

UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

MARCELO DA LUZ DA ROCHA

**TÉCNICA DE CONTROLE APLICADA AO SISTEMA DE DIREÇÃO
ELETRÔNICA EM VEÍCULO AUTOMOTOR (STEER-BY-WIRE)**

**CAXIAS DO SUL
2015**

MARCELO DA LUZ DA ROCHA

**TÉCNICA DE CONTROLE APLICADA AO SISTEMA DE DIREÇÃO
ELETRÔNICA EM VEÍCULO AUTOMOTOR (STEER-BY-WIRE)**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como parte dos requisitos para a obtenção do
título de Engenheiro de Controle e Automação
na Universidade de Caxias do Sul.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Augusto Bender

**CAXIAS DO SUL
2015**

MARCELO DA LUZ DA ROCHA

**TÉCNICA DE CONTROLE APLICADA AO SISTEMA DE DIREÇÃO
ELETRÔNICA EM VEÍCULO AUTOMOTOR (STEER-BY-WIRE)**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como parte dos requisitos para a obtenção do
título de Engenheiro de Controle e Automação
na Universidade de Caxias do Sul.

Aprovado em 08/07/2015

Banca Examinadora

Prof. Dr. Fernando Augusto Bender
Universidade de Caxias do Sul – UCS

Prof. Dr. Julio Cesar Ceballos Aya
Universidade de Caxias do Sul – UCS

Prof. Dr. Mauricio Zardo Oliveira
Universidade de Caxias do Sul – UCS

À minha mãe, meu pai e meu irmão
inesgotáveis fontes de amor, razão
e caráter meus verdadeiros
professores.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus por ser a base das minhas conquistas.

Aos meus pais por acreditarem em minhas escolhas, apoiando-me e esforçando-se junto a mim, para que eu suprisse todas elas.

Agradeço também ao Programa Universidade para Todos do Governo Federal pela providencial concessão da bolsa de estudos que oportunizou a realização dos meus estudos.

Aos amigos que fiz durante este período de graduação pelos momentos de diversão e estudo.

RESUMO

Este trabalho aborda o problema de controle do sistema de Direção Eletrônica em veículo automotor, do inglês *Steer-by-Wire*, contextualizando com conceitos presentes em outros sistemas lineares, com atraso no tempo e atuador sujeito à saturação. Apresenta-se uma revisão bibliográfica e síntese dos principais trabalhos publicados na área, bem como os conceitos, definições, teoremas e lemas associados à classe de sistema da Direção Eletrônica, visando fornecer subsídios para que seja possível no futuro a implementação do conjunto de direção. Inicialmente, apresenta-se o problema de estabilidade absoluta e estabilidade de sistemas no sentido de Liapunov. Em seguida, uma discussão dos meios empregados para lidar com sistemas sujeitos a restrições em atraso e saturação com atraso, apresentando as técnicas utilizadas na literatura que consideram a abordagem por Desigualdades Matriciais Lineares (LMI) para tratar esses sistemas. Por fim, é discutido o problema do *Steer-by-Wire*, utilizando um modelo matemático linear, por meio de uma representação em espaço de estados, considerando atraso constante e o caso do atuador sujeito a saturação em amplitude. A síntese do controlador foi realizada em forma de LMI, as condições que garantem a existência de uma solução para o problema proposto são obtidas a partir de um funcional de Liapunov-Krasovskii. A solução convexa é alcançada computacionalmente utilizando o pacote *YALMIP toolbox* com o *solver* SDPT3.

Palavras-chave: *Steer-by-Wire*. Saturação. Liapunov. LMI. YALMIP.

ABSTRACT

This paper describes the problem of controlling the Steer-by-Wire system in a motor vehicle, contextualizing with concepts found in other linear systems with time delay, subject to actuator saturation amplitude. Presents a literature review and synthesis of the major published studies, as well as the concepts, definitions, theorems, and slogans associated with the class of Steer-by-Wire system, to provide data for possible future implementation of the steering assembly. Initially, we present the problem of absolute stability and stability in the sense of Liapunov systems. Then a discussion of the means employed to deal with systems subject to constraints, the delay and the delay with saturation, showing the techniques used in the literature that consider the approach by Linear Matrix Inequalities (LMI) to treat these systems. Finally, the problem of Steer-by-Wire is discussed by means of a linear mathematical model using a state space representation, given constant delay, and if the actuator subjected to saturation amplitude. The synthesis was performed controller in the form of LMI conditions that ensure the existence of a proposed solution to the problem is obtained from a functional Liapunov-Krasovskii. The convex solution is obtained using the computationally YALMIP toolbox package and the solver SDPT3.

Keywords: Steer-by-Wire. Saturation. Liapunov. LMI. YALMIP.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ponto de equilíbrio estável.	21
Figura 2 – Ponto de equilíbrio assintoticamente estável.	21
Figura 3 – Ponto de equilíbrio instável.	22
Figura 4 – Não Linearidade do Tipo Zona Morta.	27
Figura 5 – Regiões de Saturação.	28
Figura 6 – Sistema em malha fechada com saturação na entrada da planta.	28
Figura 7 – Sistema em malha fechada com atraso na entrada.	32
Figura 8 – Sistema em malha fechada com atraso nos estados.	33
Figura 9 – Sistema do Tipo Lure.	42
Figura 10 – Condição de setor.	43
Figura 11 – Sistema de controle genérico em malha fechada.	44
Figura 12 – Sistema de controle genérico em malha fechada com saturação.	45
Figura 13 – Anti-windup para um sistema saturante.	47
Figura 14-Comparação entre o sistema de direção convencional e o sistema Steer-by-Wire.	48
Figura 15 - Dinâmica de direção.	50
Figura 16 - Modelo do veículo.	51
Figura 17 – Arranjo completo do sistema de direção eletrônica.	52
Figura 18 – Simulação para diferentes velocidades com atraso $\tau = 0,550 s$	70
Figura 19 – Zoom da simulação para diferentes velocidades com atraso $\tau = 0,550 s$	71
Figura 20 – Simulação tensão do motor para diferentes velocidades.	72
Figura 21 – Simulação taxa de guinada r para diferentes velocidades.	72
Figura 22 – Simulação ângulo de deslizamento do veículo β para diferentes velocidades.	73

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SbW	<i>Steer-by-Wire</i>
CAN	<i>Controller Area Network</i>
UCS	Universidade de Caxias do Sul
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> (desigualdade matricial linear)
ECU	<i>Engine Control Unit</i> (unidade de controle do motor)
CG	Centro de Gravidade

LISTA DE SÍMBOLOS

\dot{x}	Derivada de x
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	Espaço real de n -dimensão
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto de matrizes reais de dimensões $n \times m$
$\text{Re}(\lambda_i(A))$	Parte real do autovalor λ_i da matriz A
\forall	Para todos
$[a, b)$	Intervalo real fechado em a e aberto em b
\in	Pertence a
\subset	Subconjunto de
\subseteq	Subconjunto ou igual a
A'	Transposta da matriz A
$\ x\ $	Norma Euclidiana do vetor x , ou seja, $\ x\ = \sqrt{x'x}$
$\ x(t)\ _{\mathcal{L}_2}$	Norma-2 do sinal $x(t)$: $\ x(t)\ _{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_0^\infty x(t)'x(t)dt}$
\mathcal{L}_2	Espaço de sinais com norma-2 finita
∞	Infinito
$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	Função f mapeia o conjunto \mathbb{R}^n no conjunto \mathbb{R}^m
$\text{sat}(\cdot)$	Função saturação
$\text{sign}(\cdot)$	Função sinal
$\min\{\cdot\}$	Valor mínimo de $\{\cdot\}$

$P > 0$	Matriz simétrica definida positiva
$P < 0$	Matriz simétrica definida negativa
$ \cdot $	Valor absoluto ou módulo de um número real
(i)	i -ésimo componente de um vetor
i	i -ésima linha/coluna de uma matriz
\triangleq	Definido como
$Ker(\cdot)$	Base Kernel de (\cdot)
\cap	Intersecção
$*$	Bloco simétrico
I	Matriz identidade

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	JUSTIFICATIVA DO TRABALHO.....	15
1.2	OBJETIVOS.....	16
1.2.1	Objetivo geral	16
1.2.2	Objetivos específicos	16
1.3	ÁREA DE TRABALHO.....	16
1.4	LIMITES DO TRABALHO.....	17
2	CONCEITOS PRELIMINARES	18
2.1	ESTABILIDADE.....	18
2.1.1	Estabilidade absoluta	18
2.1.2	Estabilidade no sentido de Liapunov	19
2.2	SISTEMAS COM RESTRIÇÃO.....	23
2.2.1	Modelos de sistemas com saturação	24
2.2.1.1	Modelagem politópica.....	25
2.2.1.2	Modelagem por não linearidade do tipo zona morta.....	26
2.2.1.3	Modelagem por regiões de saturação.....	27
2.2.2	Caso especial: sistemas com saturação na entrada da planta	28
2.3	SISTEMAS COM ATRASO NO TEMPO.....	30
2.3.1	Sistemas com atraso na entrada	30
2.3.2	Sistemas com atraso nos estados	32
2.4	MÉTODOS E PROCEDIMENTOS.....	33
2.4.1	Função de Liapunov	33
2.4.1.1	Função de Liapunov para sistemas com atraso.....	35
2.4.2	Funcional de Liapunov-Krasovskii	35
2.4.3	Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)	36

2.4.3.1	Complemento de Schur.....	37
2.4.3.2	S-Procedure.....	38
2.4.3.3	Lema de Finsler	38
2.4.3.4	Lema de Projeção.....	39
2.4.4	Condição de setor	41
2.4.4.1	Condição de Setor Generalizada.....	43
2.5	CONTROLE DE SISTEMAS SATURANTES COM ATRASO	44
2.5.1	Síntese direta	46
2.5.2	Síntese de compensadores anti-windup	46
3	CONTROLE APLICADO AO SISTEMA STEER-BY-WIRE.....	48
3.1	PRELIMINARES	48
3.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	52
3.3	RESULTADOS PRINCIPAIS.....	56
3.4	EXEMPLO NUMÉRICO	68
4	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS.....	74
	REFERÊNCIAS	76

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas automatizados estão cada vez mais presentes nos veículos automotores. Os últimos esforços têm sido realizados em um conjunto de tecnologias denominadas de *Drive-by-Wire*. Essa tecnologia automotiva substitui os tradicionais sistemas mecânicos e hidráulicos presentes nas trancas, suspensão, aceleração e frenagem por atuadores elétricos, sensores e controladores. A substituição de controles mecânicos e hidráulicos por sistemas eletrônicos embarcados é conhecida como tecnologia *by-Wire*.

Os veículos fabricados na atualidade já utilizam a tecnologia *by-Wire* para acelerador e freios, entretanto para Yih (2005) o novo desafio é o sistema de Direção Eletrônica (do inglês, *Steer-by-Wire*), que visa eliminar a conexão física entre o volante e as rodas de um veículo por meio de motores elétricos. Em um típico sistema de direção mecânica o movimento do volante é transmitido através de um eixo de direção para movimentar as rodas dianteiras, associado a uma direção auxiliar (hidráulica ou elétrica) que amplia o torque aplicado pelo condutor no volante, para que o esforço de direção seja mínimo.

Segundo Yih (2005) o objetivo da tecnologia *Steer-by-Wire* é a redução de componentes no sistema de direção, como a coluna do eixo de direção e os mecanismos hidráulicos presentes na direção dos veículos, pois isso gera consequentemente a redução do peso total do automóvel, resultando em economia de combustível. Esse sistema visa controlar eletronicamente o posicionamento das rodas, para tanto dois atuadores elétricos são usados: um no volante (que gera para o motorista uma força proporcional ao torque sobre as rodas) e outro atuador que move as rodas dianteiras.

Como não há, praticamente, ligações físicas entre o volante e as rodas um sistema *Steer-by-Wire* (SbW) pode ser implementado em diferentes carros, o volante pode ser colocado em ambos os lados de um automóvel ou em qualquer outro lugar. Isto permite a produção de uma gama mais ampla de modelos. Além disso, as pessoas com deficiência e os idosos podem ser beneficiadas, porque eles vão ser capazes de situar o volante para atender às necessidades especiais. Outra vantagem é que o sistema isola o motorista dos impactos provenientes da estrada, produzindo maior segurança.

Nor Shah *et al.* (2013) propôs um modelo matemático linear para o sistema SbW, entretanto deve-se levar em consideração as restrições presentes nos atuadores. Por exemplo, para um motor elétrico existe um limite físico de quanta energia pode ser transmitida para o atuador. Outra característica a ser considerada na modelagem reside no fato da rede de

comunicação, empregada na comunicação entre os periféricos e o controlador, possuir um valor máximo de informações por unidade de tempo que pode trafegar pelo meio físico, exceder esse valor poderia ocasionar um atraso de propagação dos sinais.

Neste contexto, este trabalho aborda as dificuldades associadas ao controle de um sistema de Direção Eletrônica para veículos automotores, contextualizando com conceitos presentes em outros sistemas lineares, com atraso no tempo, sujeitos à saturação do atuador em amplitude. Uma síntese dos principais trabalhos publicados, bem como os conceitos, definições, teoremas e lemas associados à classe de sistema do SbW são apresentados no presente trabalho, visando fornecer subsídios para que seja possível no futuro a implementação do conjunto de direção.

1.1 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

A proposta da tecnologia *Steer-by-Wire* (SbW) de remover a barra de direção dos veículos e substituí-la por um sistema computadorizado é um conceito que envolve a segurança do veículo e de seus ocupantes, portanto se trata de um sistema de controle que necessita de melhores estudos antes de sua execução. Os recentes trabalhos sobre a tecnologia SbW em Yih (2005), Nor Shah *et al.* (2013), e Nor Shah, Husain e Dahalan (2013) alertam que a separação completa do volante a partir das rodas proporciona oportunidades para o controle do veículo, mas também apresenta problemas práticos para o controle de direção.

Os sistemas *by-Wire* não foram completamente implementados nos veículos por um motivo: é um pouco assustador imaginar rodas dianteiras que podem, ou não, responder às entradas do condutor, dependendo do capricho de um controlador. Portanto, a confiabilidade do sistema de controle deve ser garantida, uma vez que os veículos automotores passarão a contar com um sistema de direção eletrônico, e não mais mecânico, o que torna o movimento das rodas dependente dos sensores e atuadores, e principalmente do controlador.

Além disso, o realismo da direção tem de ser respeitado já que a atividade de dirigir exige precisão e agilidade, por exemplo, em uma autoestrada o volante não pode ser leve demais, porque nesse caso, qualquer toque mais brusco pode causar um acidente. No entanto, em um estacionamento a direção não pode ser muito pesada, pois isso causaria desconforto ao manobrar.

O trabalho teve avanços em Hoffmann (2014), ao iniciar a implementação física de uma rede *Controller Area Network* (CAN)¹, no qual toda comunicação do sistema foi testada a fim de garantir a confiabilidade e a robustez da rede. Isto proporcionou que seja possível desenvolver algoritmos genéricos que possam lidar com certos conjuntos de erro que a comunicação venha a apresentar, entretanto é necessário modelar o sistema para que posteriormente seja possível inserir as equações de controle em um controlador.

Desta forma, o desenvolvimento deste trabalho visa fundamentar teoricamente o sistema *Steer-by-Wire* para que seja possível no futuro ser implementado em veículos. A aplicação desta tecnologia, em tempo hábil, para a reprodução da mesma antes que ela entre comercialmente no mercado brasileiro traz vantagem competitiva para os produtores nacionais, ainda que pela melhor capacidade de selecionar fornecedores, senão do desenvolvimento próprio.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral do trabalho é analisar um sistema de Direção Eletrônica veicular (*Steer-by-Wire*) de acordo com uma representação em espaço de estados e propor uma técnica de controle confiável, robusta e implementável para tais sistemas.

1.2.2 Objetivos específicos

- Revisar bibliografia da área e referencial teórico;
- Aplicar estas ferramentas a um sistema de Direção Eletrônica;
- Entender os limites e obter garantias de estabilidade e níveis de desempenho para o sistema *Steer-by-Wire*.

1.3 ÁREA DE TRABALHO

O trabalho será executado no Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, localizado no Bloco D da Universidade de Caxias do Sul (UCS), o centro é responsável por pesquisas e ensino das diversas ciências tecnológicas entre elas automação e sistemas.

¹ *Controller Area Network* (CAN) é um protocolo de comunicação serial desenvolvido por Robert Bosch na década de 1980, estabelecendo-se como o protocolo padrão para rede embarcada em veículos na indústria automobilística.

A UCS é uma universidade comunitária e regional que iniciou suas atividades com sede e foro na cidade de Caxias do Sul, Rio Grande do Sul, em 10 de fevereiro de 1967. A Universidade de Caxias do Sul surgiu em decorrência dos esforços da sociedade civil, visando estimular o desenvolvimento da região.

Atualmente a universidade é uma instituição de ensino superior com atuação direta na região nordeste do estado do Rio Grande do Sul. Sua mantenedora é a Fundação Universidade de Caxias do Sul, entidade jurídica de direito privado sem fins lucrativos.

Mesmo com seus 48 anos de existência a UCS se mantém alinhada com os princípios de seus idealizadores que é ser “um templo da cultura e do saber, e derramar para fora de seus muros os benefícios de suas pesquisas, o aproveitamento de seus cursos, em favor da comunidade que a faz crescer” (Dr. Virvi Ramos, no seu discurso de posse como reitor da Universidade de Caxias do Sul, em 1967).

1.4 LIMITES DO TRABALHO

O trabalho analisa, teoricamente, o problema associado ao controle de um sistema de Direção Eletrônica (do inglês, *Steer-by-Wire*) para veículos automotores. Faz-se uma revisão da literatura clássica e recente dos principais conceitos, definições, teoremas e lemas, a serem utilizados na elaboração de um controle aplicado ao sistema *Steer-by-Wire* (SbW).

Neste trabalho para o sistema SbW considera-se o modelo matemático, representação em espaço de estados, apresentado em Nor Shah *et al.* (2013), acrescentando atraso constante e considerando o caso do atuador sujeito a saturação em amplitude. A síntese do controlador foi efetuada com condições em forma de Desigualdade Matricial Linear (do inglês, *Linear Matrix Inequality* - LMI), as condições que garantem a existência de uma solução para o problema proposto são obtidas a partir de funcionais de Liapunov-Krasovskii.

Preocupa-se em mostrar o contexto em que o presente trabalho se insere, justificando os métodos e abordagens que serão desenvolvidos, utilizando-se de uma fundamentação teórica. A implementação em laboratório, e *a posteriori* em veículos, do sistema de Direção Eletrônica será objetivo de um trabalho futuro.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo serão apresentados os principais conceitos, definições, teoremas e lemas para as classes de sistemas que serão estudados ao decorrer deste trabalho. Primeiramente, será mostrado o problema de estabilidade absoluta e estabilidade de sistemas no sentido de Liapunov². Em seguida, uma discussão dos meios empregados para lidar com sistemas lineares sujeitos a restrições, ao atraso e a saturação com atraso. Seguindo das técnicas utilizadas na literatura em abordagens por Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) para tratar esses sistemas. Por fim, será apresentada a análise do problema de estudo da Direção Eletrônica em veículo automotor (do inglês, *Steer-by-Wire*).

2.1 ESTABILIDADE

Segundo Khalil (2002) a teoria de estabilidade desempenha um papel central na teoria para a Engenharia de Controle, existindo diferentes tipos de problemas de estabilidade que surgem do estudo de sistemas dinâmicos. A estabilidade de um sistema não linear pode apresentar vários pontos de equilíbrio isolados dependendo das condições iniciais. Estabilidade dos pontos de equilíbrio é geralmente caracterizado no sentido de Liapunov, para tanto, observa-se o comportamento de uma função escalar dos estados do sistema, chamada de função de Liapunov.

2.1.1 Estabilidade absoluta

Considerando o sistema linear definido por:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t), \tag{1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A matriz A_0 é constante.

Os pontos de equilíbrio, x_e , do sistema (1) são as soluções para:

$$A_0 x_e = 0. \tag{2}$$

² Aleksandr Mikhailovich Liapunov (1857-1918) foi um matemático e físico russo conhecido por seu desenvolvimento da teoria da estabilidade de sistemas dinâmicos, bem como por suas diversas contribuições à física, matemática e teoria das probabilidades.

Se a matriz A_0 é não singular (determinante não é nulo), existe um único ponto de equilíbrio $x_e = 0$. Caso contrário, quando A_0 é singular (determinante é nulo), existem outros pontos $x_e \neq 0$, além de $x_e = 0$, como soluções para (2). Considerando a estabilidade da origem em $x_e = 0$, a caracterização da estabilidade da origem com respeito ao sistema (1) pode ser feito através da análise dos autovalores da matriz A_0 .

Teorema 1 Para Tarbouriech, Garcia, *et al.* (2011) em respeito ao sistema (1), o ponto de equilíbrio $x_e = 0$ é:

- (a) Assintoticamente estável se e somente se todos os autovalores da matriz A_0 têm partes reais estritamente negativas (matriz Hurwitz³): $\Re(\lambda_i(A_0)) < 0$.
- (b) Criticamente estável se e somente se as duas seguintes condições forem satisfeitas:
 - i. Todos os autovalores da matriz A_0 são não positivos com partes reais: $\Re(\lambda_i(A_0)) \leq 0$.
 - ii. Cada autovalor $\lambda_i(A_0)$ com a parte real nula é tal que sua multiplicidade algébrica é igual à sua multiplicidade geométrica.
- (c) Criticamente instável se e somente se a condição anterior b (i) está satisfeito, mas condição b (ii) não é verificada.
- (d) Instável se e somente se existe, pelo menos, um autovalor de A_0 com parte real positiva: $\Re(\lambda_i(A_0)) > 0$.

O modo de testar a estabilidade da origem ($x_e = 0$) fornecido pelo Teorema 1 se aplica apenas aos sistemas lineares.

2.1.2 Estabilidade no sentido de Liapunov

Os métodos de Liapunov possuem a finalidade de verificar a estabilidade através de uma função escalar que visa descrever a energia do sistema. A verificação da estabilidade de um sistema pode ser realizada através dos métodos indireto ou direto. O método indireto verifica a estabilidade do sistema determinando uma aproximação linear do sistema em torno de um ponto de equilíbrio estável, caracterizando uma região de estabilidade do sistema em torno do ponto de equilíbrio.

³ Uma matriz quadrada A é dita Matriz Hurwitz ou matriz de Routh-Hurwitz se a parte real de todos os autovalores de A forem estritamente negativos.

No método direto verifica-se a estabilidade sem solucionar o conjunto de equações diferenciais características do sistema, assim sua limitação está em determinar essa função que caracterize a estabilidade. Para tanto, Liapunov propôs o conceito de funções candidatas ou funções de Liapunov, essas funções, usualmente quadráticas são testadas dentro dos parâmetros do sistema quanto a sua positividade e negatividade de sua derivada primeira.

Caso a função de Liapunov for positiva e decrescente ao longo das trajetórias do sistema o ponto de equilíbrio do sistema é estável ou assintoticamente estável. Um ponto de equilíbrio é considerado estável se e somente se todas as soluções a partir de pontos próximos ficarem nas proximidades desse ponto, caso contrário, é instável. Ao passo, que um ponto de equilíbrio é assintoticamente estável se todas as soluções a partir de pontos próximos, não só ficarem nas proximidades, mas também tendem ao ponto de equilíbrio para um tempo tendendo ao infinito.

Considerando o sistema não linear definido por:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (3)$$

onde f é uma função contínua no domínio \mathcal{D} dentro de \mathbb{R}^n .

Os pontos de equilíbrio (x_e) associados ao sistema (3) são os pontos pertencentes a \mathcal{D} e soluções de:

$$f(x_e) = 0. \quad (4)$$

Assume-se que o ponto de equilíbrio de interesse é a origem $x_e = 0$. Reescrevendo o sistema (3), tem-se:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad f(0) = 0. \quad (5)$$

Pertencendo a uma região $W \subseteq \mathcal{D}$ em torno da origem.

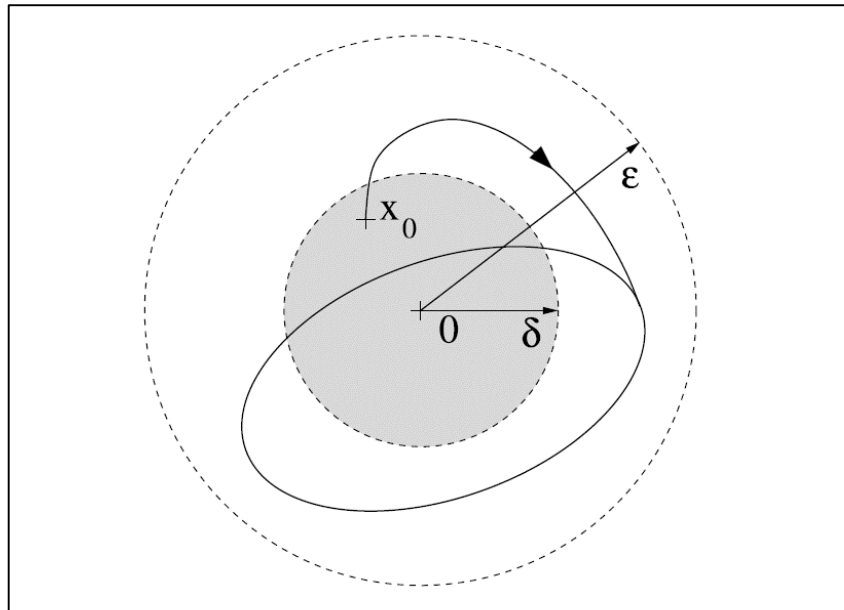
Definição 1 Para Khalil (2002) o ponto de equilíbrio $x_e = 0$ de (5) é:

(a) Estável se para cada $\varepsilon > 0$, existe um escalar positivo δ tal que:

$$\|x(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (6)$$

A Figura 1 ilustra a trajetória de x_e , no caso estável:

Figura 1 – Ponto de equilíbrio estável.



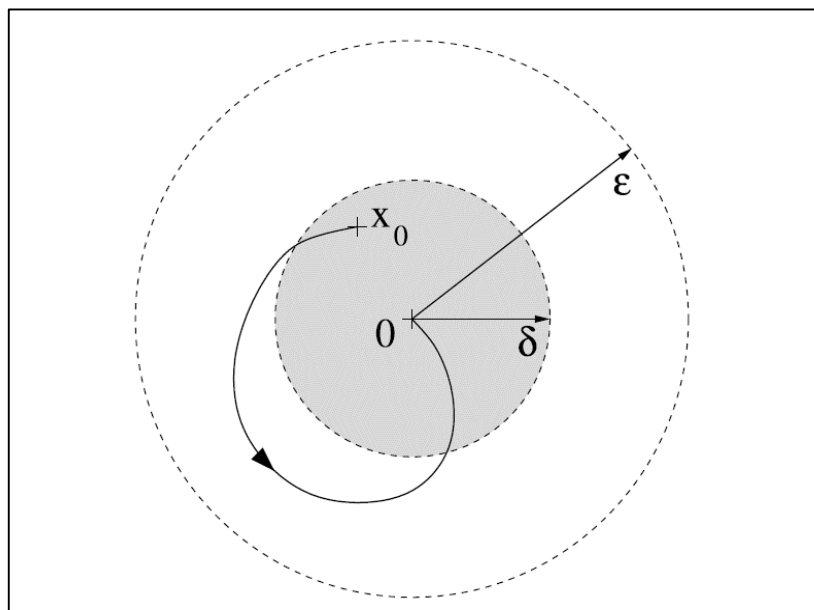
Fonte: *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators* (2011)

- (b) Assintoticamente estável se ele é estável e o escalar δ pode ser escolhido de tal modo que:

$$\|x(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (7)$$

A Figura 2 ilustra a trajetória de x_e , assintoticamente estável:

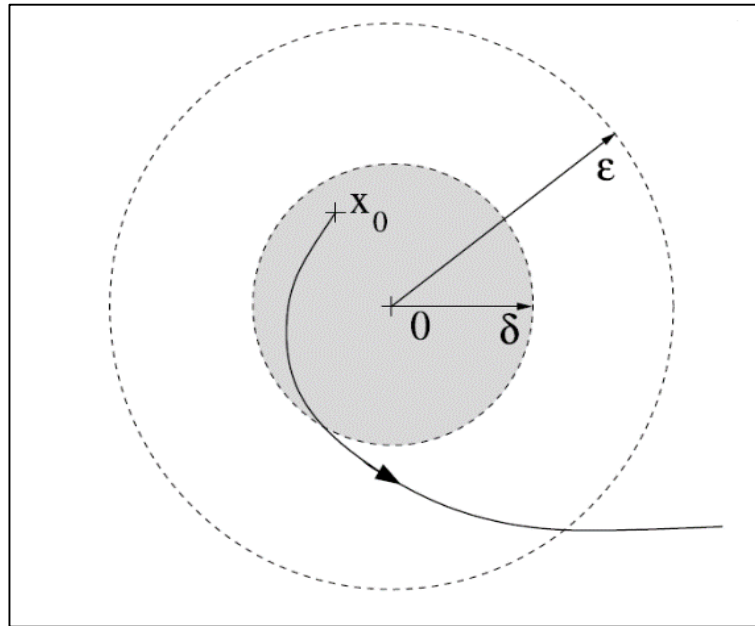
Figura 2 – Ponto de equilíbrio assintoticamente estável.



Fonte: *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators* (2011)

(c) Instável, se não satisfaz as condições anteriores. A Figura 3 ilustra a trajetória de x_e :

Figura 3 – Ponto de equilíbrio instável.



Fonte: *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators* (2011)

Fez-se a análise da estabilidade de um ponto de equilíbrio, no caso, a origem. No entanto, também é importante caracterizar a região de atração de $x_e = 0$ ou, pelo menos, encontrar uma estimativa da mesma, para tanto enuncia-se a seguinte definição.

Definição 2 Denominada de $x(t, x(0))$ a trajetória do sistema (5) inicializada em $x(0)$. A região de atração da origem denotada por R_A é definida por:

$$R_A = \{x \in \mathbb{R}^n; x(t, x(0)) \rightarrow 0 \mid t \rightarrow \infty\}. \quad (8)$$

Na aplicação da Definição 1, a fim de concluir sobre a estabilidade da origem com respeito ao sistema (5), supõe-se explicitamente conhecer essas trajetórias. No entanto, a determinação analítica de soluções para (5) pode ser difícil, ou mesmo impossível.

O objetivo do segundo método (ou método direto) de Liapunov é estudar o comportamento das soluções (ou trajetórias) em torno de um ponto de equilíbrio. No entanto, sua limitação está em determinar uma função de Liapunov tal que a estabilidade do ponto de equilíbrio possa ser garantida.

Para tanto, considera-se uma função $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável definida no domínio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ que contém a origem. A derivada temporal de V ao longo das trajetórias do sistema (5) é denotado $\dot{V}(x)$ e definida por:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_{(i)}} \dot{x}_{(i)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_{(i)}} f_{(i)}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_{(1)}} & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_{(n)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{(1)}(x) \\ \vdots \\ f_{(n)}(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \quad (9)$$

Teorema 2 Seja $x_e = 0$ um ponto de equilíbrio para o sistema (5) e $V: \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}_+$ uma função continuamente diferenciável em um domínio \mathcal{D} em torno de $x = 0$, de modo que

$$V(0) = 0 \text{ e } V(x) > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad x \neq 0 \quad (10)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D} \quad (11)$$

então $x_e = 0$ é estável. Além disso, se:

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad x \neq 0 \quad (12)$$

então $x_e = 0$ é assintoticamente estável.

Observa-se que o Teorema 2 garante a estabilidade em um sentido local, ou seja, a estabilidade só é assegurada em um domínio em torno da origem.

2.2 SISTEMAS COM RESTRIÇÃO

No projeto de um controlador é necessário levar em conta todas as particularidades do sistema físico, a fim de se obter um desempenho satisfatório. Nos sistemas de controle industriais o problema de restrições se faz presente. Neste contexto, destaca-se os sistemas sujeitos a saturação nos atuadores.

Para Tarbouriech, Garcia, *et al.* (2011) a saturação pode ser entendida como sendo uma restrição de ordem tecnológica, física ou mesmo de segurança. Em um modelamento matemático essa restrição se traduz em uma limitação do sinal de controle, entre valores máximos e mínimos. Muitos problemas indesejáveis podem surgir em um sistema de controle

devido à saturação, pois quando um sistema satura, ele passa a se comportar como se estivesse operando em malha aberta.

2.2.1 Modelos de sistemas com saturação

Segundo Tarbouriech, Garcia, *et al.* (2011) a modelagem da não linearidade do tipo saturação, no sentido de considerá-las no projeto do controlador, é importante para avaliar seus efeitos sobre a estabilidade, o desempenho e a robustez do sistema em malha fechada. Logo, se tem a necessidade de representações do termo saturação apropriadas, para tanto os modelos de saturação, em amplitude, do atuador mais frequentes na literatura serão apresentados a seguir:

- A primeira baseia-se na utilização de inclusões diferenciais politópicas. Trata-se de uma descrição local do sistema em malha fechada através de um modelo saturado politópico;
- A segunda representação envolve reescrever o sistema em malha fechada e substituir o termo saturação por uma não linearidade do tipo zona morta;
- A terceira representação envolve a divisão do espaço de estados em regiões de saturação. Dentro de cada uma dessas regiões, a dinâmica do sistema é descrita por um sistema linear.

Para simplificar as representações que serão apresentadas considera-se o sistema linear (13) em malha fechada sujeito a saturação de entrada:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bsat(u(t)) \\ u(t) &= Kx(t) \end{aligned} \tag{13}$$

onde o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$. As matrizes A e B são matrizes reais constantes de dimensões apropriadas.

Além disso, a entrada da planta é limitada por

$$-u_{o(i)} \leq u_{(i)} \leq u_{o(i)}, \quad i = 1, \dots, m. \tag{14}$$

Assume-se que $sat(\cdot)$ seja uma função vetorial definida por:

$$sat_{(i)}(Kx(t)) = sat(K_{(i)}x(t)) = sign(K_{(i)}x(t)) \cdot \min\{|K_{(i)}x(t)|, u_{o(i)}\}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{15}$$

A função sinal - $sign(K_{(i)}x(t))$ - é dada por:

$$sign(K_{(i)}x(t)) = \begin{cases} 1, & \text{se } K_{(i)}x(t) > 0 \\ 0, & \text{se } K_{(i)}x(t) = 0 \\ -1, & \text{se } K_{(i)}x(t) < 0 \end{cases} \quad (16)$$

2.2.1.1 Modelagem politópica

Segundo Tarbouriech e Gomes da Silva Jr. (2000) esta abordagem teve sua origem no uso de inclusões diferenciais para estudar sistemas saturados, no final de 1990, e utiliza o fato de que a saturação pode ser escrita como:

$$sat(Kx(t)) = \Gamma(\alpha(x(t)))Kx(t), \quad (17)$$

onde $\Gamma(\alpha(x(t)))$ é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são definidos para $i = 1, \dots, m$.

Tarbouriech e Gomes da Silva Jr. (2000) define $\alpha(x)$ como

$$\alpha_{(i)}(x(t)) = \begin{cases} \frac{u_{\max(i)}}{K_{(i)}x(t)} & \text{se } K_{(i)}x(t) > u_{\max(i)} \\ 1 & \text{se } -u_{\min(i)} \leq K_{(i)}x(t) \leq u_{\max(i)} \\ \frac{-u_{\min(i)}}{K_{(i)}x(t)} & \text{se } K_{(i)}x(t) < -u_{\min(i)} \end{cases} \quad (18)$$

Por definição, tem-se $0 < \alpha_{(i)}(x(t)) \leq 1$, $\forall i = 1, \dots, m$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Nota-se que o escalar $\alpha_{(i)}(x(t))$ pode ser visto como um indicador do grau de saturação da entrada i do sinal de controle u . A partir de (17) e (18), pode-se reescrever o sistema (13) como

$$\dot{x}(t) = (A + B\Gamma(\alpha(x(t)))K)x(t) = A_t x(t), \quad (19)$$

onde a matriz Γ é função de $\alpha(x(t))$ e, por conseguinte, de $x(t)$.

Considerando o escalar $0 < \alpha_{l(i)} \leq 1$, $i = 1, \dots, m$ pode-se definir o espaço poliédrico

$$E(K, u_{min}^\alpha, u_{max}^\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : -u_{min}^\alpha \leq Kx \leq u_{max}^\alpha\}, \quad (20)$$

onde:

$$-u_{min(i)}^\alpha = \frac{-u_{min(i)}}{\alpha_{l(i)}} \quad u_{max(i)}^\alpha = \frac{u_{max(i)}}{\alpha_{l(i)}}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (21)$$

A aplicação da modelagem politópica para o estudo da estabilidade de sistemas saturados pode ser encontrada em Tarbouriech, Garcia, *et al.* (2011).

2.2.1.2 Modelagem por não linearidade do tipo zona morta

Pode-se reescrever o sistema (13) como sendo uma conexão entre um sistema linear e uma não linearidade de setor definida por:

$$\phi(Kx(t)) = Kx(t) - sat(Kx(t)) \quad (22)$$

Reescrevendo (22) tem-se:

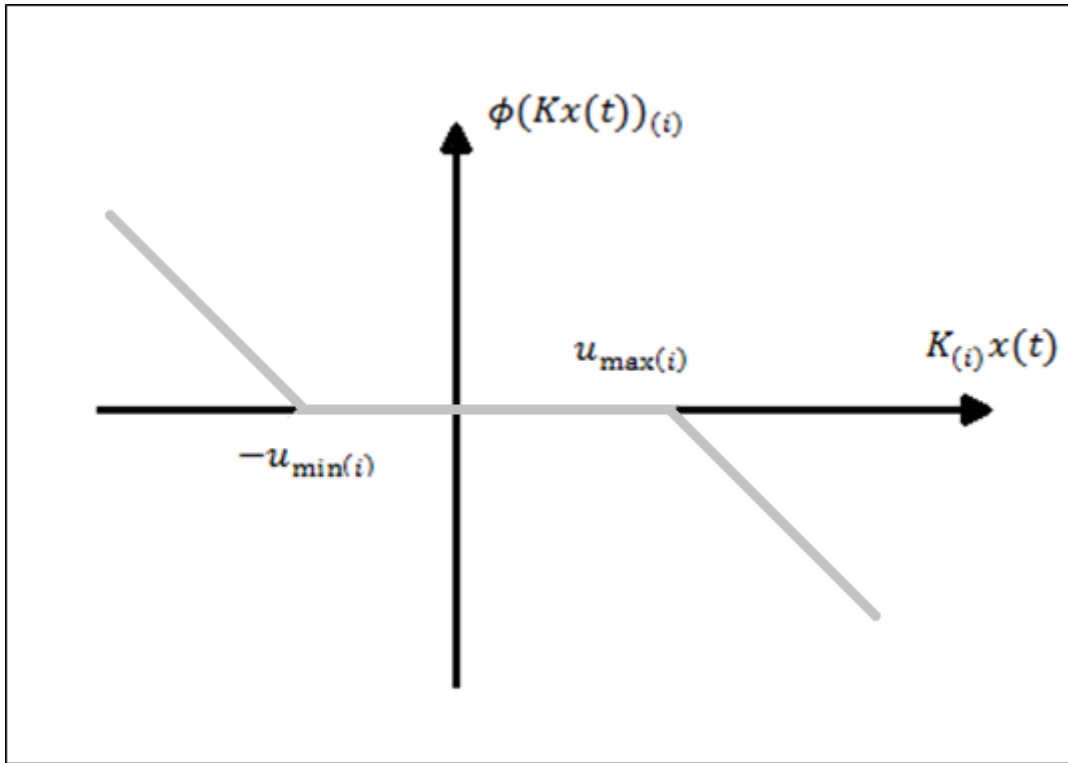
$$\phi(Kx(t)) = \begin{cases} u_{max(i)} - K_{(i)}x(t) & se K_{(i)}x(t) > u_{max(i)} \\ 0 & se -u_{min(i)} \leq K_{(i)}x(t) \leq u_{max(i)} \\ -u_{min(i)} - K_{(i)}x(t) & se K_{(i)}x(t) < -u_{min(i)} \end{cases} \quad (23)$$

para $i = 1, \dots, m$.

A não-linearidade $\phi(Kx(t))$ é uma não-linearidade do tipo zona morta, ilustrada na Figura 4, o sistema de malha fechado pode ser representado pela conexão entre um sistema linear e uma não-linearidade, conforme:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B\text{sat}(u(t)) = Ax(t) + B(Kx(t) - \phi(Kx(t))) \\ &= Ax(t) - B\phi(Kx(t)) + BKx(t) = (A + BK)x(t) - B\phi(Kx(t))\end{aligned}\quad (24)$$

Figura 4 – Não Linearidade do Tipo Zona Morta.



Fonte: Autor (2015)

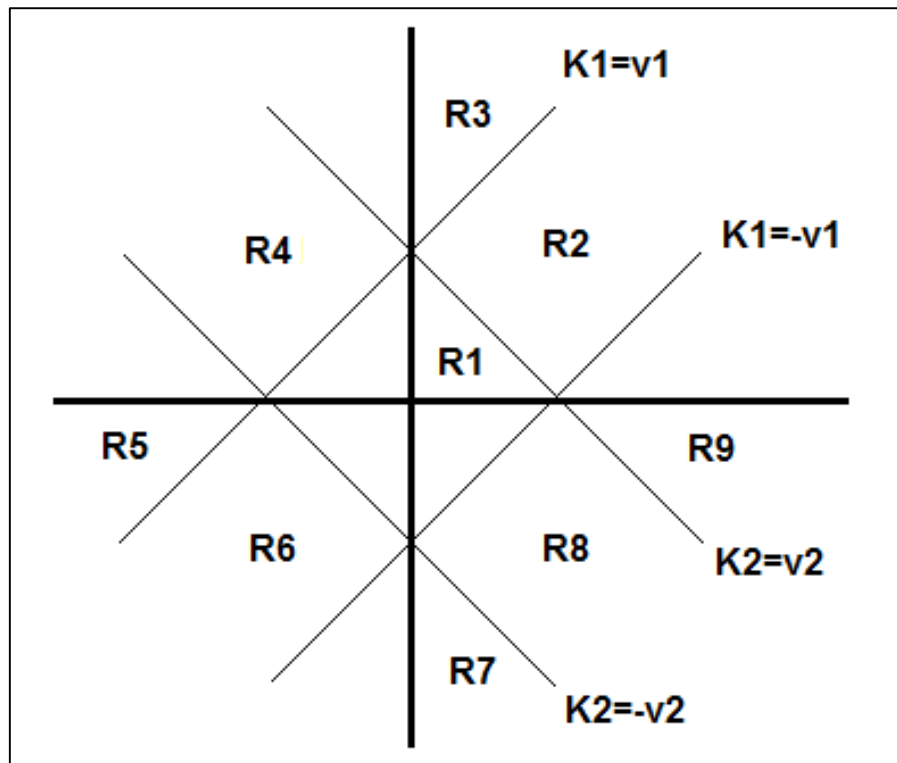
2.2.1.3 Modelagem por regiões de saturação

A representação consiste em dividir o espaço de estados em regiões de saturação, onde a dinâmica da planta não muda. Uma região de saturação é definida como a intersecção de subespaços do tipo $K_{(i)}x \leq d_{(i)}$ ou tipo $-K_{(i)}x \leq d_{(i)}$, em que $d_{(i)}$ pode ser $u_{\min(i)}$, $-u_{\min(i)}$, $u_{\max(i)}$ ou $-u_{\max(i)}$. Para um sistema com m entradas, existem 3^m regiões de saturação, sendo a região de saturação um conjunto poliédrico denotado como:

$$E(R_j, d_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : R_j x \leq d_j\}, \quad j = 1, \dots, 3^m \quad (25)$$

A Figura 5 mostra divisões feitas em \mathbb{R}^2 , sistema com duas entradas de controle saturáveis em ± 1 e ± 2 .

Figura 5 – Regiões de Saturação.



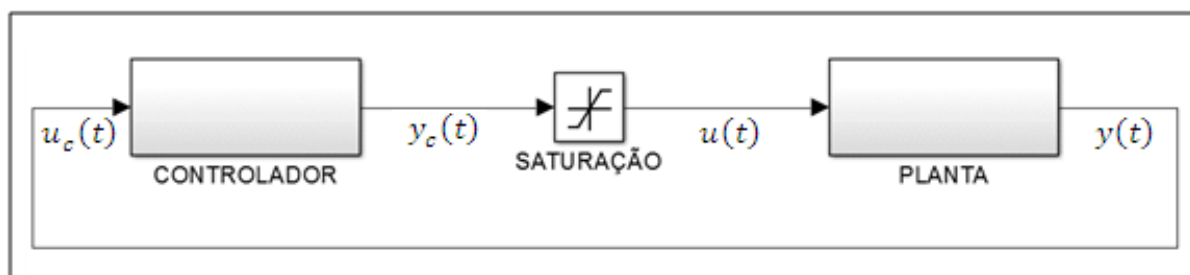
Fonte: Autor (2015)

Segundo Tarbouriech, Garcia, *et al.* (2011) dentro de cada região de saturação, o sistema pode ser modelado como um sistema afim, isto é, um sistema linear com uma perturbação constante e aditiva.

2.2.2 Caso especial: sistemas com saturação na entrada da planta

Sistemas com restrição no sinal de controle, em amplitude, podem ser modelados por uma função saturação na entrada da planta, conforme Figura 6.

Figura 6 – Sistema em malha fechada com saturação na entrada da planta.



Fonte: Autor (2015)

O modelo, em espaço de estados, da planta é representado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_z u(t)\end{aligned}\tag{26}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $w(t) \in \mathbb{R}^q$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ são respectivamente os vetores de estados, entradas, perturbações, saídas medidas e saídas reguladas. As matrizes A , B , B_w , C_y , C_z e D_z são reais, constantes e de dimensões apropriadas. Os pares (A, B) e (C_y, A) são respectivamente estabilizáveis e observáveis.

Além disso, o vetor de perturbação $w(t)$ é limitado em energia (27) para um escalar γ , ou seja, $w(t) \in \mathcal{L}_2$:

$$\|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \int_0^{\infty} w(t)' w(t) dt \leq \frac{1}{\gamma}, \quad 0 < \frac{1}{\gamma} < \infty\tag{27}$$

Um controlador é dado *a priori* para a planta:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c u_c(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c u_c(t)\end{aligned}\tag{28}$$

onde $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$, $u_c(t) = y(t) \in \mathbb{R}^p$ e $y_c(t) \in \mathbb{R}^m$ são respectivamente os vetores de estado, entradas e saídas do controlador. As matrizes A_c , B_c , C_c e D_c são constantes.

Este controlador despreza qualquer não linearidade presente na planta, entretanto o sistema em malha fechada mostrado na Figura 6 apresenta saturação em amplitude no sinal de controle. Assim, o sinal de saída de controle e sinal de entrada da planta é modelado por:

$$\begin{aligned}u_c(t) &= y(t) \\ u(t) &= \text{sat}(y_c(t))\end{aligned}\tag{29}$$

Assume-se que a entrada da planta é limitada por:

$$-u_{o(i)} \leq u_{(i)} \leq u_{o(i)}, \quad i = 1, \dots, n\tag{30}$$

Define-se a função saturação $sat(y_c(t))$, com limites simétricos, como:

$$sat_{(i)}(y_c(t)) = sat(y_{c(i)}(t)) = sign(y_{c(i)}(t)) \cdot \min\{|y_{c(i)}(t)|, u_{o(i)}\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (31)$$

onde $sign(y_{c(i)}(t))$ é dado por:

$$sign(y_{c(i)}(t)) = \begin{cases} 1, & \text{se } y_{c(i)}(t) > 0 \\ 0, & \text{se } y_{c(i)}(t) = 0 \\ -1, & \text{se } y_{c(i)}(t) < 0 \end{cases} \quad (32)$$

Substituindo (29) no sistema (26), pode-se reescrever o sistema como a equação dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bsat(y_c(t)) + B_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_z sat(y_c(t)) \end{aligned} \quad (33)$$

2.3 SISTEMAS COM ATRASO NO TEMPO

Sistemas que apresentam atrasos de transporte são frequentemente encontrados em diversos sistemas na área de telecomunicações, a presença de atrasos afeta as características dinâmicas do sistema, prejudicando o desempenho, sendo fontes de instabilidade.

2.3.1 Sistemas com atraso na entrada

Segundo Silva, Datta e Bhattacharyya (2005), existem sistemas que podem ser modelados com um atraso entre o sinal de controle e o seu efeito sobre a planta, o atraso na entrada do controlador pode ser entendido como um comando do tipo retardado. No controle por meio de rede o controlador, por vezes, se localiza fisicamente distante da planta, portanto os sinais de entrada e saída de controle estão sujeitas ao atraso se considerar as restrições de velocidade da rede de comunicação.

Considerando o sistema linear com atraso na entrada da planta:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - \tau) + B_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_z u(t) \end{aligned} \quad (34)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $w(t) \in \mathbb{R}^q$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ são respectivamente os vetores de estados, entrada, perturbação, saída medida e saída regulada. As matrizes A , B , B_w e C_y , C_z , D_z são reais, constantes e de dimensões apropriadas. Assume-se que os pares (A, B) e (C_y, A) são respectivamente estabilizáveis e detectáveis.

O vetor de perturbação $w(t)$ é limitado em energia, definido em (27). O atraso τ é constante e conhecido, ou pelo menos possui um valor representativo. A condição inicial do sistema é expressa por:

$$x(t_0 + \theta) = \varphi_x(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \quad (35)$$

O controlador da planta (34) não considera a saturação da entrada da planta é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c y(t) \end{aligned} \quad (36)$$

onde $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$, $u_c(t) = y(t) \in \mathbb{R}^p$ e $y_c(t) \in \mathbb{R}^m$ são respectivamente os vetores de estado, entrada e saída do controlador. As matrizes A_c , B_c , C_c e D_c são constantes e de dimensões apropriadas.

Além disso, a entrada da planta é limitada por:

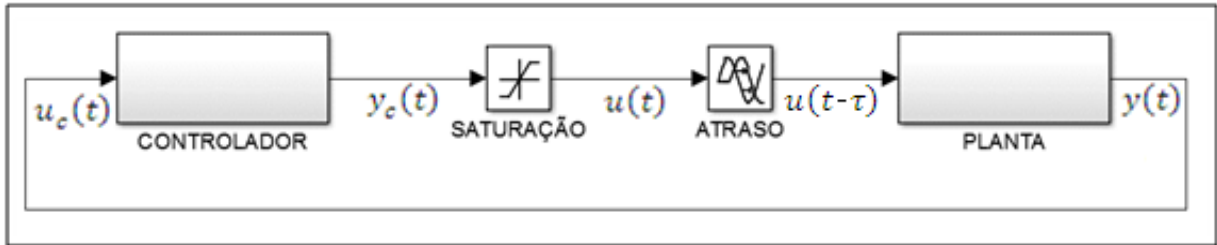
$$-u_{o(i)} \leq u_{(i)} \leq u_{o(i)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (37)$$

Como consequência dos limites na entrada da planta, o sinal de controle entregue à planta é dado por:

$$u(t - \tau) = \text{sat}(y_c(t - \tau)) \quad (38)$$

A Figura 7 em diagramas de bloco mostra a planta (34) com atraso na entrada e o controlador (36):

Figura 7 – Sistema em malha fechada com atraso na entrada.



Fonte: Autor (2015)

2.3.2 Sistemas com atraso nos estados

Considerando o sistema linear com atraso nos estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t) + B_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) \\ z(t) &= C_z x(t) \end{aligned} \quad (39)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $w(t) \in \mathbb{R}^q$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ são respectivamente os vetores de estados, entradas, perturbações, saídas medidas e saídas reguladas. As matrizes A , A_d , B , B_w , C_y e C_z são constantes e de dimensões apropriadas.

Assume-se um valor τ constante que seja representação do atraso nos estados do sistema. Também o vetor de perturbação $w(t)$ é limitado em energia, $w(t) \in \mathcal{L}_2$, conforme definido em (27). Nota-se que $D_z = 0$, implica em que a saída regulada é uma função linear dos estados da planta. A condição inicial do sistema (39) é descrito por:

$$x(t_0 + \theta) = \phi_x(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \quad (40)$$

O controlador do sistema (39) é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c u_c(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c u_c(t) \end{aligned} \quad (41)$$

onde $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$, $u_c(t) = y(t) \in \mathbb{R}^p$ e $y_c(t) \in \mathbb{R}^m$ são os vetores de estado, entradas e saídas do controlador. As matrizes A_c , B_c , C_c e D_c são constantes e de dimensões apropriadas.

Assume-se que a entrada da planta é limitada em energia como

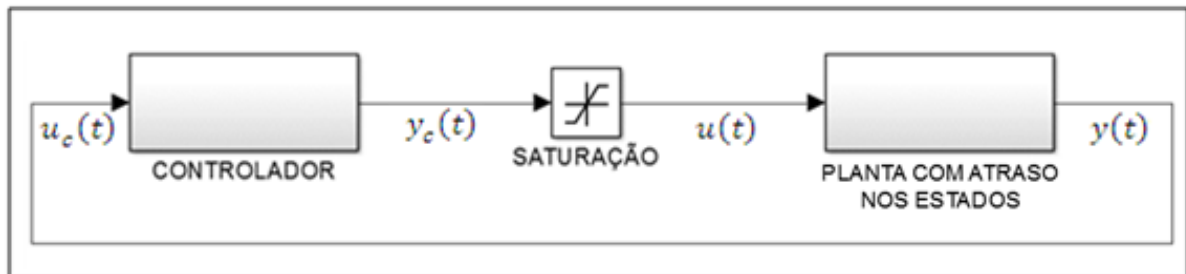
$$-u_{o(i)} \leq u(i) \leq u_{o(i)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (42)$$

Como consequência dos limites na entrada da planta, o sinal de controle entregue à planta é dado por:

$$\begin{aligned} u_c(t) &= y(t) \\ u(t) &= \text{sat}(y_c(t)) \end{aligned} \quad (43)$$

No entanto o controlador (41) não considera a saturação na planta. O sistema em malha fechada é mostrado na Figura 8.

Figura 8 – Sistema em malha fechada com atraso nos estados.



Fonte: Autor (2015)

2.4 MÉTODOS E PROCEDIMENTOS

As definições, funções e lemas utilizados neste trabalho são discutidos a seguir.

2.4.1 Função de Liapunov

O método proposto por Liapunov consiste em analisar uma função (função de Liapunov), definida positiva, cuja derivada seja definida negativa para todas as trajetórias do sistema.

A literatura usualmente utiliza uma função quadrática como função candidata, por exemplo:

$$V(x) = x'Px = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij}x_i x_j \quad (44)$$

onde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, x_i e x_j são elementos do vetor de estados x .

A matriz P é simétrica, ou seja, $P = P'$. Para que a função $V(x)$ seja definida positiva é necessário que a matriz P seja definida positiva ($P > 0$), ou seja, todos os autovalores de P devem ser reais e maiores que zero. Se a derivada da função $V(x)$ for definida negativa a estabilidade do sistema é garantida.

Exemplo 1 Considerando o exemplo (45) apresentado em Tarbouriech, Garcia, *et al.* (2011):

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (45)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e a matriz A é constante e de dimensões apropriadas.

A derivada $\dot{V}(x)$ em torno das trajetórias do sistema é mostrada em (46), por simplicidade a dependência temporal é omitida.

$$\dot{V}(x) = x'P\dot{x} + \dot{x}'Px = x'PAx + A'x'Px = x'(PA + A'P)x \quad (46)$$

Quando $V(x)$ é uma função quadrática, a análise de estabilidade é expressa pelas condições:

- (i) Se P é definida positiva, então $V(x)$, é definida positiva;
- (ii) Se a matriz $PA + A'P$ for definida negativa, então, $V(x)$ é definida negativa.

No caso do sistema (45), as condições estão satisfeitas, logo, o sistema é estável e os estados convergem para a origem. De forma resumida, para que o sistema seja estável, buscase uma matriz $P = P'$ definida positiva tal que a matriz $PA + A'P$ seja definida negativa. Este problema pode ser reescrito como:

$$P = P' > 0 \mid A'P + PA < 0 \quad (47)$$

Para sistemas lineares invariantes no tempo, a condição de estabilidade (47) é necessária e suficiente.

2.4.1.1 Função de Liapunov para sistemas com atraso

Considerando o sistema:

$$\dot{M}(t) = f(t, M_t), \quad t \geq t_0, \quad (48)$$

onde $M(t) \in \mathbb{R}^{2(n+n_c)}$ e M_t corresponde à restrição de $M(\theta)$ para $\theta \in [t - \tau, t]$.

O atraso τ faz com que a solução não seja unicamente determinada a partir das variáveis de estado no instante $t = t_0$. Para determinar a solução $M(t)$, para todo $t \geq t_0$, é necessário conhecer os valores assumidos pela função no intervalo de tempo $[t_0 - \tau, t_0]$. Portanto, a condição inicial não é mais um vetor definido em $\mathbb{R}^{2(n+n_c)}$, mas por uma função com domínio $[t_0 - \tau, t_0] \times \mathbb{R}^{2(n+n_c)}$.

$$M_{t_0}(\theta) = M(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0] \quad (49)$$

Teorema 3 (Liapunov-Krasovskii) Sejam as funções $V_1(r) > 0$, $V_2(r) > 0$, $V_3(r) > 0$, $\forall r > 0$. Se existir um funcional contínuo $V: \mathbb{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$V_1(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq V_2(\|\phi\|_c) \quad (50)$$

$$\dot{V}(t, M_t) \leq -V_3(\|M(t)\|) \quad (51)$$

sejam verificados, então, a solução de (48) é assintoticamente estável.

A demonstração do Teorema 3 pode ser encontrada em (HALE e LUNEL, 1993), (IVANESCU, DUGARD e DION, 2000), (NICULESCU, 2001) e (GU, CHEN e KHARITONOV, 2003).

2.4.2 Funcional de Liapunov-Krasovskii

Segundo Gu, Chen e Kharitonov (2003) o estudo de estabilidade de sistemas com atraso pode ser realizado de duas maneiras: independente ou dependente do atraso. Outro fato

importante, se tratando de estabilidade de sistemas com atraso, é o critério utilizado: critério de Liapunov-Razumikhin, que utiliza uma função de Liapunov, e o critério de Liapunov-Krasovskii (abordado neste trabalho), que utiliza um funcional de Liapunov.

Utilizando-se de condições independentes, o valor do atraso não aparece explicitamente nas condições de teste de estabilidade. Sendo assim, presume-se que o atraso possa assumir qualquer valor dentro do intervalo $[0, \infty)$.

Pela abordagem dependente do atraso, preocupa-se em verificar intervalos de valores de atraso onde o sistema seja estável. Neste caso os testes de estabilidade contêm este atraso e busca-se um intervalo $\theta \in [0, \tau]$ onde τ é o atraso máximo permitido.

Um possível funcional para o sistema (49) é:

$$V(t) = M(t)'PM(t) + \int_{t-\tau}^t M(\theta)'RM(\theta) d\theta, \quad (52)$$

onde $P = P' > 0$ e $R = R' > 0$.

A prova formal deste funcional se encontra em (GU, CHEN e KHARITONOV, 2003).

2.4.3 Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

O estudo de Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMI) para sistemas dinâmicos iniciou-se em 1892 com teoria de Liapunov e desde então, são utilizadas em problemas específicos em engenharia de controle. A utilização de LMIs na síntese de controladores e análise de sistemas sujeitos a restrições no controle foi introduzido por Boyd, *et al.* (1994), esta representação teve bastante aceitação em trabalhos posteriores, desenvolvendo novas técnicas e teoremas para facilitar sua resolução e aplicação. Inclusive existem *softwares* capazes de solucionar computacionalmente LMIs, como por exemplo, o LMI *control toolbox* e YALMIP *toolbox*.

Definição 3 Uma LMI é uma desigualdade da forma (53).

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad i = 0, \dots, m. \quad (53)$$

onde $x \in \mathbb{R}^m$ é a variável de interesse e $F_i = F_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes simétricas.

Exemplo 2 Considerando a equação de Liapunov (54) (vide Tarbouriech, Garcia, *et al.* (2011)).

$$A'P + PA + Q = 0, \quad (54)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se $Q > 0$, a equação de Liapunov pode ser transformado em uma LMI, conforme:

$$A'P + PA < 0. \quad (55)$$

A desigualdade (55) pode ser convertida para a forma padrão (53). Considerando as matrizes P_1, \dots, P_m com $m = \frac{n(n+1)}{2}$. Em seguida, define-se $F_0 = 0$ e $F_i = -A'P_i - P_iA$ para $i = 1, \dots, m$. Pode-se escrever:

$$P = x_1P_1 + \dots + x_mP_m. \quad (56)$$

Trabalhos em teorias de controle têm utilizado abordagens através de LMIs, entretanto, uma LMI pode ser representada de inúmeras maneiras e em geral não está em uma forma desejada. Existem métodos que convertem, utilizando manipulações algébricas, estas formas de LMIs, se destacam: Complemento de Schur, *S-procedure* e o Lema de Finsler.

2.4.3.1 Complemento de Schur

Segundo Boyd, *et al.* (1994) as desigualdades matriciais não lineares podem ser convertidas para a formulação LMI usando o Complemento de Schur⁴. É possível converter as desigualdades convexas não lineares em LMIs usando complementos de Schur.

Lema 1 (Complemento de Schur) Supondo que $Q = Q'$, $M = M'$ e R são matrizes reais de dimensões apropriadas. Então, as afirmações (57) e (58) são equivalentes.

$$Q > 0 \text{ e } M - RQ^{-1}R' > 0 \quad (57)$$

$$\begin{bmatrix} M & R \\ R' & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (58)$$

onde $M - RQ^{-1}R'$ pode ser chamado de Complemento de Schur de Q . Tarbouriech *et al.* (2011) propõe o seguinte exemplo algébrico que aplica o Lema 1.

⁴ Issai Schur (1875 - 1941) foi um matemático russo que trabalhou em teoria dos grupos, análise combinatória, teoria dos números e física teórica. Possuindo publicações importantes nessas áreas.

Exemplo 3 Considerando a inequação matricial quadrática:

$$A'P + PA + PBB'P + Q < 0, \quad (59)$$

onde A é uma matriz de dimensões $n \times n$, B é uma matriz de dimensões $n \times m$.

A matriz Q é simétrica ($Q = Q'$) e a matriz P , também simétrica ($P = P'$), não é conhecida. Usando o complemento de Schur, tem-se:

$$M = -A'P - PA - Q, \quad R = PB, \quad Q = I. \quad (60)$$

Logo, obtém-se a seguinte desigualdade matricial:

$$\begin{bmatrix} -A'P - PA - Q & PB \\ B'P & I \end{bmatrix} > 0. \quad (61)$$

2.4.3.2 S-Procedure

Segundo Boyd, *et al.* (1994) *S-procedure* é uma técnica de relaxação de uma condição de definição de sinal. Ao invés de garantir-se a validade das condições para todo o espaço de estados, com esta técnica garante apenas onde o modelo da não linearidade é válido. Para maiores detalhes vide Boyd, *et al.* (1994), página 23.

2.4.3.3 Lema de Finsler

O Lema de Finsler⁵ mostra-se um importante instrumento algébrico para representar uma inequação matricial em outras formas equivalentes, mediante a inserção de multiplicadores escalares ou matriciais.

Lema 2 (Lema de Finsler (OLIVEIRA e SKELTON, 2001)) Sendo $x \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma função simétrica, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz tal que o posto de $\mathcal{B} < n$ e \mathcal{B}_0 é uma base para o espaço nulo de \mathcal{B} ($\mathcal{B}\mathcal{B}_0 = 0$), as seguintes condições são equivalentes:

$$(a) \quad x'Qx < 0, \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n | \mathcal{B}x = 0, \quad x \neq 0$$

⁵ Paul Finsler (1894 - 1970) foi um matemático alemão conhecido por seus trabalhos sobre os fundamentos da matemática, desenvolvendo os fundamentos da teoria dos conjuntos.

- (b) $Q + LB + B'L' < 0, \quad L \in \mathfrak{R}^{m+n}$
- (c) $B_0'QB_0 < 0$
- (d) $Q - \alpha B'B < 0, \quad \alpha \in \mathfrak{R}$

O Lema 2 possibilita inserir as restrições de igualdade presentes na representação algébrica em uma formulação equivalente de desigualdade matricial.

2.4.3.4 Lema de Projecção

Lema 3 (Lema de Projecção (GAHINET e APKARIAN, 1994)) Dado uma matriz simétrica $\Theta \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e duas matrizes U, Y , de dimensões m , considere-se o problema de encontrar alguma matriz Ω de dimensões compatíveis tais que:

$$\Theta + U'\Omega'Y + Y'\Omega U < 0 \quad (62)$$

Denota-se por W_U, W_Y quaisquer matrizes cujas colunas formam bases dos espaços nulos de U e Y , respectivamente. Então (62) é solucionável para Ω se e somente se:

$$\begin{cases} W_U'\Theta W_U < 0 \\ W_Y'\Theta W_Y < 0 \end{cases} \quad (63)$$

Prova:

Seja V_{UY} uma base para $Ker(U) \cap Ker(Y)$ e introduz-se matrizes V_U, V_Y tais que $W_U = [V_{UY}, V_U]$ e $W_Y = [V_{UY}, V_Y]$ sejam bases de $Ker(U)$ e $Ker(Y)$ respectivamente. Seja U e Y as dimensões de $Ker(U)$ e $Ker(Y)$, respectivamente. Observando-se que $[V_{UY}, V_U, V_Y]$ é então uma base de $Ker(U) \oplus Ker(Y)$, completa-se-a em uma base $T = [V_{UY}, V_U, V_Y, X]$ de \mathbb{R}^m . A matriz T é não singular e, portanto (62) é equivalente a:

$$T'\Theta T + (UT)'\Omega'(YT) + (YT)'\Omega(UT) < 0 \quad (64)$$

Em seguida, particiona-se em blocos UT, YT e $T'\Theta T$ de acordo com a partição $[V_{UY}, V_U, V_Y, X]$ de T . Pela construção, tem-se que:

$$UT = [0, 0, U_1, U_2], \quad YT = [0, Y_1, 0, Y_2]$$

Nota-se que $[U_1, U_2] \in \mathbb{R}^{(k+p_2) \times p}$ com $p \leq k + p_2$ e $[Y_1, Y_2] \in \mathbb{R}^{(k+m_2) \times q}$ com $q \leq k + m_2$, e que ambas matrizes apresentam posto completo em suas colunas. Com a notação:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{bmatrix} \Omega [Y_1, Y_2] = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times q}, \quad (65)$$

e a partição:

$$T' \Theta T = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} \\ * & \Theta_{22} & \Theta_{23} & \Theta_{24} \\ * & * & \Theta_{33} & \Theta_{34} \\ * & * & * & \Theta_{44} \end{bmatrix}. \quad (66)$$

Então (64) pode ser representado como:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} \\ * & \Theta_{22} & \Theta_{23} + \Omega_{11}' & \Theta_{24} + \Omega_{21}' \\ * & * & \Theta_{33} & \Theta_{34} + \Omega_{12} \\ * & * & * & \Theta_{44} + \Omega_{22} + \Omega_{22}' \end{bmatrix} < 0, \quad (67)$$

onde Ω_{ij} são arbitrárias uma vez que Ω é arbitrário e $[U_1, U_2]$ e $[Y_1, Y_2]$ tem posto completo em suas colunas. Especificamente, dado quaisquer Ω_{ij} a matriz $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} [Y_1, Y_2]$ é solução de (64). Assim, o problema reduz-se a encontrar condições em Θ_{ij} que assegurem a factibilidade de (67) para determinados Ω_{ij} .

Através do complemento de Schur, a desigualdade (67) pode ser representada como:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ * & \Theta_{22} & \Theta_{23} + \Omega_{11}' \\ * & * & \Theta_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (68)$$

$$\Theta_{44} + \Omega_{22} + \Omega_{22}' - \begin{bmatrix} \Theta_{14} \\ \Theta_{24} + \Omega_{21}' \\ \Theta_{34} + \Omega_{12} \end{bmatrix}' \Pi^{-1} \begin{bmatrix} \Theta_{14} \\ \Theta_{24} + \Omega_{21}' \\ \Theta_{34} + \Omega_{12} \end{bmatrix} < 0 \quad (69)$$

Dado Ω_{11} , Ω_{12} e Ω_{21} , sempre é possível encontrar-se Ω_{22} tal que (69) é satisfeita. Então, (62) é factível se e somente se (68) for factível para algum Ω_{11} .

Agora (68) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -\Theta'_{12}\Theta_{11}^{-1} & I & 0 \\ -\Theta'_{13}\Theta_{11}^{-1} & 0 & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} I & -\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12} & -\Theta_{11}^{-1}\Theta_{13} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0.$$

O que equivale a:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{22} - \Theta'_{12}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12} & \Omega_{11} + \Theta'_{23} - \Theta'_{13}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12} \\ 0 & * & \Theta_{33} - \Theta'_{13}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{13} \end{bmatrix} < 0. \quad (70)$$

Uma vez que Ω_{11} é arbitrário, isto é factível se e somente se:

$$\begin{cases} \Theta_{11} < 0 \\ \Theta_{22} - \Theta'_{12}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{12} < 0 \\ \Theta_{33} - \Theta'_{13}\Theta_{11}^{-1}\Theta_{13} < 0 \end{cases} \quad (71)$$

De forma equivalente, (70) é factível se e somente se:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ * & \Theta_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{13} \\ * & \Theta_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (72)$$

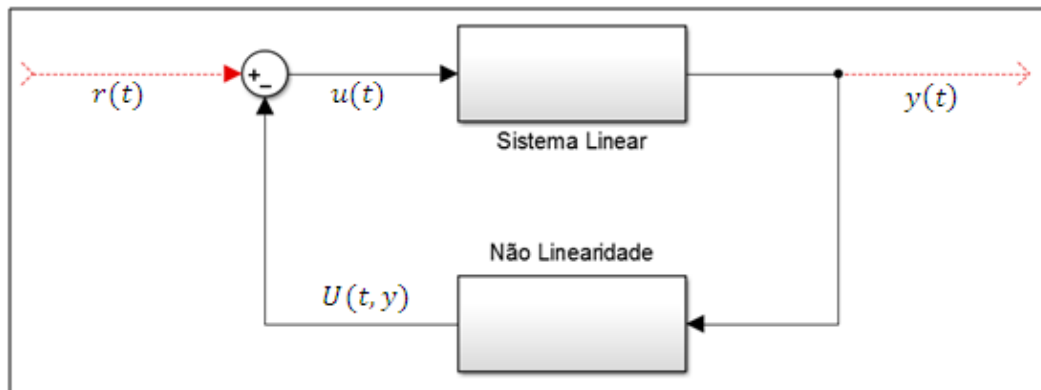
A condição (72) é exatamente (63) considerando-se a definição de W_U , W_Y e Θ_{ij} .

fim da prova.

2.4.4 Condição de setor

Para Khalil (2002) existem muitos sistemas práticos que podem ser representados pela interligação de um sistema linear e um elemento não linear. Tais sistemas podem ser descritos, por exemplo, como o sistema na forma de Lure mostrado na Figura 9:

Figura 9 – Sistema do Tipo Lure.



Fonte: Autor (2015)

A Figura 9 representa o estudo do Problema de Lure, que constitui na análise de estabilidade de um tipo de sistema representado como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ u(t) &= -U(t, y) \end{aligned} \tag{73}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, o par (A, B) é controlável e o par (C, A) é observável. Considera-se $U(t, y): [0; \infty) \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é uma não linearidade.

Definição 4 Considerando as matrizes diagonais K_1 e K_2 , tal que $K = K_1 - K_2$ seja definida positiva e que $U(0) = 0$. Então para todo $y \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n_y}$, $U(t, y)$ pertence ao setor (K_1, K_2) caso verifique que

$$[U(t, y) - K_1 y]' [U(t, y) - K_2 y] \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{74}$$

Segundo Khalil (2002) uma condição de setor pode ser caracterizada tanto de forma local quanto global (Figura 10). Para tanto, define-se a região \mathcal{S} como:

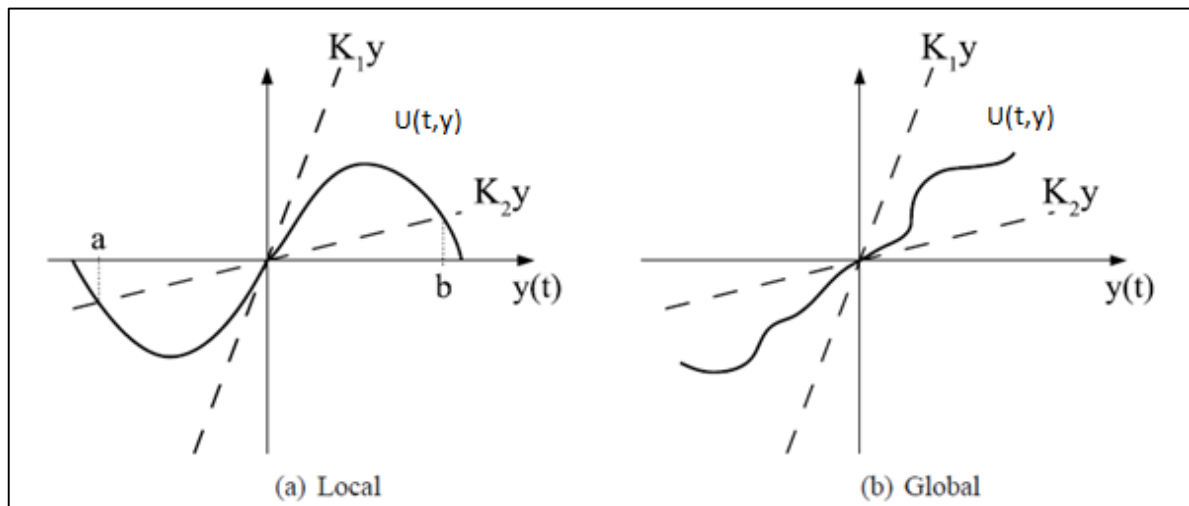
$$\mathcal{S} \triangleq \{y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}; a_{(i)} < y_{(i)}(t) < b_{(i)}\}, \quad \forall i = 1, \dots, n_y \tag{75}$$

sendo $a \in \mathbb{R}^{n_y}$ e $b \in \mathbb{R}^{n_y}$, de forma que $a_{(i)} < 0 < b_{(i)}$. \mathcal{S} é uma região que contém a origem e, caso a condição de setor for verificada em \mathcal{S} , esta região é definida como a região de validade da condição de setor:

- Se \mathcal{S} está estritamente contida em \mathbb{R}^{n_y} , então a condição de setor é satisfeita localmente;
- Se \mathcal{S} compreende todo o espaço \mathbb{R}^{n_y} , então a condição de setor é satisfeita globalmente.

A Figura 10 mostra uma linearidade pertencente ao setor, na Figura 10 (a) a não linearidade $U(t, y)$ pertence a um setor (K_1, K_2) localmente. A Figura 10 (b) mostra uma não linearidade $U(t, y)$ que pertence globalmente a um setor (K_1, K_2) .

Figura 10 – Condição de setor.



Fonte: *Nonlinear Systems* (2002), modificado pelo Autor (2015)

Para Khalil (2002) o problema de interesse é estudar a estabilidade da origem, não para uma dada não linearidade, mas sim para uma classe de não linearidades que satisfazem uma determinada condição setor. O problema consiste em mostrar que a origem é assintoticamente estável para todas as não linearidades de setor, neste caso o sistema é dito ser absolutamente estável. A estabilidade absoluta existe quando a condição setor é satisfeita globalmente e a origem é assintoticamente estável.

2.4.4.1 Condição de Setor Generalizada

A condição de setor generalizada é uma versão modificada da condição de setor aplicada a não-linearidades do tipo zona-morta (GOMES DA SILVA e TARBOURIECH, 2005). O

interesse no estudo da condição de setor generalizada é a obtenção de resultados menos conservativos se comparado com a condição de setor clássica devido a adição de um grau de liberdade às condições resultantes.

Lema 4 (Condição de Setor Generalizada (GOMES DA SILVA e TARBOURIECH, 2005))

Dado um conjunto:

$$\mathcal{S}(\mathbb{K}, G) = \left\{ \xi \mid |\mathbb{K}_{(i)} + G_{(i)}| \xi \leq u_{o_{(i)}} \right\}, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (76)$$

se $\xi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{K}, G)$, então:

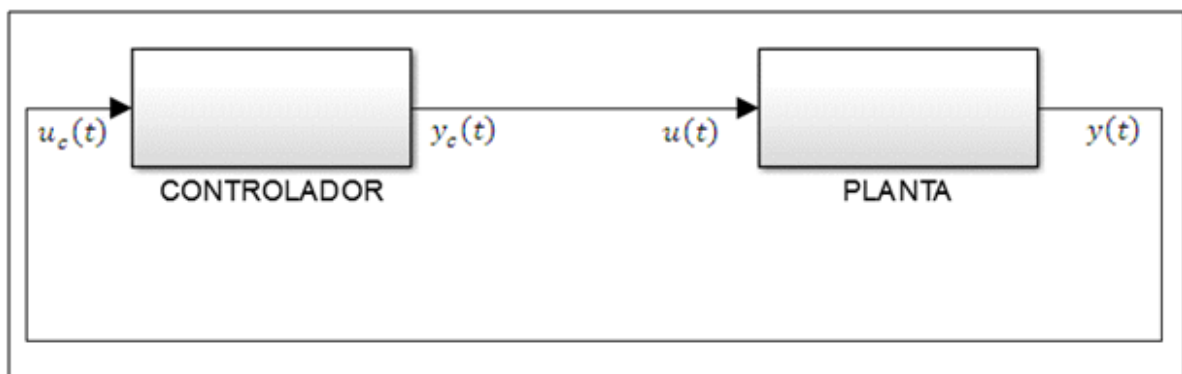
$$\phi(\mathbb{K}\xi(t) + f(t))' T \left(\phi(\mathbb{K}\xi(t) + f(t)) - G\xi(t) + f(t) \right) \leq 0 \quad (77)$$

2.5 CONTROLE DE SISTEMAS SATURANTES COM ATRASO

É um fator bastante conhecido a presença de atraso no tempo em sistemas de controle frequentemente causa instabilidade ou um desempenho indesejável. A maioria dos sistemas, além de apresentarem atrasos no tempo, está sujeito a restrições nos atuadores.

Tais fenômenos podem gerar consequências desastrosas para o sistema de controle, sendo o mais severo a instabilidade do sistema em malha-fechada. Dessa forma, o desenvolvimento de técnicas de análise e síntese de sistemas de controle apresentando atrasos e sujeitos à saturação nos atuadores tornaram-se cada vez mais alvo de preocupação. Na Figura 11 é mostrado um sistema de controle genérico.

Figura 11 – Sistema de controle genérico em malha fechada.



No sistema da Figura 11, assume-se que a dinâmica da planta possa ser representada pelo seguinte modelo genérico:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau_s) + Bu(t - \tau_i) + B_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_z u(t) \end{aligned} \quad (78)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $w(t) \in \mathbb{R}^q$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ são respectivamente os vetores de estados, entradas, perturbações, saídas medidas e saídas controladas.

As matrizes A , A_d , B , B_w , C_y , C_z e D_z são reais, constantes e de dimensões apropriadas. Os pares (A, B) e (C_y, A) são respectivamente estabilizáveis e observáveis.

O escalar τ_s representa o atraso nos estados do sistema, e τ_i , o atraso na entrada de controle. Assume-se que ambos são constantes e conhecidos. O vetor perturbação $w(t)$ é limitado em energia, $w(t) \in \mathcal{L}_2$, definido em (27).

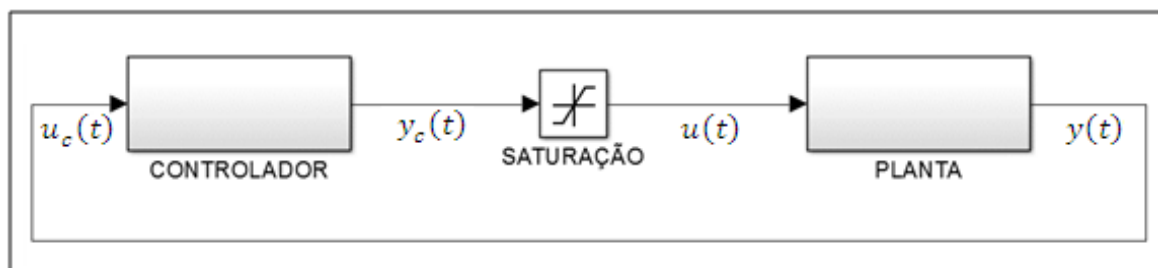
Um controlador foi dado *a priori* para a planta (78) desprezando qualquer limitação em amplitude do sinal de controle e é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + A_{c,d} x_c(t - \tau_s) + B_c u_c(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + C_{c,d} x_c(t - \tau_s) + D_c u_c(t) \end{aligned} \quad (79)$$

onde $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$, $u_c(t) = y(t) \in \mathbb{R}^p$ e $y_c(t) \in \mathbb{R}^m$ são respectivamente os vetores de estado, entradas e saídas do controlador. As matrizes A_c , B_c , C_c e D_c são constantes.

Pode-se notar que a saída da planta está disponível para realimentar sem qualquer tipo de atraso, entretanto o sinal de controle $y_c(t)$ é transferido com atraso τ_i para a entrada da planta $u(t)$. Para modelar a limitação do atuador em amplitude utilizou-se uma função saturação entre o controlador e a planta (Figura 12).

Figura 12 – Sistema de controle genérico em malha fechada com saturação.



Se valendo destas restrições o sistema se interconecta mediante:

$$\begin{aligned} u_c(t) &= y(t) \\ u(t - \tau_i) &= \text{sat}(y_c(t - \tau_i)) \end{aligned} \tag{80}$$

É importante ressaltar que não existem garantias de estabilidade para o sistema saturante em malha fechada, pois se considerou um controlador que não foi projetado para a ocorrência de saturação de entrada na planta. Niculescu (2001) alerta que este problema de análise da estabilidade de sistemas saturantes com atraso no tempo tem motivado trabalhos científicos na área.

O efeito de saturação do sinal de controle em um sistema em malha fechada cria uma diferença entre a saída e a entrada do atuador chamada de *windup*. Assim, o sistema deixa de responder de acordo com o sinal de controle aplicado, ou seja, a lei de controle não é mais efetivamente aplicada à planta. São muitas as topologias de sistemas possíveis, mas pode-se dividir em duas abordagens que tratam desse problema: síntese direta e síntese de compensadores *anti-windup*.

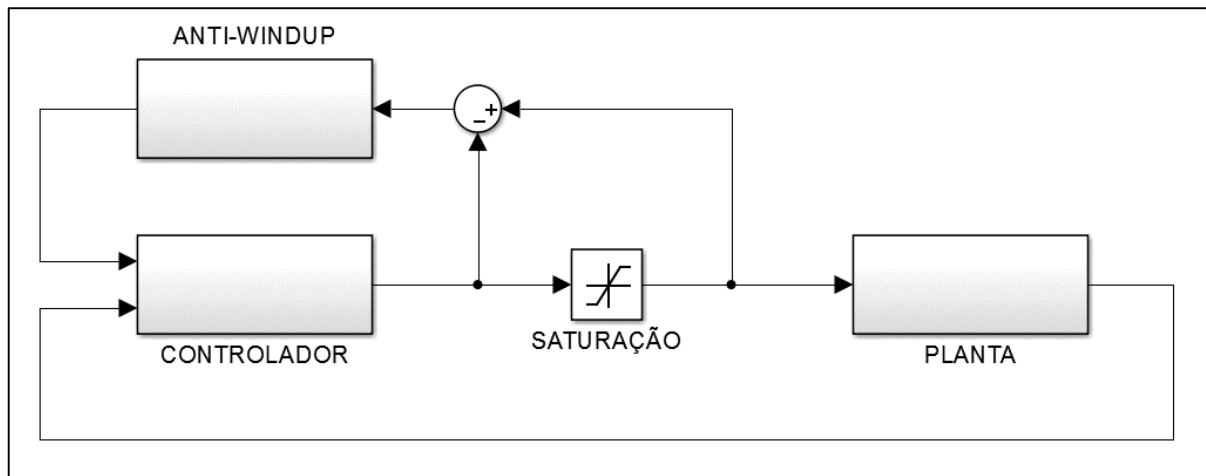
2.5.1 Síntese direta

A síntese direta consiste em projetar um controlador que considere as restrições do atuador. No entanto, existem situações nas quais a substituição do controlador não é permitida ou viável. Para contornar esse problema utiliza-se a técnica de *anti-windup*, que consiste em modificar a malha de controle, que considera um atuador linear, ao incluir um compensador que atenua os efeitos indesejados.

2.5.2 Síntese de compensadores anti-windup

A filosofia do *anti-windup* consiste em sintetizar uma malha de realimentação que reduz a diferença entre a entrada e saída do atuador sempre que ela estiver presente, garantindo a estabilidade da origem do sistema em malha fechada para um conjunto de condições de inicialização não vazias. O conceito é mostrado na Figura 13, a compensação de *anti-windup* consiste em realimentar a diferença entre o sinal dado pelo controlador e o sinal saturado através de um ganho, chama-se *anti-windup* estático, ou de um sistema dinâmico.

Figura 13 – *Anti-windup* para um sistema saturante.



Fonte: Autor (2015)

Nota-se que caso $u(t) = sat(u(t))$, isto é, se o controle não esteja na condição de saturação, a entrada do compensador *anti-windup* é nula. Portanto, o comportamento do sistema não é alterado na ausência da saturação. Configurações possíveis para compensadores *anti-windup* podem ser vistos em Roos e Biannic (2008); Niculescu (2001); Zaccarian, Gomes da Silva e Tarbouriech (2005) e Tell (2011).

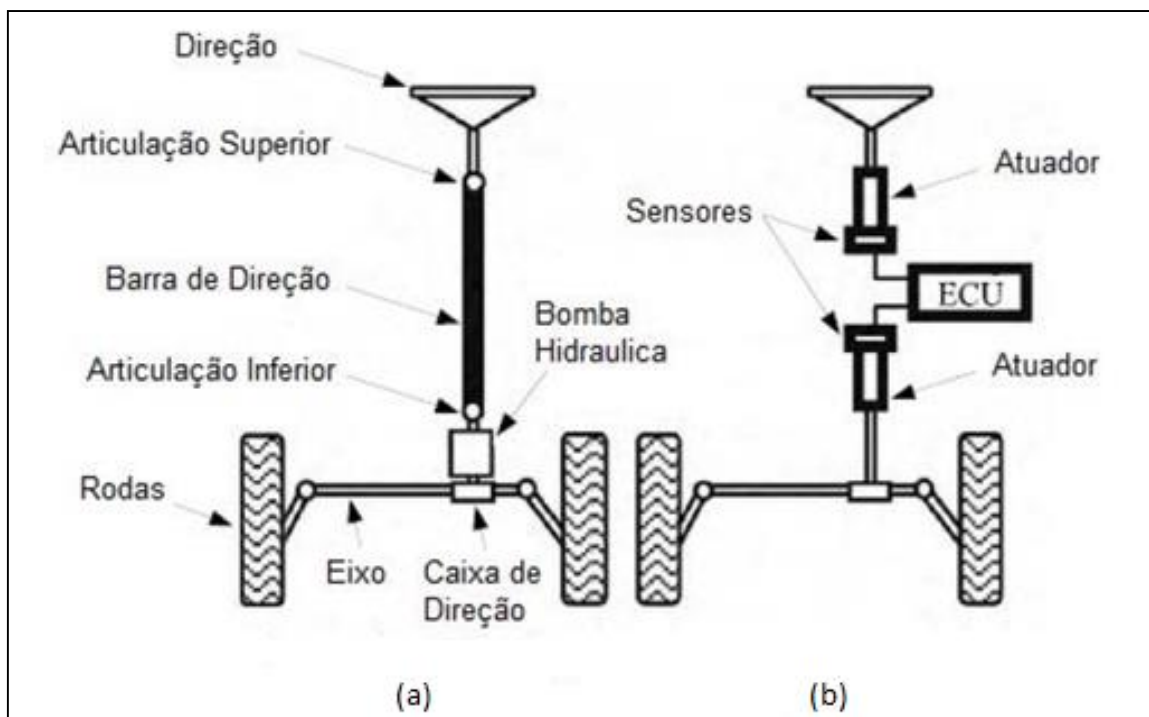
3 CONTROLE APLICADO AO SISTEMA STEER-BY-WIRE

Compreender os processos se faz necessário para utilizar modelos fiéis que representam os aspectos físicos da aplicação, pois os controladores se baseiam nestes modelos para o controle da planta. A ideia é apresentar o problema de controle do sistema de direção *Steer-by-Wire* contextualizando com as classes de sistemas lineares apresentadas anteriormente.

3.1 PRELIMINARES

Conforme salientado previamente, o objetivo da tecnologia *Steer-by-Wire* (SbW) é eliminar a ligação mecânica entre o volante e as rodas dianteiras, para tanto o movimento das rodas dianteiras é controlado por atuadores elétricos com base no sinal de controladores. A Figura 14 mostra a diferença entre um sistema de direção comum (a) e um sistema *Steer-by-Wire* (b). Pode-se notar claramente redução de componentes de um sistema para o outro.

Figura 14-Comparação entre o sistema de direção convencional e o sistema *Steer-by-Wire*.



Fonte: An Analysis of CAN-based Steer-by-Wire System Performance in Vehicle (2013), modificado pelo Autor (2015)

Os veículos modernos são equipados com um protocolo de comunicação serial chamado de *Controller Area Network* (CAN), no qual atuadores e sensores podem ser controlados a partir

de um ponto central, a Unidade de Controle do Motor (do inglês, *Engine Control Unit* - ECU), aumentando a funcionalidade, acrescentando modularidade e tornar os processos de diagnóstico mais eficientes.

O sistema SbW é composto de duas partes principais: a parte da direção, que consiste no volante com o atuador de realimentação e o sensor de ângulo; e a parte das rodas, que possui um atuador de direção e outro sensor de ângulo. O sensor de ângulo do volante fornece para o atuador nas rodas o sinal de posição desejada e o sensor de ângulo das rodas fornece o sinal de realimentação para o motorista.

Ao movimentar o volante, o mecanismo de controle tenta empurrar o volante para a posição inicial (e as rodas para a posição ditada pela posição atual do volante) e esta imita a força resistiva de um volante real. No entanto, pode-se alterar a constante proporcional do motor de realimentação tornando mais difícil ou fácil para o motorista dirigir.

Segundo Nor Shah *et al.* (2013), para o projeto ser mais realista, deve-se considerar os elementos presentes na dinâmica dos automóveis. Assim, o modelo do sistema passa a ter três partes envolvidas: o volante, as rodas e a dinâmica do veículo. Para a dinâmica de direção, mostrado na Figura 15, Nor Shah *et al.* (2013) propõem que o modelo pode ser expresso por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \ddot{\theta}_r \\ \dot{i}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b_r/J_r & \eta K_{tr}/J_r \\ 0 & -K_{er}/L_r & -R_r/L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_r \\ \dot{\theta}_r \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L_r \end{bmatrix} V_r + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J_r \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{T}_a + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J_r \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{T}_f, \quad (81)$$

onde J_r é o momento de inércia das rodas, b_r é o coeficiente de amortecimento, θ_r é o ângulo das rodas e η é relação de direção, i_r é a corrente do motor, L_r é a indutância do motor, V_r tensão do motor, \mathcal{T}_a é torque de alinhamento das rodas e \mathcal{T}_f é o torque de atrito.

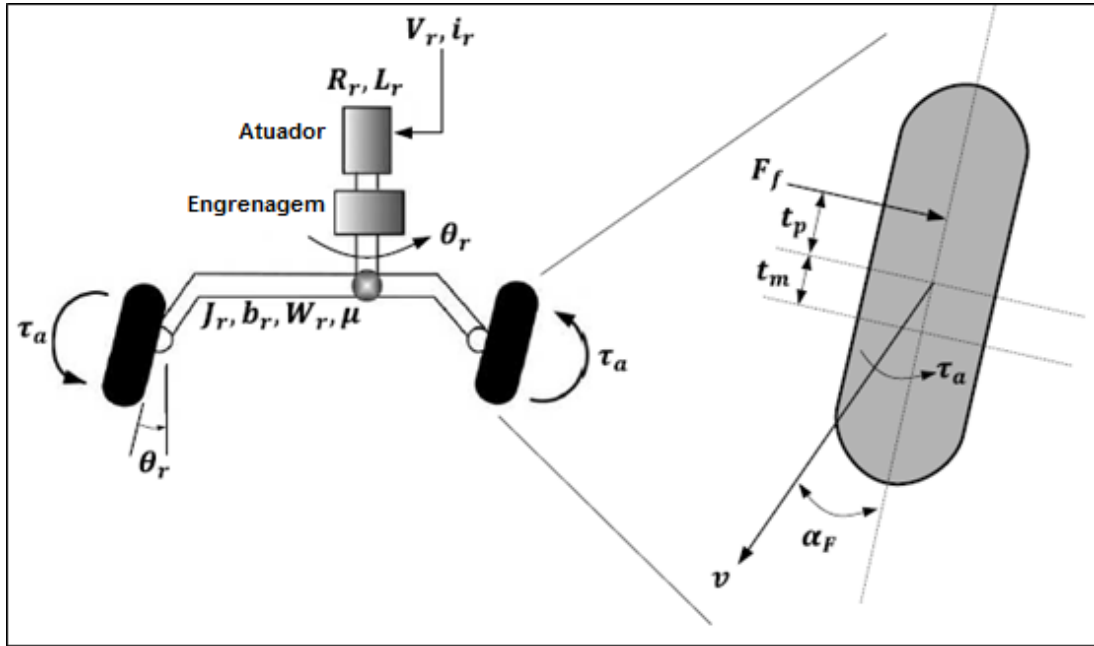
O torque de alinhamento das rodas \mathcal{T}_a é devido às forças de contato dos pneus agindo sobre o sistema de direção para resistir a direção. Ambos os parâmetros de torque \mathcal{T}_a e \mathcal{T}_f são dadas, respectivamente, por (82) e (83).

$$\mathcal{T}_a = -C_{\alpha F} \alpha F (t_p + t_m) \quad (82)$$

$$\mathcal{T}_f = g t_p \mu W_f \text{sign}(\dot{\theta}_r) \quad (83)$$

onde $C_{\alpha F}$ é coeficiente de curvatura do pneu dianteiro, αF é o ângulo de escorregamento do pneu dianteiro, g é a aceleração da gravidade, t_p é a distância em relação ao eixo central até o efeito de cisalhamento pneumático, t_m é a distância em relação ao eixo central até o efeito de cisalhamento mecânica, W_f é o peso do pneu dianteiro e μ é o coeficiente de atrito.

Figura 15 - Dinâmica de direção.



Fonte: An Analysis of CAN-based Steer-by-Wire System Performance in Vehicle (2013), modificado pelo Autor (2015)

O ângulo de derrapagem dos pneus e o movimento de estabilidade do veículo durante a manobra de direção pode ser observado a partir do modelo do veículo. Baseado no modelo do veículo mostrado na Figura 16, Nor Shah *et al.* (2013) demonstra que o modelo matemático linear pode ser descrito como:

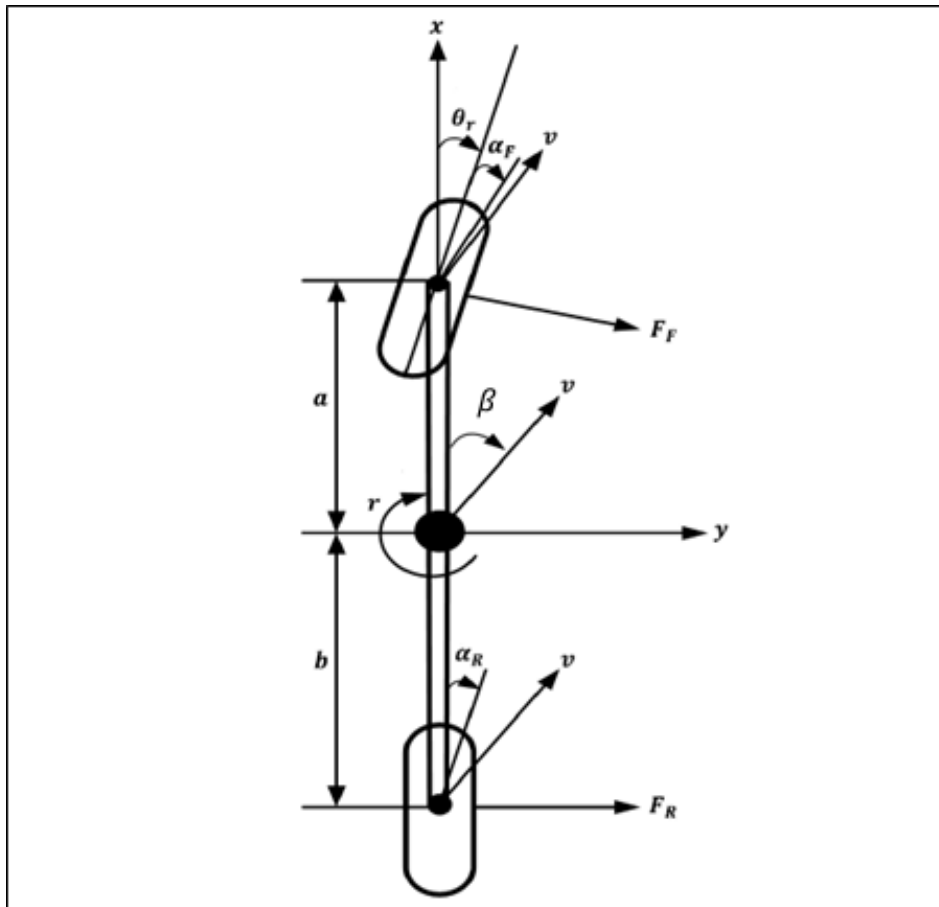
$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(C_{\alpha F} + C_{\alpha R})/mv & ((C_{\alpha R}b - C_{\alpha F}a)/mv^2) - 1 \\ (C_{\alpha R}b - C_{\alpha F}a)/I_z & -(C_{\alpha R}a^2 + C_{\alpha F}b^2)/I_z v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{\alpha F}/mv \\ C_{\alpha F}a/I_z \end{bmatrix} \theta_r, \quad (84)$$

onde β é ângulo de deslizamento do veículo, r é a taxa de guinada, a é a distância do pneu dianteiro em relação ao Centro de Gravidade (CG) do veículo, b é a distância do pneu traseiro ao CG do veículo, v é a velocidade longitudinal do veículo, $C_{\alpha R}$ é o coeficiente de curvatura do pneu traseiro, m é a massa do veículo e I_z é momento de inércia do veículo.

Note-se que para a equação (84) seja válida as seguintes condições são consideradas:

- O veículo estando em movimento as forças de atrito na direção x são insignificantes;
- Os ângulos de direção esquerdo e direito são os mesmos, ou seja, $\theta_L = \theta_R = \theta_r$;
- Força de contato dos pneus dianteiros, na direção longitudinal e lateral, para ambos os pneus esquerdos e direitos são os mesmos.

Figura 16 - Modelo do veículo.



Fonte: An Analysis of CAN-based Steer-by-Wire System Performance in Vehicle (2013).

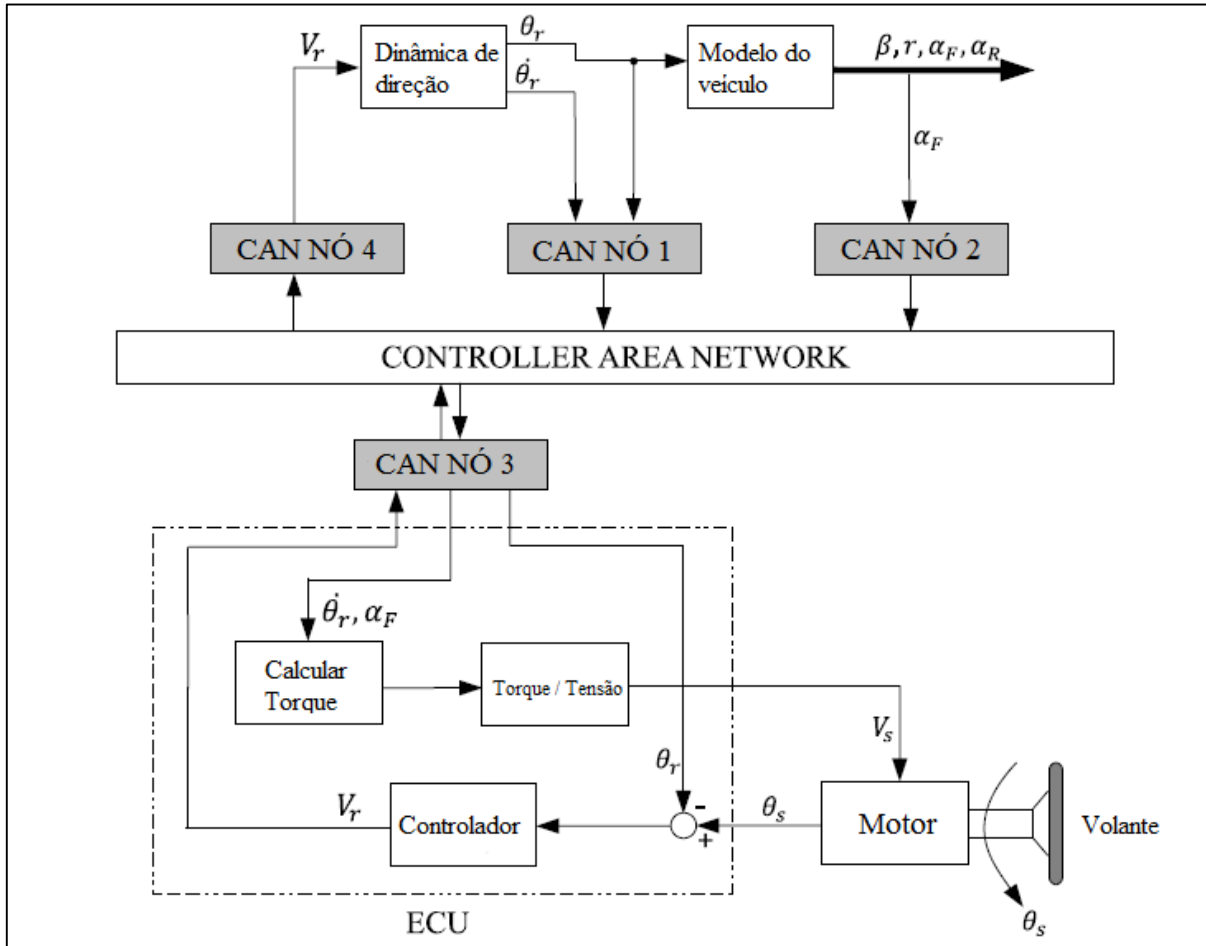
Para Nor Shah *et al.* (2013) ao assumir ângulos de escorregamento pequenos (menor que 4°), os ângulos de escorregamento do pneu dianteiro α_F e do pneu traseiro α_R podem ser aproximados por:

$$\begin{bmatrix} \alpha_F \\ \alpha_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a/v \\ 1 & -b/v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_r \quad (85)$$

3.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considerando o seguinte arranjo proposto por Nor Shah *et al.* (2013) na Figura 17:

Figura 17 – Arranjo completo do sistema de direção eletrônica.



Fonte: An Analysis of CAN-based Steer-by-Wire System Performance in Vehicle (2013), modificado pelo Autor (2015)

A partir da definição do seguinte vetor de estado aumentado:

$$x_1 = \begin{bmatrix} \theta_r \\ \dot{\theta}_r \\ i_r \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (86)$$

e das seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b_r/J_r & \eta K_{tr}/J_r \\ 0 & -K_{er}/L_r & -R_r/L_r \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L_r \end{bmatrix}, & B_a &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J_r \\ 0 \end{bmatrix}, \\
B_f &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J_r \\ 0 \end{bmatrix}, & K_a &= C_{\alpha F}(t_p + t_m), & K_f &= gt_p \mu W_f, \\
A_2 &= \begin{bmatrix} -(C_{\alpha F} + C_{\alpha R})/mv & ((C_{\alpha R}b - C_{\alpha F}a)/mv^2) - 1 \\ (C_{\alpha R}b - C_{\alpha F}a)/I_z & -(C_{\alpha R}a^2 + C_{\alpha F}b^2)/I_z v \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} C_{\alpha F}/mv \\ C_{\alpha F}a/I_z \end{bmatrix}, & (87) \\
C_3 &= \begin{bmatrix} 1 & a/v \\ 1 & -b/v \end{bmatrix}, & I_2 &= \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, & I_3 &= \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \mathbb{A} &= \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ B_2 I_2 & A_2 \end{bmatrix}, & \mathbb{B} &= \begin{bmatrix} B_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\
\mathbb{B}_a &= \begin{bmatrix} B_a \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \mathbb{B}_f &= \begin{bmatrix} B_f K_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \mathbb{C}_3 &= [-I_2' & I_3' C_3], & \mathbb{C} &= \begin{bmatrix} I_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

O sistema em malha fechada pode então ser representado por:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (\mathbb{A} + \mathbb{B}_a K_a \mathbb{C}_3)x(t) + \mathbb{B} \text{sat}(u(t)) + \mathbb{B}_f w(t) \\
y(t) &= \mathbb{C}x(t)
\end{aligned} \tag{88}$$

onde $u = V_r$.

Neste caso, o controlador é dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_a(t) &= u_c(t) \\
\dot{v}_b(t) &= \phi(v_c(t)) \\
v_c(t) &= X_a v_a(t) + X_b v_b(t) + X_c y(t - \tau)
\end{aligned} \tag{89}$$

onde $\phi(v_c(t)) = v_c(t) - \text{sat}(v_c(t))$.

A porção $\dot{v}_a(t) = u_c(t)$ representa um integrador do controlador, no qual sua entrada é dada pela diferença do sinal de saída $y(t)$ e a referência $r(t)$, mas com atraso τ_i . Isto significa que a saída da planta irá seguir a referência com um atraso no tempo.

O termo $\dot{v}_b(t) = \phi(v_c(t))$ representa uma saturação do tipo zona morta. Os efeitos dessa não linearidade serão minimizados por um compensador *anti-windup*, essa técnica é utilizada para repor os estados do controlador quando a entrada da planta satura. Há um vasto conjunto de documentos relacionados com o tema, que começou a ser resolvido, formalmente, a partir de meados da década de 1990, um exemplo é visto em Gomes da Silva e Tarbouriech (2005). Adicionando o termo de compensação *anti-windup* (E_c), tem-se:

$$\dot{v}_a(t) = u_c(t) + E_c \phi(v_c(t)) \quad (90)$$

Pode-se notar que para referências admissíveis (que não causam a saturação na entrada da planta para $t \rightarrow \infty$), uma vez que ocorra a saturação na entrada da planta, o sinal de erro de seguimento não permanece nulo e $\|v_a(t)\|$ continua incrementando. Assim, o objetivo do sinal injetado pelo compensador *anti-windup* é acabar com esse excesso, mantendo os estados de $v_a(t)$ em torno dos valores assumidos como fronteira da linearidade, ou seja, sem casos de entradas que levam a planta a saturar. No entanto, a topologia (90) não permite o uso do Lema de Projeção, uma ferramenta que será utilizada para alcançar condições expressas em LMIs na síntese do controlador. Para tanto se propõe a seguinte topologia:

$$\begin{aligned} \dot{v}_a(t) &= u_c(t) \\ v_c(t) &= X_a v_a(t) + X_b \phi(v_c(t)) + X_c y(t - \tau), \end{aligned} \quad (91)$$

para não lidar com o erro de seguimento constante, devido à saturação de entrada, sua integral, porção $X_b \phi(v_c(t))$, torna-se uma rampa as custas do aumento da norma de $\|v_a(t)\|$. Este é precisamente o que deve ser evitado com a técnica de *anti-windup*. Além disso, é possível que, uma vez que a causa da saturação desapareça, os estados regulados através da descarga na entrada de controle mantenham-se saturados mais do que o necessário até a linearidade ser alcançada. Assim sendo, utilizou-se um integrador adicional para sintetizar a ação *anti-windup*, resultando na estrutura (89).

É importante notar que a saída do controlador realimenta os estados do controlador e a saída da planta. O sistema se interconecta, considerando o atraso entre os nós da comunicação CAN:

$$\begin{aligned} u(t) &= v_c(t - \tau_s) \\ u_c(t) &= y(t - \tau_i) - r(t) \end{aligned} \quad (92)$$

O escalar τ_s representa o atraso na entrada da planta e τ_i o atraso na entrada do controlador. Assume-se que ambos são constantes e conhecidos, e de valores idênticos, isto é, $\tau_s = \tau_i = \tau$. O sinal $r(t)$ representa o sinal de referência a ser seguido.

Supõe-se explicitamente durante o trabalho que o controlador foi projetado para um sistema nominal, isto é, não considera a saturação na entrada da planta. Para contornar esta desconsideração, sintetiza-se um compensador *anti-windup*, que inserido na malha de controle minimiza o efeito da saturação na estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada.

Considerando o vetor $\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v_a(t) \\ v_b(t) \end{bmatrix}$ em malha fechada:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) = & \begin{bmatrix} \mathbb{A} + \mathbb{B}_a K_a \mathbb{C}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{B}X_a & \mathbb{B}X_b \\ \mathbb{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi(t - \tau) \\ & + \begin{bmatrix} \mathbb{B}X_c \mathbb{C}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi(t - 2\tau) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \phi(v_c(t)) + \begin{bmatrix} \mathbb{B} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \phi(v_c(t - \tau)) \\ & - \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} \mathbb{B}_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) \end{aligned} \quad (93)$$

$$v_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & X_a & X_b \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} X_c \mathbb{C} & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi(t - \tau)$$

De forma comprimida:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) = & \mathcal{A}_0 \xi(t) + \mathcal{A}_1 \xi(t - \tau) + \mathcal{A}_2 \xi(t - 2\tau) + \mathcal{B}_0 \phi(v_c(t)) + \mathcal{B}_1 \phi(v_c(t - \tau)) \\ & - \mathcal{B}_r r(t) + \mathcal{B}_w w(t) \end{aligned} \quad (94)$$

$$v_c(t) = X\mathbb{C}_0 \xi(t) + X\mathbb{C}_1 \xi(t - \tau)$$

onde: $X = [X_c \quad X_a \quad X_b]$, $\mathbb{C}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ e $\mathbb{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Comentário 1 O problema está em definir o controlador, isto é, o vetor $X = [X_c \quad X_a \quad X_b]$ que satisfaz condições de estabilidade em malha fechada, considerando um atraso constante entre os sinais na rede CAN. Todas essas condições são expressas por seguinte em forma de LMIs.

3.3 RESULTADOS PRINCIPAIS

A fim de assegurar a estabilidade em malha fechada do sistema, se faz uso do seguinte funcional de Liapunov-Krasovskii:

$$\begin{aligned}
 V(t) = & \xi(t)'P\xi(t) + \int_{t-\tau}^t \xi(\theta)'Q_1\xi(\theta)d\theta + \int_{t-2\tau}^{t-\tau} \xi(\theta)'Q_2\xi(\theta)d\theta \\
 & + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\xi}(\beta)'Q_3\dot{\xi}(\beta)d\beta d\theta + \int_{-2\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\xi}(\beta)'Q_4\dot{\xi}(\beta)d\beta d\theta
 \end{aligned} \tag{95}$$

onde $P = P' > 0$, $Q_1 = Q_1' > 0$, $Q_2 = Q_2' > 0$, $Q_3 = Q_3' > 0$, $Q_4 = Q_4' > 0 \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$.

- $\xi(t)'P\xi(t)$ representa a estimativa da região de atração da origem. Deve se notar que isso é a principal limitação do método. Se considerar, por exemplo, um sistema cuja região de atração da origem é hiperbólica, então uma estimativa elipsoidal será claramente conservadora. No caso de ser possível estimar um dos, aqui chamadas, direções abertas da hipérbole, o elipsoide seria descrito por uma matriz P condicionada;
- $\int_{t-\tau}^t \xi(\theta)'Q_1\xi(\theta)d\theta$ e $\int_{t-2\tau}^{t-\tau} \xi(\theta)'Q_2\xi(\theta)d\theta$ representam a parte independente do atraso do funcional, e fornece uma diagonal de termos definitivos negativos para $\xi(t - \tau)$ e $\xi(t - 2\tau)$;
- $\int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\xi}(\beta)'Q_3\dot{\xi}(\beta)d\beta d\theta$ e $\int_{-2\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\xi}(\beta)'Q_4\dot{\xi}(\beta)d\beta d\theta$ representam a parte dependente do atraso do funcional, pois na sua derivada está inserida explicitamente o parâmetro τ , na expressão $\dot{V}(t)$, que é realizada dentro da definição do conjunto de LMI. Assim, o LMI respeita o conjunto de condições que asseguram a existência do controlador.

Uma vez que há presença de referência externa e perturbação na dinâmica de $\xi(t)$, ele não pode ser assegurado que $\dot{V}(t) < 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+p+m}$. Assim, se espera garantir que a função $\dot{V}(t)$ seja negativa definida ($\dot{V}(t) < 0$) em um subespaço para um conjunto de referências. Isso torna a estimativa da região de atração da origem em malha fechada eficaz.

Para tanto, considera-se a função auxiliar $\mathcal{J}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t) = \dot{V}(t) + \lambda_1(\xi(t)'P\xi(t) - \delta) + \lambda_2(q - r(t)'r(t)) \\ + \lambda_5\xi(t - \tau)'\xi(t - \tau) - \lambda_6w(t)'w(t) \end{aligned} \quad (96)$$

Onde λ_i , $i = 1, \dots, 6$ são escalares estritamente positivos.

Para assegurar a estabilidade entrada-estado é preciso garantir $\mathcal{J}(t) < 0$, para todo o intervalo de tempo que as trajetórias de estado do sistema evoluírem.

- Em $\mathcal{J}(t)$, quando $\xi(t)$ está fora do elipsoide $\varepsilon(P, \delta)$, a parte $(\xi(t)'P\xi(t) - \delta)$ torna-se positivo. Assim, dentro do elipsoide, $\dot{V}(t)$ pode ser positivo, enquanto continua a ter $\mathcal{J}(t) < 0$;
- Quando $r(t)$ está dentro do elipsoide $\varepsilon(I, q)$, a parte $q - r(t)'r(t)$ torna-se positivo. Assim, fora do elipsoide, $\dot{V}(t)$ pode ser positivo, enquanto continua a ter $\mathcal{J}(t) < 0$;
- A parte $\lambda_5\xi(t - \tau)'\xi(t - \tau) - \lambda_6w(t)'w(t)$ explicita um ganho finito de $w(t)$ para $\xi(t - \tau)$, especificamente, de $sign(\dot{\theta})$ para $\dot{\theta}$, o que garante que a derivada primeira de θ seja finita. Algebricamente, a sua motivação é a inserção de um termo negativo definido na posição diagonal correspondente a $w(t)$ numa representação matricial de $\mathcal{J}(t) < 0$;
- O uso das partes $\lambda_1(\xi(t)'P\xi(t) - \delta)$ e $\lambda_2(q - r(t)'r(t))$ são de fato o emprego do *S-procedure*.

Deste modo, há garantias de $\mathcal{J}(t) < 0$ para $\xi(t)$ fora de $\varepsilon(P, \delta)$ e $r(t)$ dentro de $\varepsilon(I, q)$ através de $\dot{V}(t) < 0$.

Ao utilizar a estabilidade dependente do atraso, o funcional de Liapunov-Krasovskii contém muitas vezes um termo como: $\int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\xi}(\beta)'Q\dot{\xi}(\beta)d\beta d\theta$. Sendo sua derivada primeira em relação ao tempo: $\tau\dot{\xi}(t)'Q\dot{\xi}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{\xi}(\theta)'Q\dot{\xi}(\theta)d\theta$. Esta parte final, $\int_{t-\tau}^t \dot{\xi}(\theta)'Q\dot{\xi}(\theta)d\theta$, é difícil de ter seus limites determinados. Uma alternativa para a desigualdade $\mathcal{J}(t) < 0$ é substituir $\int_{t-\tau}^t \dot{\xi}(\theta)'Q\dot{\xi}(\theta)d\theta$ por $\frac{1}{\tau} \left(\int_{t-\tau}^t \dot{\xi}(\theta)d\theta \right)' Q \left(\int_{t-\tau}^t \dot{\xi}(\theta)d\theta \right)$, como segue:

$$\begin{aligned} \int_{t-\tau}^t \dot{\xi}(\theta)'Q\dot{\xi}(\theta)d\theta &\geq \frac{1}{\tau} \left(\int_{t-\tau}^t \dot{\xi}(\theta)d\theta \right)' Q \left(\int_{t-\tau}^t \dot{\xi}(\theta)d\theta \right) \\ &= \frac{1}{\tau} (\xi(t) - \xi(t - \tau))' Q (\xi(t) - \xi(t - \tau)) \end{aligned} \quad (97)$$

Esta é precisamente a aplicação da desigualdade de Jensen. Uma leitura extensa e detalhada sobre desigualdade de Jensen pode ser encontrada em Gu, Chen e Kharitonov (2003).

Deve-se garantir $J(t) < 0$, para tanto:

$$\begin{aligned} \int_0^T J(t)dt &= V(T) - V(0) + \lambda_1 \int_0^T (\xi(t)'P\xi(t) - \delta) dt + \lambda_2 \int_0^T (q - r(t)'r(t))dt \\ &+ \lambda_5 \int_0^T \xi(t - \tau)' \xi(t - \tau)dt - \lambda_6 \int_0^T w(t)'w(t)dt < 0, \quad \forall T > 0 \end{aligned} \quad (98)$$

A partir do Lema 4 (Condição de Setor Generalizada), tendo em vista que $v_c(t) = \mathbb{X}\mathbb{C}_0\xi(t) + \mathbb{X}\mathbb{C}_1\xi(t - \tau)$ e $v_c(t - \tau) = \mathbb{X}\mathbb{C}_0\xi(t - \tau) + \mathbb{X}\mathbb{C}_1\xi(t - 2\tau)$, e ainda, se $\xi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{X}\mathbb{C}_0, G_0)$ e $\xi(t - \tau) \in \mathcal{S}(\mathbb{X}\mathbb{C}_1, G_1)$ então:

$$-\phi(v_c(t))'T_0 \left(\phi(v_c(t)) - G_0\xi(t) + \mathbb{X}\mathbb{C}_1\xi(t - \tau) \right) \quad (99)$$

$$- \phi(v_c(t))T_0' \left(\phi(v_c(t))' - G_0'\xi(t)' + \mathbb{X}'\mathbb{C}_1'\xi(t - \tau)' \right) \geq 0$$

$$-\phi(v_c(t - \tau))'T_1 \left(\phi(v_c(t - \tau)) - G_1\xi(t - \tau) + \mathbb{X}\mathbb{C}_1\xi(t - 2\tau) \right) \quad (100)$$

$$- \phi(v_c(t - \tau))T_1' \left(\phi(v_c(t - \tau))' - G_1'\xi(t - \tau)' + \mathbb{X}'\mathbb{C}_1'\xi(t - 2\tau)' \right) \geq 0$$

Uma vez que se modele a saturação como uma não linearidade do tipo zona morta ($\phi(\cdot)$) limita a validade dessa representação apenas no interior do setor $\mathcal{S}(\mathbb{K}, G)$, e não em \mathbb{R}^{n+p+m} ou a totalidade do espaço de estados. O elipsoide $\varepsilon(P, \delta)$ é a estimativa da região de atração da origem em malha fechada de um sistema representado através de $\phi(\cdot)$, ele deve ser incluído neste setor. Este, por sua vez, implica que o setor seja o maior possível, pois um setor restrito poderá conduzir a uma região $\varepsilon(P, \delta)$ conservadora. Por outro lado, um setor mais amplo aumenta o subespaço das condições, assim, menos susceptíveis de ser viável. Este conflito entre viabilidade e conservadorismo é procurado para ser quebrado pela matriz $G_{(i)}$. Quando compara-se com a tradicional condição de setor, a diagonal $|\mathbb{K}_{(i)}\xi| \leq u_o$ (vide Khalil (2002)), $|(\mathbb{K}_{(i)} + G_{(i)})\xi| \leq u_o$ é uma distorção dessa forma. Este é o conceito a ser pesquisado, isto é, investigar o formato mais adequado para este setor. Uma forma adequada é entendida como a forma que melhor se adapte à região de atração do sistema em malha fechada.

Segundo o Lema 2 (Lema de Finsler) existe a seguinte equivalência:

$$\eta(t)'Q\eta(t) < 0, \quad \forall \eta(t) \in \mathfrak{R}^n | \mathcal{B}\eta(t) = 0 \Leftrightarrow Q + LB + B'L' < 0, \quad L \in \mathfrak{R}^{m+n}$$

Existe um relaxamento nesta condição, uma vez que $\eta(t)'Q\eta(t) < 0$ não precisa ser válido $\forall \eta(t)$, mas somente para o subconjunto satisfazendo $\mathcal{B}\eta(t) = 0$. Para tanto considera-se $\eta(t)$, como sendo:

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \xi(t) \\ \xi(t - \tau) \\ \xi(t - 2\tau) \\ \xi(t - \tau) - \xi(t) \\ \xi(t) - \xi(t - 2\tau) \\ r(t) \\ \phi(v_c(t)) \\ \phi(v_c(t - \tau)) \\ w(t) \end{bmatrix}, \quad (101)$$

e por seguinte a matriz \mathcal{B} :

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I & 0 & \mathcal{A}_1 + \mathbb{B}_1 X C_0 & \mathcal{A}_0 + \mathbb{B}_1 X C_1 & 0 & \mathcal{A}_0 & -\mathcal{B}_r & \mathcal{B}_0 & \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_w \\ 0 & I & -I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (102)$$

onde $\mathbb{B}_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Existem redundâncias que não causam a singularidade da matriz, assim, existe outra composição de \mathcal{B} de modo que a matriz resultante ainda satisfaça $\mathcal{B}\eta(t) = 0$.

Para este \mathcal{B} , de acordo com o Lema de Finsler, existe uma matriz L como:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} \\ L_{61} & L_{62} & L_{63} \\ L_{71} & L_{72} & L_{73} \\ L_{81} & L_{82} & L_{83} \\ L_{91} & L_{92} & L_{93} \\ L_{A1} & L_{A2} & L_{A3} \end{bmatrix} \quad (103)$$

Desta forma o desenvolvimento subsequente visa obter condições que, uma vez verificadas, garantam $\mathcal{J}(t) \leq 0$. Assim sendo, avalia-se $\mathcal{J}(t)$ ao longo das trajetórias do sistema (94), e obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t) \leq & \dot{\xi}(t)'P\xi(t) + \xi(t)'P\dot{\xi}(t) + \xi(t)'Q_1\xi(t) - \xi(t-\tau)'Q_1\xi(t-\tau) \\ & + \xi(t-\tau)'Q_2\xi(t-\tau) - \xi(t-2\tau)'Q_2\xi(t-2\tau) + \tau\dot{\xi}(t)'Q_3\dot{\xi}(t) \\ & - \frac{1}{\tau}(\xi(t) - \xi(t-\tau))'Q_3(\xi(t) - \xi(t-\tau)) + 2\tau\dot{\xi}(t)'Q_4\dot{\xi}(t) \\ & - \frac{1}{2\tau}(\xi(t) - \xi(t-2\tau))'Q_4(\xi(t) - \xi(t-2\tau)) + \lambda_1(\xi(t)'P\xi(t) - \delta) \\ & + \lambda_2(q - r(t)'r(t)) + \lambda_5\xi(t-\tau)'\xi(t-\tau) - \lambda_6w(t)'w(t) \\ & - \phi(v_c(t))'T_0(\phi(v_c(t)) - G_0\xi(t) + X\mathbb{C}_1\xi(t-\tau)) \\ & - \phi(v_c(t))T_0'(\phi(v_c(t))' - G_0'\xi(t)' + X'\mathbb{C}_1'\xi(t-\tau)') \\ & - \phi(v_c(t-\tau))'T_1(\phi(v_c(t-\tau)) - G_1\xi(t-\tau) + X\mathbb{C}_1\xi(t-2\tau)) \\ & - \phi(v_c(t-\tau))T_1'(\phi(v_c(t-\tau))' - G_1'\xi(t-\tau)' + X'\mathbb{C}_1'\xi(t-2\tau)') \end{aligned} \quad (104)$$

o que pode ser reescrito como:

$$\eta(t)'Q\eta(t) < 0$$

$$\begin{aligned}
Q = & \begin{bmatrix}
\tau Q_3 + 2\tau Q_4 & * & * & * & * \\
P & Q_1 + \lambda_1 P & * & * & * \\
0 & 0 & Q_2 - Q_1 + \lambda_5 & * & * \\
0 & 0 & 0 & -Q_2 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} Q_3 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & T_0 G_0 & -T_0 X C_1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & T_1 G_1 & -T_1 X C_1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
& * & * & * & * & * \\
& * & * & * & * & * \\
& * & * & * & * & * \\
& * & * & * & * & * \\
\dots & * & * & * & * & * \\
& -\frac{1}{2\tau} Q_4 & * & * & * & * \\
& 0 & -\lambda_2 & * & * & * \\
& 0 & 0 & -2T_0 & * & * \\
& 0 & 0 & 0 & -2T_1 & * \\
& 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6
\end{bmatrix} < 0 \quad (105)
\end{aligned}$$

Assim, $Q < 0$ é condição suficiente para ter-se $J(t) < 0$, quando $\xi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{K}, G)$. Mediante a aplicação do Lema 1 (Complemento de Schur), esta garantia é dada pela verificação de:

$$\begin{aligned}
Q_0 = Q + LB + \mathcal{B}'L' & < 0 \\
Q_0 = [Z_1 \ Z_2 \ Z_3 \ Z_4 \ Z_5 \ Z_6 \ Z_7 \ Z_8 \ Z_9 \ Z_A] & < 0 \quad (106)
\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
Z_1 = & \begin{bmatrix}
-L_{11} - L_{11}' + \tau Q_3 + 2\tau Q_4 \\
-L_{21} + L_{12}' - L_{13}' + P \\
-L_{31} + \mathcal{A}_1' L_{11}' + C_0' X' \mathbb{B}_1' L_{11}' - L_{12}' \\
-L_{41} + \mathcal{A}_0' L_{11}' + C_1' X' \mathbb{B}_1' L_{11}' + L_{13}' \\
-L_{51} + L_{12}' \\
-L_{61} + \mathcal{A}_0' L_{11}' + L_{13}' \\
-L_{71} - \mathcal{B}_r' L_{11}' \\
-L_{81} + \mathcal{B}_0' L_{11}' \\
-L_{91} + \mathcal{B}_1' L_{11}' \\
-L_{A1} + \mathcal{B}_w' L_{11}'
\end{bmatrix}, Z_2 = & \begin{bmatrix}
L_{12} - L_{13} - L_{21}' + P \\
L_{22} - L_{23} + L_{22}' - L_{23}' + Q_1 + \lambda_1 P \\
L_{32} - L_{33} + \mathcal{A}_1' L_{21}' + C_0' X' \mathbb{B}_1' L_{21}' - L_{22}' \\
L_{42} - L_{43} + \mathcal{A}_0' L_{21}' + C_1' X' \mathbb{B}_1' L_{21}' + L_{23}' \\
L_{52} - L_{53} + L_{22}' \\
L_{62} - L_{63} + \mathcal{A}_0' L_{21}' + L_{23}' \\
L_{72} - L_{73} - \mathcal{B}_r' L_{21}' \\
L_{82} - L_{83} + \mathcal{B}_0' L_{21}' + T_0 G_0 \\
L_{92} - L_{93} + \mathcal{B}_1' L_{21}' \\
L_{A2} - L_{A3} + \mathcal{B}_w' L_{21}'
\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$Z_3 = \begin{bmatrix} L_{11}\mathcal{A}_1 + L_{11}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_0 - L_{12} - L_{31}' \\ L_{21}\mathcal{A}_1 + L_{21}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_0 - L_{22} + L_{32}' - L_{33}' \\ L_{31}\mathcal{A}_1 + L_{31}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_0 - L_{32} + \mathcal{A}_1'L_{31}' + \mathbb{C}_0'\mathbb{X}'\mathbb{B}_1'L_{31}' - L_{32}' + Q_2 - Q_1 + \lambda_5 \\ L_{41}\mathcal{A}_1 + L_{41}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_0 - L_{42} + \mathcal{A}_0'L_{31}' + \mathbb{C}_1'\mathbb{X}'\mathbb{B}_1'L_{31}' + L_{33}' \\ L_{51}\mathcal{A}_1 + L_{51}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_0 - L_{52} + L_{32}' \\ L_{61}\mathcal{A}_1 + L_{61}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_0 - L_{62} + \mathcal{A}_0'L_{31}' + L_{33}' \\ L_{71}\mathcal{A}_1 + L_{71}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_0 - L_{72} - \mathcal{B}_r'L_{31}' \\ L_{81}\mathcal{A}_1 + L_{81}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_0 - L_{82} + \mathcal{B}_0'L_{31}' - T_0\mathbb{X}\mathbb{C}_1 \\ L_{91}\mathcal{A}_1 + L_{91}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_0 - L_{92} + \mathcal{B}_1'L_{31}' + T_1G_1 \\ L_{A1}\mathcal{A}_1 + L_{A1}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_0 - L_{A2} + \mathcal{B}_w'L_{31}' \end{bmatrix},$$

$$Z_4 = \begin{bmatrix} L_{11}\mathcal{A}_0 + L_{11}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_1 + L_{13} - L_{41}' \\ L_{21}\mathcal{A}_0 + L_{21}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_1 + L_{23} + L_{42}' - L_{43}' \\ L_{31}\mathcal{A}_0 + L_{31}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_1 + L_{33} + \mathcal{A}_1'L_{41}' + \mathbb{C}_0'\mathbb{X}'\mathbb{B}_1'L_{41}' - L_{42}' \\ L_{41}\mathcal{A}_0 + L_{41}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_1 + L_{43} + \mathcal{A}_0'L_{41}' + \mathbb{C}_1'\mathbb{X}'\mathbb{B}_1'L_{41}' + L_{43}' - Q_2 \\ L_{51}\mathcal{A}_0 + L_{51}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_1 + L_{53} + L_{42}' \\ L_{61}\mathcal{A}_0 + L_{61}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_1 + L_{63} + \mathcal{A}_0'L_{41}' + L_{43}' \\ L_{71}\mathcal{A}_0 + L_{71}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_1 + L_{73} - \mathcal{B}_r'L_{41}' \\ L_{81}\mathcal{A}_0 + L_{81}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_1 + L_{83} + \mathcal{B}_0'L_{41}' \\ L_{91}\mathcal{A}_0 + L_{91}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_1 + L_{93} + \mathcal{B}_1'L_{41}' - T_1\mathbb{X}\mathbb{C}_1 \\ L_{A1}\mathcal{A}_0 + L_{A1}\mathbb{B}_1\mathbb{X}\mathbb{C}_1 + L_{A3} + \mathcal{B}_w'L_{41}' \end{bmatrix},$$

$$Z_5 = \begin{bmatrix} L_{12} - L_{51}' \\ L_{22} + L_{52}' - L_{53}' \\ L_{32} + \mathcal{A}_1'L_{51}' + \mathbb{C}_0'\mathbb{X}'\mathbb{B}_1'L_{51}' - L_{52}' \\ L_{42} + \mathcal{A}_0'L_{51}' + \mathbb{C}_1'\mathbb{X}'\mathbb{B}_1'L_{51}' + L_{53}' \\ L_{52} + L_{52}' - \frac{1}{\tau}Q_3 \\ L_{62} + \mathcal{A}_0'L_{51}' + L_{53}' \\ L_{72} - \mathcal{B}_r'L_{51}' \\ L_{82} + \mathcal{B}_0'L_{51}' \\ L_{92} + \mathcal{B}_1'L_{51}' \\ L_{A2} + \mathcal{B}_w'L_{51}' \end{bmatrix}, Z_6 = \begin{bmatrix} L_{11}\mathcal{A}_0 + L_{13} - L_{61}' \\ L_{21}\mathcal{A}_0 + L_{23} + L_{62}' - L_{63}' \\ L_{31}\mathcal{A}_0 + L_{33} + \mathcal{A}_1'L_{61}' + \mathbb{C}_0'\mathbb{X}'\mathbb{B}_1'L_{61}' - L_{62}' \\ L_{41}\mathcal{A}_0 + L_{43} + \mathcal{A}_0'L_{61}' + \mathbb{C}_1'\mathbb{X}'\mathbb{B}_1'L_{61}' + L_{63}' \\ L_{51}\mathcal{A}_0 + L_{53} + L_{62}' \\ L_{61}\mathcal{A}_0 + L_{63} + \mathcal{A}_0'L_{61}' + L_{63}' - \frac{1}{2\tau}Q_4 \\ L_{71}\mathcal{A}_0 + L_{73} - \mathcal{B}_r'L_{61}' \\ L_{81}\mathcal{A}_0 + L_{83} + \mathcal{B}_0'L_{61}' \\ L_{91}\mathcal{A}_0 + L_{93} + \mathcal{B}_1'L_{61}' \\ L_{A1}\mathcal{A}_0 + L_{A3} + \mathcal{B}_w'L_{61}' \end{bmatrix},$$

$$Z_7 = \begin{bmatrix} -L_{11}\mathcal{B}_r - L_{71}' \\ -L_{21}\mathcal{B}_r + L_{72}' - L_{73}' \\ -L_{31}\mathcal{B}_r + \mathcal{A}_1'L_{71}' + \mathbb{C}_0'\mathbb{X}'\mathbb{B}_1'L_{71}' - L_{72}' \\ -L_{41}\mathcal{B}_r + \mathcal{A}_0'L_{71}' + \mathbb{C}_1'\mathbb{X}'\mathbb{B}_1'L_{71}' + L_{73}' \\ -L_{51}\mathcal{B}_r + L_{72}' \\ -L_{61}\mathcal{B}_r + \mathcal{A}_0'L_{71}' + L_{73}' \\ -L_{71}\mathcal{B}_r - \mathcal{B}_r'L_{71}' - \lambda_2 \\ -L_{81}\mathcal{B}_r + \mathcal{B}_0'L_{71}' \\ -L_{91}\mathcal{B}_r + \mathcal{B}_1'L_{71}' \\ -L_{A1}\mathcal{B}_r + \mathcal{B}_w'L_{71}' \end{bmatrix}, Z_8 = \begin{bmatrix} L_{11}\mathcal{B}_0 - L_{81}' \\ L_{21}\mathcal{B}_0 + L_{82}' - L_{83}' + G_0'T_0' \\ L_{31}\mathcal{B}_0 + \mathcal{A}_1'L_{81}' + \mathbb{C}_0'\mathbb{X}'\mathbb{B}_1'L_{81}' - L_{82}' - \mathbb{C}_1'\mathbb{X}'T_0' \\ L_{41}\mathcal{B}_0 + \mathcal{A}_0'L_{81}' + \mathbb{C}_1'\mathbb{X}'\mathbb{B}_1'L_{81}' + L_{83}' \\ L_{51}\mathcal{B}_0 + L_{82}' \\ L_{61}\mathcal{B}_0 + \mathcal{A}_0'L_{81}' + L_{83}' \\ L_{71}\mathcal{B}_0 - \mathcal{B}_r'L_{81}' \\ L_{81}\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_0'L_{81}' - 2T_0 \\ L_{91}\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1'L_{81}' \\ L_{A1}\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_w'L_{81}' \end{bmatrix},$$

$$Z_9 = \begin{bmatrix} L_{11}\mathcal{B}_1 - L_{91}' \\ L_{21}\mathcal{B}_1 + L_{92}' - L_{93}' \\ L_{31}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_1'L_{91}' + \mathbb{C}_0'\mathbb{X}'\mathbb{B}_1'L_{91}' - L_{92}' + G_1'T_1' \\ L_{41}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_0'L_{91}' + \mathbb{C}_1'\mathbb{X}'\mathbb{B}_1'L_{91}' + L_{93}' - \mathbb{C}_1'\mathbb{X}'T_1' \\ L_{51}\mathcal{B}_1 + L_{92}' \\ L_{61}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_0'L_{91}' + L_{93}' \\ L_{71}\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_r'L_{91}' \\ L_{81}\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_0'L_{91}' \\ L_{91}\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_1'L_{91}' - 2T_1 \\ L_{A1}\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_w'L_{91}' \end{bmatrix}, Z_A = \begin{bmatrix} L_{11}\mathcal{B}_w - L_{A1}' \\ L_{21}\mathcal{B}_w + L_{A2}' - L_{A3}' \\ L_{31}\mathcal{B}_w + \mathcal{A}_1'L_{A1}' + \mathbb{C}_0'\mathbb{X}'\mathbb{B}_1'L_{A1}' - L_{A2}' \\ L_{41}\mathcal{B}_w + \mathcal{A}_0'L_{A1}' + \mathbb{C}_1'\mathbb{X}'\mathbb{B}_1'L_{A1}' + L_{A3}' \\ L_{51}\mathcal{B}_w + L_{A2}' \\ L_{61}\mathcal{B}_w + \mathcal{A}_0'L_{A1}' + L_{A3}' \\ L_{71}\mathcal{B}_w - \mathcal{B}_r'L_{A1}' \\ L_{81}\mathcal{B}_w + \mathcal{B}_0'L_{A1}' \\ L_{91}\mathcal{B}_w + \mathcal{B}_1'L_{A1}' \\ L_{A1}\mathcal{B}_w + \mathcal{B}_w'L_{A1}' - \lambda_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc}
* & * & * \\
* & * & * \\
* & * & * \\
* & * & * \\
\dots & * & * \\
* & * & * \\
* & * & * \\
\alpha_8(\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}'_0) - 2\alpha_{T_0} & * & * \\
\alpha_9\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}'_1\alpha_8 & \alpha_9(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}'_1) - 2\alpha_{T_1} & * \\
\alpha_A\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}'_w\alpha_8 & \alpha_A\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}'_w\alpha_9 & \alpha_A(\mathcal{B}_w + \mathcal{B}'_w) - \lambda_6
\end{array} \Bigg] ,$$

$$Y'\Omega U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1\mathbb{B}_1XC_0 & \alpha_1\mathbb{B}_1XC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2\mathbb{B}_1XC_0 & \alpha_2\mathbb{B}_1XC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3\mathbb{B}_1XC_0 & \alpha_3\mathbb{B}_1XC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_4\mathbb{B}_1XC_0 & \alpha_4\mathbb{B}_1XC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_5\mathbb{B}_1XC_0 & \alpha_5\mathbb{B}_1XC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_6\mathbb{B}_1XC_0 & \alpha_6\mathbb{B}_1XC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_7\mathbb{B}_1XC_0 & \alpha_7\mathbb{B}_1XC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_8\mathbb{B}_1XC_0 & \alpha_8\mathbb{B}_1XC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_9\mathbb{B}_1XC_0 & \alpha_9\mathbb{B}_1XC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_A\mathbb{B}_1XC_0 & \alpha_A\mathbb{B}_1XC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (109)$$

onde:

$$Y' = \begin{bmatrix} \alpha_1\mathbb{B}_1 \\ \alpha_2\mathbb{B}_1 \\ \alpha_3\mathbb{B}_1 \\ \alpha_4\mathbb{B}_1 \\ \alpha_5\mathbb{B}_1 \\ \alpha_6\mathbb{B}_1 \\ \alpha_7\mathbb{B}_1 \\ \alpha_8\mathbb{B}_1 \\ \alpha_9\mathbb{B}_1 \\ \alpha_A\mathbb{B}_1 \end{bmatrix}, \quad \Omega = X, \quad U = [0 \quad 0 \quad C_0 \quad C_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \quad (110)$$

Observe-se que os parâmetros do compensador *anti-windup* estão todos na matriz Ω .

Pelo Lema de Projeção, segue que:

$$\Theta + U'\Omega'Y + Y'\Omega U < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} W_U'\Theta W_U < 0 \\ W_Y'\Theta W_Y < 0 \end{cases}$$

onde $W_U \in \text{Ker}\{U\}$, e $W_Y \in \text{Ker}\{Y\}$. As bases para o Kernel de U e Y podem ser escolhidas respectivamente como:

$$W_U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (111)$$

Assim sendo, a verificação simultânea de:

$$W_U' \Theta W_U < 0, \quad W_Y' \Theta W_Y < 0$$

é suficiente para garantir $J(t) < 0, \forall \xi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{K}, G)$.

Busca-se agora uma representação de cada uma destas condições $W_U' \Theta W_U < 0$, $W_Y' \Theta W_Y < 0$ na forma de LMI. Iniciando-se pela condição $W_Y' \Theta W_Y < 0$, tem-se que a mesma pode ser escrita conforme segue:

$$\begin{bmatrix} \alpha_A(\mathcal{B}_W + \mathcal{B}_W') - \lambda_6 & \mathcal{B}_1 \alpha_A + \alpha_9 \mathcal{B}_W' & \mathcal{B}_0 \alpha_A + \alpha_8 \mathcal{B}_W' & \alpha_7 \mathcal{B}_W' - \mathcal{B}_r \alpha_A \\ * & \alpha_9(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_1') - 2\alpha_{T_1} & \mathcal{B}_0 \alpha_9 + \alpha_8 \mathcal{B}_1' & \alpha_7 \mathcal{B}_1' - \mathcal{B}_r \alpha_9 \\ * & * & \alpha_8(\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_0') - 2\alpha_{T_0} & \alpha_7 \mathcal{B}_0' - \mathcal{B}_r \alpha_8 \\ * & * & * & -\lambda_2 - \alpha_7(\mathcal{B}_r + \mathcal{B}_r') \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \dots$$

$$\begin{array}{ll} L_{A3} + \mathcal{A}_0 \alpha_A + \alpha_6 \mathcal{B}_W' & L_{A2} + \alpha_5 \mathcal{B}_W' \\ L_{93} + \mathcal{A}_0 \alpha_9 + \alpha_6 \mathcal{B}_1' & L_{92} + \alpha_5 \mathcal{B}_1' \\ L_{83} + \mathcal{A}_0 \alpha_8 + \alpha_6 \mathcal{B}_0' & L_{82} + \alpha_5 \mathcal{B}_0' \\ L_{73} + \mathcal{A}_0 \alpha_7 - \alpha_6 \mathcal{B}_r' & L_{72} - \alpha_5 \mathcal{B}_r' \\ \dots & L_{62} + L_{53}' + \alpha_5 \mathcal{A}_0' \quad \dots \\ * & L_{52} + L_{52}' - \frac{1}{\tau} Q_3 \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{array} \quad (112)$$

$$\begin{array}{ll}
L_{A3} + \mathcal{A}_0\alpha_A + \alpha_4\mathcal{B}_w' & \mathcal{A}_1\alpha_A - L_{A2} + \alpha_3\mathcal{B}_w' \\
L_{93} + \mathcal{A}_0\alpha_9 + \alpha_4\mathcal{B}_1' & \mathcal{A}_1\alpha_9 - L_{92} + G_1\alpha_{T_1} + \alpha_3\mathcal{B}_1' \\
L_{83} + \mathcal{A}_0\alpha_8 + \alpha_4\mathcal{B}_0' & \mathcal{A}_1\alpha_8 - L_{82} + \alpha_3\mathcal{B}_0' \\
L_{73} + \mathcal{A}_0\alpha_7 - \alpha_4\mathcal{B}_r' & \mathcal{A}_1\alpha_7 - L_{72} - \alpha_3\mathcal{B}_r' \\
\dots L_{63} + L_{43}' + \mathcal{A}_0\alpha_6 + \alpha_4\mathcal{A}_0' & L_{33}' - L_{62} + \mathcal{A}_1\alpha_6 + \alpha_3\mathcal{A}_0' \quad \dots \\
L_{53} + L_{42}' + \mathcal{A}_0\alpha_5 & L_{32}' - L_{52} + \mathcal{A}_1\alpha_5 \\
L_{43} - Q_2 + L_{43}' + \alpha_4(\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_0') & L_{33}' - L_{42} + \mathcal{A}_1\alpha_4 + \alpha_3\mathcal{A}_0' \\
* & Q_2 - Q_1 - L_{32} + \lambda_5 - L_{32}' + \alpha_3(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1') \\
* & *
\end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l}
L_{A2} - L_{A3} + \alpha_2\mathcal{B}_w' \\
L_{92} - L_{93} + \alpha_2\mathcal{B}_1' \\
L_{82} - L_{83} + G_0\alpha_{T_0} + \alpha_2\mathcal{B}_0' \\
L_{72} - L_{73} - \alpha_2\mathcal{B}_r' \\
\dots L_{62} - L_{63} + L_{23}' + \alpha_2\mathcal{A}_0' \\
L_{52} - L_{53} + L_{22}' \\
L_{42} - L_{43} + L_{23}' + \alpha_2\mathcal{A}_0' \\
L_{32} - L_{33} - L_{22}' + \alpha_2\mathcal{A}_1' \\
L_{22} - L_{23} + Q_1 + L_{22}' - L_{23}' + P\lambda_1
\end{array} \right\} < 0$$

Da mesma forma, a condição $W_U' \Theta W_U < 0$ pode ser escrita conforme segue:

$$\left[\begin{array}{cccc}
\alpha_A(\mathcal{B}_w + \mathcal{B}_w') - \lambda_6 & \mathcal{B}_1\alpha_A + \alpha_9\mathcal{B}_w' & \mathcal{B}_0\alpha_A + \alpha_8\mathcal{B}_w' & \alpha_7\mathcal{B}_w' - \mathcal{B}_r\alpha_A \\
* & \alpha_9(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_1') - 2\alpha_{T_1} & \mathcal{B}_0\alpha_9 + \alpha_8\mathcal{B}_1' & \alpha_7\mathcal{B}_1' - \mathcal{B}_r\alpha_9 \\
* & * & \alpha_8(\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_0') - 2\alpha_{T_0} & \alpha_7\mathcal{B}_0' - \mathcal{B}_r\alpha_8 \\
* & * & * & -\lambda_2 - \alpha_7(\mathcal{B}_r + \mathcal{B}_r') \\
* & * & * & * \\
* & * & * & * \\
* & * & * & * \\
* & * & * & * \\
* & * & * & *
\end{array} \right] \dots$$

$$\begin{array}{ll}
L_{A3} + \mathcal{A}_0\alpha_A + \alpha_6\mathcal{B}_w' & L_{A2} + \alpha_5\mathcal{B}_w' \\
L_{93} + \mathcal{A}_0\alpha_9 + \alpha_6\mathcal{B}_1' & L_{92} + \alpha_5\mathcal{B}_1' \\
L_{83} + \mathcal{A}_0\alpha_8 + \alpha_6\mathcal{B}_0' & L_{82} + \alpha_5\mathcal{B}_0' \\
L_{73} + \mathcal{A}_0\alpha_7 - \alpha_6\mathcal{B}_r' & L_{72} - \alpha_5\mathcal{B}_r' \\
\dots L_{63} + L_{63}' + \alpha_6(\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_0') - \frac{1}{2\tau}Q_4 & L_{62} + L_{53}' + \alpha_5\mathcal{A}_0' \quad \dots \\
* & L_{52} + L_{52}' - \frac{1}{\tau}Q_3 \\
* & * \\
* & * \\
* & *
\end{array} \tag{113}$$

$$\begin{aligned}
& L_{A2} + L_{A3} + \alpha_A(1 + \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1) - \mathcal{B}_w'(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4) \\
& L_{92} + L_{93} + \alpha_9(1 + \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1) - G_1\alpha_{T_1} - \mathcal{B}_1'(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4) \\
& L_{82} + L_{83} + \alpha_8(1 + \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1) - \mathcal{B}_0'(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4) \\
& L_{72} + L_{73} + \alpha_7(1 + \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1) - \mathcal{B}_r'(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4) \\
\cdots & L_{62} + L_{63} - L_{13}' - L_{33}' + L_{43}' + \alpha_6(1 + \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1) - \mathcal{A}_0'(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4) \quad \cdots \\
& L_{52} + L_{53} - L_{12}' - L_{32}' + L_{42}' + \alpha_5(1 + \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1) \\
& L_{42} - L_{32} + L_{43} - Q_1 + \lambda_5 - L_{12}' - L_{13}' - L_{32}' - L_{33}' + L_{43}' + Q_3\tau + 2Q_4\tau \dots \\
& \dots - \alpha_1(2 + \mathcal{A}_0' - \mathcal{A}_1') - \alpha_3(1 - \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_1' + \mathcal{A}_0') + \alpha_4(1 - \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_0') \\
& L_{32} - L_{42} - L_{43} + Q_1 - \lambda_5 - L_{12}' + L_{13}' + L_{32}' + L_{33}' - L_{43}' + Q_3\tau + 2Q_4\tau \dots \\
& \dots - \alpha_1(2 - \mathcal{A}_0' + \mathcal{A}_1') + \alpha_3(1 - \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_1' - \mathcal{A}_0') - \alpha_4(1 - \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_0') \\
& \alpha_2 - P - L_{12}' + L_{13}'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -L_{A3} - L_{A2} + \alpha_A(1 - \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1) + \mathcal{B}_w'(\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_4) \\
& -L_{93} - L_{92} + \alpha_9(1 - \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1) + G_1\alpha_{T_1} + \mathcal{B}_1'(\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_4) \\
& -L_{83} - L_{82} + \alpha_8(1 - \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1) + \mathcal{B}_0'(\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_4) \\
& -L_{73} - L_{72} + \alpha_7(1 - \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1) + \mathcal{B}_r'(\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4) \\
\cdots & -L_{63} - L_{62} - L_{13}' + L_{33}' - L_{43}' + \alpha_6(1 - \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1) + \mathcal{A}_0'(\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_4) \quad \cdots \\
& -L_{53} - L_{52} - L_{12}' + L_{32}' - L_{42}' + \alpha_5(1 - \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1) \\
& L_{32} - L_{42} - L_{43} + Q_1 - \lambda_5 - L_{12}' - L_{13}' + L_{32}' + L_{33}' - L_{43}' + Q_3\tau + 2Q_4\tau \dots \\
& \dots - \alpha_1(2 + \mathcal{A}_0' + \mathcal{A}_1') - \alpha_3(1 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1' + \mathcal{A}_0') + \alpha_4(1 + \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_0') \\
& L_{42} - L_{32} + L_{43} - Q_1 + \lambda_5 + L_{12}' + L_{13}' - L_{32}' - L_{33}' + L_{43}' + Q_3\tau + 2Q_4\tau \dots \\
& \dots - \alpha_1(2 - \mathcal{A}_0' + \mathcal{A}_1') + \alpha_3(1 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1' - \mathcal{A}_0') - \alpha_4(1 + \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_0') \\
& \alpha_2 - P - L_{12}' + L_{13}'
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
& L_{A2} - L_{A3} + \alpha_2\mathcal{B}_w' \\
& L_{92} - L_{93} + \alpha_2\mathcal{B}_1' \\
& L_{82} - L_{83} + G_0\alpha_{T_0} + \alpha_2\mathcal{B}_0' \\
& L_{72} - L_{73} - \alpha_2\mathcal{B}_r' \\
\cdots & L_{62} - L_{63} + L_{23}' + \alpha_2\mathcal{A}_0' \\
& L_{52} - L_{53} + L_{22}' \\
& L_{33} - L_{32} + L_{42} - L_{43} + L_{22}' + L_{23}' + \alpha_2(\mathcal{A}_0' - \mathcal{A}_1') \\
& L_{32} - L_{32} - L_{42} + L_{43} - L_{22}' - L_{23}' + \alpha_2(\mathcal{A}_1' - \mathcal{A}_0') \\
& L_{22} - L_{23} + Q_1 + L_{22}' - L_{23}' + P\lambda_1
\end{aligned} \right\} < 0$$

Apresentou-se um método baseado no Lema de Projeção para sintetizar um controlador para o sistema com atraso. Condições suficientes para a existência de uma solução foram apresentadas e diretamente obtidas em forma de LMI.

Comentário 2 Neste trabalho optou-se por tratar numericamente a LMI (106), as estruturas de variáveis resultantes da aplicação do Lema de Projeção (112) e (113) são apresentadas como um exercício algébrico.

3.4 EXEMPLO NUMÉRICO

Neste trabalho, a solução numérica das LMIs é realizada em computador com o MATLAB^{®6}. O MATLAB[®] é um *software* pago que fornece um ambiente de programação de alto nível, o que facilita a programação de diversos problemas. Os valores dos parâmetros da Tabela 1 foram considerados:

Tabela 1 – Variáveis físicas.

Grandezas	Valor	Descrição
$C_{\alpha F}$	2300 N/rad	Coeficiente de curvatura do pneu dianteiro
$C_{\alpha R}$	4600 N/rad	Coeficiente de curvatura do pneu traseiro
m	1961 kg	Massa do veículo
a	1,05 m	Distância do pneu dianteiro ao centro de gravidade do veículo
b	1,71 m	Distância do pneu traseiro ao centro de gravidade do veículo
I_z	3136 kg.m ²	Momento de inércia do veículo
t_p	0,0381 m	Distância em relação ao eixo central até o efeito de cisalhamento pneumático
t_m	0,04572 m	Distância em relação ao eixo central até o efeito de cisalhamento mecânica
J_r	3,5 N.m.s ² /rad	Momento de inércia das rodas
b_r	70 N.m.s/rad	Coeficiente de amortecimento
W_f	150 kg	Peso do pneu dianteiro
η	150	Relação de direção
μ	0,192 N.m	Coeficiente de atrito
g	9,8 m/s ²	Aceleração da gravidade
K_{er}	0,573 V/rad/s	Constante
K_{tr}	0,573 N.m/A	Constante
R_r	5,68 Ω	Resistividade do motor
L_r	20,3.10 ⁻³ H	Indutância do motor

Fonte: Autor (2015)

⁶ Produtos licenciados pela The MathWorks, Inc.

Para resolver LMIs no MATLAB é necessária a instalação de pacotes específicos, conhecidos na literatura como resolvedores (ou *solvers*) de LMIs. O *solver* padrão do MATLAB é o LMI *control toolbox* (GAHINET, NEMIROVSKI, *et al.*, 1995). Apesar de ser muito eficiente, nesse *solver* as LMIs são representadas através de estruturas complexas.

Nesse caso, pode-se usar o YALMIP *toolbox* (LÖFBERG, 2004). O YALMIP é um pacote gratuito que facilita a representação de diversos problemas de otimização no MATLAB. Por exemplo, ele pode ser usado em problemas de programação semi-definida, que é justamente onde as LMIs se encaixam. O modelo da planta (88), fixando $v = 5$ m/s é descrita por:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 24.5571 & 0 & 0 \\ 0 & -28.2266 & -279.8030 & 0 & 0 \\ 0.2346 & 0 & 0 & -0.7037 & -0.8888 \\ 0.7701 & 0 & 0 & 1.7382 & -0.7524 \end{bmatrix}, \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 49.2611 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (114)$$

$$\mathbb{B}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2857 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{B}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.0724 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{C}_3 = [-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0.21], \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u = V_r = 24$$

A LMI (106) foi resolvida no MATLAB, considerando as mudanças de variáveis em (107), com o pacote YALMIP *toolbox* e o *solver* SDPT3, fixando $v = 5$ m/s as seguintes soluções foram obtidas:

Tabela 2 – Resultados por pesquisa numérica para $v = 5$ m/s.

τ	X_a	X_b	X_c	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_A	α_{T0}	α_{T1}
0.05	37.43	36.62	0.46	0.05	-0.05	0	-1.0	0	-0.1	0	0	-0.1	-0.05	1.0	1.0
0.10	71.66	87.66	0.13	0.05	-0.05	0	-1.0	0	-0.1	0	0	-0.1	-0.05	1.0	1.05
0.15	103.88	75.07	0.38	0.05	-0.05	0	-1.0	0	-0.1	0	0	-0.1	-0.05	1.05	1.05
0.20	16.20	17.39	0.21	0.05	-0.1	0	-1.0	0	0	0	0	-0.1	-0.05	1.0	1.1
0.25	16.27	17.53	5.27	0.05	-0.1	0	-1.0	0	-0.1	0	0	-0.1	-0.1	1.0	1.0
0.30	24.46	27.87	6.40	0.05	-0.1	0	-1.0	0	-0.15	0	0	-0.1	-0.1	1.05	1.0
0.35	33.41	47.08	18.54	0.05	-0.1	0	-1.0	0	-0.15	0	0	-0.1	-0.1	1.1	1.0
0.40	51.54	68.33	72.17	0.05	-0.1	0	-1.0	0	-0.15	0	0	-0.1	-0.1	1.1	1.1
0.45	13.51	13.59	14.88	0.05	-0.1	0	-1.0	0	-0.15	0	0	-0.1	-0.1	1.15	1.1
0.50	9.44	6.32	9.59	0.05	-0.1	0	-1.0	0	-0.15	0	0	-0.1	-0.1	1.0	1.0
0.55	39.50	31.04	0.08	0.1	-0.1	0	-0.95	0	0	0	0	-0.1	-0.05	0.5	0.5
0.60	106.81	105.90	0.06	0.1	-0.1	0	-1.0	0	-0.1	0	0	-0.1	-0.05	0.5	1.0
0.65	201.50	215.33	0.06	0.1	-0.1	0	-1.0	0	-0.1	0	0	-0.15	-0.05	0.5	1.0
0.70	173.50	185.67	0.08	0.1	-0.1	0	-1.0	0	-0.1	0	0	-0.15	-0.05	0.5	1.05
0.75	125.88	144.00	0.15	0.1	-0.15	0	-1.0	0	-0.1	0	0	-0.2	-0.05	0.5	1.05
0.80	181.86	167.49	0.06	0.15	-0.1	0	-1.05	0	-0.1	0	0	-0.2	-0.05	0.5	1.0

Fonte: Autor (2015)

Supondo diferentes valores de velocidades (v) descritas para as vias urbanas e rurais: 5 m/s (18 km/h), 15 m/s (54 km/h), 30 m/s (108 km/h) e 60 m/s (216 km/h). Fixando $\tau = 0,55$ s as seguintes soluções foram encontradas:

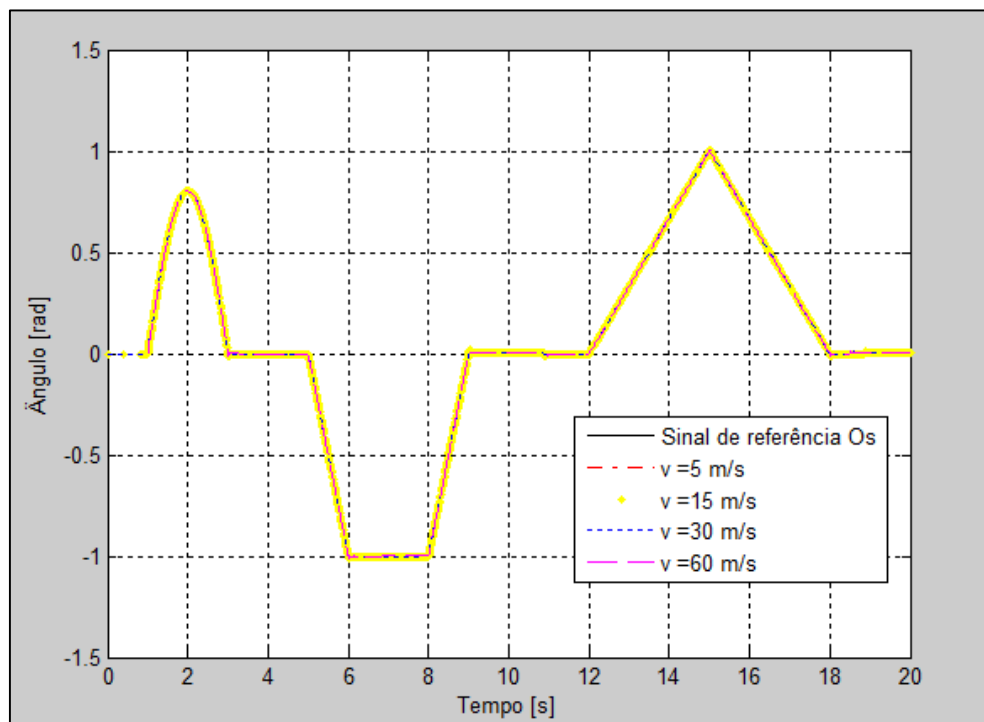
Tabela 3 – Resultados por pesquisa numérica da variável v .

v (m/s)	X_a	X_b	X_c	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_A	α_{T0}	α_{T1}
5	39.50	31.04	0.08	0.1	-0.1	0	-0.95	0	0	0	0	-0.1	-0.05	0.5	0.5
15	302.49	332.46	0.26	0.1	-0.1	0	-1.0	0	-0.05	0	0	-0.1	-0.1	0.5	1.0
30	180.96	186.25	126.11	0.1	-0.1	0	-1.0	0	-0.05	0	0	0	-0.1	0.5	1.0
60	92.02	120.29	141.02	1.0	-0.1	0	-1.0	0	-0.05	0	0	0	0	0.5	1.0

Fonte: Autor (2015)

A primeira simulação, na Figura 18, é realizada através da aplicação do sistema *Steer-by-Wire* (SbW) da Figura 17 para uma baixa velocidade na rede CAN, isto é, modela-se como sendo um atraso nos pacotes de dados de $\tau = 0,55$ s. Pode-se notar que o controlador tem que acionar o atuador (motor elétrico), de tal maneira que o ângulo das rodas dianteiras (θ_r) siga o ângulo de direção desejada (θ_s), com a menor oscilação e tempo de acomodação o mais rápido possível com o veículo se movimentando em diferentes velocidades (5, 15, 30 e 60 m/s):

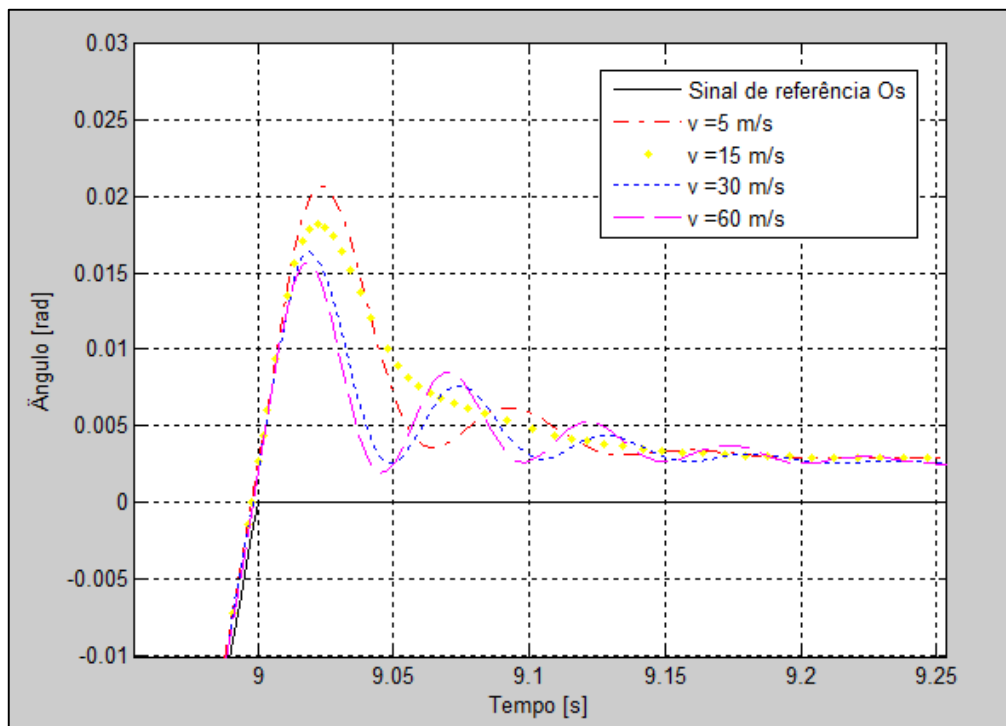
Figura 18 – Simulação para diferentes velocidades com atraso $\tau = 0,550$ s.



Fonte: Autor (2015)

Pode-se notar que a baixa velocidade, ou seja, $v = 5$ m/s, a estabilidade do veículo ainda está preservada com algumas oscilações no ângulo das rodas dianteiras do veículo como mostra a Figura 19, que é uma ampliação da Figura 18. Em alta velocidade, isto é, $v = 60$ m/s, o veículo continua a ser estável. Esta simulação mostra que o controlador projetado funciona bem na faixa de velocidades de conduções normais.

Figura 19 – Zoom da simulação para diferentes velocidades com atraso $\tau = 0,550$ s.

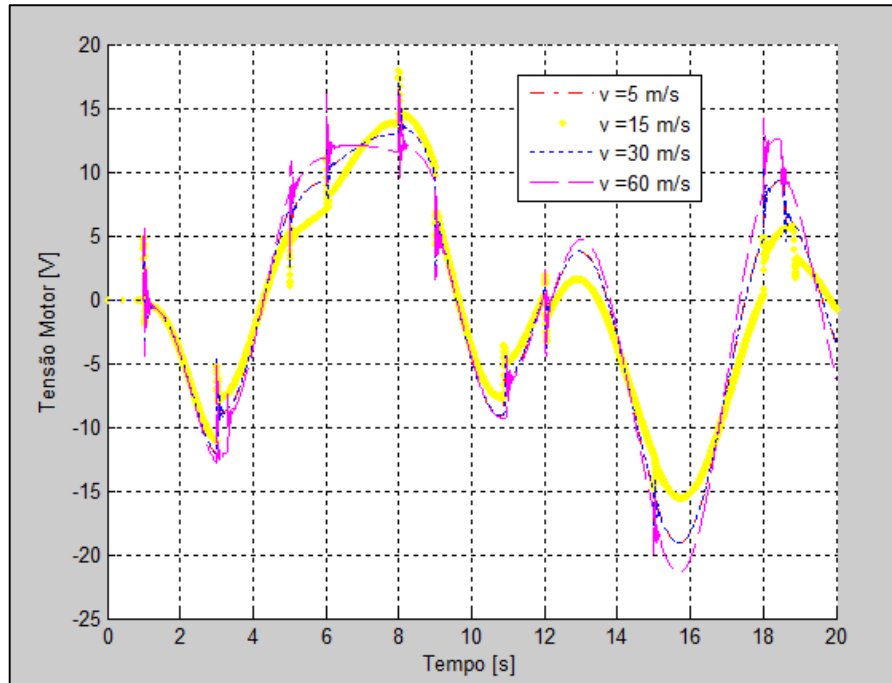


Fonte: Autor (2015)

Pode-se perceber uma pequena oscilação, em média 2%, no ângulo das rodas dianteiras (θ_r), mas ainda rastreia o sinal de referência (θ_s). Isto é devido ao atraso de propagação do sinal do controlador para o atuador e do sensor para o controlador quando a velocidade da rede é reduzida, no entanto o controlador ainda assim é capaz de proporcionar um desempenho desejado.

O controlador produz um sinal $v_c(t)$ para o motor de corrente contínua, o que em amplitudes inapropriadas ($-V_r \leq v_c(t) \leq V_r$), pode causar um sobreaquecimento da bobina do motor, podendo excitar dinâmicas não modeladas e aumentar o consumo de energia do motor. Como indicado na Figura 20 o controlador proposto não leva o atuador que gira as rodas a saturação em amplitude, pois os limites de $V_r = \pm 24V$ são estritamente satisfeitos para todas as velocidades simuladas.

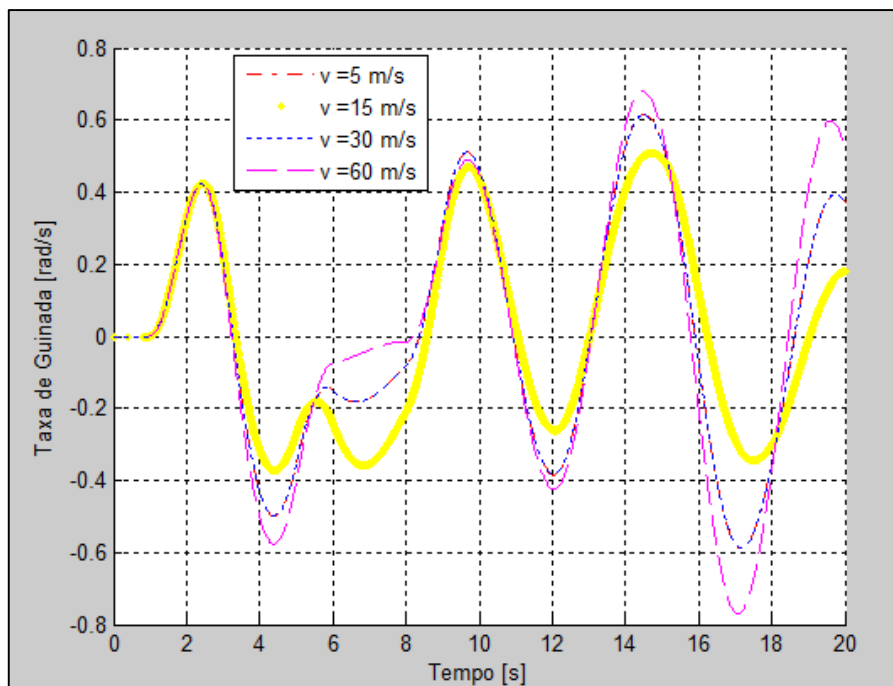
Figura 20 – Simulação tensão do motor para diferentes velocidades.



Fonte: Autor (2015)

Pode-se perceber que a taxa de guinada (r), Figura 21, e o ângulo de deslizamento do veículo (β), Figura 22, não divergem para um valor superior a +1 e inferior a -1.

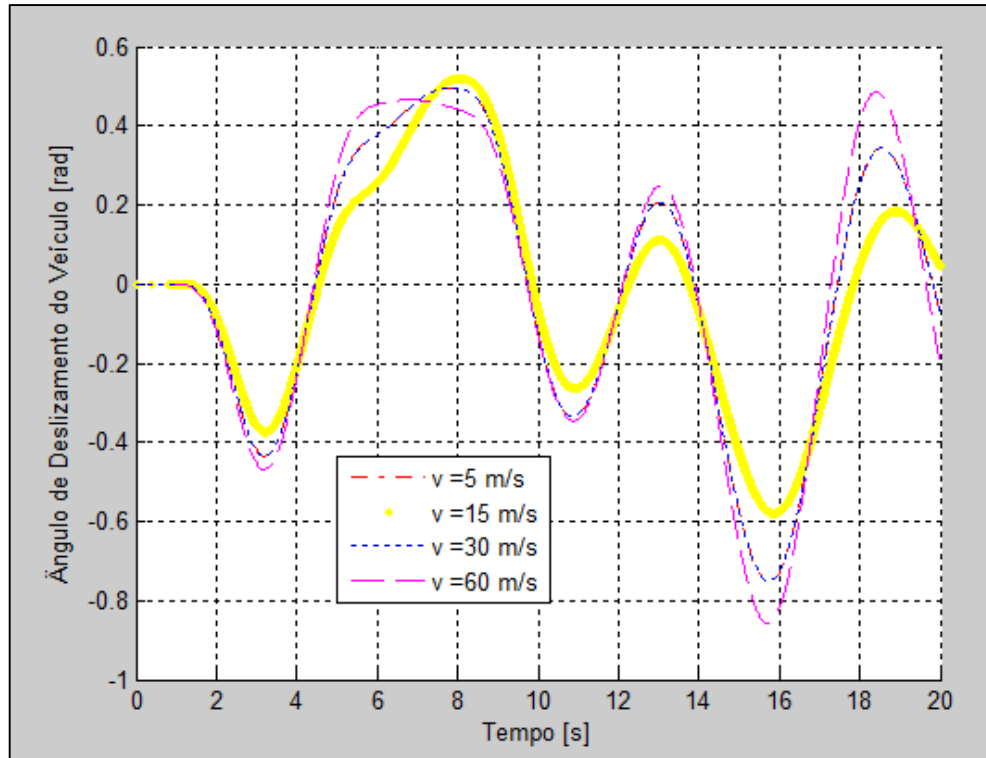
Figura 21 – Simulação taxa de guinada r para diferentes velocidades.



Fonte: Autor (2015)

Ultrapassar estes limites leva o carro a instabilidade, ou seja, um possível descontrole do veículo que levaria a um acidente. No entanto, esta situação não é percebida como mostrado na Figura 21 e Figura 22.

Figura 22 – Simulação ângulo de deslizamento do veículo β para diferentes velocidades.



Fonte: Autor (2015)

Esta simulação (Figura 22) em relação ao modelo do veículo pode-se observar a estabilidade do veículo durante as manobras de direção. Tendo em vista isto, as simulações mostram que o controlador projetado pode executar uma faixa de velocidades normais de dirigibilidade sem levar o automóvel a instabilidade e com uma resposta confiável nas manobras do condutor.

4 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O enfoque principal deste trabalho foi o problema de controle do sistema de Direção Eletrônica (do inglês, *Steer-by-Wire*), contextualizando com sistemas lineares com atraso e sujeitos a saturação. Este trabalho apresenta contribuições ao problema de controle de sistemas lineares ao apresentar uma síntese de conceitos, definições, teoremas e lemas inerentes ao desenvolvimento do sistema *by-Wire* para a direção de um veículo automotor.

Inicialmente, foram apresentados métodos para caracterizar a estabilidade de sistemas lineares e estabilidade de sistemas no sentido de Liapunov, baseado em abordagens propostas em Khalil (2002) e Tarbouriech, Garcia, *et al.* (2011). Sistemas com restrição no sinal de controle, em amplitude, podem ser modelados por uma função saturação na entrada da planta, um caso especial de sistemas com saturação na entrada da planta é mostrado, inspirado em trabalhos como Bender (2006), Bender (2010), Dilda (2013) e Ghiggi (2008), pois o sistema de Direção Eletrônica é sujeito à saturação no atuador (motor elétrico) que move as rodas dianteiras.

Outro fato que pôde ser percebido neste tipo de sistema, são os efeitos de *windup* causados por atuadores saturantes, para tanto é mostrado a estratégia de compensador *anti-windup*, que tende a corrigir os efeitos de saturação no sinal de controle. O trabalho descreveu a configuração de sistemas que podem ser modelados com um atraso entre o sinal de controle e o seu efeito sobre a planta, que é o caso do sistema *Steer-by-Wire* (SbW), pois o controlador se localiza distante da planta, portanto a entrada de controle bem como a saída estão sujeitas ao atraso, se considerar as restrições na rede de comunicação.

No que diz respeito a obter um modelo dinâmico do sistema de Direção Eletrônica, fez-se uma análise do problema do SbW através de um modelo matemático de um sistema linear, apresentando o desenvolvimento dos métodos e sínteses realizados por Nor Shah *et al.* (2013), que considera o modelo dinâmico do veículo.

Em relação as garantias de estabilidade para o sistema *Steer-by-Wire* foram propostas condições suficientes expressas em desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities* – LMIs) para a existência de um controlador. Considerando a síntese de um compensador *anti-windup* para o sistema com atraso e saturação na planta, o método de síntese apresentado em LMIs uma vez satisfeitas garantem a estabilidade do sistema em malha fechada.

Com base nos conceitos apresentados, deseja-se dar continuidade às pesquisas relacionadas ao sistema *Steer-by-Wire*. Assim, elencam-se os seguintes tópicos a serem investigados:

- Propor um modelo linear de tempo discreto com base nas equações propostas em Nor Shah *et al.* (2013), para que seja possível implementar em um controlador digital;
- Para um projeto mais abrangente e realista do SbW baseado em rede, propor um modelo do veículo que considere as não-lineares presentes na dinâmica do veículo e o sistema também deve ser equipado com recurso que varie a razão de direção, mapeamento de torque e controle de força de realimentação para uma a experiência de condução mais realista;
- Estudar a estabilidade do sistema SbW em malha fechada para uma modelagem de saturação politópica, considerando os limites físicos impostas pela velocidade da rede (tempo de propagação dos dados e congestionamento da rede) e pelos atuadores;
- Busca de solução da LMI do controlador para critérios de otimização distintos, tal como a maximização da região de atração das trajetórias em torno da origem.

REFERÊNCIAS

- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. **PID controllers: theory, design and tuning**. 2^a. ed. Lund: Instrument Society of America, 1995.
- BENDER, F. A. **Técnicas de Compensação Dinâmica para Sistemas Lineares com Saturação de Controle**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2006.
- BENDER, F. A. **Técnicas de Síntese de Compensadores Antiwindup para Sistemas com Atraso**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2010.
- BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. 1^a. ed. Philadelphia: SIAM, 1994.
- DILDA, V. **Controle de Sistemas Lineares Sujeitos a Zona Morta no Atuador**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, 2013.
- GAHINET, P. et al. LMI control toolbox - For use with MATLAB, 1995.
- GAHINET, P.; APKARIAN, P. A Linear Matrix Inequality Approach to H_{∞} Control. **International Journal of Robotics and Nonlinear Control**, 1994. 1-20.
- GHIGGI, I. M. F. **Controle de Sistemas com Atrasos no Tempo na Presença de Atuadores Saturantes**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2008.
- GOMES DA SILVA, J. . J. M.; TARBOURIECH, S. Antiwindup Design With Guaranteed Regions of Stability: An LMI-Based Approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Janeiro 2005. 106-111.
- GU, K.; CHEN, J.; KHARITONOV, V. **Stability of Time-delay Systems**. Birkhauser: [s.n.], 2003.

HALE, J.; LUNEL, S. M. V. **Introduction to functional differential equations**. 1^a. ed. New York: Springer-Verlag, v. 1, 1993.

HOFFMANN, E. **Implementação de uma rede CAN visando a simulação de um sistema de direção eletrônica em veículo automotor (Steer-by-Wire)**. Caxias do Sul: Universidade de Caxias do Sul, Graduação em Engenharia de Controle e Automação, 2014.

IVANESCU, D.; DUGARD, L.; DION, J. **Stability of linear time-delay systems a time domain approach theory and examples**. Grenoble: Laboratoire D'Automatique de Grenoble, v. 1, 2000.

KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. 3^a. ed. New York: Prentice Hall, 2002.

KOLMANOVSKII, V.; NICULESCU, S. I.; RICHARD, J. P. On the Liapunov Krasovskii functional for stability analysis of linear delay systems. **International Journal of Control**, New York, 72, 1999. 374-384.

LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. **Proceeding of the cacs conference**, Taipei, 2004.

MAIA, M. R. **Controlador PID-AA: Desenvolvimento de Novas Técnicas de Pré-Ajuste e de Compensação de Atraso de Transporte**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 1993.

NICULESCU, S. I. **Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach**. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

NOR SHAH, M. B. et al. A new error handling algorithm for controller area network in networked control system. **Elsevier B.V.**, Penang, Julho 2013.

NOR SHAH, M. B.; HUSAIN, A. R.; DAHALAN, A. S. A. An Analysis of CAN-based Steer-by-Wire System Performance in Vehicle. **IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering**, Penang, Dezembro 2013.

OLIVEIRA, M. C. D.; SKELTON, R. Stability Tests for Constrained Linear Systems. **Perspectives in Robust Control: lecture notes in control and information sciences**, New York, 2001. 241-257.

ROOS, C.; BIANNIC, J. M. A convex characterization of dynamically-constrained anti-windup controllers. **ScienceDirect Automatica**, p. 2449-2452, 2008.

SILVA, G. J.; DATTA, A.; BHATTACHARYYA, S. P. **PID controllers for time-delay systems**. Boston: Birkhäuser, 2005.

TARBOURIECH, S. et al. **Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators**. New York: Springer, 2011.

TARBOURIECH, S.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Synthesis of controllers for continuous-time delay systems with saturating controls via LMIs. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Phoenix, USA, v.45, 2000. p.105-111.

YIH, P. **Steer-by-Wire: Implications for Vehicle Handling and Safety**. Stanford: Stanford University, 2005.

ZACCARIAN, L.; TELL, A. R. **Modern anti-windup synthesis: control augmentation for actuator saturation**. New Jersey: Princeton University Press, 2011.