

UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL
ÁREA DO CONHECIMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E ENGENHARIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL

PAULA HOFFMANN

CÁLCULO DE DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS:
UMA VIAGEM ASTRONÔMICA

CAXIAS DO SUL
SETEMBRO
2025

UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

CÁLCULO DE DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS:
UMA VIAGEM ASTRONÔMICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Caxias do Sul, sob a orientação do Professor Dr. Odilon Giovannini Júnior, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

CAXIAS DO SUL

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Universidade de Caxias do Sul
Sistema de Bibliotecas UCS - Processamento Técnico

H711c Hoffmann, Paula

Cálculo de distâncias inacessíveis [recurso eletrônico] : uma viagem astronômica / Paula Hoffmann. – 2025.

Dados eletrônicos.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de Caxias do Sul, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, 2025.

Orientação: Odilon Giovannini Júnior.

Modo de acesso: World Wide Web

Disponível em: <https://repositorio.ucs.br>

1. Trigonometria. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Astronomia. 4. Aprendizagem. 5. Vigotsky, Lev Semenovich, 1896-1934. I. Giovannini Júnior, Odilon, orient. II. Título.

CDU 2. ed.: 514.116

Catalogação na fonte elaborada pela(o) bibliotecária(o)
Carolina Machado Quadros - CRB 10/2236

PAULA HOFFMANN

**CÁLCULO DE DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS:
UMA VIAGEM ASTRONÔMICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Caxias do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovado em 17/09/2025

Banca Examinadora

Prof. Dr. Francisco Catelli
Universidade de Caxias do Sul – UCS

Prof. Dr. Alex Fabiano Murillo da Costa
Universidade Federal de Santa Maria

AGRADECIMENTOS

O que me trouxe até aqui foi, curiosamente, aquilo que mais me inquietava: a desmotivação dos estudantes. Foi ao ver olhares apagados diante da matemática que eu entendi que ensinar não poderia - nem deveria - ser apenas transmitir conteúdos. Eu precisava encontrar um caminho onde ensinar matemática fosse também despertar, brincar, fascinar. Essa dissertação nasceu do desejo profundo de mostrar que aprender pode ser interessante, divertido e cheio de sentido. Que a educação, da forma como tem sido, não basta mais.

A caminhada foi longa. Foram anos em que a vida aconteceu enquanto o mestrado insistia em ficar à espreita, me esperando. E eu precisei de gente pra me lembrar que valia a pena continuar. Por isso, meu amor e minha gratidão à minha família, que foi chão em todos os momentos: meu pai Valcir, com o brilho nos olhos ao ver a profissional e pessoa que me tornei, minha mãe Palmira, por ser a primeira a acreditar sempre no meu potencial e nunca desistir de me incentivar, pessoal e profissionalmente, meu companheiro de vida Jônatan, por entender minha ausência, valorizar quem eu sou e por sempre me lembrar que eu posso ser melhor, e ao meu filho Cauê, que mesmo tão pequeno, sem saber, foi meu respiro e minha esperança nos dias mais difíceis.

Aos meus irmãos Diego e Luciano, que sempre foram minha inspiração. Obrigada por serem modelo de persistência e determinação. Em muitos momentos, foi olhando para a força de vocês que eu reencontrei a minha.

Ao meu orientador, professor dr. Odilon Giovannini, minha mais profunda admiração e carinho. Obrigada por nunca ter desistido de mim nesses quase dez anos. Pela paciência, pelo incentivo e, acima de tudo, pela humanidade. Mais do que um orientador, foste um amigo.

Aos meus alunos - esses que me acompanham há mais de 16 anos - obrigada por me ensinarem diariamente o que significa ser professora. Foi por vocês que eu segui. Vocês me deram vida em sala de aula e me mostraram que para ser uma boa professora, é preciso ir além.

Finalizo este agradecimento reconhecendo que este mestrado me transformou. Não só academicamente, mas como ser humano. Hoje eu compreendo que educar é também acolher, é provocar perguntas, é construir pontes. E por mais que o caminho tenha sido cheio de curvas, foi ele que me trouxe até aqui.

RESUMO

Esta dissertação investigou de que forma uma unidade de aprendizagem contextualizada pela Astronomia pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento trigonométrico de estudantes do Ensino Médio, com foco no cálculo de distâncias inacessíveis. A proposta foi fundamentada na Teoria Sociointeracionista de Vigotski e estruturada a partir dos Três Momentos Pedagógicos, combinando história, prática, simulação e experimentação. Foram analisados três objetivos: (1) identificar se os estudantes reconhecem os elementos necessários para o cálculo de distâncias inacessíveis; (2) avaliar a aplicação das razões trigonométricas; e (3) investigar a compreensão do conceito de paralaxe estelar. Os dados foram coletados por meio de instrumentos diagnósticos, registros de atividades práticas e questionário final. Os resultados revelaram transições significativas nos níveis de significação dos estudantes, com predominância da Zona de Desenvolvimento Real ao final da Unidade de Aprendizagem. Como produto da pesquisa, foram elaborados dois cadernos didáticos -um voltado ao aluno e outro ao professor -com orientações, QR Codes e sugestões de mediação, com o intuito de tornar a proposta replicável e viável para diferentes realidades escolares. A experiência evidenciou que a abordagem interdisciplinar, prática e histórica promove maior engajamento, significação e consolidação do conteúdo matemático.

Palavras-chave: Trigonometria; Astronomia; Ensino de Matemática; Vigotski; Paralaxe estelar.

ABSTRACT

This dissertation investigated how a Learning Unit contextualized through Astronomy can contribute to the development of trigonometric thinking in high school students, focusing on the calculation of inaccessible distances. The proposal was grounded in Vigotski's socio-interactionist theory and structured based on the Three Pedagogical Moments, combining history, practice, simulation, and experimentation. Three objectives were analyzed: (1) to identify whether students recognize the elements necessary for calculating inaccessible distances; (2) to evaluate the application of trigonometric ratios; and (3) to investigate students' understanding of the parallax concept. Data were collected through diagnostic assessments, practical activity records, and a final questionnaire. The results revealed significant transitions in students' levels of conceptual understanding, with most reaching the Zone of Actual Development by the end of the Learning Unit. As an outcome of the research, two didactic notebooks were developed—one for students and another for teachers—containing step-by-step guidance, QR codes, and mediation suggestions to facilitate replication in diverse school contexts. The experience showed that an interdisciplinary, practical, and historically grounded approach enhances engagement, meaning-making, and content retention in mathematics learning.

Keywords: Trigonometry; Astronomy; Mathematics Education; Vigotski; Stellar Parallax.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 . Circunferência com pedaços de barbante do tamanho do seu raio sobrepostos em seu comprimento.	28
Figura 2 . Construção feita por um estudante dos três triângulos de ângulos 20° , 70° e 90°	29
Figura 3 . Tabela construída por um estudante com as razões entre cateto oposto e hipotenusa, cateto adjacente e hipotenusa e, cateto oposto e cateto adjacente dos ângulos de 20° , 70° e 90°	29
Figura 4 . Questionamentos respondidos por um dos estudantes acerca das razões trigonométricas calculadas.	30
Figura 5 . Relação entre ângulos complementares, entre o tamanho do lado e o valor do ângulo oposto a ele.	30
Figura 6 . Estudantes medindo o ângulo entre a sua visão e o topo do objeto a ser calculada a altura – aula 26.	31
Figura 7 . Estudantes encontrando a distância do observador até o objeto a ser determinada a altura – aula 26.	32
Figura 8 . Tabela de registros realizados pelos estudantes da atividade com o Teodolito – aulas 27 e 28.	33
Figura 9 . Estudantes manipulando o Software Stellarium – aulas 30 e 31.	34
Figura 10 . Dispositivo utilizado para determinar o ângulo de paralaxe composto por um transferidor, um arame móvel para determinar a abertura do ângulo e um pino referência para iniciar a abertura do ângulo.	35
Figura 11 . Dispositivo para determinar o ângulo de paralaxe com o arame deslocado simulando a marcação de um ângulo.	35
Figura 12 . Dispositivo para determinar o ângulo de paralaxe com o arame deslocado simulando a marcação de um ângulo.	36
Figura 13 . Estudante determinando o ângulo de paralaxe com a orientação da professora e a observação dos demais estudantes.	36
Figura 14 . Estudante representando as estrelas de fundo no quadro.	37
Figura 15 . Estudante auxiliando na determinação do ângulo de paralaxe e no cálculo da distância da estrela central.	37

Figura 16 . Marcação na classe da posição da Terra seis meses antes e seis meses depois. Representação vista de cima da classe (mesa).	38
Figura 17 . Localização das EF 1 e 2 através da EC.	39
Figura 18 . Desenho que simula a situação do cálculo da distância da EC até a Terra ou o Sol.	40
Figura 19 . Desenho que ilustra como encontrar a distância d até EC.	40
Figura 20 . Estudantes sendo orientados pelos colegas de grupo para posicionar as vassouras que representam as EF1 e EF2.	41
Figura 21 . Estudantes orientado os colegas de grupo para a localização das EF1 e EF2 através da observação com o instrumento para encontrar o ângulo de paralaxe.	41
Figura 22 . Tabela de registros para a atividade realizada no ginásio da escola.	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Organização da UA, seus objetivos e duração.	27
Tabela 2 - Níveis de desenvolvimento conceitual dos estudantes no Objetivo 1: identificação dos elementos necessários ao cálculo de distâncias inacessíveis.	44
Tabela 3 - Níveis de desenvolvimento conceitual dos estudantes no Objetivo 2: aplicação das razões trigonométricas.	47
Tabela 4 - Níveis de desenvolvimento conceitual dos estudantes no Objetivo 3: cálculo do ângulo de paralaxe e distâncias estelares.	50
Tabela 5 - Análise comparativa dos níveis de desenvolvimento conceitual por estudante nos três objetivos e no resultado final.	53
Tabela 6 - Síntese geral dos resultados por objetivo: ZDR, ZDP e transições $NPN \rightarrow PN$.53	

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

CG - Conceitualização em Grupo

CIF - Conceitualização Individual Final

CPE - Conceitualização Prévia do Estudante

EC - Estrela de Centro

EF 1 - Estrela de Fundo 1

EF 2 - Estrela de Fundo 2

MEC - Ministério da Educação

NPN - Não Percebe Necessidade

NRA - Não Realizou a Atividade

OBA - Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

OCEM - Orientações Curriculares para o Ensino Médio

PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

PN - Percebe Necessidade

POS 1 - Posição de Observação 1

POS 2 - Posição de Observação 2

QR Code - Quick Response Code

UA - Unidade de Aprendizagem / Unidade Astronômica

UCS - Universidade de Caxias do Sul

ZDP - Zona de Desenvolvimento Proximal

ZDR - Zona de Desenvolvimento Real

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	11
2. REFERENCIAL TEÓRICO	17
2.1. Teoria de Vigotski.....	17
2.2. Os Três Momentos Pedagógicos	20
2.3. Unidade de Aprendizagem e Astronomia	21
3. A VIAGEM	24
3.1. Caracterização da pesquisa	24
3.2. Contexto da pesquisa	25
3.3. Instrumentos de coleta de dados	25
3.4. Desenvolvimento da pesquisa	26
<i>3.5.1. Guia turístico – um passeio pela história da trigonometria – aulas 1 a 11.</i>	<i>27</i>
<i>3.5.2. Triângulos semelhantes e as razões trigonométricas – aulas 12 a 25.</i>	<i>28</i>
<i>3.5.3. O teodolito e as razões trigonométricas – aulas 26 a 29.</i>	<i>31</i>
<i>3.5.4. A que distância estamos? – aulas 30 a 36.</i>	<i>33</i>
4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	43
4.1. Objetivo 1 – Identificação dos instrumentos necessários para calcular distâncias inaccessíveis	43
4.2. Objetivo 2 – Aplicação das razões trigonométricas	46
4.3. Objetivo 3 - Cálculo do ângulo de paralaxe e das distâncias estelares	49
4.4 Análise geral dos três objetivos	52
5. PRODUTO EDUCACIONAL	55
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	60
8. APÊNDICE A – GUIA TURÍSTICO	63
9. APÊNDICE B – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA - GUIA TURÍSTICO	65
10. APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO FINAL	67
11. APÊNDICE D – CADERNO DO PROFESSOR	69
12. APÊNDICE E – CADERNO DO ALUNO	86

1. INTRODUÇÃO

Desde os primórdios da humanidade tentamos compreender o mundo que nos cerca. No início, nossos conhecimentos iam até onde os olhos podiam ver, como por exemplo, o nascer e o pôr do Sol, a sucessão dos dias e noites, os eclipses, a disposição e movimento das estrelas e constelações do céu noturno, entre outros fenômenos do cotidiano. A observação sistemática do céu é praticada há muito tempo, um dos calendários mais antigos, descoberto na atual Escócia, data aproximadamente do ano 8.000 a. C. (Gaffney et al, 2013).

Dentre fatos, mitos e superstições fomos constituindo, testando e construindo nossos conhecimentos. Para que pudéssemos compreender o que havia à nossa volta desenvolvemos ferramentas ao longo do tempo que nos possibilitaram novos olhares acerca do Universo. A Astronomia, portanto, é a ciência que, baseada na observação, estuda corpos celestes como estrelas, planetas, cometas, galáxias e que busca explicar como o Universo se formou e como será sua evolução. Nesse sentido, Fróes (2014) afirma que:

É da natureza humana não somente observar, mas também explicar, tudo aquilo que a rodeia. Os antigos utilizaram os elementos de que dispunham em sua época para criar complexos modelos para o Universo, que formam os mitos e lendas de que temos conhecimento nos dias de hoje. Eles estavam fundamentados nas religiões e na filosofia da época. Como todo o bom modelo, ele permitia extrapolações, e o curso das estrelas foi também utilizado para explicar o comportamento e o destino dos homens, com profundas consequências políticas e sociais. (p. 3504-3)

Estamos na era da globalização e, como consequência, os conhecimentos extrapolam o que nossos olhos podem ver; dispomos de tanta tecnologia e novos conhecimentos que se torna difícil acompanhar os avanços científicos. Porém, apesar de todo esse avanço na ciência, continuamos, ainda, na incessante busca pela explicação e compreensão de muitos assuntos do nosso mundo, e não há quem fique inerte frente a questões como: de onde viemos, para onde vamos, e se estamos sós no Universo.

Neste cenário de pleno acesso à informação, encontra-se a escola que tem como função, entre outras, o desenvolvimento integral do estudante e proporcionar a troca de saberes, a socialização e o confronto do conhecimento (Brasil, 2013). Porém, já há algum tempo, a escola deixa de ser a única fonte de informação disponível aos estudantes e passa a ser mais um local onde estas informações são compartilhadas, uma vez que esta (a informação) está acessível a todos através dos meios de comunicação facilmente acessados por celulares, tablets, notebooks, etc. Por conseguinte, a escola passa a ter um papel diferente daquele de outrora (Brasil, 2018).

Para Figueiredo (1995, p. 1), o papel da escola atual é o de “dar estrutura a um mundo de diversidade, fornecer os contextos e saberes para desenvolver uma autonomia, e fornecer as respostas humanas compensatórias”. Falar da escola, de uma maneira geral, não é a temática nesta pesquisa, pois o enfoque está no ensino da matemática na Educação Básica. Contudo, o ensino precisa estar atento às demandas da sociedade contemporânea.

Nesse sentido, promover para a autonomia dos estudantes e a busca pelas respostas aos questionamentos da sociedade também são objetivos nas aulas de matemática. Por este motivo, entende-se que é necessário contextualizar as situações de aprendizagem, principalmente através de assuntos que façam parte desta gama de questionamentos e que despertem a curiosidade dos estudantes.

A contextualização, segundo os documentos oficiais mais antigos como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (Brasil, 1999) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (Brasil, 2006) e mais recente com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), pode ser compreendida como um recurso didático para problematizar a realidade vivida pelos estudantes e tem sido incorporada de diferentes maneiras e com diferentes funções, sendo, em grande parte das vezes, utilizada como forma de exemplificação de conceitos ou fenômenos físicos, como espaço de aplicação do conhecimento já desenvolvido ou como elemento de motivação. A contextualização, por exemplo, também pode ser promovida pelo uso de experimentos como estratégia para abordar diversos temas que fazem parte da vida, da escola e do cotidiano dos estudantes.

De encontro a isto, a presente pesquisa propôs uma sequência didática para o ensino de trigonometria para alunos do segundo ano do Ensino Médio através de um problema contextualizado pela Astronomia, ou seja, partir da proposição de problemas astronômicos no intuito de dar sentido ao estudo da Matemática. Ressaltamos que não se trata de um simples contextualizar, nem de trabalhar conteúdos pela necessidade de trabalhá-los, mas de dar significado ao estudo de conceitos da trigonometria uma vez que estes que vem sendo tradicionalmente esquecidos. Com relação a isso, os PCNs fazem a seguinte reflexão:

Tradicionalmente a prática mais frequente no ensino da Matemática era aquela em que o professor apresentava o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstrações de propriedades, seguidas de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupunha que o aluno aprendia pela reprodução. Considerava-se que uma reprodução correta era evidência de que ocorrera uma aprendizagem. Essa prática de ensino mostrou-se ineficaz, pois a reprodução correta poderia ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir, mas não aprendeu o conteúdo. É relativamente recente, na história da Didática, a atenção ao fato de que o aluno é agente da construção do seu conhecimento, pelas conexões que estabelece

com o seu conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas. (Brasil, 1998, p.30)

Trata-se, portanto, de compreender esta Ciência, no caso a Matemática, não apenas como axiomas e teoremas prontos e sem sentido, mas de mostrar o quão bela é ao lado das ciências que se desenvolveram historicamente junto a ela.

Além disso, encontra-se na Astronomia um grande potencial motivacional, uma vez que seu estudo desperta a curiosidade e a motivação de estudantes e pessoas em geral, potencializando a elaboração e aplicação de práticas por ela contextualizadas (Langhi e Nardi, 2012). Ademais, a Astronomia apresenta-se como um estímulo para práticas interdisciplinares pela facilidade de sua abordagem como suporte para aproximar-se dos conteúdos que são propostos, uma vez que não é difícil perceber o fascínio humano por respostas às questões do Universo, conforme afirma Morin:

A maioria das crianças que frequentam a escola [...] elas se apaixonam de bom grado por conhecimentos tão abstratos quanto a astrofísica e até mesmo pela física quântica ou ainda pelas novas ciências da Terra ou ciências biológicas. [...] Creio que as coisas não se passavam assim outrora, quando numa escola austera, quase que única dispensadora de conhecimento, as crianças entediavam-se com a rigidez da cosmologia ou com o ensino da matemática, porque se esqueciam de dizer-lhes que tais ciências não passam, em grande parte, de um maravilhoso instrumento para simplificar o conhecimento das leis naturais. (Morin, 2013, p. 34)

Para ensinar matemática como uma linguagem para representar leis naturais é necessário rever a forma com que é ensinada nas escolas e isso vai além de uma discussão de conteúdo, conforme apontam Prediger, Berwanger e Mörs (2013):

A mudança no ensino da Matemática escolar não pode ser apenas uma mudança nos conteúdos a serem ensinados. Não basta acrescentar esse ou aquele tópico, retirar essa ou aquela definição. O que estamos buscando é uma mudança na própria forma de apresentar o conhecimento matemático ou, mais profundamente, uma mudança na visão que passamos para os estudantes acerca do saber matemático. Tão importante quanto uma metodologia de ensino apropriada, é a visão da Matemática como algo composto de áreas que possuem interseções e conexões que nos permitem passear por diferentes representações de uma mesma ideia. Não basta conhecer essas áreas, é preciso saber as vantagens de cada uma e o momento correto de utilizá-las. (p. 23)

Para tal mudança acontecer, a contextualização por si só pode vir a ser insuficiente para inserir os estudantes no tema que será abordado. Por este motivo, entende-se a importância de abordar a perspectiva histórica acerca dos temas trabalhados, porém, não tratando o ensino de conteúdos estruturantes como “caixas de conhecimento”, separadas da

história que os originaram, pois, assim como Brolezzi (1991, p. 1) destaca, “não se trata apenas de ilustrar as aulas de Matemática com histórias que divirtam como biografias de matemáticos famosos”, mas sim, se utilizar da história para uma melhor compreensão do conteúdo, vislumbrando através deste estudo os problemas que deram origem ao seu estudo (Morey e Gomes, 2014).

Além da perspectiva histórica, as OCEM (Brasil, 2006) enfatizam a importância da significação dos objetos de aprendizagem a serem estudados na busca pela relação entre o que se pretende ensinar e as explicações e concepções que os estudantes já têm, sob a visão de que a natureza faz parte tanto do mundo cotidiano como do mundo científico, contribuindo para a análise crítica da realidade do estudante e sendo a base para melhor representá-la e compreendê-la. Uma vez que essa representação da realidade não é disciplinar, as OCEM (Brasil, 2006) recomendam que ela não se insira em uma única disciplina, sendo necessário, portanto, uma abordagem sob uma perspectiva interdisciplinar.

Percebe-se, assim, que discussões como esta não são novidades e que a prática dos professores já vem proporcionando diferentes significados aos conceitos matemáticos. Um dos tópicos do currículo da matemática que já vem sendo abordado, com diferentes perspectivas, é o de ensino de trigonometria através da utilização de softwares como o Geogebra (Braz, Castro e Oliveira, 2019; Costa, 2017; Lopes, 2013, 2018; Maia e Pereira, 2015; Pedroso, 2012), e de materiais educativos como o teodolito ou astrolábio (Silva, 2013; Costa, 2009; Zimmer Klein e Cabral Da Costa, 2011).

Não há prática educacional que não se relacione a uma teoria de conhecimento (Moreira, 2011; Darsie, 1999). Nessa perspectiva, a pesquisa aqui relatada não é diferente e, por isso, tem por princípio que a personalidade e a aprendizagem só se desenvolvem na relação que se estabelece entre os homens e o mundo (Franco, 1989). Por este motivo, nessa investigação utiliza-se como referencial teórico a Teoria Sociointeracionista de Lev Vigotski, psicólogo russo, que viveu entre os anos de 1896 e 1934 e produziu trabalhos sobre o desenvolvimento psicológico e a aprendizagem (Rego, 2002). Em suas obras, Vigotski retrata o papel da escola como sendo a distinção entre conceitos cotidianos e científicos, a relação entre o que o estudante pode realizar de maneira autônoma e o que necessita do acompanhamento de um adulto para realizar, bem como, a necessidade da interação do estudante com o objeto a ser estudado e de seu interesse sobre o assunto (Friedrich, 2012).

Com o intuito de tornar o ensino e a aprendizagem significativos, propôs-se o desenvolvimento e a aplicação de uma Unidade de Aprendizagem (UA) contextualizada pela

Astronomia, que proporcionasse aos alunos que experimentassem, de forma prática e na perspectiva interdisciplinar, conceitos como razões trigonométricas e cálculo de distâncias inacessíveis, inclusive com a simulação do cálculo da distância de estrelas por meio do conceito de paralaxe.

A UA, portanto, contempla as OCEM (Brasil, 2006, p.74) que, com relação ao estudo da trigonometria, enfatizam que “problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações da trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola”, bem como as sugeridas pelos PCN+ (Brasil, 2002), que reforçam a importância do estudo da trigonometria na resolução de problemas:

Apesar de sua importância, tradicionalmente a trigonometria é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. [...]. (1998, p.122)

A elaboração da UA foi baseada na Teoria Sociointeracionista de Vigotski que valoriza a mediação, o papel da linguagem, a interação social e a contextualização no processo de construção do conhecimento (Vigotski, 2009). Além disso, foi estruturada nos Três Momentos Pedagógicos (problematização, organização e aplicação do conhecimento), como estratégia para conduzir os processos de ensino e aprendizagem (Delizoicov, Angotti e Pernambuco, 2002),

A escolha do tema “paralaxe estelar” como aplicação dos conhecimentos na etapa aplicação do conhecimento se deu pelo fato de que a determinação do ângulo de paralaxe estelar e do cálculo da distância de estrelas foi um dos problemas astronômicos que desencadearam os estudos de trigonometria.

Assim, a pesquisa relatada nessa dissertação foi realizada em uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual do Município de Caxias do Sul, buscando responder ao seguinte problema de pesquisa: ***Uma unidade de aprendizagem contextualizada pela Astronomia pode contribuir na construção do pensamento trigonométrico no que diz respeito ao cálculo de distâncias inacessíveis?***

Para isso, foram definidos os seguintes **objetivos específicos**:

1. Elaborar uma Unidade de Aprendizagem (UA) voltada ao ensino de trigonometria contextualizada pela Astronomia, fundamentada na Teoria Teoria Sociointeracionista de Vigotski e estruturada nos Três Momentos Pedagógicos;
2. Aplicar a Unidade de Aprendizagem em uma turma do segundo ano do Ensino Médio;
3. Avaliar os resultados de aprendizagem dos estudantes em relação às razões trigonométricas e na aplicação no cálculo das distâncias de estrelas.
4. Gerar, como produto educacional, um guia didático para o ensino de trigonometria contextualizado pela Astronomia.

Além da pesquisa aplicada, elaborou-se um produto educacional composto por dois cadernos, um voltado ao aluno e outro ao professor, que permite a replicação da sequência mesmo por professores sem domínio prévio em Astronomia ou trigonometria.

O Caderno do Professor apresenta o passo a passo estruturado, vídeos explicativos por QR Code, sugestões de mediação, os objetivos vinculados à BNCC, fichas de acompanhamento e materiais complementares. O Caderno do Professor foi elaborado com o cuidado de permitir que qualquer docente possa aplicar as atividades, mesmo que não tenha familiaridade prévia com os conteúdos astronômicos envolvidos.

O Caderno do Aluno apresenta as atividades didáticas com uma organização em quatro blocos, seguindo a estrutura da Unidade de Aprendizagem: (1) Guia Turístico, que faz um passeio histórico e experimental pela evolução da Trigonometria a partir da Astronomia antiga, conhecendo personagens como Pitágoras, Ptolomeu, Copérnico e Galileu, enquanto realizam atividades práticas de construção, investigação e descoberta; (2) Triângulos Semelhantes e Razões Trigonômicas; (3) O Teodolito e as Razões Trigonômicas; e (4) A que distância estamos?, com foco no conceito de paralaxe estelar e o uso do software Stellarium. Todas as atividades foram pensadas para promover o protagonismo do estudante, com espaço para anotações, construções, reflexões e síntese do conhecimento.

Ao longo dos capítulos seguintes, serão apresentados os fundamentos teóricos, a descrição detalhada da metodologia aplicada, as análises dos dados obtidos e, por fim, o Produto Educacional gerado a partir da pesquisa realizada.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Para aporte teórico desta pesquisa optou-se por basear a construção da UA na Teoria Sociointeracionista de Vigotski que aborda conceitos como interação social e zona de desenvolvimento proximal. Assim, neste capítulo, a teoria de Vigotski é aprofundada, bem como, a dinâmica didático-pedagógica proporcionada pelos Três Momentos Pedagógicos utilizada na elaboração da UA proposta. Em seguida, complementa-se com a discussão acerca do conceito de unidade de aprendizagem e o capítulo é finalizado com a discussão do cálculo de distâncias inacessíveis na Astronomia.

2.1. Teoria de Vigotski

Lev Semenovich Vygotsky (também escrito como Vigotski) nasceu em 1896 na Bielorrússia. Vygotsky dedicou seus estudos à psicologia evolutiva, à educação e à psicopatologia, oferecendo inúmeras contribuições para a compreensão da aprendizagem em sua relação com a linguagem e o desenvolvimento humano. Ainda que não apresente uma metodologia fechada para o trabalho docente, aponta caminhos sobre como a linguagem e o pensamento se articulam no processo de formação dos conceitos, além de destacar a importância de identificar a zona de desenvolvimento proximal dos estudantes (Vigotski, 2001; Oliveira, 1997).

Vigotski fundamentou sua pesquisa sobre o *processo de desenvolvimento do pensamento* na abordagem *dialético-materialista*¹, segundo o qual as mudanças históricas da sociedade e da vida material influenciam nas mudanças da natureza humana, ou seja, da consciência e do pensamento dos homens, com sua teoria teve a pretensão de explicar as funções psicológicas superiores em termos aceitáveis para a ciência natural (Palangana, 2015).

Sua teoria veio em contraponto às teorias que consideram o desenvolvimento cognitivo refém da maturação, pois, segundo ele, as abordagens maturacionais supervalorizam os processos intraindividuais e minimizam o impacto do ambiente social. Para Vigotski as funções complexas do pensamento são intimamente influenciadas pelas trocas sociais, e é a partir da linguagem que esta troca acontece. Para o autor, a interação com o ambiente pode ser de natureza física ou simbólica (Palangana, 2015). Ainda com relação à construção do pensamento humano, Delari (2013) destaca:

¹ Método elaborado a partir do paralelo entre as concepções naturalista e dialética (Engels, 1979)

As formas de pensamento implicam procedimentos que não nascem com cada ser humano, em suas estruturas neuro-funcionais elementares, mas são criadas em relações que se dão para além das fronteiras de cada cérebro (individualmente considerado). Em relações das quais nos apropriamos na mesma medida em que nelas vamos nos posicionando, de corpo inteiro e em contiguidade e confronto com outros corpos. Inscrevemo-nos em relações que o próprio humano cria e recria culturalmente, na fala, na escrita, na arquitetura, na física, na matemática, no mundo do trabalho e das artes, na filosofia, na política, nas religiões, em diferentes instituições sociais [...]. (p.153)

Sendo assim, a base da construção do pensamento humano é construída através da troca, da relação social e da palavra. Só há evolução através do confronto de ideias, as quais modificam a complexidade do pensamento. A troca se utiliza de instrumentos pelos quais a atividade humana controla externamente a natureza ou, através de signos, os quais controlam a atividade interna do indivíduo. A troca natureza e homem ocorre de forma que ao alterar a natureza, o homem altera a si mesmo, uma vez que ao aprender a modificar a natureza, a inteligência humana foi crescendo. (Palangana, 2015, p. 104).

Cada troca dá origem a novos conceitos. Cada conceito é formado quando diferentes signos foram abstraídos e submetidos a uma nova síntese, sendo esta a forma fundamental do pensamento. O pensamento e a fala, não são de natureza interligada, podendo um existir sem o outro, ou seja:

Essa discordância [entre pensamento e fala] se mantém não apenas um adolescente, mas também no pensamento do adulto, às vezes, mesmo no pensamento desenvolvido ao mais alto ponto. [...] O adolescente forma um conceito, emprega-o corretamente em uma situação concreta, mas, assim que se trata de definir verbalmente esse conceito, seu pensamento se choca então, imediatamente, a extremas dificuldades e a definição que ele dá é muito mais estreita que o emprego vivo que ele faz dele. Vemos aí a confirmação direta de que os conceitos não resultam simplesmente de uma elaboração lógica de tais ou tais elementos da experiência, que eles não são os produtos da reflexão do adolescente, mas que eles aparecem nele por outro caminho e só se tornam conscientes e lógicos muito mais tarde. (Friedrich 2012, p. 97)

Vigotski trata este “outro caminho” como sendo o do ensino de conceitos científicos que, segundo o autor, são a principal tarefa da escola, distinguindo-os dos conceitos cotidianos. Ou seja, os conceitos cotidianos são aqueles apreendidos pela criança durante sua relação com a natureza e a sociedade, cujo nível de abstração é pouco elevado e, os conceitos científicos são generalizações que não são imediatas e que se formam através de outros conceitos que podem ser de natureza cotidiana, sendo nesta interdependência que a aprendizagem escolar deve se fundar (Friedrich, 2012). Ainda com relação ao papel da escola, Vigotski (2009) enfatiza que:

O curso do desenvolvimento do conceito científico nas ciências sociais transcorre sob as condições do processo educacional, que constitui uma forma original de colaboração sistemática entre o pedagogo e a criança, colaboração essa em cujo processo ocorre o amadurecimento das funções psicológicas superiores da criança, com o auxílio e a participação do adulto. No campo do nosso interesse, isso se manifesta na sempre crescente relatividade do pensamento causal e no amadurecimento de um determinado nível de arbitrariedade do pensamento científico, nível esse criado pelas condições de ensino. (p. 244)

Por conseguinte, o autor afirma que a construção de conceitos é mais do que a soma de vínculos associativos formados pela memória, sendo um ato real e complexo de pensamento que não pode ser aprendido através da memorização e que necessita de um desenvolvimento mental mais elevado (Vigotsky, 2009). O momento de maior significação para as funções cognitivas superiores é aquele em que a fala e a atividade prática convergem (Vigotsky, 1988, p.27).

O nível de significação das funções cognitivas, de acordo com Vigotski, podem ser relacionados a dois níveis de desenvolvimento. O primeiro, chamado de nível de desenvolvimento real ou efetivo (ZDR), compreende as funções mentais da criança frutos de determinados ciclos de desenvolvimento já completados, ou seja, esse nível é o conjunto de informações que a criança já possui. O segundo nível de desenvolvimento, chamado de potencial (ZDP), é aquele definido pelos problemas em que ela demonstra necessidade de auxílio de pessoas mais experientes para solucionar. A distância entre estes dois níveis Vigotski chama de zona de desenvolvimento proximal, constituída por funções cognitivas que ainda não estão maduras, mas encontram-se em processo de maturação (Vygotsky, 1988).

A partir da análise das situações que se encontram na zona de desenvolvimento proximal é possível identificar avanços já realizados pelos estudantes e construir um plano de estratégias para que estas situações sejam elevadas ao nível de desenvolvimento real. É importante compreender, portanto, que é possível que um estudante saiba, por exemplo, representar um conceito através de uma figura, mas não consiga defini-lo com palavras (ou vice-versa), o que não significa que ele não aprendeu, mas sim, que o signo e o instrumento mental relacionado a este conceito ainda encontram-se na zona de desenvolvimento potencial e, quando as duas linhas de pensamento convergirem a significação deste conceito terá sido elevada a um nível mais complexo, passando a fazer parte da zona de desenvolvimento real.

A UA construída nesta pesquisa observa os pontos destacados da teoria disposta acima e, para sua organização, foi amparada nos Três Momentos Pedagógicos (Delizoicov, Angotti e Pernambuco, 2002), os quais serão discutidos a seguir.

2.2. Os Três Momentos Pedagógicos

A partir do aporte teórico descrito acima, o planejamento desta UA baseou-se na estratégia conhecida como os Três Momentos Pedagógicos (Delizoicov, Angotti e Pernambuco, 2002). De acordo com os autores, esses momentos pedagógicos são: problematização inicial, organização do conhecimento e aplicação do conhecimento.

A problematização inicial se caracteriza como uma espécie de diagnóstico inicial, uma vez que possibilita ao professor identificar as concepções prévias dos estudantes, ao partir de uma problematização que motivará o estudo a ser realizado. Este momento pedagógico é importante, pois como Bachelard (1977) define, a construção do conhecimento é uma resposta a um questionamento. Segundo Delizoicov, a problematização deve despertar a necessidade da busca pelo conhecimento, em suas palavras:

[...] problemas que devem ter o potencial de gerar no estudante a necessidade de apropriação de um conhecimento que ele ainda não tem e que ainda não foi apresentado pelo professor. É preciso que o problema formulado tenha uma significação para o estudante, de modo a conscientizá-lo que a sua solução exige um conhecimento que, para ele, é inédito [...]. (2001, p.6)

Assim, este problema deve ser algo que desperte o interesse do estudante, pois visa estabelecer uma relação do conteúdo a ser estudado com situações reais, cujas respostas os estudantes não conseguem interpretar correta ou completamente, provavelmente, por não possuírem conhecimentos científicos suficientes para isso (Delizoicov e Angotti, 1990). Vigotski (2009) classifica como científicos os conceitos aprendidos na educação formal e como espontâneos os conceitos originários de uma aprendizagem informal, mas faz questão de destacar a unicidade cognitiva do processo de aquisição desses conceitos:

O desenvolvimento dos conceitos espontâneos e científicos - cabe pressupor - são processos intimamente interligados, que exercem influências um sobre o outro. [...] independentemente de falarmos do desenvolvimento dos conceitos espontâneos ou científicos, trata-se do desenvolvimento de um processo único de formação de conceitos, que se realiza sob diferentes condições internas e externas, mas continua indiviso por sua natureza e não se constitui da luta, do conflito e do antagonismo de duas formas de pensamento que desde o início se excluem. (Vigotski, 2009, p. 261)

Em busca dos conhecimentos científicos para dar suporte a este novo signo a ser estudado, chega-se ao segundo momento, denominado **organização do conhecimento**. Aqui, são empregadas diferentes estratégias para que sejam abordados os conhecimentos

necessários para a compreensão do tema e da problematização inicial (Delizoicov, 2001), possibilitando, assim, ao professor, abordar os conceitos que perpassam a atividade.

Após passar pelos momentos supracitados, as problematizações iniciais, e outras decorrentes dos estudos realizados, são analisadas e interpretadas, no terceiro momento denominado **aplicação do conhecimento**. Neste momento, o tema é aprofundado, não limitando-se apenas, a responder aos questionamentos iniciais originários do processo.

A estratégia dos Três Momentos Pedagógicos foi implementada em uma Unidade de Aprendizagem que, segundo González, é:

Uma Unidade de Aprendizagem é um conjunto de ideias, de hipóteses de trabalho, que inclui não só os conteúdos da disciplina e os recursos necessários para o trabalho diário, senão também metas de aprendizagem, estratégias que ordenem e regulem, na prática escolar, os diversos conteúdos de aprendizagem. (González, 1999, p. 18)

Sendo assim, uma UA permite que o seu planejamento seja constantemente repensado para que a aprendizagem do estudante esteja em foco, uma vez que facilita o processo do “aprender a aprender”, sendo um forte aliado para o desenvolvimento do pensamento dos estudantes e contribuindo para que as aulas se tornem mais agradáveis e mais interessantes.

2.3. Unidade de Aprendizagem e Astronomia

A Unidade de Aprendizagem adotada nesta pesquisa se configura como uma proposta didática estruturada e intencional. Segundo Libâneo (1994), "a unidade de ensino é uma forma de organização do trabalho pedagógico que articula conteúdos, objetivos, métodos e avaliação em torno de um tema, numa sequência lógica e progressiva, visando à aprendizagem significativa." Dessa forma, ela vai além da simples junção de aulas: é planejada para que os conhecimentos se construam de maneira integrada e com propósito.

Complementando essa perspectiva, Hernández e Ventura (1998) afirmam que "a unidade de trabalho com os projetos se estrutura a partir de temas que emergem dos interesses dos alunos, favorecendo aprendizagens interdisciplinares e significativas." Essa abordagem reforça o protagonismo estudantil e justifica a escolha da Astronomia como eixo temático da proposta.

A Unidade de Aprendizagem elaborada nesta pesquisa foi pensada com o objetivo de desenvolver o pensamento trigonométrico a partir da observação do céu e do cálculo de

distâncias inacessíveis. Ao longo das 37 aulas, os conteúdos foram organizados em quatro grandes blocos: o primeiro com abordagem histórica, o segundo com construção e análise de razões trigonométricas, o terceiro com uso prático do teodolito e o quarto com a introdução ao conceito de paralaxe estelar. Cada bloco foi articulado para promover avanço conceitual e desenvolvimento de habilidades como medição, interpretação de dados, representação gráfica e argumentação.

A escolha da Astronomia como contexto não foi aleatória. Estudos apontam seu alto potencial de engajamento e sua capacidade de despertar a curiosidade dos estudantes, ao mesmo tempo em que possibilita conexões com diversos campos do conhecimento. A observação de fenômenos celestes, a história das descobertas científicas e os cálculos envolvidos nas medições astronômicas criam um cenário ideal para o ensino de conceitos trigonométricos com sentido e propósito. Como destacam Langhi e Nardi (2012), "a Astronomia, por sua natureza investigativa e interdisciplinar, constitui uma ferramenta poderosa para despertar o interesse dos estudantes, facilitar a contextualização e possibilitar a integração entre ciência, história e cultura." Esse alinhamento está previsto inclusive na BNCC, que reconhece a Astronomia como eixo integrador das Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Brasil, 2018).

Além disso, o uso de recursos como o Stellarium² e a construção de instrumentos simples, como o teodolito caseiro, favoreceram a participação ativa dos alunos e a apropriação dos conceitos de forma concreta. Como destaca Valente (1999), a tecnologia, quando integrada ao processo educativo, atua como mediadora da aprendizagem, proporcionando novas formas de representar e compreender os conceitos. No caso do Stellarium, essa mediação se faz pela visualização dinâmica de fenômenos astronômicos, ampliando o alcance cognitivo dos estudantes. Com isso, foi possível criar uma ponte entre a Matemática ensinada na escola e a forma como ela é utilizada para entender o mundo.

Um dos conceitos abordados no último bloco da Unidade de Aprendizagem foi a paralaxe estelar, método utilizado pela Astronomia para medir distâncias de estrelas próximas à Terra. Por meio da observação da posição aparente de uma estrela em dois momentos do ano, e com o uso de razões trigonométricas, é possível estimar sua distância em relação à Terra. Essa abordagem contribui para dar sentido aos cálculos trigonométricos, mostrando sua aplicação em contextos científicos reais. De acordo com Langhi e Nardi (2012), a paralaxe

² Stellarium é um planetário virtual gratuito que simula o céu em tempo real, permitindo observar constelações, planetas, estrelas e fenômenos astronômicos com alta precisão visual.

estelar permite aplicar conhecimentos geométricos e trigonométricos a um contexto real e de difícil experimentação direta, despertando a curiosidade científica dos estudantes. Já Fraknoi, Morrison e Wolff (2017) ressaltam que "a paralaxe anual é o método mais direto e confiável de se medir distâncias estelares próximas".

Essa proposta foi aprofundada no artigo desenvolvido em parceria com Giovannini e Catelli, no qual se analisa a potência didática da atividade prática de paralaxe estelar e os avanços conceituais observados. Segundo os autores, "a experiência com a paralaxe permite ao aluno vivenciar o pensamento científico de forma integrada ao raciocínio matemático, tornando a aprendizagem mais significativa e envolvente" (Giovannini; Catelli; Hoffmann, 2022).

Ao longo da UA, os estudantes não apenas aprenderam sobre ângulos, razões e distâncias, mas também desenvolveram habilidades como observação, registro, argumentação e trabalho em equipe - elementos fundamentais para a formação de sujeitos críticos e autônomos.

Dessa forma, tendo sido apresentados os referenciais teóricos que embasam esta proposta, passa-se agora à descrição dos caminhos metodológicos trilhados ao longo da aplicação da Unidade de Aprendizagem, detalhados no próximo capítulo.

3. A VIAGEM

Neste capítulo apresentam-se os procedimentos metodológicos da pesquisa realizada. Por ter sido vivenciada intensamente em sala de aula e envolver a transformação concreta da prática docente, optou-se por intitulá-la "A viagem", numa alusão à trajetória investigativa e formativa vivida pela pesquisadora, pela turma e pelos próprios conceitos ensinados.

A seguir, são descritas as principais etapas e características dessa jornada. Inicia-se com a caracterização da pesquisa e segue com o contexto na qual foi desenvolvida, os instrumentos de coleta de dados, as técnicas utilizadas para análise de dados e encerra-se com a descrição detalhada de seu desenvolvimento.

3.1. Caracterização da pesquisa

Em se tratando de uma pesquisa educacional, de natureza aplicada, realizada à luz da Teoria de Vigotski, a abordagem desta pesquisa é qualitativa, uma vez que sua teoria enfatiza que o desenvolvimento cognitivo de cada indivíduo é construído de forma única, de acordo com as vivências e percepções individuais. O que se assemelha da pesquisa qualitativa, pois, conforme Moreira (2009), coloca como pressuposto paradigmático do viés qualitativo, a realidade é socialmente construída e dependente dos esforços mentais para criá-la e moldá-la.

Caracterizar a pesquisa como qualitativa não pressupõe que não sejam utilizados dados quantitativos para fazer inferências sobre a realidade observada. Porém, o enfoque destes dados é descritivo (Moreira, 2009).

Na busca de melhor compreender o fenômeno social envolto no processo de ensino-aprendizagem proposto por esta pesquisa, a pesquisa é descritiva e interpretativa com relação aos objetivos e do tipo intervenção pedagógica (Damiani et al. 2013) quanto aos procedimentos.

A partir da caracterização da pesquisa entende-se que o enfoque desta, em particular, não deve ser apenas o de quantificar quantos estudantes são capazes de identificar a necessidade de se conhecer um ângulo e de ter uma medida conhecida para poder mensurar uma distância inacessível (por exemplo), mas, principalmente, analisar de onde partiu, qual o caminho percorrido e em qual estágio de significação cada um dos estudantes se encontra, para poder então inferir sobre a eficiência ou não da unidade de aprendizagem proposta.

Sendo o referencial de análise pautado na teoria de Vigotski, especialmente no

conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal, a interpretação dos dados coletados foi realizada a partir dos níveis de significação dos estudantes frente aos conceitos abordados.

3.2. Contexto da pesquisa

A pesquisa foi realizada na Escola Estadual de Ensino Médio Alexandre Zattera, situada na área urbana da Cidade de Caxias do Sul, a qual atende a aproximadamente 1000 estudantes distribuídos em três turnos (manhã, tarde e noite). Em média, as turmas são compostas por aproximadamente 35 estudantes. Para atender as demandas da escola são necessários mais de 60 (sessenta) funcionários, incluindo professores. Com relação à estrutura física, a escola conta com laboratórios de informática e de ciências, refeitório, biblioteca e sala de audiovisual.

A UA desenvolvida nesta pesquisa foi aplicada no ano de 2017, durante seis semanas, em uma turma do turno da manhã de segundo ano do Ensino Médio, com idade média de 16 anos. A turma era composta por 17 estudantes frequentes em aula e que estavam matriculados do início ao fim da UA.

3.3. Instrumentos de coleta de dados

Em consonância com as perspectivas pedagógicas e epistemológicas desta pesquisa, entende-se a avaliação da aprendizagem como um processo cuja análise não tem como objetivo classificar os estudantes como aprovados ou reprovados, ou para meramente observar se as respostas estão corretas ou não, e sim como um recurso para contribuir na construção do conhecimento pelos estudantes e também para auxiliar o professor na reflexão da sua prática.

Pretendeu-se, portanto, analisar a trajetória de cada estudante e a evolução de suas construções de significados. Para tanto, foram utilizados diferentes instrumentos, aplicados em momentos específicos da Unidade de Aprendizagem, com o objetivo de identificar as concepções prévias, os avanços individuais e os níveis de compreensão alcançados pelos estudantes:

1. Avaliação diagnóstica (após o Guia Turístico);
2. Registros das atividades práticas (com o teodolito e paralaxe);

3. Questionário final, contendo questões conceituais, autoavaliação e desenhos explicativos.

Os instrumentos de coleta de dados descritos acima serão detalhados de melhor forma no Capítulo 4. Abaixo, descrevemos as atividades desenvolvidas nesta pesquisa.

3.4. Desenvolvimento da pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida a partir da aplicação da Unidade de Aprendizagem (UA), cuja elaboração foi amparada na Teoria Socioconstrutivista de Vigotsky, e que visou promover a construção do pensamento trigonométrico dos estudantes no que diz respeito ao cálculo de distâncias inacessíveis. Para tanto, foram definidos os seguintes **objetivos de aprendizagem**:

- 1) Identificar se os estudantes compreenderam os elementos necessários (ângulo e medida conhecida) para o cálculo de distâncias inacessíveis;
- 2) Avaliar se os estudantes aplicaram corretamente as razões trigonométricas em situações práticas;
- 3) Verificar se os estudantes compreenderam o conceito de paralaxe estelar e conseguem aplicar as relações trigonométricas para calcular distâncias de estrelas.

Vale ressaltar que a UA foi elaborada antes da homologação da BNCC, em 2018; porém, a sua proposta pedagógica também pode auxiliar no desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas à matemática, especificamente, a habilidade “(EM13MAT3018) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.” (Brasil, 2018).

A UA foi realizada em 37 períodos (aulas) de 50 minutos cada, distribuídas em três momentos pedagógicos:

1. **Problematização inicial:** por meio do Guia Turístico, que abordou aspectos históricos e experimentais da Trigonometria;
2. **Organização do conhecimento:** com atividades práticas de construção de triângulos, tabelas e análises das razões trigonométricas;
3. **Aplicação do conhecimento:** com a construção de teodolitos, realização de medições reais e simulação do cálculo de distâncias estelares usando paralaxe.

Cada momento pedagógico foi cuidadosamente planejado para favorecer a participação ativa dos estudantes e promover situações de mediação e construção coletiva do saber.

A Tabela 1 apresenta a organização geral da UA com os momentos pedagógicos, os objetivos trabalhados e a distribuição temporal das aulas.

Tabela 1 - Organização da UA, seus objetivos e duração.

Momento Pedagógico	Objetivo do Momento	Objetivos dos Encontros	Aulas	Período
1. Problematização inicial (Guia Turístico + Diagnóstico)	Contextualizar historicamente a Trigonometria e resgatar saberes prévios	- Trabalhar circunferência, diâmetro e π - Comparar graus e radianos - Introduzir unidade astronômica - Relembrar proporções e Teorema de Pitágoras - Aplicar avaliação diagnóstica	1 a 11	24/03 a 10/04
2. Organização do conhecimento (Semelhança de Triângulos e Razões Trigonométricas)	Aprofundar relações trigonométricas em triângulos	- Construir triângulos semelhantes - Calcular razões trigonométricas - Trabalhar ângulos complementares e notáveis	12 a 25	13/04 a 08/05
3. Aplicação do conhecimento (Cálculo de distâncias inacessíveis)	Aplicar a trigonometria em situações reais	- Determinar alturas com o teodolito - Refletir sobre precisão de instrumentos - Introduzir paralaxe e distâncias estelares com o Stellarium	26 a 36	22/05 a 08/06
Avaliação final	Avaliar a UA e identificar aprendizagens consolidadas	- Aplicar questionário final sobre os três objetivos de aprendizagem	37	03/07

Fonte: Autora

A seguir são descritas, detalhadamente, as atividades apresentadas na Tabela 1.

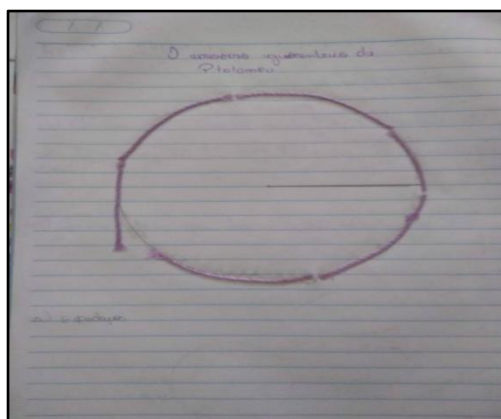
3.5.1. Guia turístico – um passeio pela história da trigonometria – aulas 1 a 11.

O Guia Turístico (Apêndice A) foi elaborado para iniciar o assunto de Trigonometria de forma contextualizada através da história da Astronomia. Nele, foram abordados alguns dos grandes nomes dessa história da Matemática e da Astronomia, tais como, Pitágoras, Ptolomeu, Copérnico e Galileu, que visou proporcionar aos estudantes uma visão de assuntos

e personagens que influenciaram na história da humanidade e na evolução do pensamento científico.

Além da parte histórica da Astronomia, os estudantes desenharam circunferências e, com o auxílio de régua e barbante, mediram o diâmetro e o comprimento de cada uma delas (Figura 1). Com estas informações foram orientados a calcular as razões entre o comprimento das circunferências e seus diâmetros, encontrando um padrão nos resultados e descobrindo que este é o valor aproximado de π (Pi). Também tiveram o primeiro contato com imprecisão nos resultados encontrados, em função dos instrumentos utilizados e da forma com a qual os manuseavam. Além disso, os estudantes também foram instruídos a comparar graus e radianos, a relembrar o cálculo de proporções e do Teorema de Pitágoras (supunha-se aqui que todos os estudantes já haviam tido um primeiro contato com razões, proporções e com o Teorema de Pitágoras durante o Ensino Fundamental).

Figura 1. Circunferência com pedaços de barbante do tamanho do seu raio sobrepostos em seu comprimento.



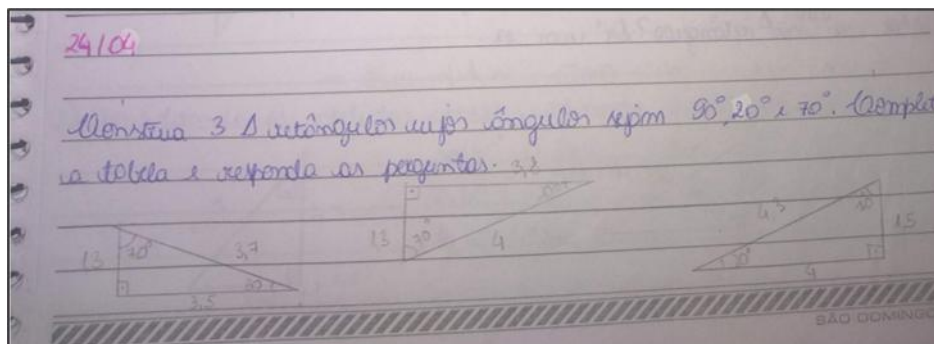
Fonte: Elaborado pelos estudantes participantes

Após a realização, discussão e correção das atividades propostas no Guia Turístico foi realizada uma avaliação diagnóstica (Apêndice B) a fim de identificar os conhecimentos adquiridos pelos estudantes e seus conhecimentos acerca de razões trigonométricas.

3.5.2. Triângulos semelhantes e as razões trigonométricas – aulas 12 a 25.

Para continuar os estudos referentes à Trigonometria, os estudantes construíram triângulos retângulos semelhantes, com o auxílio de régua e transferidor, conforme mostra a Figura 2.

Figura 2. Construção feita por um estudante dos três triângulos de ângulos 20° , 70° e 90° .



Fonte: Elaborado pelos estudantes participantes

Em seguida, construíram uma tabela com as razões entre cateto oposto e hipotenusa, cateto adjacente e hipotenusa e, cateto oposto e cateto adjacente, de cada ângulo presente nos três triângulos retângulos desenhados, conforme mostra a Figura 3.

Figura 3. Tabela construída por um estudante com as razões entre cateto oposto e hipotenusa, cateto adjacente e hipotenusa e, cateto oposto e cateto adjacente dos ângulos de 20° , 70° e 90° .

Ângulo / cat. opo.	hip.	cat. adj.	hip.	cat. opo.	hip.	cat. adj.	hip.	cat. opo.	hip.	cat. adj.	hip.
90°											
	$3.5/3.7$	1		$4/5$	1		$4/17$	1		$15/17$	1
20°	$13/3.7$	0.35		$13/5$	0.26		$13/17$	0.76		$15/17$	0.88
70°	$3.5/13$	0.27		$4/13$	0.31		$4/15$	0.27		$15/17$	0.88
	$13/3.5$	3.7		$13/4$	3.25		$13/15$	1.5		$15/17$	1.27
	$3.7/13$	0.28		$5/13$	0.38		$17/15$	1.13		$17/15$	1.13
	$13/3.5$	3.7		$13/4$	3.25		$13/15$	1.5		$15/17$	1.27
	$3.5/13$	0.27		$4/13$	0.31		$4/15$	0.27		$15/17$	0.88
	$13/3.5$	3.7		$13/4$	3.25		$13/15$	1.5		$15/17$	1.27
	$3.7/13$	0.28		$5/13$	0.38		$17/15$	1.13		$17/15$	1.13

a) Os valores encontrados para as razões de um mesmo ângulo são aproximados ou distantes?
 Resposta: são aproximados.

b) Por que você acredita que isso aconteça?
 Resposta: porque os ângulos são iguais.

c) Existe uma relação entre o tamanho dos ângulos?
 Resposta: sim, pois a medida dos ângulos varia de 0° a 180° .

d) Sabendo o valor de uma razão trigonométrica é possível identificar qual dos triângulos? De qual triângulo?
 Resposta: sim, pois cada razão é única para cada ângulo.

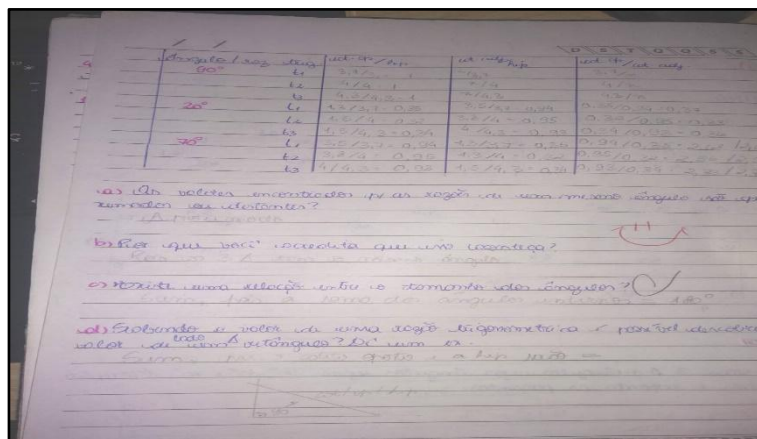
Fonte: Elaborado pelos estudantes participantes

Após a elaboração da tabela (Figura 3) os estudantes analisaram os dados obtidos e responderam aos questionamentos, a seguir:

- Os valores encontrados para as razões de um mesmo ângulo são aproximados ou distantes?
- Por que você acredita que isso aconteça?
- Existe uma relação entre o tamanho dos ângulos?

- c) Sabendo o valor de uma razão trigonométrica é possível descobrir o valor de um dos lados de um triângulo retângulo? Dê um exemplo.

Figura 4. Questionamentos respondidos por um dos estudantes acerca das razões trigonométricas calculadas.

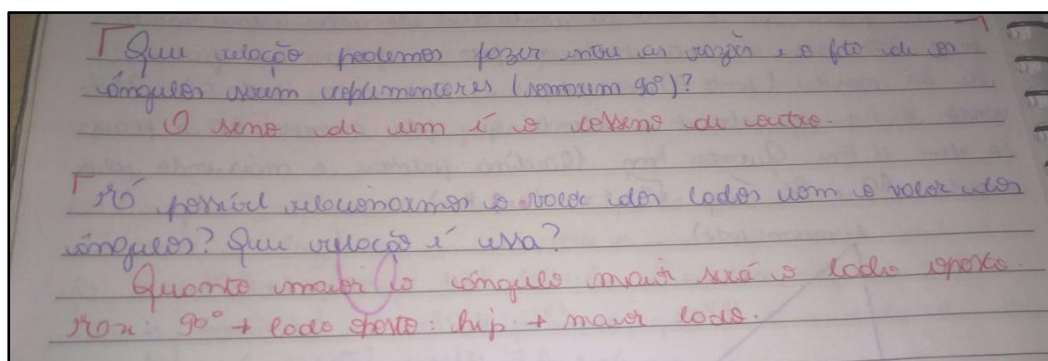


Fonte: Elaborado pelos estudantes participantes

Para complementar o trabalho desenvolvido durante estas três aulas sobre triângulos semelhantes, os estudantes responderam aos seguintes questionamentos,:

- Que relação podemos fazer entre as razões e o fato de os ângulos serem complementares (somarem 90°)?
- É possível relacionarmos o valor dos lados com o valor dos ângulos? Que relação é essa?

Figura 5. Relação entre ângulos complementares, entre o tamanho do lado e o valor do ângulo oposto a ele.



Fonte: Elaborado pelos estudantes participantes

Após as atividades citadas acima, foi proposto aos estudantes uma prática envolvendo o cálculo de distâncias inacessíveis, como uma aplicação dos conceitos abordados até o

momento, através da utilização do teodolito para encontrar medidas inacessíveis na escola, conforme será descrito a seguir.

3.5.3. O teodolito e as razões trigonométricas – aulas 26 a 29.

Os estudantes foram instruídos a construir um teodolito caseiro e, depois, foram ao pátio da escola para utilizá-lo na determinação de ângulos e distâncias. Organizados em pequenos grupos e munidos de uma trena, os estudantes determinaram alturas inacessíveis, como a das árvores, postes, da escola, entre outros. Para isto, determinaram com o auxílio do Teodolito o ângulo entre a sua visão e o topo do objeto a ser calculada a altura na aula 26 (Figura 6).

Figura 6. Estudantes medindo o ângulo entre a sua visão e o topo do objeto a ser calculada a altura – aula 26.



Fonte: Autora

Para encontrar a medida da altura do objeto, além de determinar a medida do ângulo foi necessário encontrar a distância do observador até o objeto. A Figura 7 mostra os estudantes na aula 26 medindo esta distância com a trena.

Figura 7. Estudantes encontrando a distância do observador até o objeto a ser determinada a altura – aula 26



Fonte: Autora

Para esta atividade os estudantes receberam uma folha (Figura 8) na qual deveriam preencher uma tabela contendo a altura do estudante, o nome dos objetos cujas alturas seriam calculadas, a distância conhecida (obtida através da medição com a trena), a medida do ângulo entre a sua visão e o topo do objeto a ser encontrada a altura (medida do ângulo encontrada com o Teodolito) e, por fim, o registro da altura do objeto (encontrado através do cálculo das razões trigonométricas).

Em seguida, os estudantes analisaram os registros na tabelada Figura 8 e responderam às seguintes questões:

1. De que informações precisamos para conseguir medir uma altura inacessível?
2. A medida da altura dos objetos foi semelhante para todos os componentes do grupo?
3. A medida dos ângulos foi a mesma para todos os componentes do grupo?

Após a análise em grupo, os estudantes e a professora discutiram em sala de aula os resultados obtidos e as respostas dadas aos questionamentos. Durante a discussão foi possível perceber, pela professora, que os estudantes relacionaram a medida de sua altura como condição de encontrar medidas desconhecidas. Por este motivo, foi explicado aos estudantes que nesta atividade, em específico, o teodolito estava sendo utilizado como instrumento para medir ângulos e que estando na altura dos olhos facilita a medição do ângulo, exigindo portanto, que a altura de quem meça o tamanho do ângulo seja levada em consideração.

Porém, conforme o instrumento a ser utilizado para fazer a medição do ângulo, não é preciso levar em consideração a altura, por exemplo, ao utilizar um instrumento localizado no chão.

Figura 8. Tabela de registros realizados pelos estudantes da atividade com o Teodolito – aulas 27 e 28

Nome: Amanda Gomes Turma: 201 Grupo n° 1

Atividade 2 –

Atividade 1 – Com o auxílio do Teodolito, preencha a tabela a seguir:

Obj	Sua altura	Objeto a ser calculado a altura	Sua distância ao objeto a ser medido	Ângulo medido	Altura do objeto
1	1,62	quadra	1,51	42°	2,97
2	1,62	coluna	1,90	32°	2,19
3	1,62	porta	2	41°	1,96

Reflexões:

1) De que informações precisamos para conseguir medir uma altura inacessível?
Precisamos calcular os ângulos, a distância do objeto com nossa altura.

2) A medida da altura dos objetos foi semelhante para todos os componentes do grupo?
Sim.

3) A medida dos ângulos foi a mesma para todos os componentes do grupo? Por quê?
Não, pois as alturas não eram iguais.

Atividade 2 –

① $\lg 42^\circ$
 $0,90 \cdot 1,51 + 1,62$
 $1,35 + 1,62$
 $2,97m$

② $\lg 32^\circ$
 $0,62 \cdot 1,90 + 1,62$
 $2,19$

③ $\lg 41^\circ$
 $2,9 \cdot 2 + 1,62$
 $1,96$

Fonte: Elaborado pelos estudantes participantes

Para aprofundar a aplicação dos conceitos relativos à Trigonometria, foi proposto aos estudantes que pensassem na distância das estrelas com relação a Terra, ou seja, como é possível calcular essa distância, já que não é possível ir até elas.

3.5.4. A que distância estamos? – aulas 30 a 36.

Na 30ª aula, no intuito de identificar os conceitos prévios dos estudantes em relação à distância de estrelas, a professora solicitou a eles que respondessem e justificassem se as estrelas estão a mesma distância da Terra e, que utilizando o que eles haviam estudado até o momento, escrevessem sobre como pensavam ser medida a distância de estrelas.

Em seguida, foi proposto que utilizando as razões trigonométricas estudadas os estudantes fizessem um desenho mostrando como fariam para medir a distância de estrelas. Após o término do desenho, os estudantes foram convidados a realizar um breve levantamento na internet para descobrir como é feita a medida da distância de estrelas. Nesse

momento, então, tiveram o primeiro contato com a expressão “paralaxe estelar” e de como ela é utilizada no cálculo de distância de estrelas.

Após a realização do levantamento, foi feita uma discussão acerca das informações encontradas pelos estudantes. Eles foram, então, convidados a conhecer e explorar o céu noturno. Para isso, cada dupla de estudantes recebeu um netbook (Figura 9), já com o software Stellarium instalado.

Paralelamente a isso, a professora manipulava o software Stellarium fazendo sua projeção no quadro branco, de modo que eles (os estudantes) podiam acompanhar e entender a utilização de cada ferramenta disponível no software..

Durante a atividade a professora perguntou aos estudantes se eles achavam que todas as estrelas estavam a mesma distância da Terra e, se as estrelas mais brilhantes eram aquelas que se encontravam mais próximas. Em seguida, foi mostrado aos estudantes que no Stellarium é possível selecionar uma estrela e ver a qual distância ela se encontra dentre outras informações disponíveis acerca dela. Explorando as ferramentas disponíveis os estudantes clicaram nas estrelas e analisaram suas informações, relacionando o brilho e a distância das estrelas selecionadas e, que o ângulo de paralaxe de cada estrela também era informado.

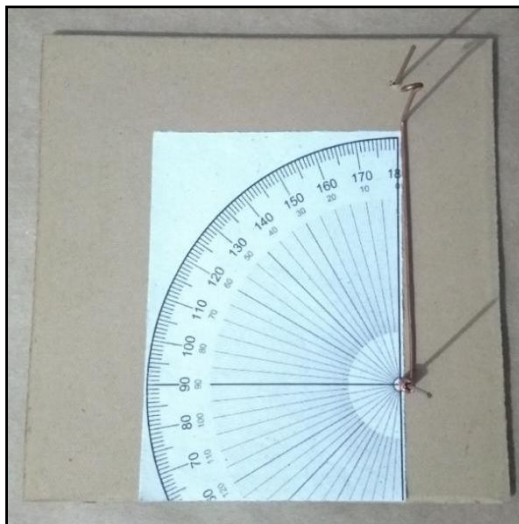
Figura 9. Estudantes manipulando o Software Stellarium – aulas 30 e 31.



Fonte: Autora

Mas afinal, como é possível medir a distância das estrelas? Para responder esta pergunta a professora levou para a sala de aula alguns dispositivos (Figuras 10, 11 e 12) que foram utilizados para simular a determinação do ângulo de paralaxe e o cálculo da distância das estrelas.

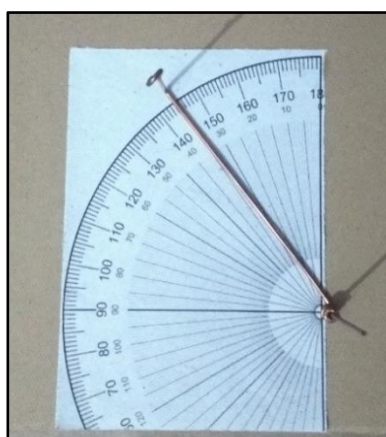
Figura 10. Dispositivo utilizado para determinar o ângulo de paralaxe composto por um transferidor, um arame móvel para determinar a abertura do ângulo e um pino referência para iniciar a abertura do ângulo.



Fonte: Autora

Na Figura 10 é possível observar o dispositivo, visto de cima, marcando um ângulo de 0° . Na Figura 11 o dispositivo também é visto de cima, porém, está marcando um ângulo de abertura de 45° .

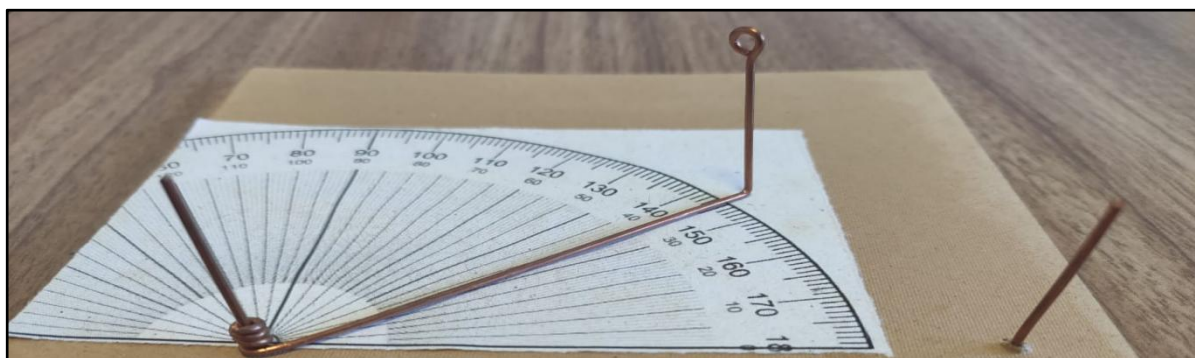
Figura 11. Dispositivo para determinar o ângulo de paralaxe com o arame deslocado simulando a marcação de um ângulo.



Fonte: Autora

Na Figura 12, é possível visualizar o dispositivo de lado, marcando a abertura de um ângulo de 45° .

Figura 12. Dispositivo para determinar o ângulo de paralaxe com o arame deslocado simulando a marcação de um ângulo.



Fonte: Autora

Uma simulação prática do cálculo da distância de estrelas foi proposta. Em um primeiro momento, a professora solicitou a ajuda dos estudantes, em sala de aula, sendo um deles responsável por manipular o instrumento para determinar o ângulo de paralaxe (seguindo as orientações dadas pela professora, conforme a Figura 13). Para representar as estrelas foram utilizados três objetos: uma pá de lixo, representando a estrela central (EC), a qual se deseja calcular a distância com relação à Terra, e duas vassouras que representavam as estrelas “fixas” de fundo (EF1 e EF2), referência para o cálculo da distância da estrela central (foram utilizados a pá de lixo e as vassouras por serem materiais disponíveis na escola).

Figura 13. Estudante determinando o ângulo de paralaxe com a orientação da professora e a observação dos demais estudantes.



Fonte: Autora

Para fazer o registro da posição das estrelas de fundo no quadro branco, a professora solicitou a ajuda de outro estudante, conforme mostra a Figura 14. Com estes registros no quadro branco a professora orientou outro estudante para que este pudesse determinar o ângulo de paralaxe e demonstrar de que forma é feito o cálculo que determina a distância da estrela central até a Terra.

Figura 14. Estudante representando as estrelas de fundo no quadro.



Fonte: Autora

Com estes registros feitos no quadro branco, a professora orientou outro estudante (Figura 15) para que este pudesse determinar o ângulo de paralaxe e demonstrar de que forma é feito o cálculo que determina a distância da estrela central até a Terra.

Figura 15. Estudante auxiliando na determinação do ângulo de paralaxe e no cálculo da distância da estrela central.

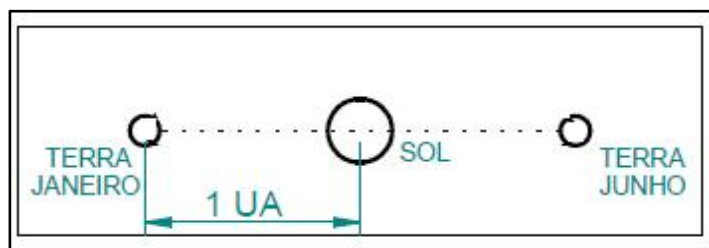


Fonte: Autora

Para determinar o ângulo de paralaxe, é conveniente seguir os quatro passos descritos a seguir:

1. Representar e medir na classe escolar a distância conhecida, com o dispositivo de medição do ângulo, simulando duas posições da Terra em relação ao Sol (Figura 16). A primeira marcação representa a Terra no mês de janeiro e a segunda marcação representa a Terra no mês de junho, ou seja, passados 6 meses do seu movimento de translação em torno do Sol.

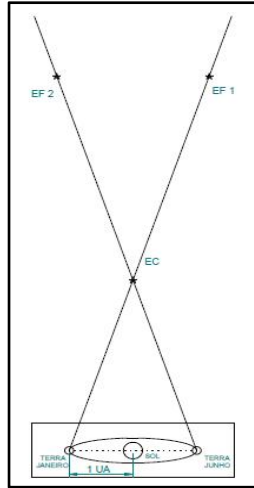
Figura 16. Marcação na classe da posição da Terra seis meses antes e seis meses depois. Representação vista de cima da classe (mesa).



Fonte: Autora

2. Após realizar a marcação anterior, é necessário posicionar a estrela central (estrela a ser determinada a distância), que deve estar alinhada perpendicularmente com a marcação referente ao Sol. Em seguida, é preciso localizar as estrelas de fundo da seguinte forma: posicionar o instrumento de medir ângulos no local Terra Janeiro, olhar através do pino referência e enxergar a EC; deve-se posicionar a EF1 de modo que esta, o pino referência e a EC fiquem completamente alinhados, ou seja, a EC deve “esconder” (no ângulo de visão) de forma completa a EF1. Em seguida, deve-se olhar novamente o instrumento de medir ângulos, mas desta vez posicionar-lo no local Terra Junho e fazer o mesmo processo anterior para determinar a posição da EF2, como está na Figura 17.

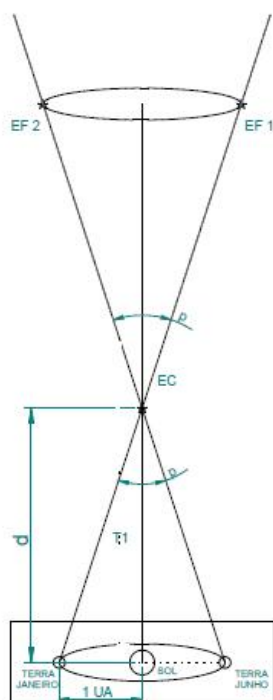
Figura 17. Localização das EF 1 e 2 através da EC.



Fonte: Autora

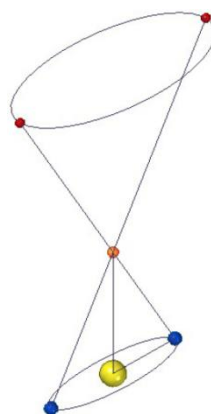
3. Com o instrumento no local Terra posição Junho deve-se posicionar o arame em direção à EF1, de forma que o pino, o arame, a EC e a EF1 fiquem todos alinhados e anotar a marcação do ângulo. Em seguida, deve-se posicionar o arame em direção à EF2 (seguindo os mesmos passos da marcação anterior) e fazer o registro do valor do ângulo encontrado. Com isso, tem-se dois valores de ângulos, um referente à primeira marcação e outro referente à segunda marcação. Para obter o ângulo de paralaxe deve-se calcular a diferença entre as duas marcações. Em seguida, através de um desenho, é possível visualizar a figura que representa a simulação do cálculo da distância da estrela EC com relação à Terra ou ao Sol (Figura 18).
4. A partir deste desenho é possível identificar a distância que se quer encontrar (d), o ângulo de paralaxe (p) encontrado no passo anterior e perceber que, como a medida conhecida é a Terra/Sol, definida por 1 UA, é presumível encontrar dois triângulos retângulos Terra/Sol/EC e, a partir destes triângulos retângulos encontrar a medida d da distância (até a Terra ou até o Sol) através do cálculo com as razões trigonométricas (Figura 19).

Figura 18. Desenho que simula a situação do cálculo da distância da EC até a Terra ou o Sol.



Fonte: Autora

Figura 19. Desenho que ilustra como encontrar a distância d até EC.



Fonte: Autora

A situação vivenciada em sala de aula teve a intenção de mostrar aos estudantes o processo para encontrar a distância das estrelas. Para que fosse possível, os estudantes realizaram, na prática, este cálculo. Os estudantes foram divididos em pequenos grupos munidos dos materiais necessários para realizar o procedimento para determinar o ângulo de paralaxe e para calcular a distância das estrelas. Para realizar esta atividade eles foram levados ao ginásio da escola, conforme mostram as Figuras 20 e 21.

Figura 20. Estudantes sendo orientados pelos colegas de grupo para posicionar as vassouras que representam as EF1 e EF2.



Fonte: Autora

Na Figura 20 é possível ver os estudantes sendo guiados por seus colegas para a colocação das estrelas de fundo. E Na figura 21 o estudante que os está guiando.

Figura 21. Estudantes orientando os colegas de grupo para a localização das EF1 e EF2 através da observação com o instrumento para encontrar o ângulo de paralaxe.



Fonte: Autora

Fazer os registros e organizar o pensamento nem sempre é uma tarefa fácil para os estudantes. Pensando nisso, foi entregue uma folha com as informações descritas na figura 22 para que os estudantes preenchessem durante a realização da atividade:

Figura 22. Tabela de registros para a atividade realizada no ginásio da escola.

Item	Anote aqui
Base (distância entre as posições Terra Janeiro - Terra Junho)	_____
Ângulo medido em Janeiro	_____
Ângulo medido em Junho	_____
Ângulo de paralaxe	_____
Metade da paralaxe	_____
Cálculo final da distância entre a Terra e a estrela de fundo EC	_____

Fonte: Autora

Para finalizar a UA, avaliar o processo, a própria UA e a aprendizagem dos estudantes foi aplicado um questionário final (Apêndice C).

Na próxima seção serão apresentados os resultados envolvendo o nível de significação dos estudantes com relação a identificação dos instrumentos necessários para calcular distâncias inacessíveis.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo apresenta a análise dados coletados durante a aplicação da Unidade de Aprendizagem e a discussão dos resultados obtidos, em torno dos três objetivos de aprendizagem.

Para cada objetivo são apresentados os instrumentos utilizados, os níveis de significação, ZDP e ZDR, identificados com base na Teoria Sociointeracionista de Vigotski, e as transições observadas entre os perfis NPN (não percebe necessidade) e PN (percebe necessidade).

A análise busca compreender não apenas os avanços individuais, mas também os processos de aprendizagem de forma coletiva, bem como, os elementos que contribuíram para o desenvolvimento conceitual dos estudantes ao longo das atividades propostas.

Os resultados foram organizados de forma descritiva e comparativa, permitindo identificar os momentos de maior impacto didático e as estratégias que favoreceram a consolidação dos conceitos de Trigonometria.

A seguir, apresenta-se a análise referente ao primeiro objetivo da pesquisa.

4.1. Objetivo 1 – Identificação dos instrumentos necessários para calcular distâncias inacessíveis

Para analisar o nível cognitivo individual dos estudantes e da turma com relação à identificação dos elementos necessários para calcular distâncias inacessíveis, foram considerados:

- **Conceitualização prévia do estudante (CPE):** identificada por meio da questão 3 da avaliação diagnóstica aplicada após as atividades do Guia Turístico – Para responder essa questão corretamente, era necessário utilizar as razões trigonométricas para encontrar a altura de um poste, o que implica reconhecer a necessidade de um ângulo e de uma medida conhecida.
- **Conceitualização em grupo (CG):** identificada por meio da reflexão 1 na atividade com o teodolito, em que os estudantes deveriam identificar as informações necessárias para o cálculo de distâncias inacessíveis.

- **Conceitualização individual final (CIF):** identificada por meio da questão 7 do questionário final. Para responder essa questão corretamente, era necessário citar os elementos necessários para medir distâncias inacessíveis.

A análise considerou os seguintes níveis de desenvolvimento conceitual:

- **NPN (não percebe necessidade);**
- **PN (percebe necessidade);**
- **ZDP (Zona de Desenvolvimento Proximal);**
- **ZDR (Zona de Desenvolvimento Real);**
- **NRA (não realizou a atividade).**

A Tabela 2 apresenta a categorização individual dos estudantes com base nas respostas aos instrumentos aplicados:

Tabela 2 - Níveis de desenvolvimento conceitual dos estudantes no Objetivo 1: identificação dos elementos necessários ao cálculo de distâncias inacessíveis.

(continua)

Estudante	Instrumento utilizado	Ângulo	Distância conhecida	Observação	Nível de significação
E1	CPE	PN	PN	Reconhece o ângulo, mas não a distância na CPE. Com ajuda, entende ambas.	ZDP – entende com mediação, mas não sozinho.
	CG	PN	NPN		
	CIF	PN	NPN		
E2	CPE	PN	PN	Reconhece ambas em CG e CIF, mas não diante de problema novo.	ZDR – entende com e sem mediação.
	CG	NPN	NPN		
	CIF	PN	PN		
E3	CPE	PN	PN	Reconhece as duas informações em todas as etapas.	ZDR – compreensão consolidada.
	CG	PN	PN		
	CIF	PN	PN		
E4	CPE	NRA	NRA	Não realiza CPE e CG, mas reconhece tudo na CIF.	ZDR – compreensão autônoma.
	CG	NRA	NRA		
	CIF	PN	PN		
E5	CPE	PN	PN	Reconhece ambas durante todo o processo.	ZDR – entende com e sem mediação.
	CG	PN	PN		
	CIF	PN	PN		
E6	CPE	PN	NPN	Após a CIF, passa a considerar a distância.	ZDR – compreensão consolidada após atividade.
	CG	PN	NPN		
	CIF	PN	PN		

					(conclusão)
Estudante	Instrumento utilizado	Ângulo	Distância conhecida	Observação	Nível de significação
E7	CPE	PN	PN	Não cita dados na CG, mas desenha triângulo.	ZDP – entendimento parcial, melhora com mediação.
	CG	NPN	NPN		
	CIF	NPN	NPN		
E8	CPE	PN	PN	Representa triângulo corretamente, mas omite distância.	ZDP – entende melhor com apoio.
	CG	PN	NPN		
	CIF	PN	NPN		
E9	CPE	PN	PN	Compreende a importância da distância na CIF.	ZDR – consolida entendimento sem ajuda.
	CG	PN	NPN		
	CIF	PN	PN		
E10	CPE	PN	PN	Relaciona com altura em CG/CIF, mas entende necessidade de dados.	ZDR – entende com e sem mediação.
	CG	PN	PN		
	CIF	PN	PN		
E11	CPE	PN	PN	CIF revela compreensão completa.	ZDR – entendimento consolidado sem mediação.
	CG	NRA	NRA		
	CIF	PN	PN		
E12	CPE	PN	PN	Entende necessidade da distância após CIF.	ZDR – entendimento consolidado.
	CG	PN	NPN		
	CIF	PN	PN		
E13	CPE	PN	PN	Em situações simples reconhece ambos, em complexas apenas o ângulo.	ZDP – entendimento limitado sozinho.
	CG	PN	PN		
	CIF	PN	NPN		
E14	CPE	PN	PN	Compreende os dois dados após a CIF.	ZDR – compreensão com e sem mediação.
	CG	NPN	NPN		
	CIF	PN	PN		
E15	CPE	PN	PN	Reconhece as informações em todas as etapas.	ZDR – compreensão consolidada.
	CG	PN	PN		
	CIF	PN	PN		
E16	CPE	PN	PN	Associa com altura, reconhece parcialmente.	ZDP – entende com apoio.
	CG	NRA	NRA		
	CIF	PN	NPN		
E17	CPE	PN	PN	Após prática, compreende os dados sem ajuda.	ZDR – compreensão autônoma.
	CG	PN	NPN		
	CIF	PN	PN		

Fonte: Autora

Ao analisar a Tabela 2, é possível identificar que ao final das atividades da UA, 12 estudantes encontravam-se, segundo o nível de significação conceitual, na Zona de

Desenvolvimento Real no que diz respeito à identificação das informações necessárias para o cálculo de distâncias inacessíveis. Destes, 9 atingiram essa zona conceitual apenas após a realização da atividade experimental do cálculo de distâncias estelares. Os demais 5 estudantes ainda se encontravam na Zona de Desenvolvimento Proximal, demonstrando necessidade de auxílio para identificar corretamente os elementos fundamentais ao cálculo.

Esses dados indicam que, mesmo antes da intervenção mais técnica com o teodolito, uma parcela significativa dos estudantes já mobilizava noções intuitivas relacionadas à medição e proporção. No entanto, a ausência de clareza conceitual na justificativa apontava para a necessidade de mediação. O primeiro objetivo, portanto, permitiu estabelecer uma linha de base sobre a qual os demais conceitos foram desenvolvidos. Além disso, evidenciou a importância do trabalho histórico-contextual do Guia Turístico na ativação de conhecimentos prévios e na introdução dos elementos necessários ao cálculo trigonométrico em situações reais.

4.2. Objetivo 2 – Aplicação das razões trigonométricas

O segundo objetivo buscou investigar se os estudantes seriam capazes de aplicar as razões trigonométricas em situações práticas, relacionando ângulo e lados de um triângulo retângulo. Para isso, foram considerados os seguintes instrumentos:

- **Conceitualização prévia do estudante (CPE):** questão 1 da atividade de triângulos semelhantes e razões trigonométricas;
- **Conceitualização em grupo (CG):** reflexão 2 da atividade com o teodolito;
- **Conceitualização individual final (CIF):** questão 4 do questionário final.

A análise considerou os seguintes níveis de desenvolvimento conceitual:

- NPN (não percebe necessidade);
- PN (percebe necessidade);
- ZDP (Zona de Desenvolvimento Proximal);
- ZDR (Zona de Desenvolvimento Real).

A Tabela 3 apresenta a categorização dos estudantes de acordo com os dados obtidos nos instrumentos aplicados.

Tabela 3 - Níveis de desenvolvimento conceitual dos estudantes no Objetivo 2: aplicação das razões trigonométricas.

(continua)

Estudante	Instrumento utilizado	Aplicação de razões trigonométricas	Observação	Nível de significação
E1	CPE CG CIF	NPN PN NPN	Só reconhece o uso das razões na atividade em grupo.	ZDP – entende apenas com ajuda.
E2	CPE CG CIF	NPN PN PN	Reconhece o uso das razões em CG e CIF; só falha em situação nova.	ZDR – entende com e sem mediação.
E3	CPE CG CIF	NPN PN PN	Reconhece as razões, mas erra o cálculo na CIF.	ZDR – entende o conceito com e sem mediação.
E4	CPE CG CIF	NPN NRA PN	Mesmo sem o teodolito, compreende o uso das razões na CIF.	ZDR – compreensão autônoma.
E5	CPE CG CIF	NPN PN PN	Entende a aplicação das razões, mas erra o cálculo na CIF.	ZDR – entende com e sem mediação.
E6	CPE CG CIF	NPN PN PN	Compreende o uso, mas falha diante de problema novo.	ZDR – entendimento consolidado, exceto em situações desconhecidas.
E7	CPE CG CIF	NPN PN PN	Reconhece as razões, mas utiliza incorretamente na CIF.	ZDR – entende com e sem mediação.
E8	CPE CG CIF	NPN PN PN	Compreende a aplicação, com exceção de situações novas.	ZDR – entendimento consistente com mediação e sozinho.
E9	CPE CG CIF	NPN PN PN	Reconhece o uso, com exceção de desafios inéditos.	ZDR – compreensão com e sem mediação.
E10	CPE CG CIF	NPN PN PN	Reconhece o uso, com exceção de desafios inéditos.	ZDR – entendimento geral, mesmo com dificuldades pontuais.

Estudante	Instrumento utilizado	Aplicação de razões trigonométricas	Observação	(conclusão)
				Nível de significação
E11	CPE	NPN	Reconhece o uso, com exceção de desafios inéditos.	ZDR – compreensão consistente.
	CG	PN		
	CIF	PN		
E12	CPE	PN	Já percebe o uso na CI, mas só executa corretamente após prática.	ZDR – consolida na CIF.
	CG	PN		
	CIF	PN		
E13	CPE	NPN	Reconhece, mas utiliza a razão errada na CIF.	ZDR – reconhece a ideia com e sem mediação.
	CG	PN		
	CIF	PN		
E14	CPE	NPN	Só reconhece a aplicação em grupo, não sozinho.	ZDP – depende de mediação para compreensão.
	CG	PN		
	CIF	NPN		
E15	CPE	NPN	Reconhece, mas utiliza a razão errada na CIF.	ZDR – entendimento conceitual presente.
	CG	PN		
	CIF	PN		
E16	CPE	NPN	Apresenta dificuldade apenas diante de problema novo.	ZDR – entendimento conceitual presente.
	CG	PN		
	CIF	PN		
E17	CPE	NPN	Apresenta dificuldade apenas diante de problema novo.	ZDR – entendimento conceitual presente.
	CG	PN		
	CIF	PN		

Fonte: Autora

Dos 17 estudantes analisados, 11 demonstraram transição para a Zona de Desenvolvimento Real, sendo capazes de aplicar corretamente as razões trigonométricas para o cálculo de distâncias em diferentes contextos. Desses, 6 apresentaram esse domínio apenas após a atividade experimental com o teodolito, indicando o papel decisivo da prática na consolidação do conhecimento.

Os outros 6 estudantes permaneceram na ZDP, demonstrando avanços parciais, com necessidade de mediação para aplicação correta do conceito. Entre os erros mais frequentes, observou-se a inversão das razões (confundir seno com cosseno) e o uso indevido da tangente sem identificar o lado correspondente.

Houve transições significativas de NPN $\rightarrow$ PN, especialmente entre a conceitualização em grupo e a avaliação final, confirmando a importância da interação e da prática colaborativa na construção do conhecimento. Entre os 17 estudantes analisados, seis

apresentaram transições explícitas de NPN para PN ao longo da Unidade de Aprendizagem: E2, E5, E6, E8, E16 e E17. Esse dado reforça a potência das atividades práticas e colaborativas na construção progressiva do conhecimento trigonométrico.

4.3. Objetivo 3 - Cálculo do ângulo de paralaxe e das distâncias estelares

O terceiro objetivo buscou investigar se os estudantes compreenderam o conceito de paralaxe estelar e foram capazes de aplicar os conhecimentos trigonométricos para o cálculo da distância de uma estrela. Para isso, foram considerados os seguintes instrumentos:

- **Conceitualização prévia do estudante (CPE):** questão 1 da atividade de desenho e concepção inicial da paralaxe;
- **Conceitualização em grupo (CG):** atividades em grupo no ginásio com o dispositivo de paralaxe;
- **Conceitualização individual final (CIF):** questão 6 do questionário final.

A análise dos dados foi realizada considerando os níveis de significação conceitual:

- NPN (não percebe necessidade);
- PN (percebe necessidade);
- ZDP (Zona de Desenvolvimento Proximal);
- ZDR (Zona de Desenvolvimento Real).
- NRA (não realizou a atividade).

A Tabela 4 apresenta a análise dos estudantes em relação à capacidade de aplicar os conhecimentos trigonométricos no cálculo de distâncias estelares com base no ângulo de paralaxe. A análise foi realizada com base nos instrumentos aplicados na UA.

Tabela 4 - Níveis de desenvolvimento conceitual dos estudantes no Objetivo 3: cálculo do ângulo de paralaxe e distâncias estelares.

(continua)

Estudante	Instrumento utilizado	Ângulo	Distância conhecida	Desenho de como calcular distâncias estelares	Observação	Nível de significação
E1	CPE CG	PN PN	NPN PN	NPN PN	Reconhece o ângulo e desenha triângulo, mas não a distância.	ZDP – só desenvolve raciocínio completo com ajuda.
	CIF	PN	NPN	PN		
E2	CPE CG	NPN PN	NPN PN	NPN PN	Identifica uma medida e desenha triângulo, mas não considera o ângulo.	ZDP – só desenvolve raciocínio completo com ajuda.
	CIF	NPN	PN	PN		
E3	CPE CG	PN PN	NPN PN	NPN PN	Reconhece apenas o ângulo, não a distância.	ZDP – raciocínio incompleto sem ajuda.
	CIF	PN	NPN	NPN		
E4	CPE CG	NRA PN	NRA PN	NRA PN	Compreende todos os elementos de forma autônoma.	ZDR – raciocínio completo sem auxílio.
	CIF	PN	PN	PN		
E5	CPE CG	PN PN	PN PN	PN PN	Reconhece ângulo, distância e uso da razão trigonométrica.	ZDR – compreensão sólida em todas as etapas.
	CIF	PN	PN	PN		
E6	CPE CG	PN PN	NPN PN	PN PN	Compreende todos os dados e sabe aplicá-los.	ZDR – entendimento consolidado com autonomia.
	CIF	PN	PN	PN		
E7	CPE CG	PN NRA	NPN NRA	PN NRA	Não realiza todas as etapas e não reconhece os dados necessários.	ZDP – não consolida o raciocínio sozinho.
	CIF	NPN	NPN	PN		
E8	CPE CG	PN PN	NPN PN	PN PN	Compreende todos os elementos na CIF.	ZDR – desenvolvimento autônomo e completo.
	CIF	PN	PN	PN		

						(conclusão)
Estudante	Instrumento utilizado	Angulo	Distância conhecida	Desenho de como calcular distâncias estelares	Observação	Nível de significação
E9	CPE	PN	PN	PN	Reconhece tudo de forma independente.	ZDR – raciocínio bem estruturado sem mediação.
	CG	PN	PN	PN		
	CIF	PN	PN	PN		
E10	CPE	PN	PN	PN	Identifica apenas o ângulo, ignora a distância.	ZDP – compreensão incompleta sozinho.
	CG	PN	PN	PN		
	CIF	PN	NPN	PN		
E11	CPE	NRA	NRA	NRA	Reconhece todos os dados de forma autônoma.	ZDR – raciocínio completo com e sem ajuda.
	CG	PN	PN	PN		
E12	CIF	PN	PN	PN	Entende os três elementos na CIF.	ZDR – raciocínio consolidado.
	CPE	PN	NPN	PN		
	CG	PN	PN	PN		
E13	CIF	PN	PN	PN	Compreende todos os dados e sabe usá-los.	ZDR – entendimento autônomo.
	CPE	PN	PN	PN		
	CG	PN	PN	PN		
E14	CIF	PN	PN	PN	Reconhece todos os elementos do cálculo.	ZDR – compreensão sólida sem auxílio.
	CPE	PN	PN	PN		
	CG	PN	PN	PN		
E15	CIF	PN	PN	PN	Entende e aplica corretamente todos os dados.	ZDR – raciocínio completo com autonomia.
	CPE	PN	PN	PN		
	CG	PN	PN	PN		
E16	CIF	PN	NPN	PN	Reconhece apenas o ângulo, ignora a distância.	ZDP – depende de mediação para completar o raciocínio.
	CPE	NRA	NRA	NRA		
E17	CG	PN	PN	PN	Identifica todos os dados e sabe aplicá-los.	ZDR – compreensão autônoma.
	CIF	PN	PN	PN		
	CPE	PN	NPN	PN		

Fonte: Autora

Neste objetivo, 13 estudantes atingiram a ZDR, sendo que 9 deles só conseguiram após a atividade prática de simulação da paralaxe estelar. Isso reforça a importância da

mediação visual e concreta para a compreensão de conceitos abstratos como o ângulo de paralaxe.

A atividade experimental no ginásio da escola proporcionou uma vivência significativa, na qual os estudantes manipularam instrumentos, simularam distâncias e registraram os dados, aproximando-se de uma experiência científica autêntica. Essa estratégia contribuiu para que transições do tipo ZDP → ZDR ocorressem com clareza e segurança.

Entre os que permaneceram na ZDP, foi possível observar compreensão parcial do processo, mas dificuldade na representação gráfica ou na aplicação dos valores no cálculo final, sugerindo que a abstração ainda exige maior amadurecimento cognitivo.

4.4 Análise geral dos três objetivos

A Tabela 5, foi elaborada como uma síntese comparativa do desempenho dos 17 estudantes em relação aos três objetivos específicos da pesquisa. Na Tabela 5 estão registrados, para cada estudante, o nível de desenvolvimento conceitual identificado em cada momento, incluindo o resultado final, e permite observar o percurso formativo individual ao longo da Unidade de Aprendizagem. Essa análise integrada possibilita visualizar, em uma única matriz, os avanços, as estagnações e os momentos de maior impacto pedagógico, contribuindo para a compreensão da eficácia da proposta didática aplicada.

Para fins de organização da Tabela 5, o nível final de desenvolvimento conceitual foi definido com base no critério de predominância, ou seja, considerou-se como referência o nível mais recorrente entre os três objetivos analisados para cada estudante. Nos casos em que havia dois níveis de ZDP e apenas um de ZDR, considerou-se o ZDR como predominante quando este esteve presente no objetivo de maior complexidade conceitual ou se representava um avanço mais significativo em relação ao perfil prévio do estudante.

A análise conjunta dos três objetivos evidencia o percurso de aprendizagem dos estudantes ao longo da Unidade de Aprendizagem, bem como os efeitos das atividades propostas sobre a compreensão dos conceitos de Trigonometria. A Tabela 6 sintetiza os resultados quantitativos de cada objetivo.

Tabela 5 - Análise comparativa dos níveis de desenvolvimento conceitual por estudante nos três objetivos e no resultado final.

Estudante	Nível de desenvolvimento - Objetivo 1	Nível de desenvolvimento - Objetivo 2	Nível de desenvolvimento - Objetivo 3	Nível de desenvolvimento - Final
E1	ZDR	ZDR	ZDR	ZDR
E2	ZDP	ZDR	ZDR	ZDR
E3	ZDP	ZDP	ZDR	ZDR
E4	ZDP	ZDR	ZDR	ZDR
E5	ZDP	ZDP	ZDR	ZDR
E6	ZDP	ZDR	ZDR	ZDR
E7	ZDR	ZDP	ZDR	ZDR
E8	ZDR	ZDP	ZDR	ZDR
E9	ZDP	ZDP	ZDR	ZDR
E10	ZDP	ZDP	ZDP	ZDP
E11	ZDP	ZDR	ZDR	ZDR
E12	ZDP	ZDR	ZDR	ZDR
E13	ZDR	ZDP	ZDP	ZDR
E14	ZDR	ZDR	ZDR	ZDR
E15	ZDR	ZDR	ZDR	ZDR
E16	ZDP	ZDP	ZDR	ZDR
E17	ZDR	ZDP	ZDR	ZDR

Fonte: Autora

Tabela 6 - Síntese geral dos resultados por objetivo: ZDR, ZDP e transições NPN → PN.

Objetivo	Estudantes em ZDR	Estudantes em ZDP	Transições NPN → PN
1	12	5	6
2	11	6	6
3	13	4	0

Fonte: Autora

A maior ocorrência de transições NPN → PN nos objetivos 1 e 2 demonstra que os estudantes, ao longo da UA, passaram a perceber a necessidade dos elementos fundamentais para o cálculo de distâncias e da aplicação das razões trigonométricas. Já no objetivo 3, não foram observadas transições desse tipo, o que sugere que os estudantes já percebiam a necessidade conceitual ao iniciar a atividade de paralaxe, mas ainda necessitavam de mediação para alcançar a ZDR.

Essa progressão revela a eficácia da proposta pedagógica, especialmente da experimentação e da contextualização, no favorecimento do desenvolvimento conceitual

relacionados à Trigonometria. As atividades práticas, a mediação docente e o trabalho coletivo em sala de aula foram decisivos para que os estudantes internalizassem os conceitos e os aplicassem com maior segurança e autonomia.

Entre os que permaneceram na ZDP, foi possível observar compreensão parcial do processo, mas dificuldade na representação gráfica ou na aplicação dos valores no cálculo final, sugerindo que a abstração ainda exige maior amadurecimento cognitivo.

5. PRODUTO EDUCACIONAL

O produto educacional desenvolvido como parte desta dissertação é composto por dois cadernos complementares e integrados: o Caderno do Aluno e o Caderno do Professor. Ambos foram elaborados a partir da proposta aplicada na pesquisa apresentada aqui, fundamentada na perspectiva histórico-cultural de Vygotsky, e têm como eixo condutor a articulação entre trigonometria e astronomia como forma de tornar a aprendizagem matemática mais significativa, contextualizada e interdisciplinar.

A versão final do produto educacional está nos Apêndices D (caderno do professor) e E (caderno do aluno) e passou por ajustes com base nas observações realizadas durante sua aplicação, especialmente na reorganização da sequência de encontros e na clareza das orientações aos professores, a fim de facilitar sua implementação em contextos escolares diversos.

A proposta surge da constatação, evidenciada ao longo da pesquisa, de que o ensino de trigonometria, quando abordado de forma descontextualizada e puramente algébrica, gera desinteresse e dificuldades entre os estudantes. Ao inserir a astronomia como fio condutor das atividades, busca-se promover o encantamento, a investigação e o pensamento crítico, aproximando os conceitos matemáticos de experiências reais e históricas.

O **Caderno do Aluno** organiza as atividades em quatro grandes blocos:

1. **Guia Turístico – Um Passeio pela História da Trigonometria:** Introdução histórica com personagens como Pitágoras, Ptolomeu, Copérnico e Galileu, combinando leitura crítica, experimentação com barbantes, análise de razões, graus e radianos, e reflexões sobre o papel da observação no desenvolvimento científico.

2. **Triângulos Semelhantes e Razões Trigonométricas:** Construção e análise de triângulos semelhantes e tabelas de razões.

3. **O Teodolito e as Razões Trigonométricas:** Construção de teodolitos artesanais e aplicação prática da trigonometria para medir alturas inacessíveis.

4. **A que distância estamos?:** Investigação e simulação do cálculo de distâncias estelares com base na paralaxe, utilizando também o software Stellarium.

O **Caderno do Professor**, por sua vez, foi cuidadosamente estruturado para garantir que qualquer docente possa aplicar a proposta em sala de aula, mesmo que não tenha

formação específica em astronomia, em história da ciência ou em trigonometria. Para isso, o material apresenta:

- Todo o passo a passo das atividades já estruturado;
- Vídeos explicativos acessados por QR Codes, com demonstrações práticas de montagem dos instrumentos e desenvolvimento das atividades;
- Orientações de mediação e organização dos grupos;
- Materiais necessários e tempo estimado;
- Objetivos específicos e habilidades da BNCC;
- Comentários pedagógicos embasados na perspectiva teórica da pesquisa.

Após a pandemia da COVID-19, muitos professores relataram sobrecarga emocional, exaustão profissional e dificuldades em retomar práticas pedagógicas mais elaboradas. Estudos apontam que o contexto pós-pandêmico intensificou a busca por materiais didáticos prontos, que fossem aplicáveis à realidade da escola pública e auxiliassem no enfrentamento das lacunas de aprendizagem (OLIVEIRA; BORDIGNON, 2021; UNESCO, 2022). Nesse cenário, o desenvolvimento de recursos acessíveis, contextualizados e com orientações claras para aplicação tornou-se ainda mais relevante, especialmente para professores que não dispõem de tempo ou formação específica para construir propostas complexas de forma autônoma.

Essa estrutura foi pensada justamente diante desse cenário atual da educação, em que os professores enfrentam altos níveis de burocracia e escassez de tempo para planejar sequências didáticas criativas e significativas. Pensar, construir e organizar uma proposta como essa exige um investimento que muitos profissionais não conseguem realizar no cotidiano escolar. Por isso, oferecer um material completo, didaticamente orientado e pronto para aplicação amplia significativamente o alcance da proposta, facilitando sua replicação por professores de diferentes áreas e realidades escolares. Ao alinhar conteúdo matemático, história da ciência, prática investigativa e suporte pedagógico acessível, o produto educacional contribui diretamente para tornar o estudo da trigonometria mais interessante, interdisciplinar e estimulante, atendendo aos objetivos desta dissertação e às necessidades concretas da prática docente.

O produto educacional também estará disponível na página do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECiMa) da UCS.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa buscou respostas a seguinte questão de pesquisa: *"Como uma Unidade de Aprendizagem baseada na Astronomia pode contribuir para a aprendizagem significativa da Trigonometria no Ensino Médio?"*. Em sintonia com a questão de pesquisa, a investigação teve como objetivo investigar de que forma uma Unidade de Aprendizagem contextualizada pela Astronomia poderia contribuir para o desenvolvimento do pensamento trigonométrico de estudantes do Ensino Médio, especialmente no que se refere ao cálculo de distâncias inacessíveis.

Para alcançar esse objetivo, foi elaborada uma Unidade de Aprendizagem fundamentada na Teoria Sociointeracionista de Vigotski e estrutura na perspectiva dos Três Momentos Pedagógicos. A UA foi aplicada em uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual em Caxias do Sul, RS.

Os dados obtidos por meio da aplicação dos instrumentos pedagógicos indicaram avanços significativos nos três objetivos de aprendizagem propostos, que foram: (1) identificar se os estudantes reconhecem os elementos necessários para o cálculo de distâncias inacessíveis; (2) avaliar a aplicação das razões trigonométricas; e (3) investigar a compreensão do conceito de paralaxe estelar. Tais avanços ocorreram principalmente com a inserção de atividades práticas, contextuais e interdisciplinares, principalmente com a inserção de atividades práticas, contextuais e interdisciplinares.

Com base nos níveis de desenvolvimento conceitual analisados, foi possível identificar que a maioria dos estudantes atingiu a Zona de Desenvolvimento Real (ZDR) ao final da Unidade de Aprendizagem. Os dados também revelaram transições importantes de NPN (Não Percebe Necessidade) para PN (Percebe Necessidade) nos dois primeiros objetivos. Essa mudança evidencia um avanço importante na forma como os estudantes passaram a compreender os conceitos envolvidos, indicando que reconheceram a importância das razões trigonométricas e dos elementos necessários ao cálculo de distâncias inacessíveis. Inicialmente, muitos estudantes não percebiam sentido ou aplicabilidade nos conteúdos apresentados; no entanto, ao longo das atividades práticas e mediadas, especialmente com o uso do teodolito e da simulação da paralaxe estelar, demonstraram maior compreensão e intencionalidade no uso desses conceitos. Essa transição, da não percepção para a percepção da necessidade, é um indicativo importante de aprendizagem significativa e do fortalecimento da autonomia intelectual dos alunos. Tais avanços dialogam com o referencial teórico que

embasou esta proposta, especialmente a abordagem histórico-cultural de Vygotsky, que reconhece o papel da mediação, da linguagem e da interação social na formação dos conceitos científicos. Além disso, os Três Momentos Pedagógicos de Delizoicov, Angotti e Pernambuco (2002) nortearam a organização didática da proposta, promovendo uma construção progressiva do conhecimento com base na problematização, na organização do conhecimento e na aplicação. A aprendizagem significativa observada nos estudantes reflete, portanto, a potência de propostas que articulam teoria e prática, linguagem e experiência, intencionalidade pedagógica e mediação ativa do professor.

No entanto, é necessário destacar que os resultados devem ser considerados conforme o contexto da turma. Durante a aplicação da proposta, alguns estudantes apresentaram elevado número de faltas, o que comprometeu a participação em atividades essenciais, como o uso do teodolito ou a simulação da paralaxe estelar. Esses fatores influenciaram tanto os níveis de significação alcançados quanto a consolidação dos conhecimentos de forma autônoma. Ainda assim, mesmo os estudantes com presenças irregulares demonstraram avanços, o que reforça a potência da proposta didática adotada.

Também se evidenciou a dificuldade de aplicar uma proposta extensa no cotidiano escolar. Ao longo do período, diversas situações interferiram na sequência planejada, como avaliações institucionais, atividades burocráticas e ações promovidas pela própria escola (reuniões, palestras, eventos), exigindo adaptações constantes. Esses aspectos reforçam a importância de propor sequências didáticas flexíveis e viáveis dentro da realidade da escola pública.

Com base nessas experiências, o produto educacional foi reorganizado em uma versão com menor número de encontros, sem comprometer os objetivos centrais da proposta. Essa reformulação busca facilitar a aplicação por outros professores, considerando as limitações de tempo e estrutura comumente enfrentadas. A versão final do produto educacional encontra-se disponível nos Apêndices D e E, bem como, na página do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECiMa) da UCS.

A Unidade de Aprendizagem desenvolvida demonstrou que a Trigonometria pode ser ensinada de forma significativa quando articulada a contextos reais, históricos e científicos, como a Astronomia. O uso de recursos como o Stellarium, o teodolito artesanal e o resgate histórico por meio do Guia Turístico proporcionaram uma experiência educacional conectada à realidade dos estudantes, favorecendo o engajamento e a aprendizagem.

Como resultado da pesquisa, foi elaborado um Produto Educacional composto por dois cadernos: um voltado ao aluno e outro ao professor. O material foi organizado de forma clara, com orientações detalhadas das atividades, QR Codes com vídeos explicativos e sugestões de mediação, possibilitando a aplicação mesmo por professores que não tenham formação específica na área de Astronomia. Essa estrutura contribui para tornar o ensino da Trigonometria mais acessível, contextualizado e atrativo.

A proposta apresenta elevado potencial de replicabilidade por professores de diferentes áreas e realidades escolares. Ao articular Astronomia, História da Ciência e Trigonometria em experiências contextualizadas, esta proposta contribui não apenas para o fortalecimento do pensamento matemático dos estudantes, mas também para a atuação docente reflexiva, criativa e transformadora.

Esta pesquisa me permitiu vislumbrar diversas possibilidades para trabalhos futuros que podem expandir e aprofundar a proposta aqui desenvolvida. Uma direção que considero promissora seria um estudo metodológico mais detalhado, explorando como os conceitos de Vigotski - mediação, linguagem e Zona de Desenvolvimento Proximal - podem orientar de forma mais explícita tanto a análise dos dados quanto nossa compreensão sobre como os estudantes desenvolvem conceitos matemáticos.

Outra vertente que me parece relevante é investigar mais profundamente o papel da Astronomia nesta proposta. Durante a aplicação, percebi que ela funcionou muito mais do que apenas um "tema de fundo" - ela realmente estruturou toda a aprendizagem, criando pontes naturais entre matemática, ciências e história. Esse potencial articulador merece ser melhor explorado.

O material didático que desenvolvemos também abre possibilidades interessantes. Observei que os vídeos, QR Codes e orientações detalhadas tornaram a proposta acessível mesmo para colegas sem formação específica em Astronomia. Isso sugere que materiais assim podem funcionar como ferramentas efetivas de apoio à prática docente, oferecendo ao professor recursos prontos sem exigir que ele construa tudo do zero.

Vejo ainda potencial para discutir como esse tipo de material pode contribuir para a formação continuada dos professores - não aquela formação formal e distante da sala de aula, mas uma formação que acontece na própria prática, apoiando o docente em seu cotidiano.

Essas possibilidades reforçam meu compromisso em desenvolver propostas que sejam ao mesmo tempo inovadoras e viáveis para a realidade da escola pública, contribuindo efetivamente para transformar o ensino de Matemática.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANGOTTI, J. A. **Educação em Ciências: questões sobre a formação de professores**. São Paulo: Cortez, 1990.

BACHELARD, G. **O racionalismo aplicado**. Tradução de Nathanael Caixeiro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1977.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Ministério da Educação. Brasília, DF: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 09 nov. 2020.

BRASIL, **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. – Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL. **PCNs+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEMT, 2002.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROLEZZI, A. C. **A arte de contar: uma introdução ao estudo do valor didático da história da matemática**. 1991. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação da USP, São Paulo.

CABRAL DA COSTA, S. S.; ZIMMER KLEIN, M. E. **Investigando as concepções prévias dos estudantes do segundo ano do ensino médio e seus desempenhos em alguns conceitos do campo conceitual da trigonometria**. Bolema, Rio Claro, SP, v. 24, n. 38, p. 43-73, 2011.

COSTA, A. S. M. **A utilização do Geogebra como ferramenta para o ensino de trigonometria**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, 2017.

- COSTA, N. L. **Concepções espontâneas e ensino de ciências: uma análise crítica**. Caderno Catarinense de Ensino de Física, v. 26, n. 1, p. 42-64, 2009.
- DAMIANI, M. F. et al. **Discutindo as pesquisas do tipo intervenção pedagógica**. Cadernos de Educação, n. 45, p. 57-67, 2013.
- DARSIE, M. **Trigonometria e Astronomia: uma proposta didática para o ensino médio**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, 1999.
- DELIZOICOV, D. **Ensino de Ciências: fundamentos e métodos**. São Paulo: Cortez, 2001.
- DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J. A.; PERNAMBUCO, M. M. **Ensino de ciências: fundamentos e métodos**. São Paulo: Cortez, 2002.
- FRAKNOI, A.; MORRISON, D.; WOLFF, S. **Astronomy**. OpenStax College, 2017.
- FRANCO, M. A. M. **A pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e métodos**. São Paulo: EPU, 1989.
- FRIEDRICH, J. **Lev Vigotski: mediação, aprendizagem e desenvolvimento**. São Paulo: Mercado de Letras, 2012.
- FRÓES, A. L. D. **Astronomia, Astrofísica e Cosmologia para o Ensino Médio**. RBEF, v. 36, n. 3, 2014.
- GIOVANNINI, O.; CATELLI, R.; HOFFMANN, P. **Trigonometria e Astronomia: uma proposta de abordagem didática com base na paralaxe estelar**. Anais do Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, 2022.
- HERNÁNDEZ, F.; VENTURA, M. **A organização do currículo por projetos de trabalho: o conhecimento é um caleidoscópio**. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- LANGHI, R.; NARDI, R. **Educação em Astronomia: repensando a formação de professores**. São Paulo: Escritura, 2012.
- LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994.
- MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- MOREIRA, M. A. **Pesquisa em ensino: aspectos metodológicos**. Porto Alegre: UFRGS, 2009.

- MOREY, B. B.; GOMES, S. C. Uma sequência de ensino de trigonometria numa abordagem histórica. In: OLIVEIRA, Kelvin Barbosa de; PRADO, Maria Raimunda Matos (organizadores). **Projetos e ações em ensino de ciências naturais e matemática**. Natal: IFRN, 2014. p. 59-83.
- MORIN, E. **A religião dos saberes: o desafio do século XXI**. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2013.
- OLIVEIRA, D. A.; BORDIGNON, G. L. Educação pós-pandemia: reconfigurações do trabalho docente e desafios contemporâneos. *Revista Brasileira de Educação*, v. 26, 2021.
- OLIVEIRA, M. K. de. **Vygotsky: aprendizagem e desenvolvimento – um processo sócio-histórico**. São Paulo: Scipione, 1997.
- PALANGANA, I. C. **Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vigotski: a relevância do social**. São Paulo: Summus, 2015.
- PEDROSO, A. **Ensinar Matemática com mais sentido: o que pensam os professores sobre uma abordagem histórico-cultural**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.
- PEREIRA, S. M. **A história da ciência como possibilidade de contextualização no ensino de ciências**. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, 2015.
- PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Referencial Curricular de Matemática**. Recife: SE, 2002.
- PREDIGER, J.; BERWANGER, L.; MÖRS, M. F. **Relação entre aluno e matemática: reflexões sobre o desinteresse dos estudantes pela aprendizagem desta disciplina**. *Destaques Acadêmicos*, v. 1, n. 4, 2013.
- REGO, T. C. **Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação**. Petrópolis: Vozes, 2002.
- SEF. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- SEMTEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.
- SILVA, G. A. O. et al. **O uso do teodolito como uma ferramenta no ensino de trigonometria**. In: VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática, 2013.

UNESCO. Education in a post-COVID world: Nine ideas for public action. Paris: UNESCO, 2022.

UFRGS. **Educação Matemática e Interdisciplinaridade**. Porto Alegre: UFRGS, 2009.

UFSC. **Grupo de Pesquisa em Educação Científica e Tecnológica**. Florianópolis: UFSC, 2001.

VALENTE, J. A. **Tecnologia e formação de professores: o caso do Brasil**. Educação & Sociedade, Campinas, ano XX, n. 68, p. 25-48, abr. 1999.

VIGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1988.

VIGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. Trad. Jefferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VIGOTSKY, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2009.

8. APÊNDICE A – GUIA TURÍSTICO

Vênus e as montanhas lunares

(OBA 2009) Galileu Galilei (1564-1642) é bastante lembrado pelo uso astronômico das lentes, que ampliava imagens e com isso via coisas nos céus que ninguém observava a olho nu, como as manchas solares, as montanhas da Lua, as fases de Vênus, quatro dos satélites de Júpiter, os anéis de Saturno e as estrelas da Via Láctea. Galileu não só observou algumas das montanhas lunares como calculou suas alturas. O método que ele usou era baseado em geometria simples. Galileu observava o topo de uma montanha (ponto B na figura ao lado) quando iluminada pelo Sol.



Esta figura ilustra a maneira como Galileu calculou a altura (BC) de uma montanha da Lua. Ele obteve a distância AB a partir de observações que fez com a luneta e conhecia o raio da Lua. Adotando AB como 44,73 km e o raio da Lua 1.000 km (apenas para simplificar as contas), calcule, com a ajuda do Teorema de Pitágoras, a altura da montanha lunar (BC) da figura. (Use $44,732 = 2.001$ e $1.0012 = 1.002.001$).

O Universo Geocêntrico de Ptolomeu

Claudio Ptolomeu (90 d.C.- 168 d.C.) fez uma extraordinária tentativa de conciliar a fria realidade dos movimentos estelares e planetários observados com os círculos e esferas da filosofia aristotélica" (MOSLEY, LYNCH, 2011).

Schema cosmographia Aristotelis-Scholastica.



Para medir ângulos são utilizadas duas unidades de medida, os graus (Sumérios - sistema sexagesimal) onde o círculo é dividido em 360 partes iguais, onde cada uma mede 1 grau, cada grau é dividido em 60 minutos e cada minuto em 60 segundos. Também é utilizada a unidade de medida conhecida como radianos (James Thomson, 1873) tomando como referência o tamanho do raio da circunferência.

O raio de uma circunferência é a distância de seu centro a um ponto qualquer do contorno. Desenhe uma circunferência de raio 5 (cinco) cm.

Referências

OBA - Olimpíada Brasileira de Astronomia - Disponível em: <http://www.oba.org.br/site/>. Acesso em 16 de Setembro de 2016.

MOSLEY, Michael; LYNCH, John. Uma história da Ciência. 2011.

UM PASSEIO PELA TRIGONOMETRIA

QUIA TURÍSTICO

Nome: _____

Turma: 20__

2017

Harmonia no firmamento

Pitágoras de Samos (580 a.C. - 500 a.C) fundou a Escola Pitagórica, onde todos os membros deveriam ser vegetarianos e abrir mão de todos os bens pessoais. Acreditavam na harmonia do firmamento e afirmavam em sua filosofia que tudo é número. Pitágoras ensinava que os movimentos do Sol, da Lua e dos Planetas devem basear-se na forma geométrica mais simples e pura, o círculo. A obsessão de Pitágoras por círculos levou-o a concluir que a Terra era não era plana, mas uma bola arredondada flutuando no espaço, através da observação de eclipses lunares.

Para que você possa interagir mais com os círculos, construa 4 círculos com diâmetros de tamanhos diferentes. Para auxiliá-lo na atividade, preencha a tabela a seguir utilizando também, barbante, régua e calculadora.

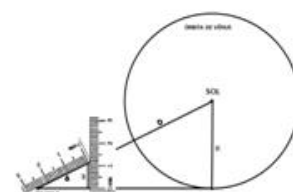
Circulo nº	Comprimento em cm	Diâmetro em cm	Comprimento Diâmetro
1-			
2-			
3-			
4-			

Terra "rebaixada" a apenas um planeta

Nicolau Copérnico (1473 - 1543) astrônomo que concluiu que o Sol é o centro do Universo e que a velocidade dos planetas muda conforme sua distância com relação ao Sol, surgindo então a Teoria Heliocêntrica. A obra de Copérnico continha seis livros, porém, quando as últimas páginas de sua obra foram impressas e chegaram a Copérnico, ele já estava velho e muito debilitado, falecendo no dia em que seus olhos se fecharam, em 24 de maio de 1543. Porém, estava doente demais para perceber que a introdução de sua obra, continha uma introdução anônima afirmando que sua Teoria era apenas um artifício matemático conveniente.

(OBA, 2015) Observando o planeta Vênus, diariamente, vemos que ele atravessa a linha imaginária Terra-Sol e vai se afastando até um valor máximo, que chamamos de elongação máxima. Depois ele volta, aparentemente, a se aproximar do Sol, passa atrás do Sol, reaparece e vai se afastando dele até o mesmo afastamento máximo já observado do outro lado. A figura ilustra o afastamento máximo num dos lados. Copérnico não sabia a distância entre a Terra e o Sol, por isso ele a chamou de $D = 1 \text{ U.A.}$ (uma Unidade Astronômica), mas ele sabia

geometria elementar, ou seja, ele sabia que: $\frac{h}{d} = \frac{H}{D}$



Determine, tal como fez Copérnico, a distância (H) entre Vênus e o Sol, em Unidades Astronômicas. Observação: o triângulo pequeno pode ser de qualquer tamanho, desde que semelhante ao grande. Colocamos régua para você medir d e h, mas você pode usar a sua se preferir, porém não misture as régua!

9. APÊNDICE B – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA - GUIA TURÍSTICO

ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO MÉDIO ALEXANDRE ZATTERA
DISCIPLINA: MATEMÁTICA PROFESSORA: PAULA HOFFMANN
2º ANO DO ENSINO MÉDIO TURMA: _____ DATA: ____/____/2017

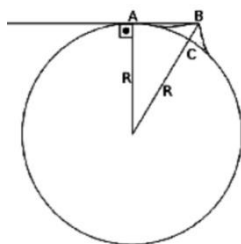
ESTUDANTE(A): _____

ORIENTAÇÕES: Essa avaliação tem como objetivo realizar um diagnóstico do que você já aprendeu. Os objetivos de aprendizagem que serão analisados são: 1 – Sintetizar o que foi aprendido e relacionar a medida PI como a razão que a origina; 2 – Comparar e relacionar as medidas de ângulos em graus e radianos; 3 – Aplicar o teorema de Pitágoras; 4 – Identificar as habilidades relacionadas às razões trigonométricas. Faça com calma e atenção.

Atividade 1 – Arquimedes de Siracusa (287 a. C – 212 a. C) foi quem elaborou o primeiro método eficiente para obter sequências de números que se aproximavam indefinidamente da constante. Em uma mesma circunferência, ele construiu polígonos regulares inscritos e circunscritos e dividiu o perímetro de cada um pelo diâmetro da circunferência.

- a) Após a realização das atividades propostas no “Guia Turístico – um passeio pela Trigonometria”, que características você consegue identificar em uma circunferência? Por exemplo: relação entre o raio e o diâmetro, entre outros.
- a) De que forma podemos obter o valor aproximado do número π ? Desenhe uma circunferência e mostre como encontrar, de forma aproximada, o valor de π .
- b) Que relação podemos fazer entre as unidades de medida de ângulos em graus e radianos? Faça um desenho que exemplifique esta relação e mostre através de um exemplo numérico de que forma é possível fazer a conversão destas unidades. Dica: para fazer o desenho identifique ângulos em graus e radianos; para exemplificar a conversão das unidades, escolha um ângulo em graus ou radianos e converta na outra unidade de medida.

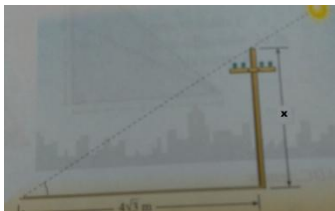
Atividade 2 - (OBA 2009) Galileu Galilei (1564-1642) é bastante lembrado pelo uso astronômico das lentes, que ampliava imagens e com isso via coisas nos céus que ninguém observava a olho nu, como as manchas solares, as montanhas e crateras da Lua, as fases de Vênus, quatro dos satélites de Júpiter, os anéis de Saturno e as estrelas da Via Láctea. Galileu não só observou algumas das montanhas lunares como calculou suas alturas. O método que ele usou era baseado em geometria simples. Galileu observava o topo de uma montanha (ponto B na figura abaixo) quando iluminada pelo Sol.



Esta figura (ao lado) ilustra a maneira como Galileu calculou a altura (BC) de uma montanha da Lua. Ele obteve a distância AB a partir de observações que fez com a luneta e conhecia o raio da Lua. Adotando AB como 44,73 km e o raio da Lua 1.001 km

(apenas para simplificar as contas), calcule, com a ajuda do Teorema de Pitágoras, a altura da montanha lunar (BC) da figura. (Use $44,73^2 = 2.001$ e $1.001^2 = 1.002.001$).

Atividade 3 - Um poste projeta uma sombra de $4\sqrt{3}$ m sobre o solo. A inclinação dos raios luminosos é de 30° . Qual é a altura do poste?



Atividade 4 – Dentre os assuntos discutidos em aula até o momento, qual chamou mais a sua atenção? Justifique e escreva um pouco sobre o assunto.

10. APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO FINAL

ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO MÉDIO ALEXANDRE ZATTERA

DISCIPLINA: MATEMÁTICA

PROFESSORA: PAULA HOFFMANN

ESTUDANTE(A): _____

QUESTIONÁRIO – ATIVIDADE: DISTÂNCIA DE ESTRELAS

1) Que bom (aspectos positivos):

1) Que pena (aspectos negativos):

2) Que tal (sugestões a melhorar):

3) O que mais me chamou atenção na atividade realizada:

4) Dúvidas que ainda fiquei:

5) Represente por meio de um desenho a forma como é feita a medida da distância de estrelas.

6) Se for preciso medir uma distância inacessível (onde não é possível utilizar uma trena para medi-la), de que elementos você precisa? Cite um exemplo.

- 7) Em sua opinião, por que o resultado obtido nas atividades realizadas para o cálculo da medida da distância de estrelas varia de um estudante para o outro?
- 8) Um paraquedista salta de um avião quando este se encontra a 1.800 m de altura em relação ao solo. Devido à velocidade do avião e da ação do vento, o paraquedista cai conforme indica o desenho. A que distância do ponto B o pára-quedista vai cair?



11. APÊNDICE D – CADERNO DO PROFESSOR





Apresentação

Olá, colega professor ou professora! 😊

Antes de mais nada, queremos dar as boas-vindas e desejar que essa jornada, que conecta a Matemática e as estrelas, possa contribuir efetivamente para o aprimoramento da prática pedagógica.

O presente produto educacional, gerado a partir de uma pesquisa desenvolvida no curso de mestrado profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Caxias do Sul, consiste em um guia didático composto por dois cadernos: o **Caderno do Professor** e o **Caderno do Aluno**.

Para facilitar a aplicação da proposta pedagógica, nesse documento é apresentado o **Caderno do Professor**.

No **Caderno do Professor**, você vai encontrar explicações detalhadas, orientações práticas e sugestões que podem auxiliar a mediação e facilitar a aplicação das atividades propostas. Ao mesmo tempo, os alunos estarão acompanhando as atividades com o **Caderno do Aluno**.

A ideia central do produto educacional é que você se sinta seguro(a), inspirado(a) e com vontade de explorar esse conteúdo de um jeito leve, criativo e cheio de sentido para os estudantes, através de uma jornada pedagógica envolvendo a trigonometria e as estrelas.

Nesse sentido, o **Caderno do Professor** foi pensado com muito carinho para te apoiar em cada passo dessa jornada pedagógica, mesmo que você não seja especialista em trigonometria ou astronomia.

Desejamos uma ótima viagem!





Introdução

O percurso da jornada pedagógica começa com uma etapa muito especial:
o **Guia Turístico**.

Com o **Guia Turístico** os alunos farão um **passeio pela história da trigonometria através da astronomia**. Eles conhecerão personagens históricos, refletirão sobre o universo, explorarão o conceito de circunferência, razão entre medidas e até brincarão com barbantes e cálculos para entender como tudo isso se conecta com os ângulos. Essa abertura serve como uma espécie de "embarque" para a jornada que virá a seguir.

Vale dedicar tempo e atenção a essa fase, pois ela cria o clima e ativa o imaginário dos estudantes desde o início!

Para te dar uma visão geral da jornada pedagógica, aqui vai um **breve resumo do que você vai encontrar**, após a etapa do **Guia Turístico**

Atividade 1: os alunos constroem triângulos semelhantes e observam as proporções entre os lados, iniciando o entendimento das razões trigonométricas.

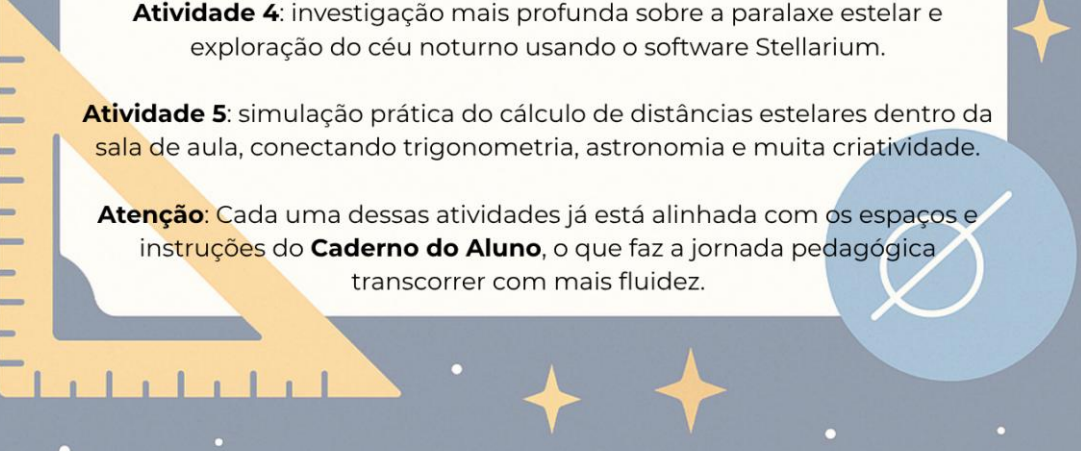
Atividade 2: é hora de colocar a mão na massa com a construção de um teodolito e aplicação das razões trigonométricas para medir alturas inacessíveis na escola.

Atividade 3: um momento diagnóstico, em que os alunos levantam hipóteses sobre como seria possível medir a distância até as estrelas.

Atividade 4: investigação mais profunda sobre a paralaxe estelar e exploração do céu noturno usando o software Stellarium.

Atividade 5: simulação prática do cálculo de distâncias estelares dentro da sala de aula, conectando trigonometria, astronomia e muita criatividade.

Atenção: Cada uma dessas atividades já está alinhada com os espaços e instruções do **Caderno do Aluno**, o que faz a jornada pedagógica transcorrer com mais fluidez.





Objetivos Gerais da Jornada

- Tornar a aprendizagem da trigonometria significativa por meio da articulação com a astronomia.
- Desenvolver o raciocínio geométrico e a compreensão das razões trigonométricas.
- Explorar a paralaxe estelar como aplicação prática da trigonometria.
- Estimular a observação, investigação científica e o pensamento crítico.

Habilidades da BNCC envolvidas

- (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas que envolvam razões trigonométricas em triângulos retângulos.
- (EM13MAT403) Utilizar modelagem geométrica para compreender fenômenos naturais e artificiais.
- (EM13CNT103) Investigar e compreender as leis físicas que regem o universo.

Sugestão de Cronograma

Cada aula possui um tempo de 50 minutos

Aula 1: Guia Turístico e introdução histórica

Aula 2: Triângulos semelhantes

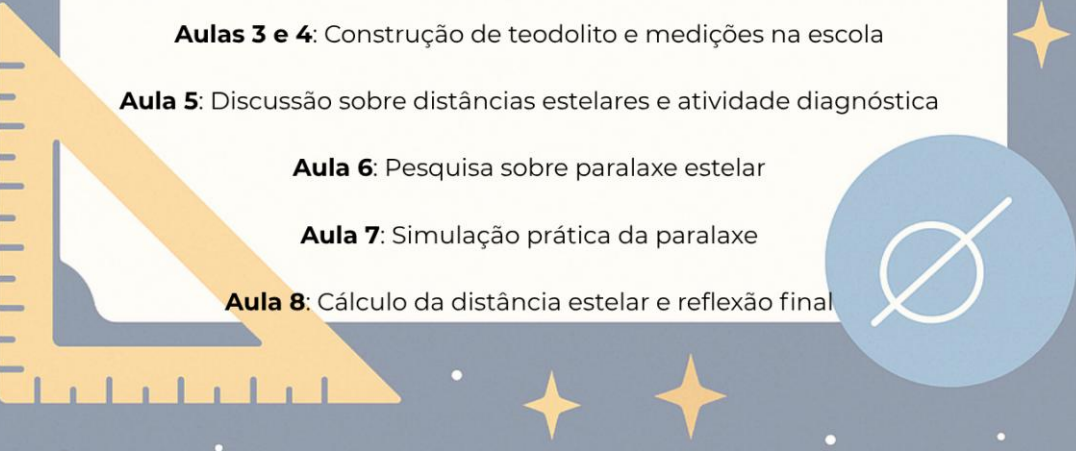
Aulas 3 e 4: Construção de teodolito e medições na escola

Aula 5: Discussão sobre distâncias estelares e atividade diagnóstica

Aula 6: Pesquisa sobre paralaxe estelar

Aula 7: Simulação prática da paralaxe

Aula 8: Cálculo da distância estelar e reflexão final





O Guia Turístico – Abertura da Jornada Pedagógica

Antes das atividades, a jornada pedagógica inicia com uma proposta introdutória chamada **Guia Turístico: Um Passeio pela Trigonometria**.

Essa etapa inicial tem o objetivo de despertar a curiosidade dos estudantes, contextualizando historicamente a trigonometria por meio de personagens como Pitágoras, Ptolomeu, Copérnico, Galileu e a própria observação do céu.

O Guia Turístico consiste em uma sequência de atividades com reflexões, QR Codes, experimentos simples e uma introdução prática ao conceito de círculo, ângulo e razão.

Como conduzir

Apresente os personagens históricos de forma descontraída, como se fossem guias dessa viagem.

Incentive os alunos a responderem às perguntas no próprio caderno, trazendo suas hipóteses.

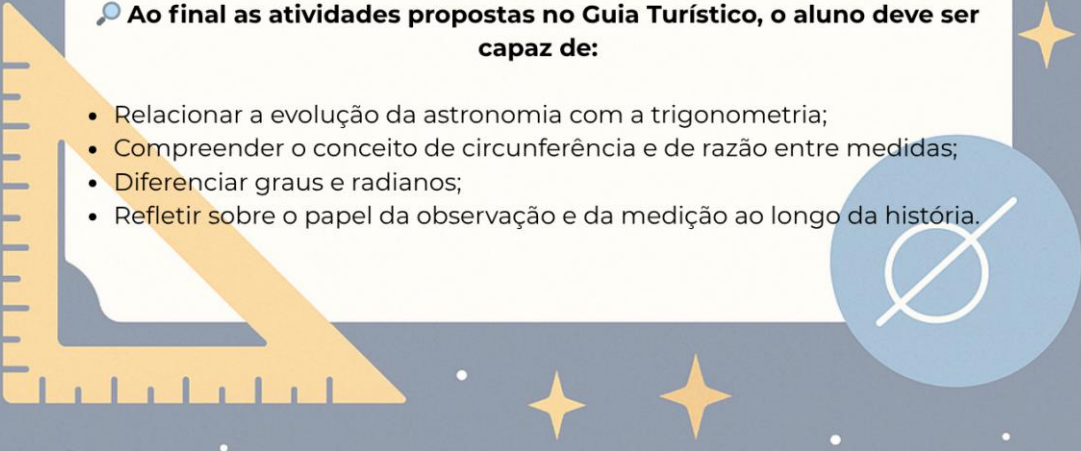
Orienta os alunos na construção dos círculos com barbante, régua e calculadora.

Promova trocas entre os grupos sobre os resultados obtidos com a medição das circunferências e reflexões sobre graus e radianos.

Os vídeos acessados pelos QR Codes complementam bem a narrativa: assista com a turma sempre que possível.

Essa introdução é fundamental para criar o clima de encantamento e dar sentido às atividades mais técnicas que virão depois.

 **Ao final as atividades propostas no Guia Turístico, o aluno deve ser capaz de:**

- Relacionar a evolução da astronomia com a trigonometria;
 - Compreender o conceito de circunferência e de razão entre medidas;
 - Diferenciar graus e radianos;
 - Refletir sobre o papel da observação e da medição ao longo da história.
- 

O Guia Turístico – A Jornada

Orientações sobre o uso do Guia Turístico: Um Passeio pela Trigonometria

O Guia Turístico será entregue aos estudantes como uma introdução prática, histórica e reflexiva ao conteúdo de Trigonometria. Para facilitar a sua utilização em sala de aula, organizamos o guia em um formato de folder dobrável, que estará anexado nas últimas páginas deste Caderno do Professor.

Formato de impressão:

O guia foi planejado para ser impresso em frente e verso. Após impresso, deve ser dobrado em 4 partes (sanfonado ou tipo mapa), formando um folder compacto e interativo.

Importante:

Esse mesmo guia será entregue juntamente com o material do aluno, facilitando o acompanhamento das atividades em sala.

As páginas estão organizadas de forma que, ao dobrar corretamente, as informações sigam uma leitura contínua e fluida.

 A proposta do folder é que os estudantes manuseiem, leiam e interajam com o material como se estivessem em uma viagem guiada pela história da trigonometria — por isso a estética e o nome “Guia Turístico”.



 Materiais necessários:

- Barbantes
- Régua
- Calculadora
- Transferidor
- Lápis e borracha

 Habilidades desenvolvidas:

Relacionar fenômenos astronômicos com conceitos matemáticos.
Utilizar medidas e instrumentos simples para investigar propriedades geométricas.

Formular hipóteses e observar relações entre grandezas.

Descrição das Atividades do Guia Turístico com Resoluções **Atividade - Harmonia no firmamento**

Nesta atividade, os alunos constroem 4 circunferências com diâmetros diferentes e medem o comprimento de cada uma usando barbantes.

Eles registram os valores em uma tabela e calculam a razão entre o comprimento e o diâmetro (C/D).

 Resolução esperada:

Independentemente do tamanho da circunferência, a razão C/D deve se manter próxima de 3,14, antecipando a ideia de π (pi).

 Atividade - O Universo Geocêntrico de Ptolomeu

Os alunos medem o comprimento de uma circunferência usando pedaços de barbante do tamanho do raio e relacionam o total com o número de pedaços necessários.

 Resoluções esperadas:

- a) Cerca de 6,28 pedaços de barbante por circunferência $\rightarrow$ relação $C/r = 2\pi$
- b) Relação com a atividade 1: ambas mostram razões constantes e envolvem a razão π .
- c) Relação com "Harmonia no Firmamento": uso de círculos e simetria celeste
- d) Relação entre graus e radianos: $360^\circ = 2\pi \text{ rad} \rightarrow 1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$



Atividade - Terra “rebaixada” a apenas um planeta

A partir da proporção entre triângulos semelhantes, os alunos estimam a distância entre Vênus e o Sol em Unidades Astronômicas (UA), usando medidas do desenho.

✓ Resolução esperada:

$$h / d = H / 1$$

$$\rightarrow \text{Exemplo: } 2,5 \text{ cm} / 5 \text{ cm} = H$$

$$\rightarrow H = 0,5 \text{ UA}$$

Atividade - Vênus e as montanhas lunares

Os alunos analisam a forma como Galileu estimou a altura de uma montanha na Lua a partir da sombra projetada. Devem aplicar o Teorema de Pitágoras com os dados fornecidos ($AB = 43,7 \text{ km}$, $AC = 1000 \text{ km}$).

✓ Resolução esperada:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\rightarrow 1000^2 = 43,7^2 + BC^2$$

$$\rightarrow BC \approx 999 \text{ km}$$

Para **acessar os vídeos do Guia Turístico, sem o uso do celular**, clique nos links abaixo:

- [Atividade - Harmonia no firmamento](#) - como calcular o valor de π (π).
 - [Atividade - O Universo Geocêntrico de Ptolomeu](#) - como transformar graus em radianos.
 - [Atividade - Terra “rebaixada” a apenas um planeta](#) - como calcular medidas utilizando a semelhança de triângulos.
 - [Atividade - Vênus e as montanhas lunares](#) - como calcular medidas utilizando o Teorema de pitágoras.
- 

Para acessar vídeos sobre os personagens históricos citados no Guia Turístico:



Pitágoras de Samos



A filosofia de Pitágoras de Samos



Ptolomeu



Universo Geocêntrico



Copérnico



Universo Geocêntrico vs Universo Heliocêntrico

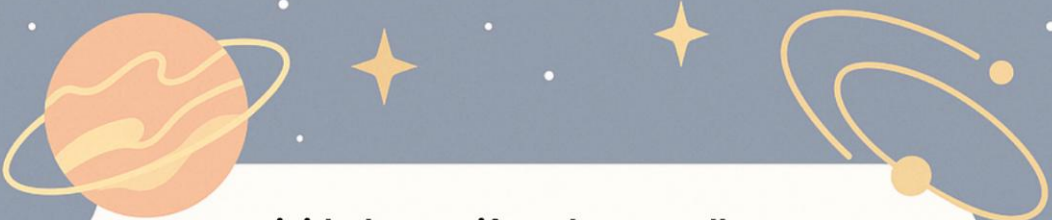


Galileu Galilei



A vida de Galileu Galilei





Atividade 1 – Triângulos semelhantes

Objetivo específico: Compreender as relações de proporcionalidade em triângulos semelhantes.

Materiais: Régua, transferidor, compasso, lápis, papel A4.
Tempo estimado: 1 aula (50 min)

Orientações: Os alunos devem construir três triângulos com os mesmos ângulos (90° , 70° , 20°), mas tamanhos diferentes.

Estimule a comparação visual e numérica entre os lados.

Após o cálculo das razões, proponha um debate: “as razões são semelhantes mesmo com tamanhos diferentes?”

No caderno do aluno, já há espaços reservados para desenhar os triângulos e preencher a tabela com os valores encontrados.

Gabarito modelo: As razões trigonométricas de um mesmo ângulo devem se manter estáveis, mesmo com lados maiores ou menores.

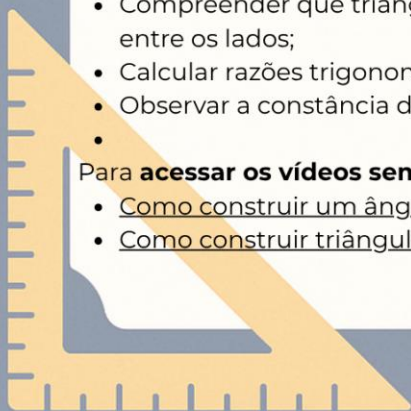
Dica de mediação: Caso os resultados fiquem muito diferentes, oriente os estudantes a revisarem os desenhos e a utilização correta do transferidor.

 **Ao final desta atividade, o aluno deve ser capaz de:**

- Compreender que triângulos com mesmos ângulos mantêm proporção entre os lados;
- Calcular razões trigonométricas;
- Observar a constância das razões para ângulos iguais.

Para **acessar os vídeos sem o uso do celular** clique nos links abaixo:

- [Como construir um ângulo utilizando o transferidor](#)
- [Como construir triângulo com transferidor](#)





Atividade 2 – Construção e uso do Teodolito

Objetivo específico: Aplicar as razões trigonométricas em situações reais por meio da construção de um instrumento de medição (teodolito).

Materiais: Transferidor, canudo, cola, tachinha, base de papelão ou EVA.

Tempo estimado: 2 aulas (50 min cada)

Orientações: Organize os alunos em duplas ou trios para a construção do teodolito.

Disponibilize o QR Code presente no caderno do aluno para acessar o vídeo tutorial.

Após a construção, peça que escolham três objetos de altura inacessível na escola.

Com o auxílio do teodolito, os estudantes devem medir os ângulos e registrar as distâncias.

No caderno do aluno, há uma tabela preparada para esse registro, bem como perguntas de reflexão que devem ser discutidas em grupo.

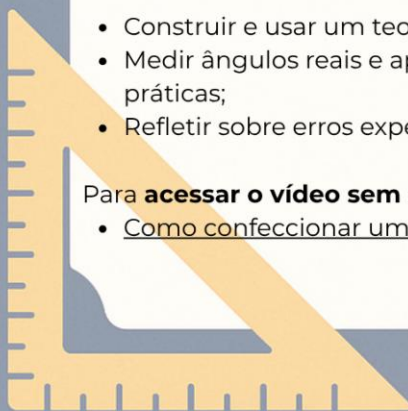
Dica de mediação: Incentive os alunos a se revezarem nas medições. Discuta os possíveis erros de paralaxe instrumental ou variações nos ângulos medidos.

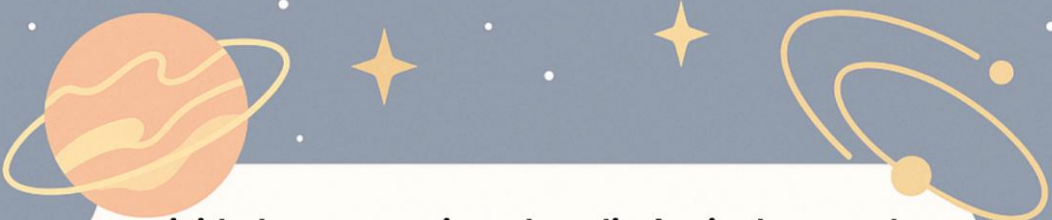
 **Ao final desta atividade, o aluno deve ser capaz de:**

- Construir e usar um teodolito artesanal;
- Medir ângulos reais e aplicar as razões trigonométricas em situações práticas;
- Refletir sobre erros experimentais e interpretação dos dados.

Para **acessar o vídeo sem o uso do celular** clique no link abaixo:

- [Como confeccionar um teodolito](#)





Atividade 3 – Investigando a distância das estrelas

Objetivo específico: Explorar o conceito de distância estelar a partir de ideias prévias dos alunos.

Materiais: Caderno do aluno, lousa ou flipchart para anotações coletivas.

Tempo estimado: 1 aula (50 min)

Orientações: Antes de apresentar a teoria, proponha uma conversa guiada pelas perguntas que já estão no caderno do aluno. Valorize todas as hipóteses levantadas.

Estimule o uso de desenhos, analogias e argumentos próprios. Essa é uma etapa diagnóstica para preparar o terreno para a explicação da paralaxe.

 **Ao final desta atividade, o aluno deve ser capaz de:**

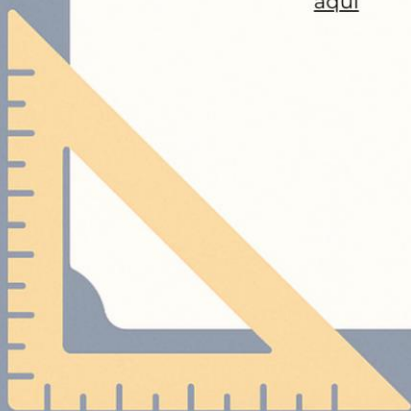
- Formular hipóteses sobre como medir distâncias astronômicas;
- Justificar ideias com base em conhecimentos prévios;
- Representar visual ou simbolicamente seus raciocínios.



Para saber mais sobre paralaxe
escaneie o QR Code ou clique
aqui



Para saber mais sobre paralaxe
estelar escaneie o QR Code ou
clique aqui





Atividade 4 – Pesquisa sobre Paralaxe Estelar e uso do Stellarium

Objetivo específico: Compreender o conceito de paralaxe estelar e utilizar o Stellarium como ferramenta de exploração do céu.

Materiais: Celular, tablet ou computador com Stellarium instalado; acesso à internet.

Tempo estimado: 1 aula (50 min)

Orientações: Os alunos devem realizar uma pesquisa sobre paralaxe estelar e registrar suas descobertas no caderno do aluno.

Oriente para que busquem fontes confiáveis (indique links ou vídeos, se necessário).

Em seguida, promova uma exploração orientada no Stellarium.

No caderno do aluno, há espaço para anotar observações, registrar constelações e refletir sobre o que mais chamou a atenção.

Dica de mediação: Projete o Stellarium na lousa digital (se disponível) e faça uma exploração coletiva antes do trabalho em duplas.

 **Ao final desta atividade, o aluno deve ser capaz de:**

- Compreender o conceito de paralaxe estelar;
- Usar o Stellarium para observar constelações e estrelas;
- Relacionar paralaxe com a medição de distâncias astronômicas.



Clique aqui para ver o vídeo de como utilizar o Stellarium na versão Web ou escaneie o QR Code

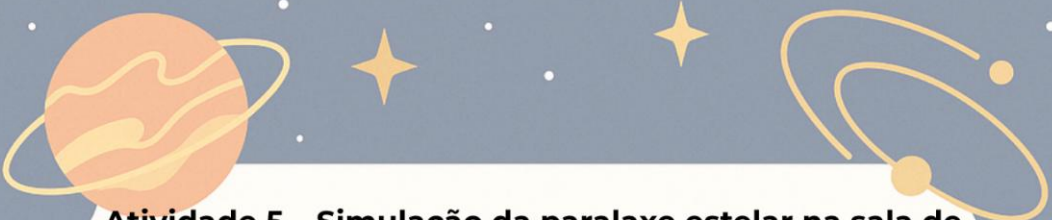


Clique aqui para ver o vídeo de como utilizar o Stellarium na versão app para celular ou escaneie o QR Code



Clique aqui para ver o vídeo de como utilizar o Stellarium para mostrar que as estrelas não são fixas no céu. ou escaneie o QR Code





Atividade 5 – Simulação da paralaxe estelar na sala de aula

Objetivo específico: Realizar uma simulação prática do cálculo de distância estelar com base na observação do deslocamento aparente de uma estrela.

Materiais: Fita métrica, objetos representando Terra, Sol e estrelas, transferidores com mira (ou teodolitos caseiros).

Tempo estimado: 2 aulas (50 min cada)

Orientações: Siga com os alunos o passo a passo da simulação conforme descrito no caderno do aluno (Etapas 1 a 10).

Auxilie na marcação da "linha base" (2 UA), posicionamento da estrela central e das estrelas de fundo.

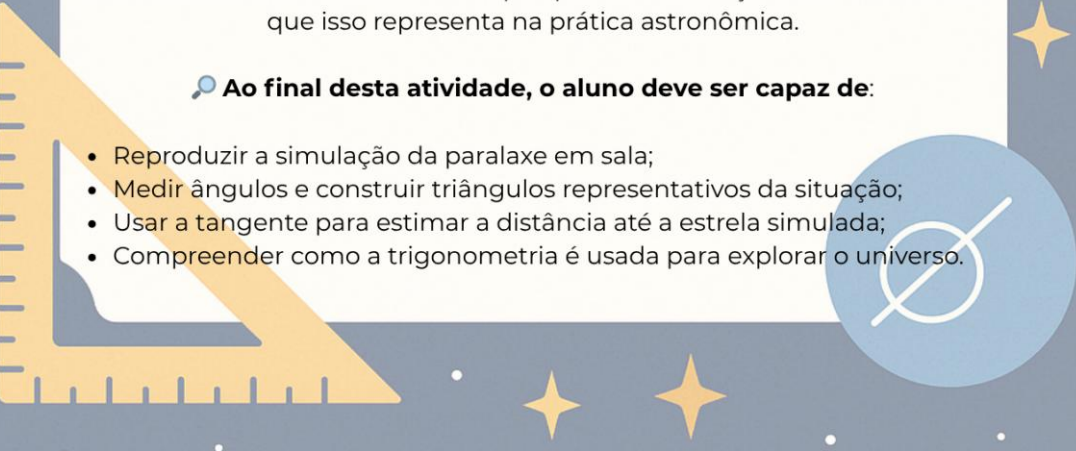
Oriente as medições dos ângulos e o registro dos dados.

Depois, os estudantes devem desenhar o triângulo formado e realizar o cálculo com base na tangente.

Todos os campos para anotação estão organizados e disponíveis no caderno do aluno.

Dica de mediação: Durante a simulação, circule entre os grupos para apoiar ajustes no alinhamento dos elementos. Estimule os alunos a discutirem o porquê das diferenças nas medidas e o que isso representa na prática astronômica.

 **Ao final desta atividade, o aluno deve ser capaz de:**

- Reproduzir a simulação da paralaxe em sala;
 - Medir ângulos e construir triângulos representativos da situação;
 - Usar a tangente para estimar a distância até a estrela simulada;
 - Compreender como a trigonometria é usada para explorar o universo.
- 

Avaliação

A avaliação nesta proposta vai muito além de conferir acertos e erros: ela serve como bússola para identificar avanços conceituais, estratégias de pensamento e participação dos alunos na construção coletiva do conhecimento.

Sugestão de estratégias avaliativas:

Observação contínua: anote comportamentos, dúvidas frequentes e atitudes durante as atividades práticas.

Registros do caderno do aluno: utilize como evidência das aprendizagens, tanto conceituais quanto procedimentais.

Debates e socializações: avalie argumentação, escuta ativa e colaboração. Reflexões escritas: especialmente nas atividades investigativas e na reflexão final da simulação de paralaxe.

Tabela de Aprendizagens Esperadas por Atividade

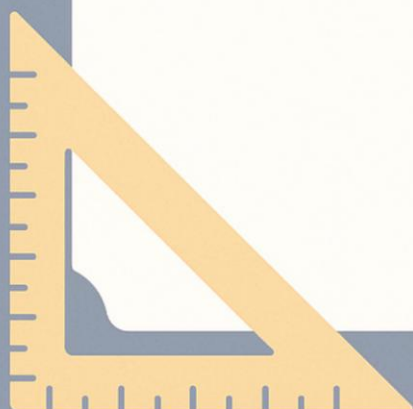
Atividade	Aprendizagem Esperada
 Guia Turístico	Relaciona astronomia e trigonometria, compreende circunferência, grau e radiano.
 Atividade 1 – Triângulos	Compreende semelhança e razões trigonométricas.
 Atividade 2 – Teodolito	Aplica razões em contextos reais para medir alturas.
 Atividade 3 – Hipóteses	Formula ideias e argumenta sobre distâncias estelares.
 Atividade 4 – Stellarium	Explica paralaxe e observa o céu com o Stellarium.
 Atividade 5 – Simulação	Calcula distâncias com tangente, representa geometricamente.
 Reflexão Final	Comunica ideias e aprendizagens de forma integrada.



Tabela de Avaliação Coletiva

Nome do(a) aluno(a)	Guia Turístico	Ativ. 1	Ativ. 2	Ativ. 3	Ativ. 4	Ativ. 5	Reflexão Final

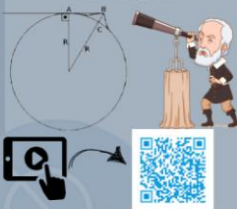
 ✨ Ensinar trigonometria é, também, ensinar a olhar para o céu com os pés no chão. Que essa jornada te traga descobertas tão grandes quanto o universo!



Vênus e as montanhas lunares

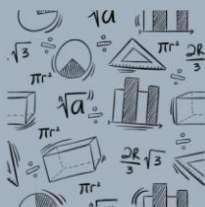
(OBA 2009) Galileu Galilei (1564-1642) é bastante lembrado pelo uso astronômico das lentes, que ampliava imagens e com isso via coisas nos céus que ninguém observava a olho nu, como as manchas solares, as montanhas da Lua, as fases de Vênus, quatro dos satélites de Júpiter, os anéis de Saturno e as estrelas da Via Láctea. Galileu não só observou algumas das montanhas lunares como calculou suas alturas. O método que ele usou era baseado em geometria simples. Galileu observava o topo de uma montanha (ponto B na figura ao lado) quando iluminada pelo Sol.

Esta figura ilustra a maneira como Galileu calculou a altura (BC) de uma montanha da Lua. Ele obteve a distância AB a partir de observações que fez com a luneta e conhecia o raio da Lua. Adotando AB como 44,73 km e o raio da Lua 1.000 km (apenas para simplificar as contas), calcule, com a ajuda do Teorema de Pitágoras, a altura da montanha lunar (BC) da figura. (Use $44,732 = 2.001$ e $1.0012 = 1.002.001$).



Referências

OBA – Olimpíada Brasileira de Astronomia - Disponível em: <http://www.oba.org.br/site/>. Acesso em 16 de Setembro de 2016.
MOSLEY, Michael; LYNCH, Jonh. Uma história da Ciência. 2011.
HOFFMANN, Paula. Cálculo de distâncias inacessíveis: uma viagem astronômica. 2025. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de Caxias do Sul, Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Caxias do Sul, 2025. Orientador: Professor Dr. Odilon Giovannini.



UM PASSEIO PELA TRIGONOMETRIA



Guia Turístico

Aluno(a): _____

Turma: _____

Harmonia no firmamento

Pitágoras de Samos (580 a.C. - 500 a.C.) fundou a Escola Pitagórica, onde todos os membros deveriam ser vegetarianos e abrir mão de todos os bens pessoais. Acreditavam na harmonia do firmamento e afirmavam em sua filosofia que tudo é número. Pitágoras ensinava que os movimentos do Sol, da Lua e dos Planetas devem basear-se na forma geométrica mais simples e pura, o círculo. A obsessão de Pitágoras por círculos levou-o a concluir que a Terra era não era plana, mas uma bola arredondada flutuando no espaço, através da observação de eclipses lunares.

Para que você possa interagir mais com os círculos, construa 4 círculos com diâmetros de tamanhos diferentes. Para auxiliá-lo na atividade, preencha a tabela a seguir utilizando também, barbante, régua e calculadora.

Circunferência	Comprimento do perímetro em cm	Diâmetro em cm	Comp. diâmetro
1			
2			
3			
4			



O Universo Geocêntrico de Ptolomeu

Cláudio Ptolomeu (90 d.C- 168 d.C) "fez uma extraordinária tentativa de conciliar a fria realidade dos movimentos estelares e planetários observados com os círculos e esferas da filosofia aristotélica" (MOSLEY, LYNCH, 2011).

Para medir ângulos são utilizadas duas unidades de medida, os graus (Sumérios – sistema sexagesimal) onde o círculo é dividido em 360 partes iguais, onde cada uma mede 1 grau, cada grau é dividido em 60 minutos e cada minuto em 60 segundos. Também é utilizada a unidade de medida conhecida como radianos (James Thomson 1873) tomando como referência o tamanho do raio da circunferência.



O raio de uma circunferência é a distância de seu centro a um ponto qualquer do contorno. Desenhe uma circunferência de raio 5 (cinco) cm. Corte pedaços de barbante que correspondam ao tamanho do raio. Tente "cobrir" o perímetro da circunferência colando esses pedaços de barbante no contorno dela. a) Quantos pedaços de barbante do tamanho do raio foram necessários para "cobrir" o contorno da circunferência que você desenhou? Foi preciso um número inteiro de barbantes?

b) Que relação você pode fazer entre sua resposta para esta atividade e para a primeira atividade que foi realizada?

c) Que relação é possível fazer entre a atividade "harmonia no firmamento" e a atividade proposta em "o Universo Geocêntrico de Ptolomeu"?

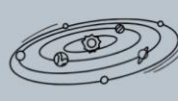
d) Você acha que é possível fazer uma relação entre a medida de ângulos em graus e a medida de ângulos em radianos? Qual seria esta relação?



Terra "rebaixada" a apenas um planeta

Nicolau Copérnico (1473 – 1543) astrônomo que concluiu que o Sol é o centro do Universo e que a velocidade dos planetas muda conforme sua distância com relação ao Sol, surgindo então a Teoria Heliocêntrica. A obra de Copérnico continha seis livros, porém, quando as últimas páginas de sua obra foram impressas e chegaram a Copérnico, ele já estava velho e muito debilitado, falecendo no dia em que seus olhos se viram, em 24 de maio de 1543. Porém, estava doente demais para perceber que a introdução de sua obra, continha uma introdução anônima afirmando que sua Teoria era apenas um artifício matemático conveniente.

(OBA, 2015) Observando o planeta Vênus, diariamente, vemos que ele atravessa a linha imaginária Terra-Sol e vai se afastando até um valor máximo, que chamamos de elongação máxima. Depois ele volta, aparentemente, a se aproximar do Sol, passa atrás do Sol, reaparece e vai se afastando dele até o mesmo afastamento máximo já observado do outro lado.

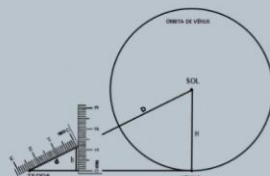


A figura ilustra o afastamento máximo num dos lados.

Copérnico não sabia a distância entre a Terra e o Sol, por isso ele a chamou de $D = 1$ U.A. (uma Unidade Astronômica), mas ele sabia geometria elementar, ou seja, ele sabia que:

$$\frac{h}{d} = \frac{H}{D}$$

Determine, tal como fez Copérnico, a distância (H) entre Vênus e o Sol, em Unidades Astronômicas. Observação: o triângulo pequeno pode ser de qualquer tamanho, desde que semelhante ao grande. Colocamos réguas para você medir d e h, mas você pode usar a sua se preferir, porém não misture as réguas!



12. APÊNDICE E – CADERNO DO ALUNO





Instruções gerais:

Esta apostila será seu material de apoio para acompanhar cada atividade proposta ao longo do nosso percurso. Aqui você encontrará espaços para registrar suas descobertas, reflexões e cálculos, além de curiosidades e imagens que ajudarão a entender melhor os conteúdos.



Start

Guia Turístico

Durante a leitura e realização das atividades propostas, registre abaixo as ideias principais:

Triângulos, Teodolitos e Razões Trigonométricas

Atividade 1. Construção de triângulos semelhantes

Desenhe **três triângulos retângulos**, com os ângulos medindo **90° , 20° e 70°** , cada um com as medidas dos **lados diferentes**:

Triângulo 1

Triângulo 2

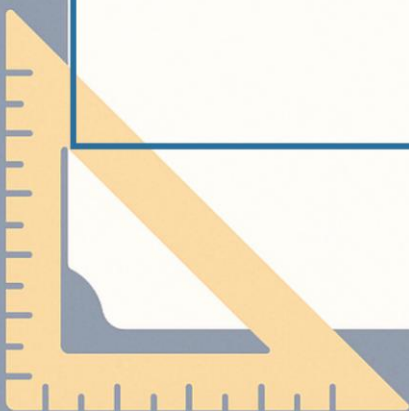
Triângulo 3



Como construir ângulos.



Como construir um triângulo conhecendo seus ângulos.





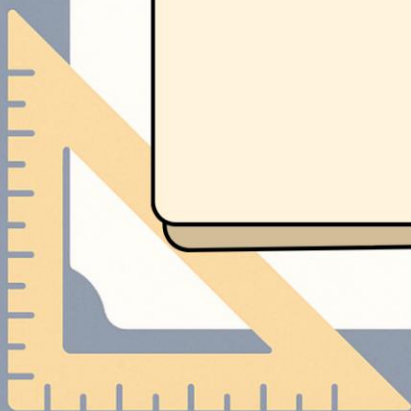
Complete a tabela com os valores encontrados e calcule as razões trigonométricas (divisões entre os lados sugeridos):

Triângulo	Ângulo	Cateto oposto (medida)	Cateto adjacente (medida)	Hipotenusa (medida)	Cateto oposto / Hipotenusa	Cateto adjacente / Hipotenusa	Cateto oposto / Cateto adjacente
1	90°						
	20°						
	70°						
2	90°						
	20°						
	70°						
3	90°						
	20°						
	70°						

Análise dos dados:

- a) Os valores das razões trigonométricas encontrados, para um mesmo ângulo, são aproximados ou distantes?
- b) Por que você acredita que isso acontece?

Conclusões com o auxílio da professora

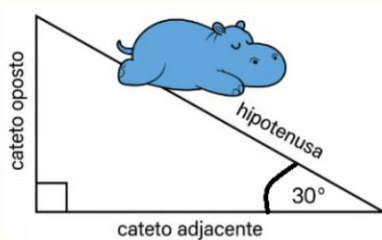


Razões Trigonométricas

NAME: _____



Dando "nomes aos bois"



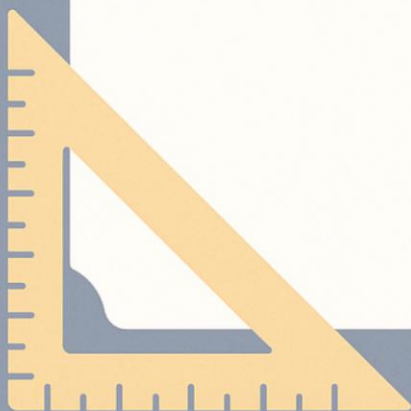
$$\text{seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cosseno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Practice
makes
PROGRESS

Espaço para realização das atividades
propostas pelo(a) professor(a)





O teodolito e as razões trigonométricas



Para construir o seu teodolito você irá precisar de: um transferidor, canudo, cola e tachinha.
Para saber como montar, acesse o QR Code.

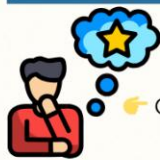
“Mão na massa”

Atividade 2.

Após a construção do teodolito, escolha três objetos na escola de altura inacessível (que não pode ser medida com trena). Com o teodolito em mãos, meça as distâncias e calcule alturas completando a tabela abaixo:



Objeto observado	Sua altura	Sua distância ao objeto observado	Ângulo medido	Altura do objeto



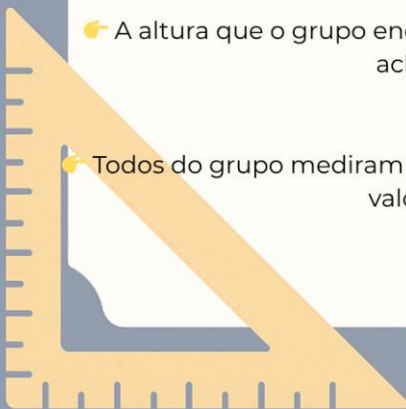
Momento reflexão:

➡ O que você precisa saber para conseguir medir a altura de algo que você não consegue alcançar?

(Dica: pense no que foi necessário na atividade — ângulo, distância, altura dos olhos...)

➡ A altura que o grupo encontrou ficou parecida pra todos? Por que você acha que isso aconteceu?

➡ Todos do grupo mediram o mesmo ângulo? Se não, o que pode ter feito os valores ficarem diferentes?





A que distância estamos?



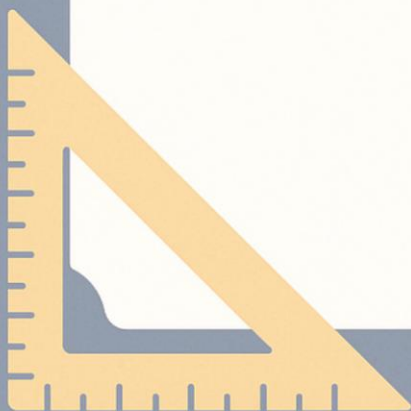
Atividade 3 – Investigando a distância das estrelas

Você já parou para pensar se todas as estrelas estão à mesma distância da Terra? E mais: como será que conseguimos medir algo tão longe assim? Nesta atividade, você vai registrar o que já sabe ou imagina sobre esse assunto.

 O que fazer:

Responda às perguntas:

- ▶ Você acha que as estrelas estão todas à mesma distância da Terra?
 - ▶ Justifique sua resposta com o que você pensa ou já aprendeu.
Explique com suas palavras:
 - ▶ Como você acredita que os cientistas conseguem medir a distância de uma estrela?
 - ▶ Use o que você já estudou até agora para fazer um desenho representando a sua ideia de como é feita a medição da distância de estrelas.
-  Lembre-se: nesta atividade, não existe “certo ou errado”. O que vale é a sua forma de pensar e explicar com base no que você já aprendeu até aqui!





■ Orientações para a atividade 4 – Explorando o céu e descobrindo como medir distâncias estelares

Agora que vocês já construíram seu desenho e discutiram sobre as possíveis formas de medir a distância até as estrelas, chegou a hora de investigar mais a fundo e conhecer uma ferramenta usada pelos próprios astrônomos!

🧠 Etapa 1 – Pesquisa investigativa

Faça uma breve busca na internet para responder à pergunta:

- Como os cientistas conseguem medir a distância entre as estrelas e a Terra?

Durante sua pesquisa, você provavelmente vai encontrar uma expressão nova:

- Paralaxe estelar

- Descubra o que essa expressão significa e escreva com suas palavras como ela funciona.

💡 Dica: Você pode usar vídeos, sites confiáveis ou até perguntar para o(a) professor(a) 🧑🏫🌟

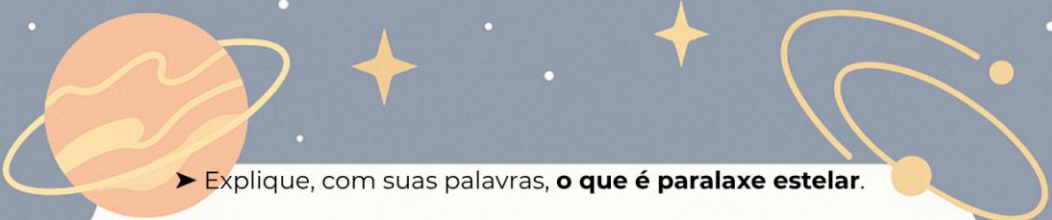
🌟 Etapa 2 – Explorando o céu com o Stellarium

- Em duplas, utilizem o netbook/computador/celular com o software Stellarium para explorar o céu noturno.
- Navegue pelo céu, observe estrelas, constelações, planetas e anote:
 - O que mais chamou sua atenção?

- Alguma estrela te surpreendeu pela distância, cor ou posição?

- Você conseguiu localizar alguma constelação conhecida?





► Explique, com suas palavras, **o que é paralaxe estelar**.

► Comente o que você **mais gostou de observar no Stellarium**.

► Se fosse um astrônomo, **o que você gostaria de descobrir sobre o universo?**

■ Prepare-se: estamos nos aproximando da matemática por trás dessas observações. A trigonometria vai nos ajudar a entender o universo de um jeito que talvez você nunca tenha imaginado!



Atividade 5: A que distância estamos?

Etapas 1.

“Mão na massa”

Para entender como funciona a paralaxe estelar, vamos realizar uma simulação na própria sala de aula usando objetos simples. A atividade consiste em representar a Terra em dois momentos diferentes de sua órbita e observar o deslocamento aparente de uma estrela próxima em relação às estrelas de fundo.



Medir e representar a distância conhecida (2 UA)

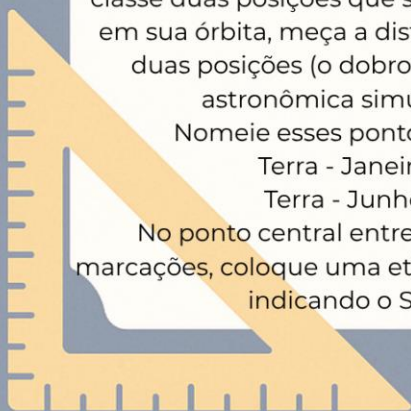
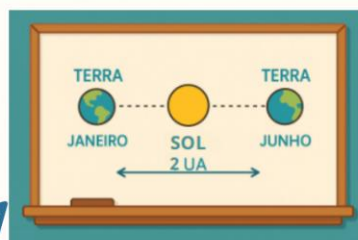
Com uma fita métrica ou trena, marque na classe duas posições que simulem a Terra em sua órbita, meça a distância entre as duas posições (o dobro da unidade astronômica simulada).

Nomeie esses pontos como:

Terra - Janeiro

Terra - Junho

No ponto central entre essas duas marcações, coloque uma etiqueta ou marca indicando o Sol.

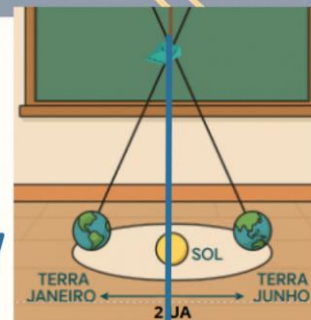




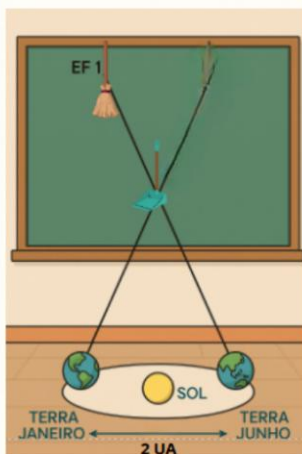
Etapa 2.

Posicionar a estrela central (EC)
A uma certa distância da linha entre as posições da Terra, perpendicular ao centro (Sol), fixe um objeto no chão que simule a estrela cuja distância queremos calcular.

Essa é a estrela central (EC). Ela deve estar alinhada com o Sol e a perpendicular entre as posições da Terra.



Marcação alinhada ao Sol e perpendicular às posições da Terra



Etapa 3.

Localizar a estrela de fundo EF1

Vá até a posição Terra - Junho.

Usando um dispositivo de medição de ângulos (ou um simulador com mira), alinhe sua visão com a estrela central (EC). Coloque então, ao fundo (na parede ou mais distante), a estrela de fundo EF1 de tal forma que ela fique escondida exatamente atrás da EC quando você olha da Terra - Junho. (Ou seja, EC e EF1 devem estar perfeitamente alinhadas do seu ponto de vista.)

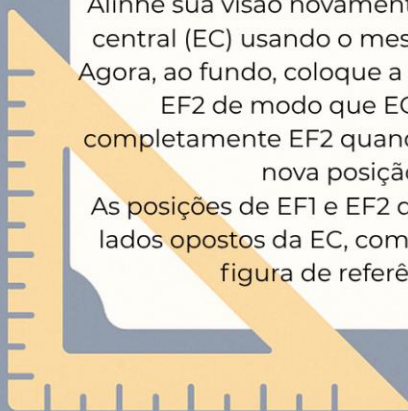
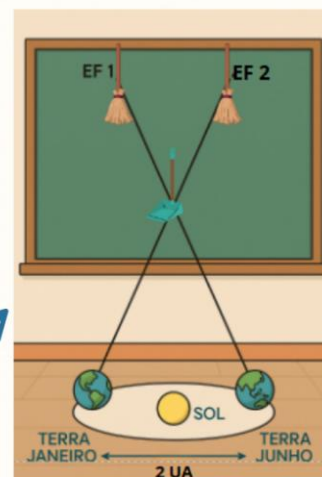
Etapa 4.

Localizar a estrela de fundo EF2

Vá agora até a posição Terra - Junho.

Alinhe sua visão novamente com a estrela central (EC) usando o mesmo dispositivo. Agora, ao fundo, coloque a estrela de fundo EF2 de modo que EC esconda completamente EF2 quando olhado dessa nova posição.

As posições de EF1 e EF2 devem estar em lados opostos da EC, como mostrado na figura de referência.



A mudança de posição da EC em relação às estrelas de fundo (EF1 e EF2) representa o ângulo de paralaxe (α).

Com base nas marcações e nas medidas dos ângulos feitos com o instrumento, podemos calcular a distância até a estrela central usando geometria.

Etapa 5.

Medição dos ângulos com o instrumento

Agora que as estrelas EF1 e EF2 estão posicionadas corretamente em relação à EC, é hora de usar o instrumento de medição de ângulos (transferidor com arame, por exemplo) para fazer os registros.

a) Posição Terra - Junho

Leve o instrumento até a marcação de Terra - Junho.

Posicione o arame ou mira em direção à EF1, alinhando:

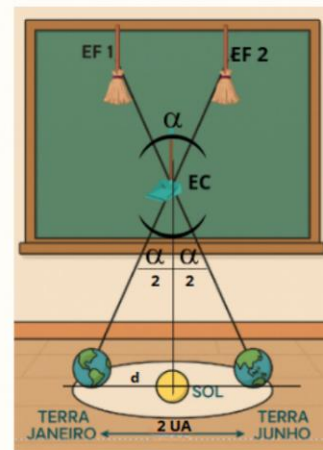
► pino de referência + arame + EC + EF1
Anote o valor do ângulo medido com o transferidor.

b) Ainda na posição Terra - Junho

Gire o arame agora em direção à EF2.

► pino + arame + EC + EF2 devem estar alinhados.

Anote também esse segundo valor de ângulo.



Etapa 6.

Cálculo do ângulo de paralaxe

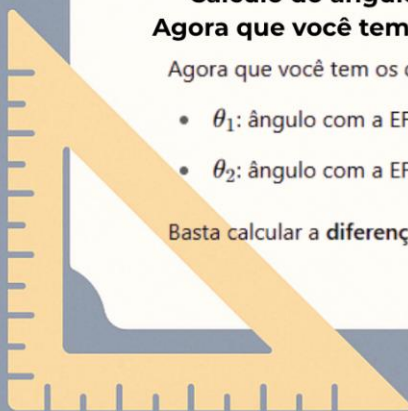
Agora que você tem os dois valores:

Agora que você tem os dois valores:

- θ_1 : ângulo com a EF1
- θ_2 : ângulo com a EF2

$$\alpha = |\theta_1 - \theta_2|$$

Basta calcular a diferença entre eles:





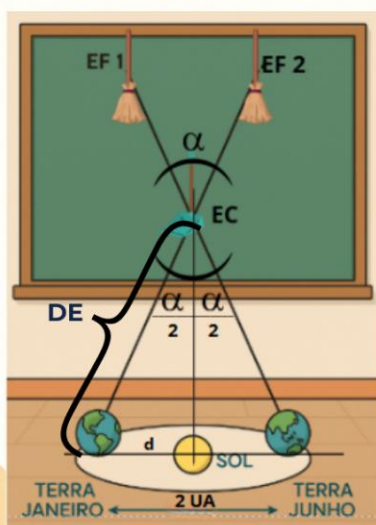
Etapa 7.

Representação gráfica (desenho)
Com os dados obtidos, você pode agora desenhar uma figura esquemática da simulação, com:

- A linha base (2 UA) representando a distância entre as duas posições da Terra.
- O ponto central (EC) à frente, com as duas linhas de visão para EF1 e EF2.
- O ângulo α marcado entre essas linhas.

Essa figura mostra exatamente como os astrônomos modelam o cálculo da distância estelar — a partir de simples observações de mudança de posição relativa!

Desenhe aqui!



Etapa 8.

Cálculo da distância até a estrela (de)

A partir do desenho feito na etapa anterior, podemos identificar claramente os seguintes elementos:

DE: a distância que queremos encontrar — da Terra até a estrela EC (ou do Sol até a estrela EC dependendo da escolha do modelo).

$\alpha/2$: o ângulo de paralaxe, ou seja, a metade do deslocamento aparente total.

d: a distância da Terra ao Sol, conhecida e usada como base.





Etapa 9.

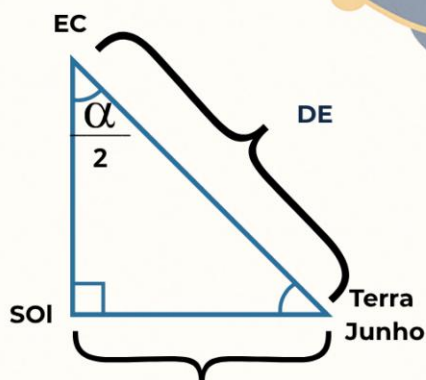
Formação do triângulo retângulo

Ao ligar:

o ponto Terra - Janeiro ou Terra - Junho
ao Sol e à estrela central (EC)

...formamos um triângulo retângulo,
onde:

- o cateto oposto ao ângulo α é d
- o cateto adjacente é a distância que queremos calcular, DE



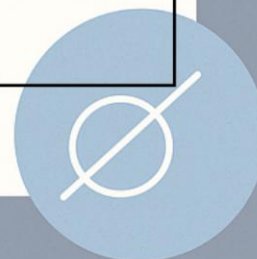
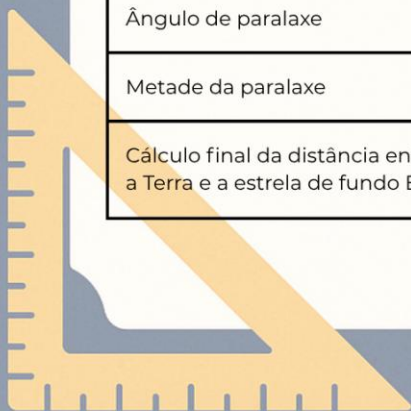
Etapa 10.

Usando trigonometria, vamos encontrar a medida DE d
no triângulo retângulo, usando a tangente:

$$tg \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$tg \alpha = \frac{d \text{ (distância que conhecemos)}}{DE \text{ (distância da Terra até a estrela)}}$$

Item	Anote aqui
Base (distância entre as posições Terra Janeiro - Terra Junho)	_____
Ângulo medido em Janeiro	_____
Ângulo medido em Junho	_____
Ângulo de paralaxe	_____
Metade da paralaxe	_____
Cálculo final da distância entre a Terra e a estrela de fundo EC	_____





Reflexão final

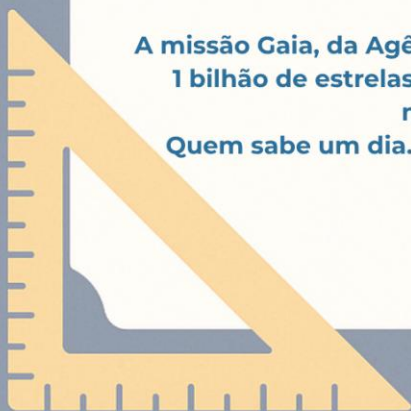
Escreva um pequeno parágrafo contando o que você mais aprendeu, o que achou mais interessante ou desafiador nessa atividade.

Você se sente mais capaz de entender o céu depois dela?

Sabia que...?

A missão Gaia, da Agência Espacial Europeia, já mapeou mais de 1 bilhão de estrelas usando paralaxe com uma precisão de milionésimos de grau!

Quem sabe um dia... você também possa ajudar a mapear o universo. 



Mini Dicionário

Termo	Significado
Ângulo	Abertura formada entre duas retas que se encontram em um ponto comum (vértice).
Ângulo de paralaxe (α)	Diferença entre os ângulos de visão de uma estrela próxima em relação a duas posições distintas de observação.
Base (da simulação)	Distância entre as duas posições da Terra (Janeiro e Junho), simulando 2 UA.
Cateto oposto / adjacente	Lados de um triângulo retângulo usados nos cálculos trigonométricos.
Deslocamento aparente	Movimento ilusório de um objeto quando observado de pontos diferentes.
Distância (d ou DE)	Medida entre a Terra (ou o Sol) e a estrela central (EC), calculada na atividade.
Estrela Central (EC)	Objeto da simulação cuja distância se deseja determinar.
Estrelas de Fundo (EF1, EF2)	Referências fixas usadas para notar o deslocamento aparente da EC.
Linha de visão	Direção imaginária que liga o observador ao objeto observado.
Paralaxe	Fenômeno em que um objeto parece mudar de posição quando visto de lugares diferentes.
Ponto de observação	Lugar de onde se observa o fenômeno (simulado como Terra - Janeiro e Terra - Junho).
Radiano	Unidade de medida de ângulos no sistema internacional (às vezes usada na trigonometria).
Razão trigonométrica	Relação entre lados de um triângulo retângulo (como seno, cosseno e tangente).
Simulação	Representação prática e simplificada de um fenômeno real.
Tangente (tan)	Razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente de um triângulo retângulo.
Teodolito	Instrumento usado para medir ângulos horizontais e verticais.
Triângulo Retângulo	Triângulo que possui um ângulo de 90° .
UA (Unidade Astronômica)	Distância média entre a Terra e o Sol, aproximadamente 150 milhões de quilômetros.