y, t) \quad e \quad v(x, y, z, t) = -zw_{,y}(x, y, t) . \quad (5)$$

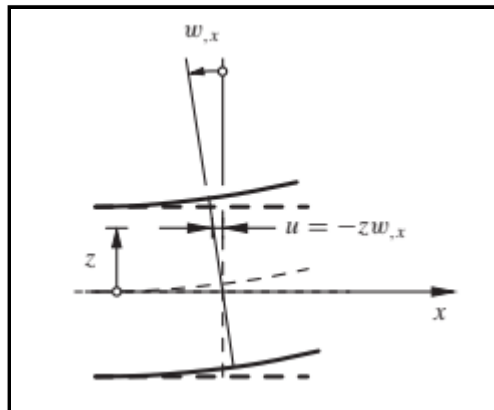
O campo de deformações é então obtido como

$$\epsilon_{xx} = u_{,x} = -zw_{,xx}(x, y, t) \quad (6)$$

$$\epsilon_{yy} = v_{,y} = -zw_{,yy}(x, y, t) \quad (7)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) = -zw_{,xy}(x, y, t) \quad (8)$$

Figura 7 - Visualização no deslocamento do plano ao longo do eixo x



Fonte: Hagerdorn,2007

Substituindo estes campos nas equações anteriores as seguintes equações são determinadas

$$M_x = -D[w_{,xx} + \nu w_{,yy}] \quad (9)$$

$$M_y = -D[w_{,yy} + \nu w_{,xx}] \quad (10)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu)w_{,xy} \quad (11)$$

Onde “D” é uma constante relacionada com as propriedades mecânicas da placa com o valor $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ (12).

Escrevendo a segunda lei de Newton para o movimento transversal do elemento infinitesimal, obtém-se

$$\rho h w_{,tt} = Q_{x,x} + Q_{y,y} + q(x, y, t) \quad (13)$$

onde $q(x, y, t)$ é a distribuição de forças externas. As equações de momento para o elemento infinitesimal no eixo x e no eixo y são representadas por

$$I w_{,xtt} = -M_{x,x} - M_{xy,y} + Q_x \quad (14)$$

$$I w_{,ytt} = -M_{y,y} - M_{xy,x} + Q_y \quad (15)$$

Onde $w_{,xtt}$ e $w_{,ytt}$ representam, respectivamente, as acelerações angulares sobre o eixo y e eixo x, e

$$I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz = \frac{\rho h^3}{12} \quad (16)$$

é o momento de inércia por unidade de área da placa. Ao resolver para Q_x e Q_y , obtém-se

$$\rho h w_{,tt} - 1(w_{,xxtt} + w_{,yytt}) - (M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy}) = q(x, y, t). \quad (17)$$

Após, usando as relações de momento e deslocamentos e partindo do pressuposto de que h é constante (e portanto D também é), obtém-se a equação de movimento da placa, na forma de

$$\rho h w_{,tt} - I \nabla^2 w_{,tt} + D \nabla^4 w = q(x, y, t). \quad (18)$$

Onde

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right)^2 \quad (19)$$

Ou para o caso de placas circulares, é mais propício utilizar coordenadas cartesianas, onde:

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (20)$$

Finalmente se o termo de inércia rotatória for negligenciado, é possível obter a equação de Kirchoff para placas.

$$\rho h w_{,tt} + D \nabla^4 w = q(x, y, t). \quad (21)$$

Um exemplo de como essa equação pode ser utilizada é: para uma placa retangular em vibração livre, a equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\rho h w_{,tt} + D \nabla^4 w = 0 \quad (22)$$

Onde a solução modal será procurada:

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega t} \quad (23)$$

Onde $W(x, y)$ é uma função desconhecida e ω é a frequência natural circular. Ao substituir uma equação na outra obtém-se:

$$(\nabla^4 - \gamma^4)W = 0 \quad (24)$$

Em que

$$\gamma^4 = \frac{\omega^2 \rho h}{D} \quad (25)$$

Resultando em uma equação geral:

$$\begin{aligned}
W(x, y) = & A1 \sin \alpha x \sin \beta y + A2 \sin \alpha x \cos \beta y + A3 \cos \alpha x \sin \beta y + \\
& A4 \cos \alpha x \cos \beta y + A5 \sinh \bar{\alpha} x \sinh \bar{\beta} y + A6 \sinh \bar{\alpha} x \cosh \bar{\beta} y + \\
& A7 \cosh \bar{\alpha} x \sinh \bar{\beta} y + A8 \cosh \bar{\alpha} x \cosh \bar{\beta} y
\end{aligned} \quad (26)$$

Onde “Ai” são constantes de integração arbitrárias. Também é evidente que:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 \quad (27)$$

Para esta equação ser resolvida é preciso definir condições de contorno. Para este caso, uma placa simplesmente suportada tem-se as seguintes condições de contorno:

$$W|_{x=0,a} \equiv 0, \quad W_{,xx}|_{x=0,a} \equiv 0, \quad W|_{y=0,b} \equiv 0, \quad \text{and} \quad W_{,yy}|_{y=0,b} \equiv 0.$$

Onde estas condições de contorno são satisfeitas se e somente se Ai, i = 2,...,8 desaparecerem, tendo que

$$W(x, y) = A1 \sin \alpha x \sin \beta y \quad (28)$$

Onde “α” e “β” devem satisfazer, conforme as condições de contorno, as seguintes condições:

$$\sin \alpha a = 0 \quad (29)$$

$$\sin \beta b = 0 \quad (30)$$

Resultando em:

$$\alpha_m a = m\pi \quad (31)$$

$$\beta_n b = n\pi \quad (32)$$

As frequências naturais são obtidas através da equação:

$$\omega_{(m,n)} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \quad m = 1, 2, \dots, \infty \quad (33)$$

E é possível plotar as posições de cada ponto da placa através da equação:

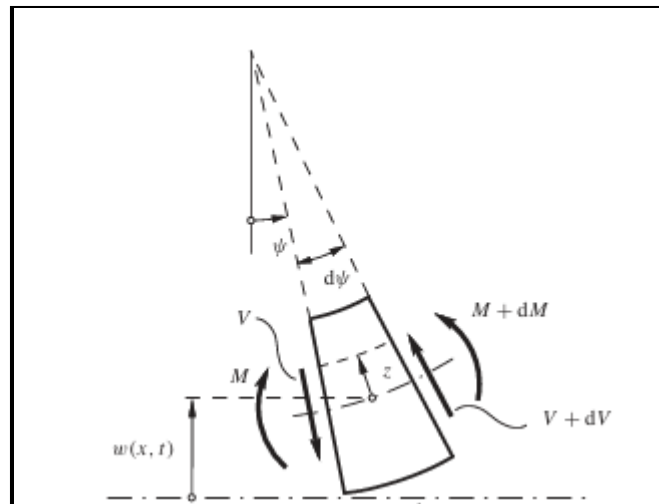
$$w(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{(m,n)} \left(\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \sin \left[t\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} + \psi_{(m,n)} \right] \quad (34)$$

Onde $A_{(m,n)}$ e $\psi_{(m,n)}$ são contrastantes arbitrárias que são determinadas à partir das condições de contorno iniciais.

2.3.3 Equações diferenciais para vibração de vigas

Alternativamente é possível de utilizar a teoria de vigas para o caso de a placa provar ser dificultosa demais nos experimentos. Ainda de acordo com Hagerdorn, (2007), utiliza-se o mesmo conceito de um plano intermédio na viga que tem todos os seus pontos em uma linha normal a ele se mantendo na normal, como exemplificado na Figura 8.

Figura 8 - Demonstração de um deslocamento infinitesimal.



Fonte: Hagerdorn, 2007

Com isso a relação tensão-deslocamento a qualquer altura z medida a partir do plano neutro, pode ser escrita a partir da teoria da elasticidade como:

$$\begin{aligned} \epsilon_x(x, z, t) &= \frac{(\rho(x, t) - z) d\psi - \rho(x, t) d\psi}{\rho(x, t) d\psi} = -\frac{z}{\rho(x, t)} \\ &= \frac{z \rho w_{,xx}(x, t)}{[1 + w_{,x}^2(x, t)]^{3/2}} \\ &\approx -z w_{,xx}(x, t) \end{aligned} \quad (35)$$

Onde $w(x, t)$ é o campo de deflexão transversal. Após isso a relação para um material linearmente elástico pode ser escrito a partir da lei de Hooke como:

$$\sigma_x(x, z, t) = E \epsilon_x(x, z, t) = -Ez w_{,xx}(x, t) \quad (36)$$

O momento de dobra em qualquer seção pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} M(x, t) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_x(x, z, t) dA \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E w_{,xx}(x, t) z^2 dA \\ &= EI(x) w_{,xx}(x, t) \end{aligned} \quad (37)$$

Onde $I(x)$ é o segundo momento de área da transversal sobre o plano neutro. Agora a equação de dinâmica translacional de um elemento infinitesimal pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} (\rho A(x) dx) w_{,tt} &= p(x, t) dx + (V + dV) \cos(\psi + d\psi) - V \cos \psi \\ \text{Ou} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\rho A w_{,tt} = p(x, t) + V_{,x}$$

Onde $p(x, t)$ é a densidade de força transversal, V é força de cisalhamento em qualquer seção transversal, e é pressuposto de que $\cos \psi \approx 1$. A dinâmica rotacional de um elemento infinitesimal é representada por:

$$\begin{aligned} (\rho I(x) dx) \psi_{,tt} &= (M + dM) - M + (V + dV) \frac{dx}{2} + V \frac{dx}{2} \\ \text{Ou} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\rho I(x) \psi_{,tt} = M_{,x} + V$$

Usando a relação $\tan(\psi) = w_{,x}$, é possível escrever.

$$\psi_{,t} = \frac{w_{,xt}}{(1+w_{,x}^2)} \approx w_{,xt} \quad (40)$$

E

$$\psi_{,tt} = \frac{w_{,xtt}}{(1+w^2_{,x})} - \frac{-2w_{,x}w^2_{,xt}}{(1+w^2_{,x})^2} \approx w_{,xtt} \quad (41)$$

Utilizando estas equações é possível obter a simplificação:

$$\rho A w_{,tt} + [EI w_{,xx}]_{xx} - [\rho I w_{x,tt}]_{,x} = p(x, t) \quad (42)$$

Esta equação é conhecida como o modelo de viga de Rayleigh. Onde o termo $[\rho I w_{x,tt}]_{,x}$ é normalmente referido como a inércia rotatória. E quando ela é ignorada, tem-se.

$$\rho A w_{,tt} + [EI w_{,xx}]_{xx} = p(x, t) \quad (43)$$

Que é referido como o modelo Euler-Bernoulli. Para a resolução destas equações são necessárias as condições de contorno para cada caso.

Partindo do modelo de viga de Rayleigh é assumido uma solução modal da forma de

$$w(x, t) = W(x) e^{i\omega t} \quad (44)$$

Assim como foi feito para o modelo das placas, onde $W(x)$ é a função natural e ω é a frequência natural circular. Substituindo a solução modal na equação do campo, obtém-se dependendo do método

$$-\omega^2 [\rho A W - (\rho I W')'] + (EI W'')'' = 0 \quad (45)$$

Ou

$$-\omega^2 \rho A W + EI W'''' = 0 \quad (46)$$

Para o método de Rayleigh e Euler respectivamente. Substituindo a solução na forma de

$$W(x) = B e^{\bar{\beta} x} \quad (47)$$

Para o método de Euler obtém-se

$$-\rho A \omega^2 + EI \bar{\beta}^4 = 0$$

$$\beta = \left(\frac{\rho A \omega^2}{EI} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (48)$$

Finalmente a forma genérica é obtida na forma de

$$W(x) = B_1 \cosh(\beta x) + B_2 \sinh(\beta x) + B_3 \cos(\beta x) + B_4 \sin(\beta x) \quad (49)$$

Onde B_i , $i = 1, \dots, 4$ são constantes reais de integração que são determinadas por condições de contorno específicas de cada problema. Como exemplo para uma viga engastada em um de seus extremos temos as seguintes condições de contorno.

$$W(0) = 0, \quad W'(0) = 0, \quad W''(l) = 0, \quad W'''(l) = 0 \quad (50)$$

Usando estas condições de contorno para fazer a substituição na equação número 49, pode-se obter que:

$$B_1 + B_3 = 0 \quad (51)$$

$$B_2 + B_4 = 0 \quad (52)$$

$$B_1 \cosh(\beta l) + B_2 \sinh(\beta l) + B_3 \cos(\beta l) + B_4 \sin(\beta l) \quad (53)$$

$$B_1 \cosh(\beta l) + B_2 \sinh(\beta l) + B_3 \cos(\beta l) + B_4 \sin(\beta l) \quad (54)$$

Portanto

$$B_1 = -\frac{\sinh(\beta_n l) + \sin(\beta_n l)}{\cosh(\beta_n l) + \cos(\beta_n l)} B_2 := \alpha_n B_2 \quad (55)$$

Considerando $B_2 = 1$ obtem-se

$$B_1 = \alpha_n, \quad B_2 = 1, \quad B_3 = -\alpha_n, \quad B_4 = -1 \quad (56)$$

A solução específica de cada modo natural pode ser descrita na forma de

$$W_n(x) = \sinh \beta_n x - \sin \beta_n x - \left[\frac{\sinh \beta_n l + \sin \beta_n l}{\cosh \beta_n l + \cos \beta_n l} \right] (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x) \quad (57)$$

Onde:

$$\beta_n = \left(\omega_n \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2n-1}{2} \pi + e_n \right) \frac{1}{l} \quad (58)$$

É possível obter a solução para a frequência natural através de:

$$\omega_n = \left(\frac{2n-1}{2} \pi + e_n \right)^2 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad n = 1, 2, \dots \infty, \quad (59)$$

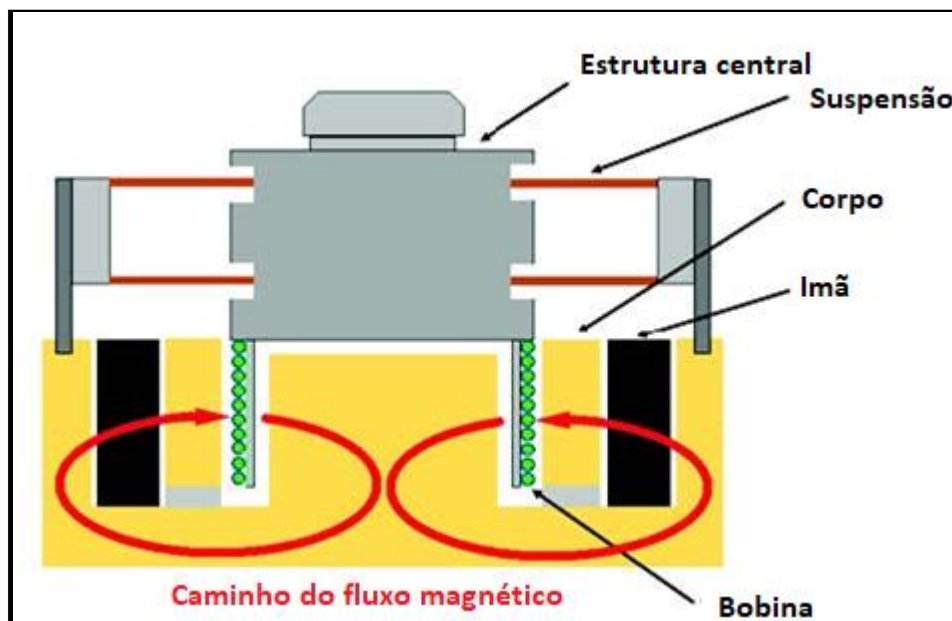
Onde e_n são pequenos termos de correção com valores de $e_1 = 0,3042$, $e_2 = -0,0018$, $e_3 = 0,001$, As correções para modos mais altos tendem a zerar rapidamente e podem ser negligenciadas.

2.4 EQUIPAMENTO UTILIZADO NA REALIZAÇÃO DO EXPERIMENTO

Para a realização do experimento é necessário introduzir uma excitação externa ao mesmo, para este fim muitos casos são utilizados um equipamento chamado *shaker*. Este aparelho pode ter seu movimento mecanicamente ou eletrodinamicamente, para os fins deste trabalho será explicado o funcionamento do eletrodinâmico. O dispositivo consiste de um amplificador, um atuador e um controlador.

O atuador é a parte que trabalha propriamente falando para que o sistema trabalhe na frequência correta, o mesmo depende das mesmas relações físicas que fazem com que um alto-falante funcione. Como demonstrado na Figura 9, tem-se uma bobina no interior do aparelho que faz com que quando uma corrente passe pela mesma, seja gerada uma força perpendicular a ela e ao fluxo magnético, onde essa mesma força é proporcional a corrente. A suspensão interna segura a bobina para que a mesma fique sempre concêntrica ao campo magnético, que permite a estrutura central se mover uma distância limitada em relação ao resto do corpo. Dependendo do tamanho do *shaker* são utilizados ímãs permanentes para gerarem o campo magnético necessário.

Figura 9 - Ilustração do funcionamento interno de um *shaker*



Fonte: SENTEK (2022).

O amplificador para *shakers* eletrodinâmicos tem a função de amplificar o sinal de vibração de um controlador, e aplicá-lo para a bobina do *shaker*, ele quem dá para a bobina a corrente elétrica contínua para o funcionamento correto e facilita de maneira segura o início e fim do funcionamento do sistema.

Finalmente o controlador, exemplificado na Figura 10, é responsável por mandar os parâmetros do teste para o amplificador como aceleração, deslocamento e frequência, para este fim também são utilizados acelerômetros para monitorar e fazer os ajustes necessários para que o experimento siga conforme planejado (SENTEK, 2022).

Figura 10 - Controlador de um Shaker



Fonte: SENTEK (2022)

3. RECURSOS E MÉTODOS

Primeiramente, será selecionado um material e geometria para a placa, a fim de levantar seus dados de propriedades mecânicas para os cálculos do método matemático e as informações de entrada para o método de elementos finitos.

3.1 PROGRAMA PARA CÁLCULO DO MODELO MATEMÁTICO

No modelo matemático, os cálculos foram feitos utilizando o programa MatLab, onde depois de os dados das placas e das vigas serem levantados utilizaram-se as equações vistas previamente no capítulo 2 para calcular as suas frequências naturais e modos de vibrações, assim como plotar-se suas deflexões.

3.2 PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS E MODELO

O modelamento da peça para o modelo de elementos finitos foi feito através do programa Ansys. Sua função de análise de sistema modal foi utilizada, nela foram alimentados os dados de propriedades físicas da placa, depois a mesma foi modelada, e selecionada o tipo de malha (formato da cadeia de elementos simplificados) mais adequado e finalmente foram determinadas suas condições de contorno.

3.3 EQUIPAMENTOS UTILIZADOS

O modelo de *shaker* utilizado foi o L0111A da marca Sentek, com as seguintes especificações de suas limitações. Na figura 11, tem-se sua imagem. E na Tabela 1 suas especificações

Tabela 1 - Especificações do *shaker*

Propriedades do Shaker	
Pico de força (N)	445
Pico de aceleração (g)	50
Máximo de velocidade (mm/s)	1778
Máximo de deslocamento (mm)	$\pm 6,35$
Máximo da tensão de pico (V)	10
Alcance de frequencia (Hz)	1-2500

Fonte: EDM-Vibration Controller

Figura 11 - Modelo de *shaker* utilizado

Fonte: Autor (2024)

Quanto ao amplificador, foi utilizado o modelo BAA120 da marca Tira, com as seguintes especificações. Abaixo na Figura 12 ele está representado junto com o controlador do *Shaker*, assim como suas especificações na Tabela 2.

Tabela 2 - Especificações do amplificador utilizado

Propriedades	
Potência máxima de saída (RMS)(VA)	120
Faixa de frequência (kHz)	DC-20
Tensão/Modo corrente	sim/sim
Tensão (RMS) máx (V)	22
Corrente (RMS) máxima (A)	5,5
Tensão (RMS) da entrada do sinal (V)	< 5
Distorção (%)	< 0,05
Razão sinal para barulho (dB)	> 95
Massa total (Kg)	16
Dimensões (mm)	483x90x450

Fonte: Manual do Shaker

Figura 12 - Modelo de amplificador e controlador



Fonte: Autor (2024)

Para os acelerômetros utilizados tem-se as seguintes especificações na Tabela 3, sendo as mais relevantes, o restante das especificações se encontram no Apêndice 1

Tabela 3 - Especificações do acelerômetro

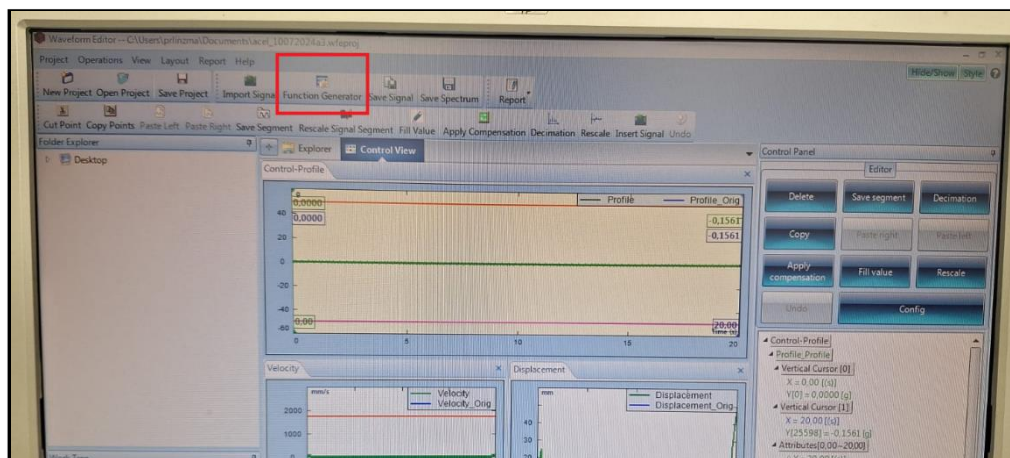
Sensibilidade (mV/(m/s ²))	10,2
Faixa de medição (m/s ² pk)	±490
Resolução de banda (m/s ² rms)	0,00015
Alcance de frequência (Hz)	0,5-10000 (±5%)
Elemento de detecção	Cerâmica
Peso (g)	5,8

Fonte: Manual do acelerômetro

3.4 PROGRAMAS E MÉTODOS PARA A REPLICAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS

Foram utilizados dois programas diferentes para a realização dos experimentos, *Waveform editor* e *EDM-Vibration Controller*. O programa *Waveform editor* é utilizado para criar a forma de onda que será importada para o controlador através do segundo programa. Na tela inicial do programa para começar a interagir com o mesmo é necessário clicar na opção “*Function generator*”, como demonstrado na Figura 13.

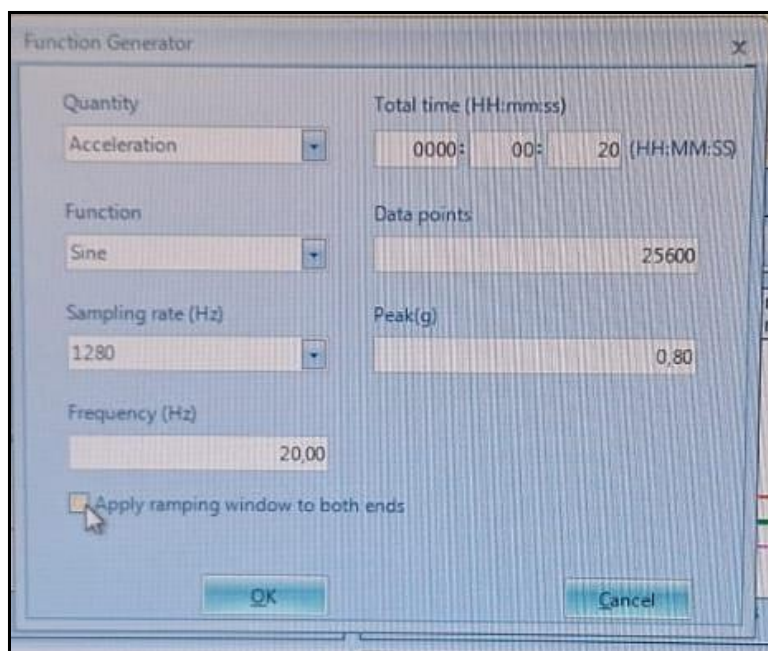
Figura 13 - Tela inicial do programa de geração de sinal de frequência



Fonte: Autor (2024)

A seguir o programa irá abrir uma nova janela, onde são adicionados os dados de entrada utilizados para gerar o sinal de onda, sendo eles o tipo de grandeza, a duração do sinal, o tipo de função do sinal (para este trabalho foram usados sinais senoidais), o número de pontos de dados, a taxa de amostragem, os valores de pico da grandeza escolhida e finalmente a frequência do sinal. Esta tela está demonstrada na figura 14, também é possível notar uma opção de “*Apply ramping window to both ends*”, durante os testes dos experimentos foi notado de que a mesma suavizava o início dos mesmos, fazendo com que erros rotineiros de deslocamentos excessivos acontecessem menos. Após a onda ter sido gerada, a mesma é salva em uma pasta dedicada, para os experimentos foi procurado deixar o valor da aceleração e o da frequência no nome do arquivo, por exemplo para o sinal abaixo, ele foi nomeado “Profile_0,8G_20Hz”

Figura 14 - Tela de entrada das propriedades do sinal de frequência

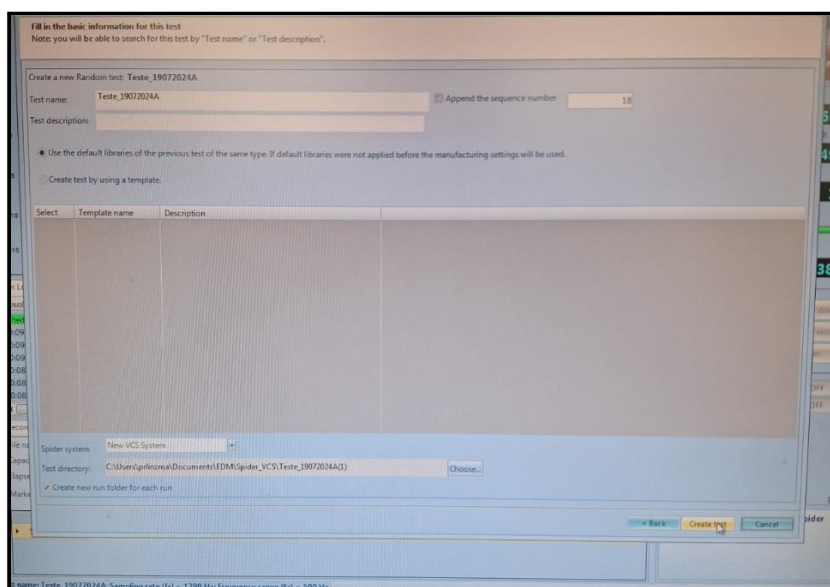


Fonte: Autor (2024)

Agora o programa *EDM-Vibration Controller* é usado, é selecionado a opção de *Time Waveform Replication*. E após isso clicar em *Next*. No canto inferior direito.

Após isso é selecionado se será continuado de onde o último teste ativo parou, ou se um novo será iniciado. Para iniciar um novo teste basta nomeá-lo e clicar em '*Create test*' como especificado na figura 15, caso contrário clicar no botão '*Cancel*'.

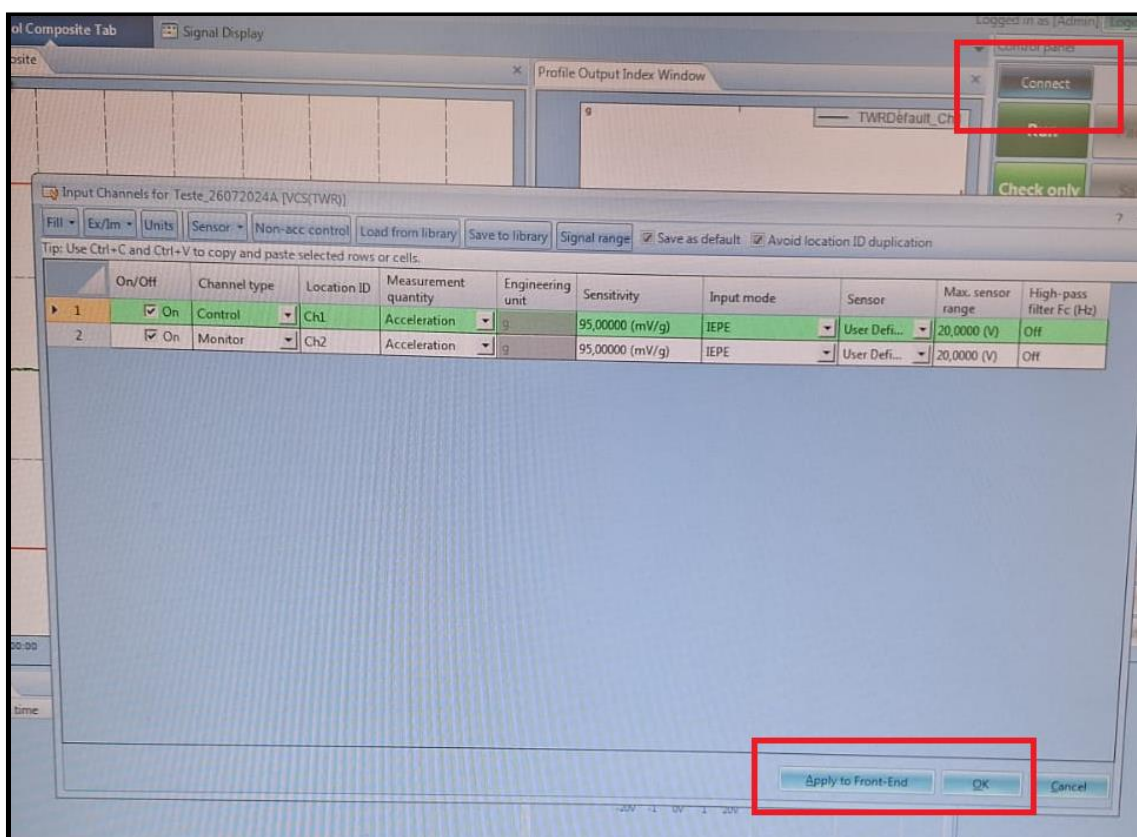
Figura 15 - Tela inicial do programa *EDM-Vibration Controlle*



Fonte: Autor (2024)

Antes de iniciar o teste verificar se ambos os acelerômetros (tanto o de controle quanto o de monitoramento) estão ligados clicando na opção superior esquerda do programa em ‘Setup’ e depois em ‘Input channels’, ao confirmar de que ambos estão propriamente conectados no controlador e no *Shaker*, clicar na opção ‘Apply to front-end’. Fazendo isso, apertar em ok para fechar a janela, e apertar no botão azul chamado ‘connect’ no canto superior direito, como demonstrado na Figura 16.

Figura 16 - Passo de verificação dos acelerômetros e conexão com o computador

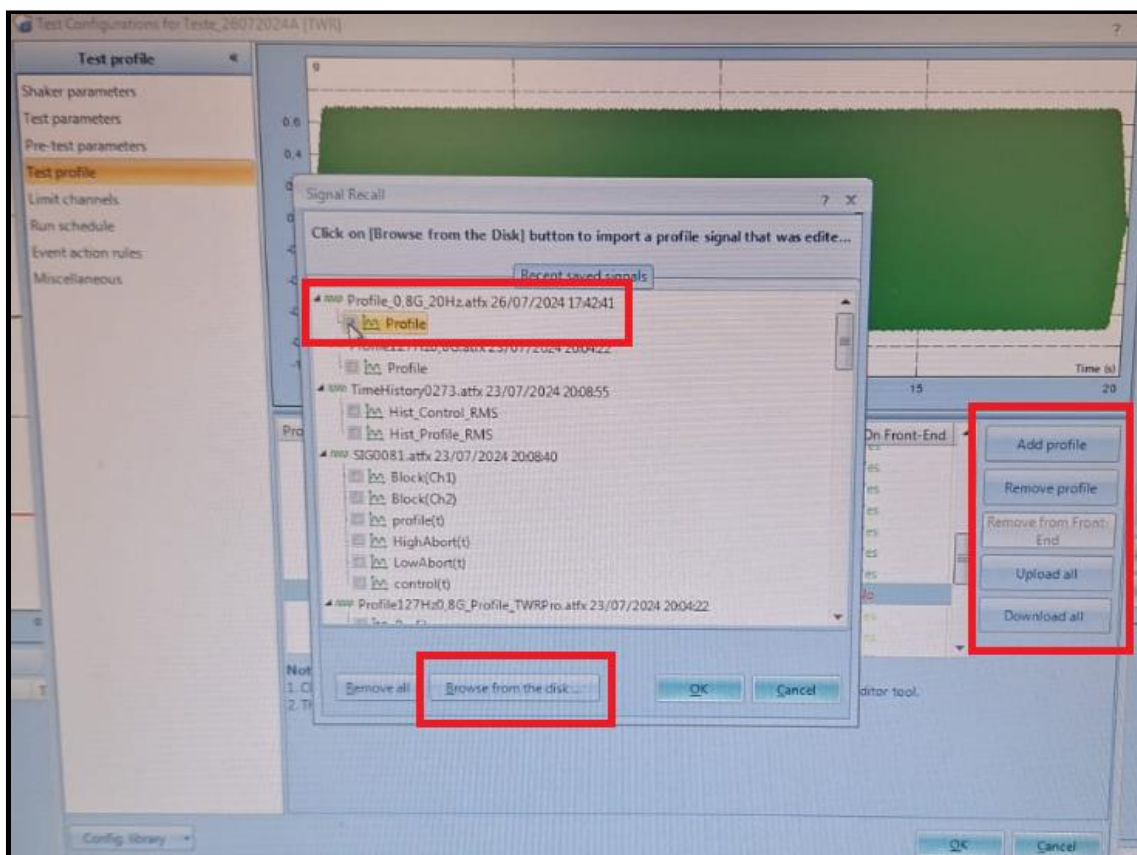


Fonte: Autor (2024)

Após isso, clicar novamente na aba de ‘Setup’, e escolher a opção de ‘Test configuration’. A partir da tela que foi aberta como especificado na Figura 17, clicar na quarta aba da esquerda, chamada ‘Test profile’, nela pode-se ver quais testes estão atualmente no controlador, assim como é possível remover qualquer um, ao clicar no perfil de teste e na opção ‘Remove profile’. Para adicionar um perfil para o controlador, é necessário clicar em ‘Add profile’, após isso clicar em ‘Browse from the disk’ navegar até a pasta em que o perfil da frequência foi salvo e adicioná-lo, no entanto, só isso não é

o suficiente, lembrar de que é necessário fazer o upload do perfil para o controlador, clicando na opção de ‘*Upload All*’.

Figura 17 - Tela para adicionar o perfil do sinal da frequência

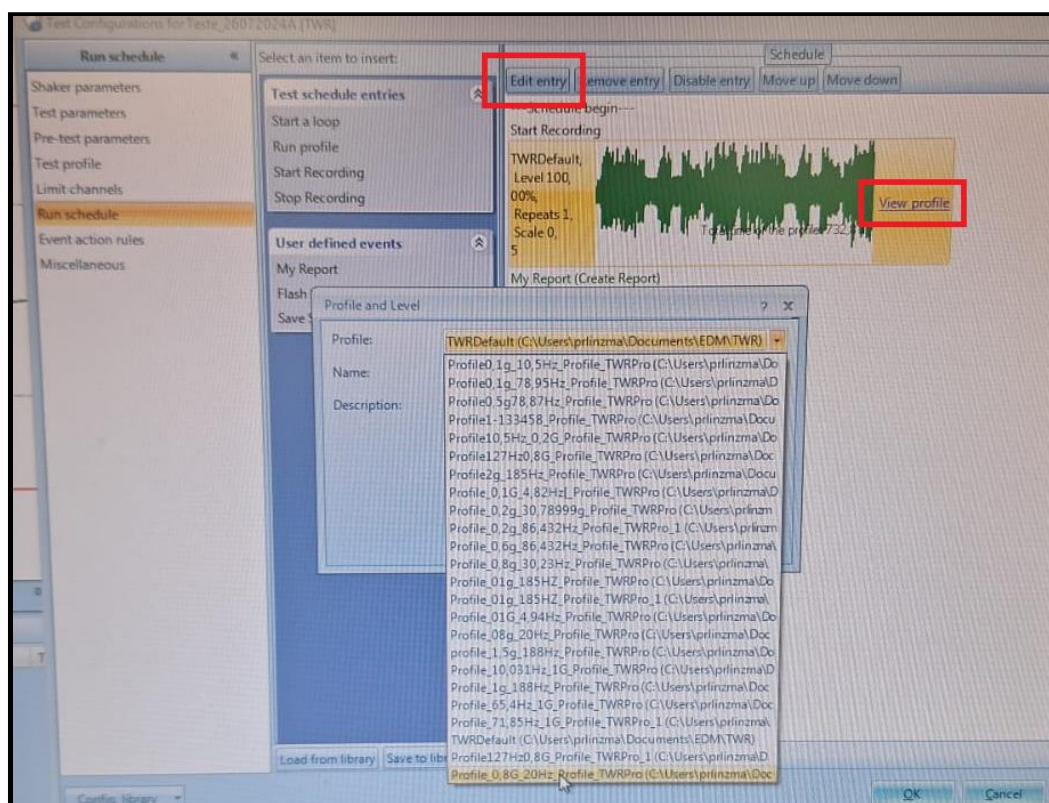


Fonte: Autor (2024)

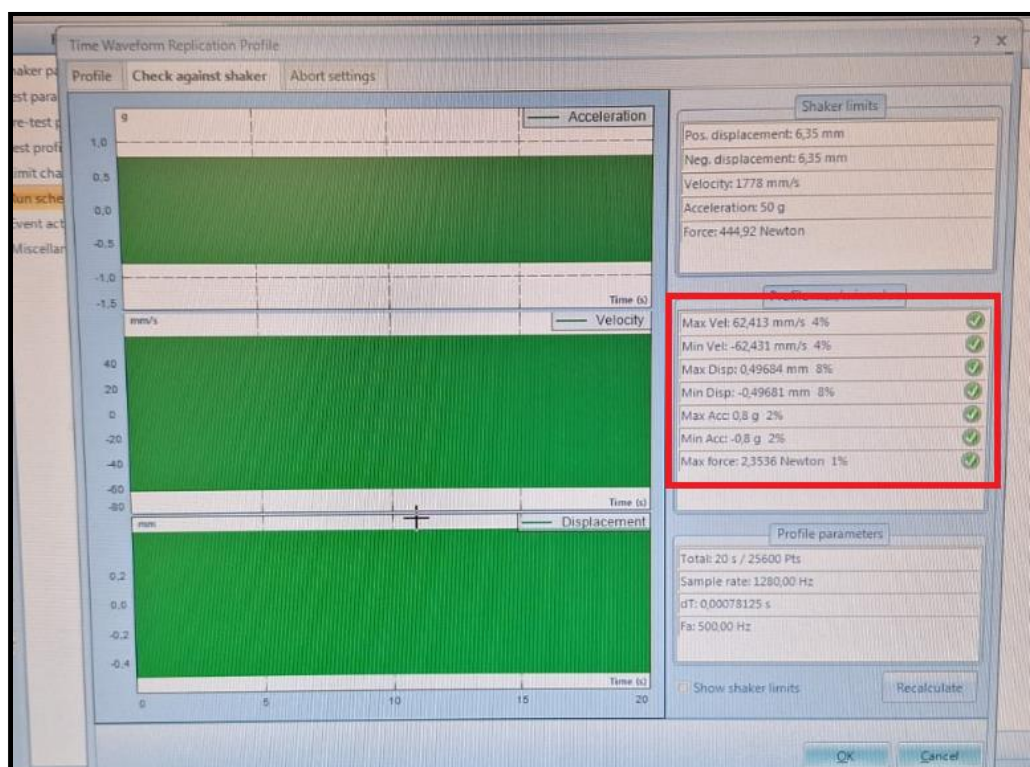
Após, é necessário ir para a sexta opção com o nome de ‘*Run schedule*’, isso abrirá a tela da Figura 18, onde será clicado em ‘*view profile*’ (apenas caso a opção de edit profile não estiver ativa se ela já estiver ativa, clicar nela) e fechar em seguida para clicar em edit profile. Nesta tela, selecionar o sinal a ser testado e apertar ok.

Ao completar esta parte uma tela será aberta em que o controlador irá checar se o *shaker* possui as especificações necessárias para fazer o experimento, comparando os deslocamentos, acelerações, frequências e forças necessárias, podendo dar três tipos de avisos diferentes: Um aviso verde significa que os parâmetros estão dentro do limite, um amarelo significa que os parâmetros estão dentro do limite no entanto estão próximos do mesmo, e um vermelho significando que os valores necessários ultrapassam as especificações do *shaker*, conforme Figura 19.

Figura 18 - Tela para selecionar o sinal



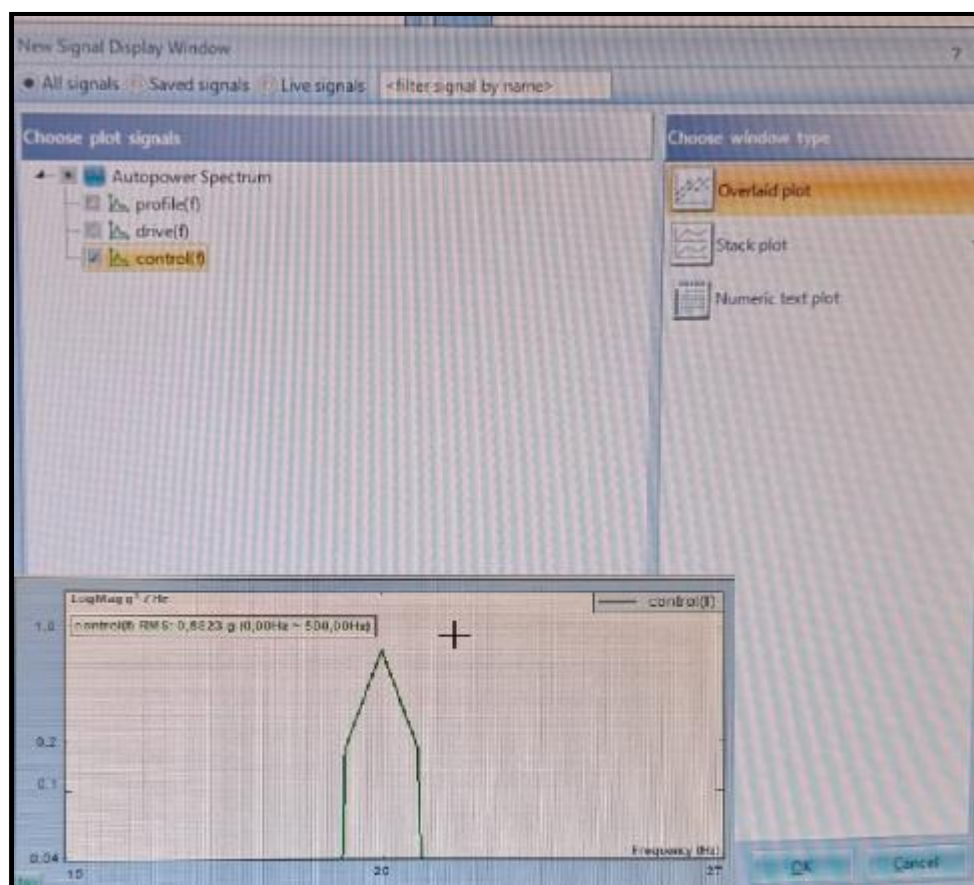
Fonte: Autor (2024)

Figura 19 - Tela de parâmetros do *shaker* x requeridos pelo experimento

Fonte: Autor (2024)

Após esta etapa, antes de rodar o teste, clicar em ‘View’ no canto superior a direita da opção de ‘setup’ utilizada anteriormente. Nesta aba clicar na opção ‘spectrum’, isso fará com que a tela que está representada na figura 20 abra, e dela a opção de ‘Control(f)’ será ativada para que seja possível monitorar o sinal que o acelerômetro irá ler, garantindo a precisão do experimento.

Figura 20 - Tela para habilitar monitoramento da frequência lida pelo acelerômetro



Fonte: Autor (2024)

Finalmente, para rodar o teste, clicar em “Run” na tela inicial. Fazendo isso, será rodado um pré-teste, onde o perfil irá rodar com apenas 20% de suas especificações, para que o controlador tenha certeza de que o valor de tensão não irá superar o máximo estabelecido. Se um erro de falta de tensão ocorrer, os *dials* do amplificador podem ser girados para aumentar a tensão, a não ser que os mesmos já estejam no máximo, então nesse caso é necessário voltar para a tela de ‘setup’, na segunda e terceira abas chamadas ‘test parameters’ e ‘pre-test parameters’ e aumentar o valor de tensão dos mesmos cuidando para que estes valores não ultrapassem as especificações máximas do *shaker*.

Caso o sinal de onda passe do pré-teste dois erros foram encontrados esporadicamente. Sendo o primeiro o de '*open loop*' isso ocorreu em duas situações, na primeira quando o valor de aceleração era baixo demais e o acelerômetro não registrava a frequência, e o experimento era abortado, fazendo com que o sinal tivesse de ser gerado novamente, só que com uma aceleração maior. Alternativamente este erro também acontecia para casos onde havia um mal contato dos cabos do acelerômetro, ou o mesmo tinha caído de seu local.

O segundo erro encontrado foi o erro de '*displacement*' onde o controlador acusa de que o deslocamento do *shaker* está alto demais, abortando o experimento. Para este erro, foram achadas duas formas de sanar ele, a primeira voltando para o programa de sinal e se certificando que a opção de suavização estava marcada, pois na maioria das vezes era apenas o solavanco inicial que gerava estes erros. A segunda maneira que foi encontrada é de diminuir a aceleração do sinal de onda, diminuindo assim a amplitude do deslocamento.

4. RESULTADOS

Neste capítulo foram tratados os resultados da comparação do método de elementos finitos com o cálculo das equações diferenciais para vibração de placas para o caso de uma placa engastada em suas arestas exteriores. Foram analisados também os dados do método de elementos finitos para uma placa fixada em seu centro, para refletir como seria o comportamento da mesma durante um experimento realizado através do *shaker*. Finalmente, para o caso de vigas, foi realizado uma comparação entre os resultados, do método de elementos finitos, das equações diferenciais para vibração de vigas, da teoria e do experimento realizado.

4.1 VERIFICAÇÃO DA COMPATIBILIDADE DA TEORIA DE PLACA E MEF

A fim verificar a equivalência dos cálculos de vibração de placa com o método de elementos finitos, um estudo de caso foi feito para esta comparação. Os dados utilizados que serviram como entrada para o MatLab, assim como o script utilizado se encontram no Apêndice 2.

Estes mesmos parâmetros foram replicados para a simulação no Ansys como demonstrado na figura 21.

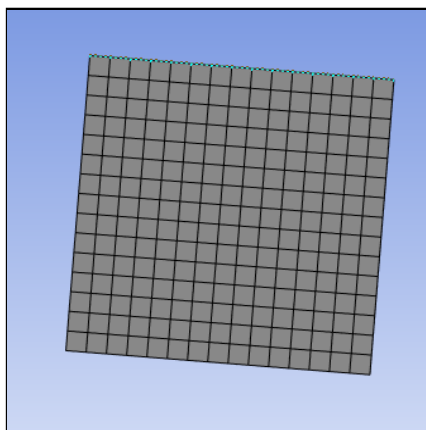
Figura 21 - Parâmetros utilizados no Ansys

A	B	C
Property	Value	Unit
	 Table	
Densidade	7850	kg m ⁻³ ▼
Módulo de elasticidade	2E+11	Pa ▼
Coefficiente de Poisson	0,3	

Fonte: Retirado do programa Ansys (2024)

A malha escolhida para esta simulação foi a quadricular como mostrado na Figura 22.

Figura 22 - Malha utilizada para a comparação



Fonte: Autor

Para esta comparação as condições de contorno foram de uma placa simplesmente suportada, ou seja, as arestas exteriores têm seu deslocamento no eixo “z” bloqueado e os vértices no eixo “x” e “y”.

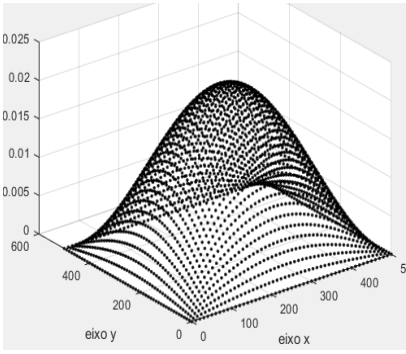
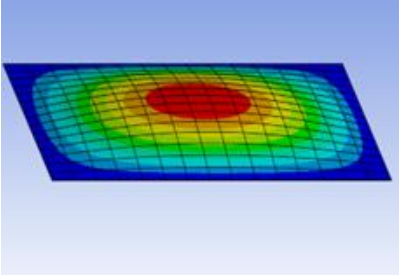
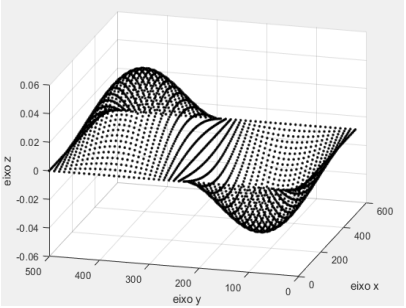
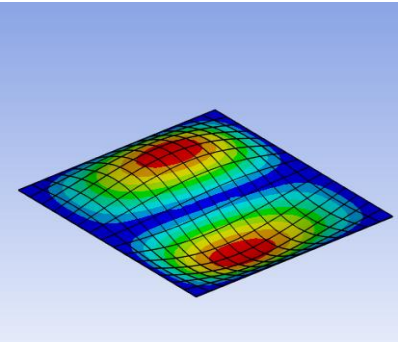
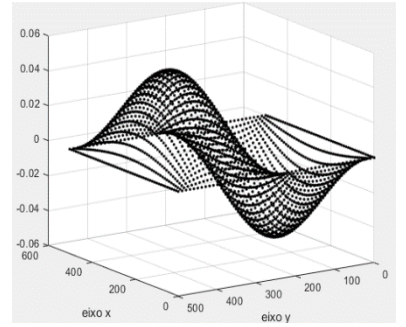
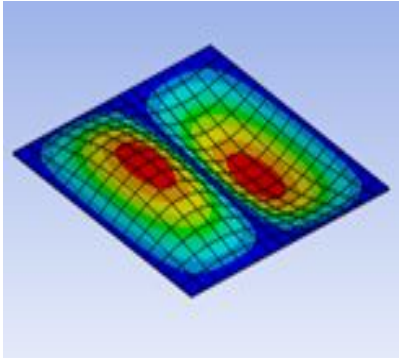
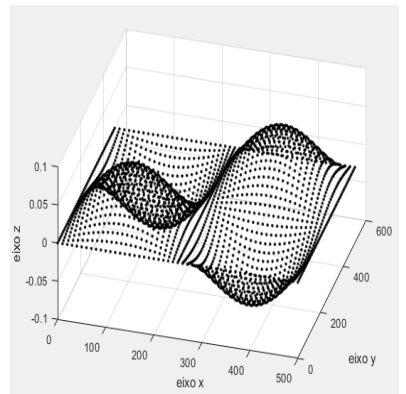
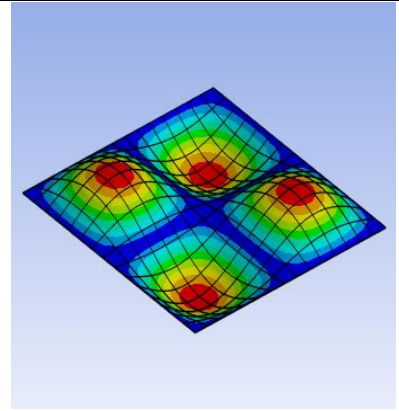
Na Tabela 4 e Quadro 1 abaixo tem-se as primeiras quatro frequências naturais obtidas para este caso, em ambos os métodos, e em seguida a representação gráfica da placa e seus deslocamentos em seus modos de vibrações nas suas frequências naturais.

Tabela 4 - Valores de frequências dos modos pelo Ansys e MatLab

Frequências (Hz)		
Modo	MatLab	Ansys
1	19,19	19,17
2	47,98	47,96
3	47,98	47,96
4	76,77	76,76

Fonte: Autor (2024)

Quadro 1 - Representação gráfica dos deslocamentos das placas

	MatLab	Ansys
Modo 1 (m=1;n=1)		
Modo 2 (m=1;n=2)		
Modo 3 (m=2;n=1)		
Modo 4 (m=2;n=2)		

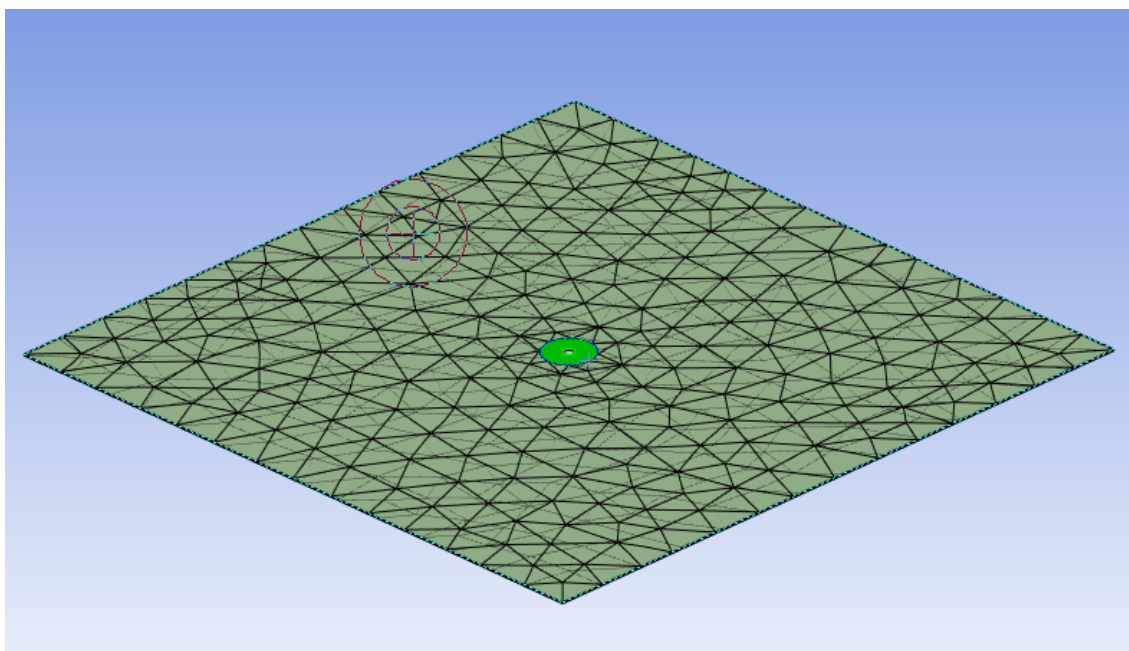
Fonte: Autor (2024)

Através dos resultados obtidos, observa-se que ambos os métodos tiveram seus valores de frequências naturais e suas tendências de deslocamento muito parecidas, dando veracidade a sua equivalência.

4.2 ANÁLISE MEF PARA PLACA APOIADA NO CENTRO

Para a verificação do método a seguir, foi considerada uma placa de 500x500x1 mm, com um furo de 8 mm de diâmetro no seu centro, com modo de Elasticidade equivalente a 200 GPa, e seu coeficiente de Poisson 0,3, imitando as condições do material no item anterior. Ao comparar com o exemplo anterior, suas condições de contorno mudam, fazendo com que tenha um suporte fixo no meio com o diâmetro de 38 mm, que simula a área de contato que a placa teria com o *shaker*, a malha que teve a melhor distribuição para este caso foi triangular, como demonstrado na Figura 23.

Figura 23 - Malha utilizada para MEF do experimento

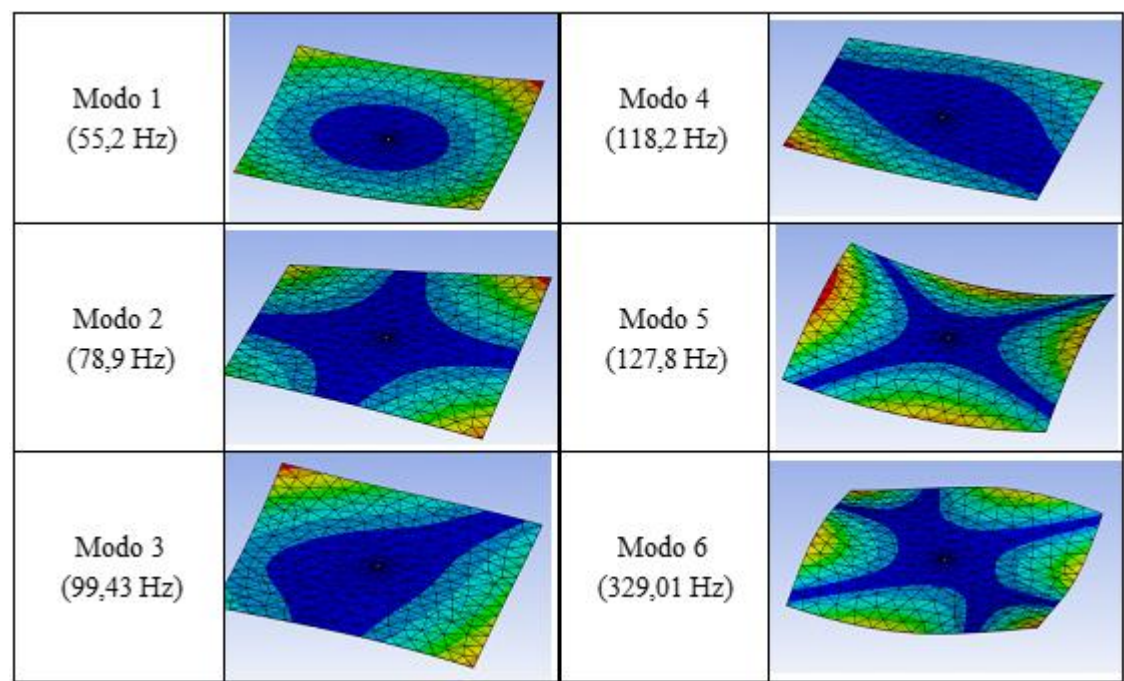


Fonte: Autor (2024)

Com as propriedades do material, malha e condições de contorno são possíveis de obter as representações do deslocamento, assim como as frequências naturais da placa. No entanto, para o experimento prático, não foi possível replicar este experimento por conta de erros de aceleração, onde a mesma não registrava nas leituras pelos acelerômetros, ou os deslocamentos que o *Shaker* realizava eram altos demais passando

dos limites. Abaixo no Quadro 2 tem-se os valores de frequências naturais, e as representações dos deslocamentos que a placa sofre em suas frequências naturais.

Quadro 2 - Valores de frequências naturais e de deslocamentos



Fonte: Autor (2024)

4.3 ANÁLISE E EXPERIMENTO PARA VIGAS

Duas vigas foram confeccionadas com os valores para comprimento, espessura e largura de acordo com a Tabela 5 e feito um furo de Ø8 mm a 15 mm no centro de uma de suas extremidades.

Tabela 5 - Dimensões das vigas utilizadas

	Viga 1	Viga 2
Comprimento (mm)	0,3	0,426
Espessura (mm)	0,001	0,001
Largura (mm)	0,042	0,041

Fonte: Autor (2024)

4.3.1 Resultado dos cálculos teóricos do modelo de viga

Para o cálculo teórico do modelo de vigas, foi utilizado o modelo de Euler-Bernoulli, portanto as equações (57) e (59) foram utilizadas para prever o comportamento de seus deslocamentos assim como encontrar as frequências naturais de cada viga. Vale notar também que para efeitos de cálculo, ela será considerada uma viga engastada e terá seu comprimento efetivo reduzido em 15 mm (local da furação onde é feita a fixação no *Shaker*).

Os valores de entrada seguem na tabela 6.

Tabela 6 - Valores de entrada para cálculo numérico

	Viga1	Viga2
Comprimento (m)	0,285	0,411
Espessura (m)	0,001	0,001
Largura (m)	0,042	0,041
E (N/m ²)	2,00E+11	
I (m ⁴)	3,50E-12	3,42E-12
ρ (kg/m ³)	7860	
A (m ²)	0,000042	0,000041

Fonte: Autor (2024)

Ao substituir eles na equação (58) e (59) obtêm-se os seguintes valores para as três primeiras frequências naturais (Hz) e os valores de β_1 , β_2 e β_3 , na tabela 7 tem-se os valores.

Tabela 7 - Valores de frequências naturais β_n pelo método Euler-Bernoulli

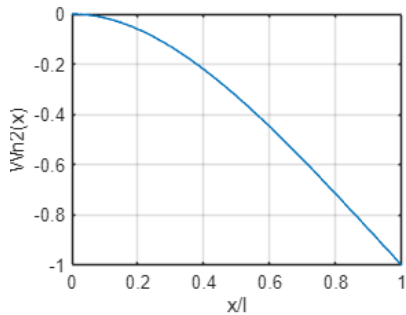
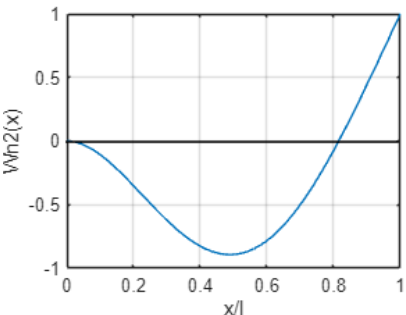
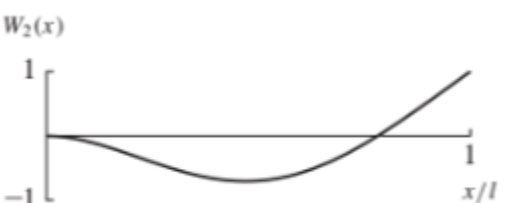
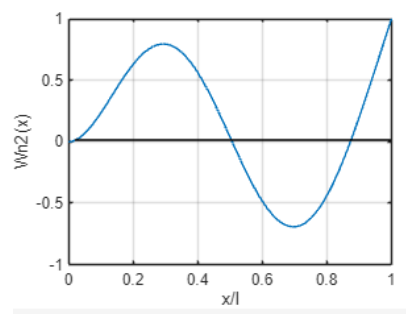
	Viga 1	Viga 2
Freq1 (Hz)	10,03	4,82
Freq2 (Hz)	62,88	30,23
Freq3 (Hz)	176,04	84,65
β_1 (rad/m)	6,57	4,56
β_2 (rad/m)	16,47	11,42
β_3 (rad/m)	27,56	19,11

Fonte: Autor (2024)

Com os valores de β_n foi utilizado o programa MatLab para plotar graficamente as tendências de deslocamento da viga ao longo de seu comprimento de cada frequência

natural através do script no Apêndice 3, utilizando a equação de número (57). Abaixo no Quadro 3 tem-se a demonstração destas tendências, comparando seus modos de vibração com os esperadas na teoria (Hagerdorn, 2007)

Quadro 3 - Comparação dos resultados do MatLab e teóricos

	MatLab	Referencial teórico
Modo 1		
Modo 2		
Modo 3		

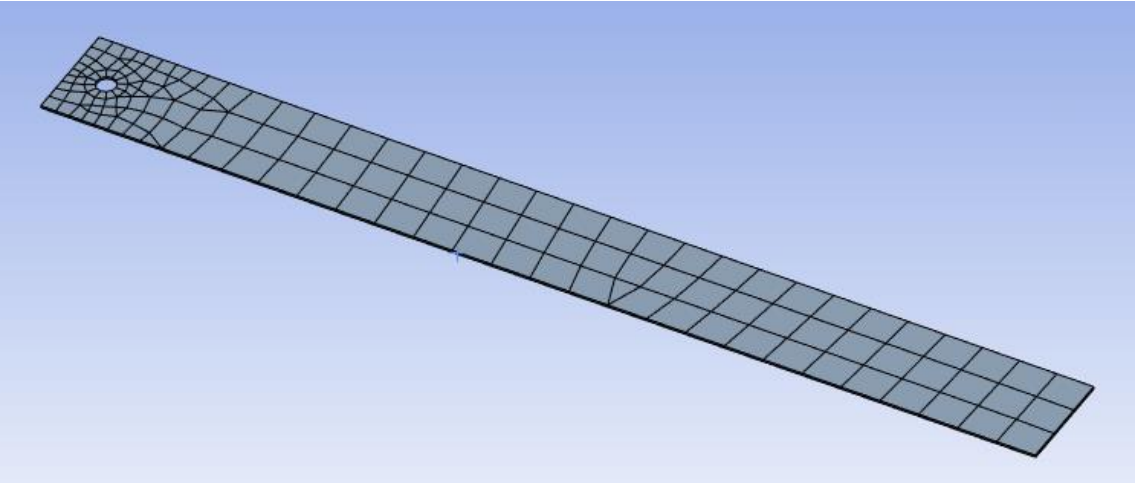
Fonte: Hagerdorn, 2007 ; Autor (2024)

4.3.2 Resultados das simulações do MEF para vigas

Primeiramente, para as simulações foram considerados os mesmos dados de entrada do material para a análise de placa apoiada no centro. Para a construção do modelo, as vigas foram consideradas como casca (*Shell*), utilizando as dimensões da Tabela 6. A malha utilizada foi a de quadrados e triângulos por zonas múltiplas por conta de sua cobertura maior, como mostrado na Figura 24. Sua condição de contorno é de um

suporte fixo ao redor do diâmetro do furo, afim de simular a condição que a viga será exposta durante os experimentos.

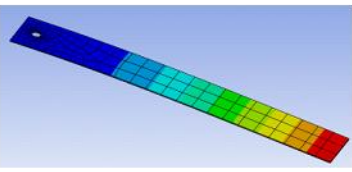
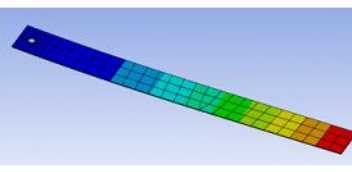
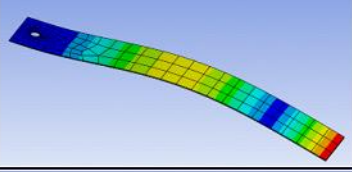
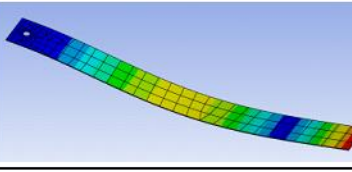
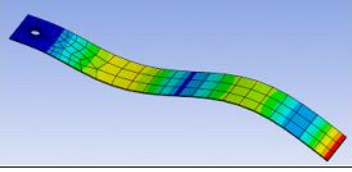
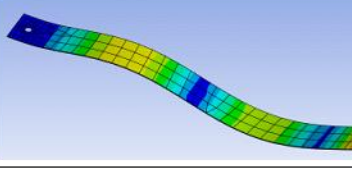
Figura 24 - Malha utilizada no experimento de viga



Fonte: Autor (2024)

No quadro 4 tem-se as três primeiras frequências naturais de cada uma das vigas, sendo a parte em vermelho a parte em que há um maior deslocamento e a azul onde o deslocamento é nulo.

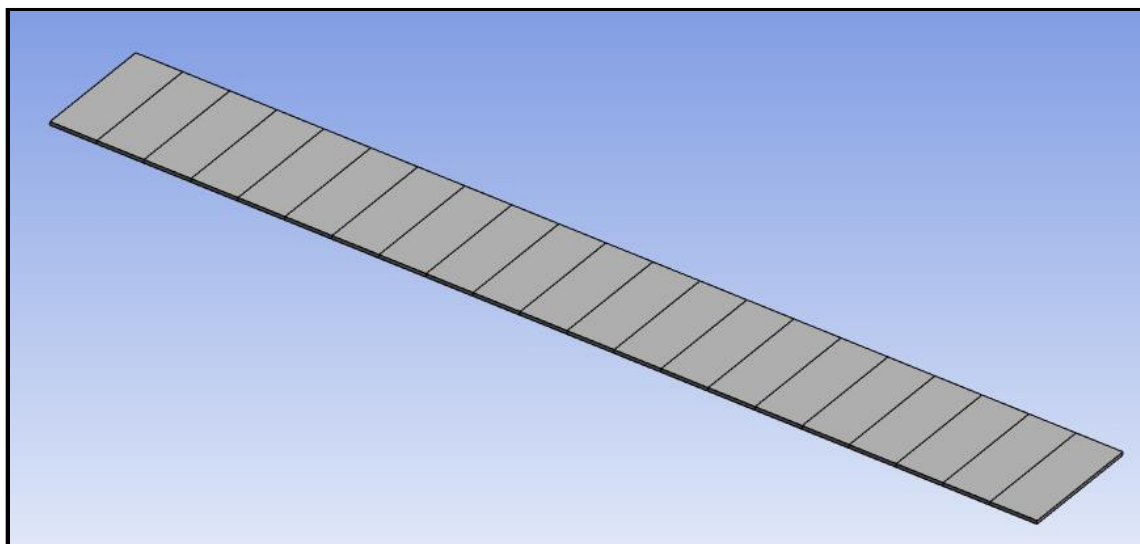
Quadro 4 - Frequências e representações MEF por elemento de casca (Shell)

Modo	Viga 1		Viga 2	
	Frequencia (Hz)	Representação gráfica	Frequencia (Hz)	Representação gráfica
1	10,19		4,88	
2	64,16		30,69	
3	181,45		86,54	

Fonte: Autor (2024)

Os resultados do MEF também foram gerados para o elemento de vigas, além do de Shell. Para este foram consideradas as mesmas propriedades físicas do material, no entanto para os valores de dimensões a tabela 6 foi dada como valor de entrada. Na figura 25 abaixo tem-se a malha gerada automaticamente pelo programa

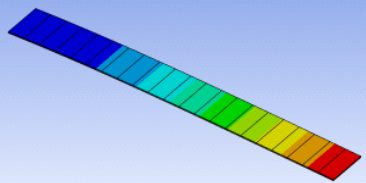
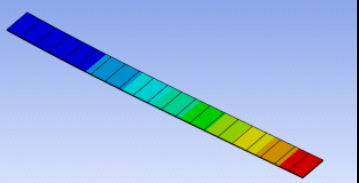
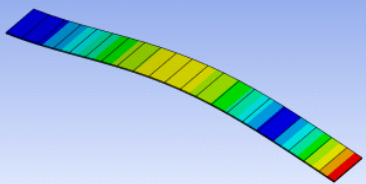
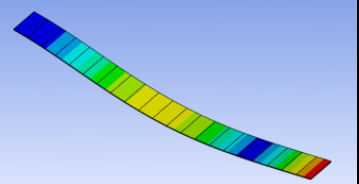
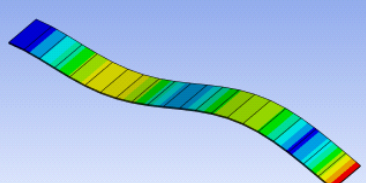
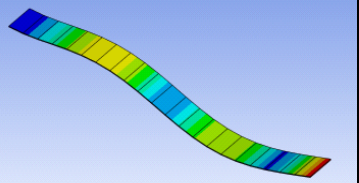
Figura 25 - Malha utilizada pelo elemento de viga



Fonte: Autor (2024)

Após isso a condição de contorno para uma das extremidades ser engastada é adicionada. No Quadro 5 temos os resultados de frequências e representações gráficas dos deslocamentos

Quadro 5 - Frequências e representações MEF por elemento de viga

Modo	Viga 1		Viga 2	
	Frequencia (Hz)	Representação gráfica	Frequencia (Hz)	Representação gráfica
1	10,038		4,83	
2	62,91		30,25	
3	176,13		84,7	

Fonte: Autor (2024)

4.3.3 Resultado dos experimentos de vigas

Para a realização do experimento, cada uma das duas vigas foi fixada pelo furo que foi feito na extremidade delas, e para ajudar na visualização dos deslocamentos que a viga sofre uma camada de limalha de ferro fina foi posta de modo a cobrir a superfície, mas posta de modo aleatório afim de não interferir nos resultados obtidos. Foram usados dois acelerômetros, um de controle e outro de checagem para manter as frequências dos sinais fiéis as que são colocadas como entrada, na Figura 26 estão representados os pontos acima.

Figura 26 - Viga nº1 com limalha de ferro montada no *shaker*



Fonte: Autor (2024)

No quadro 6 são representados cada um dos experimentos ao final do ciclo de vibração. Cada placa foi submetida a um total de 20 segundos sobre a frequência natural achada pelos métodos anteriores, os valores utilizados foram os encontrados pelo método matemático, mas como será visto na interpretação dos resultados não houve grande distinção entre ambos os métodos de obtenção de frequência (Na primeira frequência natural foi utilizada uma imagem durante o experimento para demonstrar o comportamento, visto que não haveria limalha de ferro sobrando na superfície ao final).

Quadro 6 - Resultados do experimento

Modo	Viga 1
1	
2	
3	
Viga 2	
1	
2	
3	

Fonte: Autor (2024)

4.3.4 Comparação dos resultados

Para a comparação dos resultados todos os mesmos foram tabelados abaixo na Tabela 18, a fim de facilitar a visualização, comparação e compreensão.

Tabela 8 - Tabela comparativa de resultados numéricos

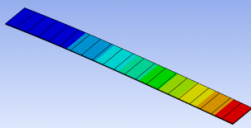
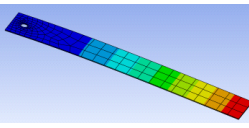
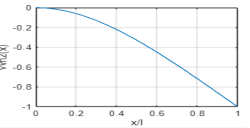
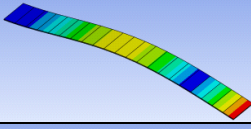
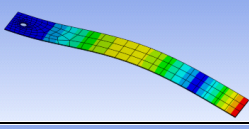
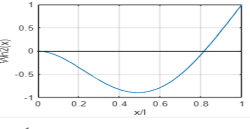
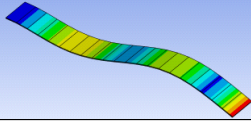
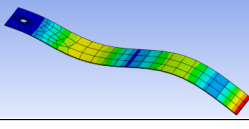
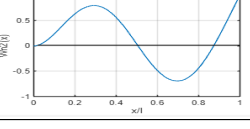
	Viga 1			Viga 2		
	MEF - Shell	MEF - Viga	Cálculo numérico	MEF - Shell	MEF - Viga	Cálculo numérico
	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)	Frequência (Hz)
Modo 1	10,19	10,038	10,03	4,88	4,83	4,82
Modo 2	64,16	62,91	62,88	30,69	30,25	30,23
Modo 3	181,45	176,13	176,04	86,54	84,7	84,65

Fonte: Autor (2024)

Primeiramente. é possível notar valores de frequências naturais muito próximos em ambos os métodos das frequências naturais quando se fala de vigas, assim como as suas representações e resultados dos experimentos realizados, dando confiabilidade para os resultados. No entanto, pelo comando Shell é possível observar uma diferença um pouco maior , dependendo de seu modo, chegando a 3% maior entre seu valor pelo MEF e o valor calculado, o que pode acontecer por ele considerar termos em seus cálculos como o termo de inércia rotatória que é desprezado pelo método Euler-Bernoulli

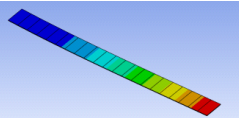
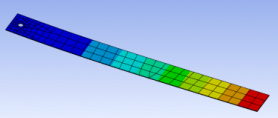
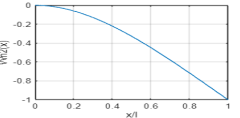
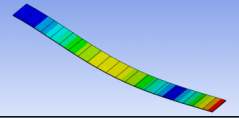
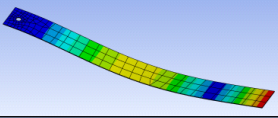
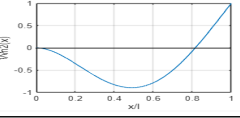
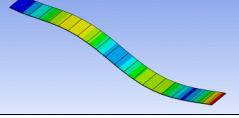
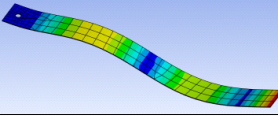
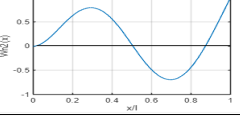
Abaixo nos Quadros 6 e 7 tem-se a comparação da representação do experimento pelos diferentes métodos e dos resultados práticos do mesmo, da viga 1 e 2 respectivamente.

Quadro 7 - Tabela comparativa da representação dos resultados da viga 1

Modo	Viga 1			
	Viga	Shell	Experimento	Cálculado
1				
2				
3				

Fonte: Autor (2024)

Quadro 8 - Tabela comparativa da representação dos resultados da viga 2

Viga 2				
Modo	Viga	Shell	Experimento	Calculado
1				
2				
3				

Fonte: Autor (2024)

Para a segunda viga os resultados são mais difíceis de se observarem por conta de a mesma ser longa e fina, então seu estado estático já possui um certo desloamento por conta da gravidade, como demonstrado na Figura 27 abaixo, isso faz com que os nós mais para o final de seu comprimento sejam mais difíceis de se observarem, em sua terceira frequência natural, seu nó estático no meio é facilmente observado enquanto o que deveria ter mais para o final é quase imperceptível visualmente pelo acúmulo de limalha.

Figura 27 - Vista frontal da viga



Fonte: Autor (2024)

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi abordada a réplica de um experimento de vibração tendo em vista demonstrar o conceito de ressonância.

Foram encontrados percalços ao longo do caminho, como para gerar os sinais, e fazer com que o *shaker* fizesse a leitura e conseguisse reproduzir o experimento, lidando com erros diferentes como picos de deslocamentos excessivos ao iniciar o programa, tendo em vista estes problemas foram utilizadas opções dentro do programa para suavizar os deslocamentos.

O experimento feito atendeu às expectativas para o caso da primeira viga, produzindo resultados satisfatórios, gerando análises que foram capazes de provar a eficácia de dois métodos diferentes, foi observado uma igualdade significativa (diferença maior entre os valores foi menor que 0,07%) entre os valores do método de elementos finitos de viga do programa Ansys e dos cálculos apresentados por Hagerdorn, 2007. O aspecto visual para este experimento também foi satisfatório, deixando os nós bem evidenciados. O mesmo aconteceu com o método de casca (*Shell*), tendo os pontos com deslocamentos nulos bem evidenciados, no entanto com uma diferença um pouco maior (até 3% para o modo 3 da viga 1), que pode ser explicada tanto pela condição de contorno ligeiramente diferente, pois é feita com um suporte fixo no furo, ao invés de um dos lados engastados, quanto pelo modelo de cálculo interno diferente.

Já para o caso da segunda viga, houve problemas, por conta de sua estrutura, sendo uma viga fina e longa, fazendo com que sofresse um deslocamento para baixo no final de seu comprimento. Os resultados do experimentos desta segunda viga não tiveram um aspecto visual desejável pois não foi possível perceber os depósitos de limalha nos nós estáticos localizados para o final de seu comprimento, no entanto, como na primeira viga, obteve-se resultados satisfatório para os valores calculados e os resultados do método de elementos finitos.

Dessa maneira, foi possível demonstrar o efeito que a ressonância pode ter sobre um sistema, com oscilações de amplitudes maior, fazendo com que fique mais nítido a importância deste conceito para leigos e estudantes de engenharia.

Como sugestão para futuros trabalhos pode-se ser aprofundado o cálculo visto para a placa com arestas suportadas, para o caso do Shaker, com o furo central, mudando as condições de contorno

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT. **NBR 10520**: citações: elaboração. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Rio de Janeiro, 2002.

ABNT. **NBR 14724**: formatação de trabalhos acadêmicos. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Rio de Janeiro, 2011.

ABNT. **NBR 6023**: Informação e documentação: referências: elaboração. VERSÃO CORRIGIDA ATUALIZADA: ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Rio de Janeiro, 2002.

ABNT. **NBR 6028**: resumo: elaboração. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Rio de Janeiro, 2002.

BATHE, K.-J. (2008). **Finite Element Method**. Wiley Encyclopedia of Computer Science and Engineering. doi:10.1002/9780470050118.ecse159

BROWN, A. **Introduction to Structural Vibrations**. McGraw-Hill, 2018. Disponível em: <https://www.osti.gov/servlets/purl/1877530>. Acesso em 6 out. 2023

COMER J. R.; SHEPARD, M .J. **Chladni plates revisited** V.1 2004

GANDER J. M., KWOK F. **Chladni Figures and the Tacoma Bridge: Motivating PDE Eigenvalue Problems via vibrating plates**, 2012

GARCIA, L. **Uncertainty Analysis in Vibration Experimentation**. **International Journal of Mechanical Measurements**, v. 4, n. 2, 2018. Disponível em: https://www.jafmonline.net/article_1102_21653375283dac6109e0d277dbb97708.pdf. Acesso em 6 out. 2023

GIL, P. **Metodologia Científica em Ciências Sociais**. São Paulo: Cortez, 1998. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4613808/mod_resource/content/1/PEDRO_DE_MO_Metodologia_cientifica_em_cie.pdf. Acesso em 5 out. 2023

GRIFFIN, M. J. **Handbook of Human Vibration**. Academic Press, 1990. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/book/9780123030405/handbook-of-human-vibration>. Acesso em 6 out. 2023

GROOVER, M. P. **Fundamentals of Modern Manufacturing: Materials, Processes, and Systems**. Wiley, 7ª ed., 2020. Disponível em: <https://www.wiley.com/en-us/Fundamentals+of+Modern+Manufacturing:+Materials,+Processes,+and+Systems,+7th+Edition-p-9781119475217>. Acesso em 6 out. 2023

HAGERDORN, P., DASGUPTA, A. **Vibration and waves in continuous mechanical systems**. V.1, 2007

JOHNSON, L. **Mechanical Vibration Analysis**. Springer, 2020. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s12206-021-0303-z>. Acesso em 6 out. 2023

KENNETH H. H.; DONALD L. D.; DOUGLAS E. S.; TED G. B. **The finite element method for engineers**, v.4, 2001.

KRAUT, J. **Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity**. Wiley, 2ª ed., 2017. Disponível em: <https://www.amazon.com/Introduction-Structural-Aeroelasticity-Cambridge-Aerospace/dp/110761709X>. Acesso em 6 out. 2023

MARTINS, S. P. **Uncertainty Analysis in Vibration Experimentation**. **International Journal of Mechanical Measurements**, v. 3, n. 1, 2017. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2076-3417/12/3/972> Acesso em 6 out. 2023

Mayer, R. E. (2003). **The promise of multimedia learning: Using the same instructional design methods across different media**. **Learning and instruction**, 13(2), 125-139

OGATA, K. **Modern Control Engineering**. Prentice Hall, 5ª ed., 2010. Disponível em: http://docs.znu.ac.ir/members/pirmohamadi_ali/Control/Katsuhiko%20Ogata%20_%20Modern%20Control%20Engineering%205th%20Edition.pdf. Acesso em 6 out. 2023

PEREIRA, A. B.; SANTOS, C. D.; LIMA, M. I. **Experimental Validation of Vibration Simulations in Structural Dynamics**. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 18, n. 4, 2018. Disponível em: <https://bioagro.ufv.br/artigos-cientificos/>. Acesso em 6 out. 2023

RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. 6ª ed. Pearson, 2019. Disponível em: <https://www.amazon.com.br/Mechanical-Vibrations-6th-Singiresu-Rao/dp/013436130X>. Acesso em 6 out. 2023

SCHEFFER, C.; GIRDHAR, P. **Practical machinery vibration analysis and predictive maintenance**, V. 1, 2004

SENTEK. Sentek 2022. **Sobre funcionamento de Shakers mecânicos** em: <<https://www.sentekdynamics.com/introduction-to-sentek-dynamics-vibration-testing-systems>> Acesso em: 07 nov. 2023

SILVA, J. R.; TORRES, L. A.; OLIVEIRA, R. P. **Challenges in Reproducing Vibration Simulations in Experimental Tests**. **Journal of Mechanical Engineering and Vibration**, v. 5, n. 2, 2019. Disponível em: <https://portal.ifi.unicamp.br/biblioteca/producao-cientifica/134-portal/portugues/pos-graduacao/disciplinas-oferecidas>. Acesso em 7 out. 2023

SINGIRESU S. R. **The finite element method in engineering**, Butterworth-Heinemann, 2011

SOUZA, F. A. **Experimental Validation Techniques for Vibration Analysis**. Journal of Engineering and Technology, v. 8, n. 3, 2020. Disponível em: <https://ppgec.poli.usp.br/en/pesquisa-e-producao/artigos-cientificos/>. Acesso em 7 out. 2023

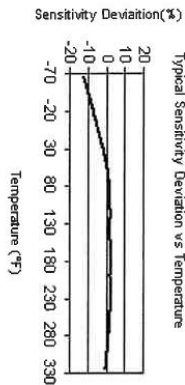
<https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/ressonancia-mecanica.htm> Acesso em 07 nov. 2023

VALDIERO,C., A.; BORTOLAIA, A., L. ; RASIA, A., L. **DESENVOLVIMENTO DE UMA BANCADA DIDÁTICA PARA ENSAIO DE PÓRTICOS COMO OBJETO EDUCACIONAL NA ENGENHARIA**, 2008 Disponível em: <https://www.abenge.org.br/cobenge/legado/arquivos/8/sexsoestec/art2117.pdf>

WEN,Y.,K. **METHODS OF RANDOM VIBRATION FOR INELASTIC STRUCTURES**, v.1, 1989

Apêndice 1 – Especificações no acelerômetro

Model Number 352C33	ICP® ACCELEROMETER	Revision: H ECN #: 28610
Performance Sensitivity(± 10 %) Measurement Range Frequency Range(± 5 %) Frequency Range(± 10 %) Resonant Frequency Broadband Resolution(1 to 10,000 Hz) Non-Linearity Transverse Sensitivity Environmental Overload Limit(Shock) Temperature Range(Operating) Temperature Response Base Strain Sensitivity Electrical Excitation Voltage Constant Current Excitation Output Impedance Output Bias Voltage Discharge Time Constant Settling Time(within 10% of bias) Spectral Noise(1 Hz) Spectral Noise(10 Hz) Spectral Noise(100 Hz) Spectral Noise(1 kHz) Physical Sensing Element Sensing Geometry Housing Material Sealing Size (Hex x Height) Weight Electrical Connector Electrical Connection Position Mounting Thread Mounting Torque		
ENGLISH 100 mV/g ± 50 g pk 0.5 to 10,000 Hz 0.3 to 15,000 Hz ≥ 50 kHz 0.0015 g rms ≤ 1 % ≤ 5 % ± 5000 g pk -55 to +200 °F See Graph 0.003 g/g 18 to 30 VDC 2 to 20 mA ≤ 200 ohm 7 to 12 VDC 1.0 to 2.5 sec <10 sec 39 µg/√Hz 11 µg/√Hz 3.4 µg/√Hz 1.4 µg/√Hz Ceramic Shear Titanium Hermetic 0.44 in x 0.62 in 0.20 oz 10-32 Coaxial Jack Side 10-32 Female 10 to 20 in-lb		
SI 10.2 mV/(m/s²) ± 50 g pk 0.5 to 10,000 Hz 0.3 to 15,000 Hz ≥ 50 kHz 0.0015 m/s² rms ≤ 1 % ≤ 5 % ± 49,000 m/s² pk -54 to +93 °C See Graph 0.029 (m/s²)/g 18 to 30 VDC 2 to 20 mA ≤ 200 ohm 7 to 12 VDC 1.0 to 2.5 sec <10 sec 380 (µm/s²)/√Hz 110 (µm/s²)/√Hz 33 (µm/s²)/√Hz 14 (µm/s²)/√Hz Ceramic Shear Titanium Hermetic 11.2 mm x 15.7 mm 5.8 gm 10-32 Coaxial Jack Side 10-32 Female 113 to 226 N-cm		
OPTIONAL VERSIONS Optional versions have identical specifications and accessories as listed for the standard model except where noted below. More than one option may be used. HT - High Temperature , extends normal operation temperatures Frequency Range(5 %) Frequency Range(10 %) Broadband Resolution(1 to 10,000 Hz) Excitation Voltage Discharge Time Constant Spectral Noise(1 Hz) Spectral Noise(10 Hz) Spectral Noise(100 Hz) Spectral Noise(1 kHz) Output Bias Voltage Supplied Accessory - Model ACS-88 Single Axis Amplitude Response Calibration from 5 Hz to upper 5% plotted on dB scale replaces Model ACS-1 J - Ground Isolated Frequency Range(5 %) Frequency Range(10 %) Resonant Frequency Electrical Isolation(Base) Size - Hex x Height Weight T - TEDS Capable of Digital Memory and Communication Compliant with IEEE P1451.4 T1A - TEDS LMS International - Free Format T1B - TEDS LMS International - Automotive Format T1C - TEDS LMS International - Aeronautical Format T1D - TEDS Capable of Digital Memory and Communication Compliant with IEEE 1451.4 Temperature Range(Memory Access) Excitation Voltage Output Bias Voltage W - Water Resistant Cable Electrical Connector Electrical Connection Position Sealed Integral Cable Sealed Integral Cable		
NOTES: (1) Typical. (2) JSDC option adds 1.0 VDC to bias voltage. (3) 200°F to 325°F. (4) Zero-based, least-squares, straight line method. (5) Transverse sensitivity is typically ≤ 3%. (6) See PCB Declaration of Conformance PS023 for details.		
SUPPLIED ACCESSORIES: Model 080A Adhesive Mounting Base (1) Model 080A109 Petro Wax (1) Model 081B05 Mounting Stud (10-32 to 10-32) (1) Model ACS-1 NIST traceable frequency response (10 Hz to upper 5% point). (1) Model M081B05 Mounting Stud 10-32 to M6 X 0.75 (1)		
PCB PIEZOTRONICS VIBRATION DIVISION 3425 Walden Avenue, Danbury, CT 06810 Phone: 716-684-0001 Fax: 716-685-3886 E-Mail: vibration@pcb.com		



All specifications are at room temperature unless otherwise specified.
 In the interest of constant product improvement, we reserve the right to change specifications without notice.
 ICP® is a registered trademark of PCB Group, Inc.

Apêndice 2 – Script para Cálculo de frequências naturais e demonstração gráfica de modo de placas

```

clear all
clc
close all

Finm=0;
t=1;

n=1;
m=1;
v = 0.3;
E = 200e+09; % N/mm^2
h = 0.001; % mm
D = (E*h^3)/(12*(1-v^2));
ro = 7850;
a = 0.500; % mm
b = 0.500; % mm

wnm = pi^2*(m^2/a^2 + n^2/b^2)*sqrt(D/(ro*h));
wnm
fnm = wnm/(2*pi)
x=0:0.010:0.500;
y=0:0.010:0.500;
Anm=0.1;
for i=1:length(x)
    for j=1:length(y)
        W = Anm*sin(n*pi*x(1,i)/a)*sin(m*pi*y(1,j)/b)*sin(wnm*t+Finm);
        plot3(x(1,i),y(1,j),W,'.k');
        hold on
    end
end
end
grid on
xlabel('eixo x')
ylabel('eixo y')
zlabel('eixo z')

```

Apêndice 3 – Script para Cálculo de frequências naturais e demonstração gráfica de modo de vigas

```

clear all
clc
close all

% Valores de Beta para a viga
B1 = 4.56;
B2 = 11.42;
B3 = 19.11188;
Bn = B3;

% Define o intervalo de x para a plotagem
l = 0.411;
x = 0:0.001:l;

% Calculo de Wn(x) para cada valor de x
x1=x;
x=x1;
Wn1 = -((sinh(Bn*x) - sin(Bn*x)) - ...
        ((sinh(Bn*l) + sin(Bn*l))./(cosh(Bn*l) + cos(Bn*l))).*...
        (cosh(Bn*x) - cos(Bn*x)));

figure(1)
plot(x1,Wn1);
xlabel('x');
ylabel('Wn1(x)');
grid on;

max_Wn1 = max(abs(Wn1))
Wn2 = Wn1/max_Wn1;
x2 = x/l;
figure(2)
plot(x2,Wn2);
xlabel('x/l');
ylabel('Wn2(x)');
grid on;

```