

**UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
MESTRADO PROFISSIONAL**

GIULIANO DAL BÓ

**MÉTODOS NUMÉRICOS NÃO CONVENCIONAIS NA ABORDAGEM DINÂMICA
EM CASCAS DE REVOLUÇÃO COM SIMETRIA AXIAL DE FORÇAS**

CAXIAS DO SUL

2017

GIULIANO DAL BÓ

**MÉTODOS NUMÉRICOS NÃO CONVENCIONAIS NA ABORDAGEM DINÂMICA
EM CASCAS DE REVOLUÇÃO COM SIMETRIA AXIAL DE FORÇAS**

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade de Caxias do Sul, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Projeto e Fabricação

Linha de Pesquisa: Projeto de Componentes e Sistemas Mecânicos

Orientador: Prof. Dr. Oscar A. G. Suarez

Coorientador: Prof. Dr. Leandro L. Corso

CAXIAS DO SUL

2017

**Métodos numéricos não convencionais na abordagem dinâmica em cascas de revolução
com simetria axial de forças**

Giuliano Dal Bó

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade de Caxias do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, Área de Concentração: Projeto e Fabricação.

Caxias do Sul, 13 de março de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Oscar Alfredo Garcia de Suarez (orientador)
Universidade de Caxias do Sul

Prof. Dr. Leandro Luís Corso (coorientador)
Universidade de Caxias do Sul

Prof. Dr. João Morais da Silva Neto
Universidade Federal do Paraná

Prof. Dr. Marcos Alexandre Luciano
Universidade de Caxias do Sul

Prof. Dr. Alexandre Fassini Michels
Universidade de Caxias do Sul

Dedico este trabalho a minha família e empresa pelo apoio ao meu desenvolvimento como Engenheiro.

AGRADECIMENTOS

À minha família (Carla, Elizabeth, Paulo, Ricardo) que sempre me incentivou a buscar o desenvolvimento contínuo e aprimoramento dos estudos.

Ao meu Professor Orientador Dr. Oscar Alfredo Garcia Suarez pelo auxílio e a oportunidade de aprendizado durante o desenvolvimento do trabalho.

À empresa Suretank Latin America pela oportunidade, auxílio e compreensão para finalização dos meus objetivos.

Aos professores do Mestrado Profissional em Engenharia Mecânica da Universidade de Caxias do Sul por todo aprendizado proporcionado durante as disciplinas.

D136m Dal Bó, Giuliano

Métodos numéricos não convencionais na abordagem dinâmica em cascas de revolução com simetria axial de forças / Giuliano Dal Bó. – 2017.

113 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de Caxias do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2017.

Orientação: Oscar Alfredo Garcia de Suarez.

Coorientação: Leandro Luis Corso.

1. MEF. 2. MEF. 3. H-FEM. 4. FEM B-Spline. 5. Cascas de revolução. I. Suarez, Oscar Alfredo Garcia de, orient. II. Corso, Leandro Luis, coorient. III. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UCS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo apresentar e verificar uma série de métodos de análise numérica não convencional em relação ao método de elementos finitos (MEF) utilizado comercialmente. Inicialmente é realizada uma revisão bibliográfica para posterior construção do referencial teórico. Dentre os itens abordados neste referencial teórico estão uma breve descrição e histórico de vasos de pressão, método MEFG (Elementos Finitos Degenerados), o método H-FEM (Elementos Finitos de Hermite), método *Stable* GFEM (Método de Elementos Finitos Generalizados com Estabilização) e o método FEM B-*Spline* (Método de Elementos Finitos B-*Spline*). No referencial teórico é construído todo equacionamento de cada método numérico para posterior programação de cada um no programa Matlab®. Os resultados gerados abordam os estudos dos efeitos de travamento devido ao esforço cisalhante sobre a primeira frequência natural em placas circulares, análise dos efeitos de regularidade dos espaços de aproximação obtidos segundo os métodos citados anteriormente, estudo do erro relativo das frequências naturais em relação à solução de referência para um intervalo definido por 50% dos primeiros modos aproximados numericamente e estudos dos efeitos de vibração forçada produzido por forças de impulso aplicadas no plano de simetria radial de cascas de revolução cilíndricas e esféricas.

Palavras-chave: MEF, MEFG, H-FEM, FEM B-*Spline*, cascas de revolução, simetria radial

ABSTRACT

This dissertation has as objective presents and checks a series of non-conventional methods for numerical analysis in comparison with the finite element method (FEM) applied commercially. Initially is performed a bibliographic revision for a posterior building of theoretical reference. Among the approached items of this theoretical reference are a quick description and history about pressure vessels, GFEM method, H-FEM method, Stable GFEM method and FEM B-Spline method. On the theoretical reference is built all equation basis of each method for posterior programming of each one in the software Matlab®. The generated results approaches the studies of locking due shear forces in circular plates under the first natural frequency, analysis of approximation spaces regularity obtained according to the methods cited before, study of relative error of natural frequencies than the reference solution for an interval of 50% of first modes numerically approximated and studies of effects due forced vibration generated by impulse forces applied in the radial symmetric plan of cylindrical shells and spheres.

Keywords: FEM, GFEM, H-FEM, FEM B-Spline, revolution shells, radial symmetry

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Fluxograma de Trabalho	22
Figura 2 - Base global $[\mathbf{i}_r : \mathbf{k} : \mathbf{i}_\theta]$ e base local $[\mathbf{v}_{2k} : \mathbf{v}_{3k} : \mathbf{i}_\theta]$ do ponto X.....	31
Figura 3 - Domínio intrínseco Ω e vetor posição $X(\eta, \zeta)$	31
Figura 4 - Base covariante $[\mathbf{a}_1 : \mathbf{a}_2 : \mathbf{a}_3]$ e base ortornormal $[\mathbf{t} : \mathbf{n} : \mathbf{i}_\theta]$ no ponto X	34
Figura 5 - Elemento de área e elemento de volume.	35
Figura 6 - Elemento de área e elemento de volume	37
Figura 7 - Esquema cinemático para o modelo de 1ª ordem	38
Figura 8 - Tensor tri-axial de tensões	40
Figura 9 - Carregamento e condições de contorno essenciais num plano de simetria radial ...	41
Figura 10 - Elemento Lagrangeano de ordem $p = n_e - 1$	46
Figura 11 - Partição de unidade linear sobre a cobertura $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$	53
Figura 12 - Elementos quadráticos, nos ativos α_1, α_3 e α_5	53
Figura 13 - a) Funções peso $W_\alpha \in C_0^0(\Sigma)$; b) funções peso $W_\alpha \in C_0^2(\Sigma)$	56
Figura 14 - Função peso $W_\alpha \in C_0^0(\Sigma)$, definida em $[-1,1]$; b) função peso $W_\alpha \in C_0^2(\Sigma)$ definida no domínio natural do elemento $[-1,1]$	56
Figura 15 - Função peso $W_\alpha \in C_0^0(\Sigma)$, definida em $[-1,1]$; b) função peso $W_\alpha \in C_0^2(\Sigma)$ definida no domínio natural do elemento $[-1,1]$	58
Figura 16 - Função peso $W_\alpha \in C_0^0(\Sigma)$, definida em $[-1,1]$; b) função peso $W_\alpha \in C_0^2(\Sigma)$ definida no domínio natural do elemento $[-1,1]$	59
Figura 17 - Funções mapeamento $\mathcal{C}(\eta) : \Omega_e \rightarrow s$ e $C(s) : \Sigma \rightarrow R^3$	64
Figura 18 - a) Partição de unidade $\phi \in C^2(\Sigma)$; b) PU enriquecida com função linear $\phi \bar{s}$	65
Figura 19 - a) funções a,c,f definidas em $[-1,1]$ correspondem as funções das PU's com regularidade $C_0^1(\Sigma)$, $C_0^2(\Sigma)$ e $C_0^3(\Sigma)$ respectivamente; b) as funções b,d,g definidas no domínio $[-1,1]$ são funções de completude dos espaços com regularidade $C_0^1(\Sigma)$, $C_0^2(\Sigma)$ e $C_0^3(\Sigma)$...	70
Figura 20 - Funções de partição da unidade definidas no intervalo $s \in [0,4]$ com	75

Figura 21 - Funções Uniformes B-Spline (a) função uniforme B-Spline de ordem $p=2$ no domínio paramétrico do grid; (b) função uniforme B-Spline de ordem $p=3$ definida no domínio paramétrico do grid; (c) função uniforme B-Spline de ordem $p=3$ no domínio paramétrico do grid; (d) função uniforme B-Spline de ordem $p=4$ definida no domínio paramétrico do grid.	80
Figura 22 - Seção da casca sob força distribuída p atuando na face $\partial\Omega_N$	82
Figura 23 - Funções B-Spline de aproximação global de ordem $p = 2$. Fronteira de Dirichlet na cota $s = 0.5$ onde as funções ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 apresentam valores não nulos no nó 1 do elemento Ω_1	86
Figura 24 - a) Placa circular engastada; b) Propriedades geométricas, mecânicas e condições de contorno	88
Figura 25 - Efeitos de travamento na primeira frequência natural para as estratégias A, B e C	89
Figura 26 - a) casca cilíndrica curta; b) condições de contorno e dimensões	90
Figura 27 – Autovalor axissimétrico associado a ordem $m=42$	91
Figura 28 - Erro relativo com relação à frequência ω_{42}	93
Figura 29 - (a) Setor de calota esférica com ângulo cônico de 85° ; (b) propriedades geométricas e condições de contorno no plano de simetria radial	94
Figura 31 - Erro relativo de autovalores para o intervalo de $1 \leq N \leq 40$	97
Figura 32 - Erro relativo dos autovalores no intervalo de $40 \leq N \leq 80$	98
Figura 32 - a) Cascas hemisférica; b) Propriedades geométricas e condições de contorno; c) pressão definida por um pulso com duração T.	99
Figura 33 - Deslocamento transversal w_A no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 0,15s$	101
Figura 34 - Deslocamento transversal w_A no intervalo de tempo $0,06s \leq t \leq 0,08s$	101
Figura 35 - Comportamento do esforço normal $N_\theta(N)$ no ponto B no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 0.15s$	102
Figura 36 - Comportamento do esforço normal $N_\theta(N)$ no intervalo de tempo $0,06s \leq t \leq 0,08s$	102
Figura 37 - Comportamento do deslocamento transversal w_A no intervalo $0s \leq t \leq 4s$	103
Figura 38 – Comportamento do deslocamento transversal w_A no sub intervalo $2,5s \leq t \leq 3s$	104

Figura 39 - Comportamento no tempo do esforço normal $N_{\theta}(t)$ para o intervalo $0s \leq t \leq 4s$ 104

Figura 40 - Comportamento no tempo para $N_{\theta}(t)$ no subintervalo $2,5s \leq t \leq 3s$ 105

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Ordem Polinomial e Regularidade	69
Tabela 2 - Condições de Continuidade Inter-elementos da Função ϕ_i	69
Tabela 3 - Condições de continuidade inter-elementos para determinar os coeficientes b_i^j do polinômio definido na Eq. (145).....	72
Tabela 4 - Resultados de E_r	89
Tabela 5 - Resultados do autovalor associado a ordem $m=42$	92
Tabela 6 – Resultados Obtidos	95
Tabela 7 - Resultados do problema estático para as estratégias i e ii	100

LISTA DE SIGLAS

CAD	Projeto Auxiliado por Computador
MEFG	Método de Elementos Finitos Degenerados
FEM B- <i>Spline</i>	Método de Elementos Finitos B- <i>Spline</i>
FSDT	<i>First shear deformation theory</i>
H-FEM	Método de Elementos Finitos de Hermite
MEF	Método de Elementos Finitos
MLS	<i>Moving least squares</i>
MLSDQ	<i>Moving least squares differential quadrature</i>
MPU	Métodos de Partição de Unidade
NURBS	<i>Non Uniform Rotational Basis Spline</i>
PU	Partição de Unidade
SGFEM	Método de Elementos Finitos Generalizado Estabilizado
SPH	<i>Smooth Particle Hydrodynamics</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Maiúsculas

C^∞	Funções de aproximação de continuidade infinita
C^0	Funções de aproximação de continuidade zero
V_{3k}	Vetor na direção da aresta
X_k	Vetor Posição
X	Posição de um ponto na superfície
R^3	Plano tridimensional
N_s	Função Lagrangeana de interpolação
N_i	Função Lagrangeana de interpolação
$N_k(\eta)$	Funções quadráticas Lagrangeanas (de forma)
F_ζ	Base covariante
Q	Vetor da base ortonormal
Q_k	Matriz de rotação
L	Comprimento da placa ou casca
E	Módulo de elasticidade do material
F	Vetor de força
R	Resíduo
D	Vetor deformação relacionado às funções teste
U_e	Vetor de parâmetro de deslocamentos
V	Deslocamento na direção normal
W	Deslocamento na direção transversal
J	Operador Jacobiano
R	Operador de Rotação
H_{ev}	Matriz booleana de transformação
N	Número de nós ativos
B_e	Matriz de deformações
K_e	Matriz de rigidez
M_e	Matriz de massa
H	Regularidade de funções
C_∞	Constante finita
C_G	Constante finita
M	Cardinalidade
W_α	Funções peso
Q_α	Conjunto de funções de enriquecimento local
P	Conjunto de polinômios
$L_i(\bar{s})$	Base polinomial
$C(s)$	Função que define a curva no domínio do problema físico
E_r	Erro relativo
M	Ordem do autovalor

N	Número de graus de liberdade utilizado
$N_\theta(t)$	Esforço normal no ponto B da casca

Letras Minúsculas

\mathbf{i}_θ	Vetor unitário normal ao plano de simetria radial
t_k	Comprimento da aresta na direção do vetor unitário \mathbf{v}_{3k}
n	Número de nós do elemento
r_k	Raio da casca de revolução
\mathbf{a}_1	Vetor da base covariante em relação a η
\mathbf{a}_2	Vetor da base covariante em relação a ζ
\mathbf{a}_3	Vetor da base covariante em relação a θ
\mathbf{t}	Vetor normalizado \mathbf{a}_1
$d\mathbf{X}$	Elemento de arco correspondente a uma fibra
dA	Varição do elemento de área
dV	Varição do elemento de volume
\mathbf{u}	Deslocamentos no interior do elemento
t	Espessura da placa ou casca
p	Ordem polinomial da função
\bar{s}	Coordenada normalizada com relação a um sistema de coordenadas
h_α	Diâmetro do suporte da função peso
s_α	Coordenada do arco do nó ativo
n_{DE}	Ordem da dimensão do espaço de aproximação
$f_e(r)$	Função aproximada a partir dos critérios de continuidade
h	Altura do cilindro
g	Aceleração da gravidade
w	Deslocamento radial
k	Regularidade do espaço de aproximação local
$w_A(t)$	Deslocamento transversal no ponto A da casca
t	Tempo

Letras Gregas

\mathbf{v}_{3k}	Vetor unitário posição dos pontos extremos das arestas
\mathbf{v}_{2k}	Vetor obtido pelo produto vetorial de \mathbf{v}_{3k} e \mathbf{i}_θ
η	Coordenada paramétrica na direção da espessura do elemento
ζ	Coordenada paramétrica na direção da superfície do elemento
θ	Coordenada paramétrica na direção radial do elemento
Ω_e	Domínio natural do elemento
\mathbf{v}_{2kG}	Vetor da base ortogonal
σ	Tensões normais
τ	Tensões cisalhantes
ν	Coefficiente de Poison
ε	Deformações normais

γ	Deformações cisalhantes
κ	Coefficiente de correção de cisalhamento de Reissner
ρ	Densidade do material
δ_h	Espaço vetorial
$\varepsilon(\mathbf{v}_h)$	Vetor deformação relacionado às funções teste
$\varepsilon(\mathbf{u}_h)$	Vetor deformação relacionado às funções teste
ω	Frequência natural do sistema
λ	Autovalor associado à frequência natural
ω_α	Função de suporte
ϕ_α	Funções de partição de unidade
α_1	Nó ativo
α_3	Nó ativo
α_5	Nó ativo
φ	Funções de partição de unidade
\mathcal{F}_N^p	Conjunto de funções de aproximação global
$\mathcal{C}(\eta)$	Funções de mapeamento
ν_J	Funções de completude
α	Nuvem do elemento
ω_h	Frequência natural obtida numericamente
ω_a	Frequência natural obtida analiticamente
ε	Erro de aproximação desejado

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	19
1.1.	DESCRIÇÃO DA PROBLEMÁTICA PROPOSTA	19
1.2.	JUSTIFICATIVA	20
1.3.	OBJETIVOS	20
1.4.	METODOLOGIA.....	21
2.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
2.1.	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DEGENERADOS	23
2.2.	MÉTODO H-FEM.....	25
2.3.	MÉTODO STABLE GFEM	26
2.4.	MÉTODO FEM B-SPLINE	27
3.	MODELO DE PRIMEIRA ORDEM EM CASCAS DE REVOLUÇÃO	29
3.1.	CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DO ELEMENTO	29
3.1.1.	Vetores Ortonormais aos Nós do Elemento	30
3.1.2.	Função de Mapeamento	31
3.1.3.	Bases Covariantes e Ortonormais	33
3.1.4.	Elementos de Arco	35
3.1.5.	Elemento de Área de Volume	36
3.2.	MODELO CINEMÁTICO DE PRIMEIRA ORDEM (REISSNER-MINDLIN).....	38
3.3.	EQUAÇÃO CONSTITUTIVA PARA O PROBLEMA DE SIMETRIA RADIAL....	40
3.4.	FORMULAÇÃO FRACA DO PROBLEMA DINÂMICO	41
3.5.	PROBLEMA DISCRETIZADO PARA O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DE GALERKIN	45
3.5.1.	Vetor de Deformações no Sistema Local de Coordenadas	47
3.5.2.	Formulação Semi-discreta para o Problema de Vibração Forçada segundo MEF	
	50	
4.	ESPAÇOS DE APROXIMAÇÃO NO MEEG	51

4.1.	PARTIÇÃO DE UNIDADE.....	51
4.1.1.	Partições de Unidade do Tipo Lipschitz	52
4.1.2.	Partições de unidade do tipo $C_0^k(\Omega)$, $k = 0, 2, 4, \dots$	54
4.1.3.	Construção do espaço de aproximação	59
4.1.4.	Espaços de aproximação locais	60
4.1.5.	Espaços de aproximação global sob o domínio do arco	61
4.2.	SISTEMÁTICA DA PARAMETRIZAÇÃO GLOBAL DO DOMÍNIO	63
5.	ESPAÇOS DE APROXIMAÇÃO NÃO CONVENCIONAIS	67
5.1.	ESPAÇOS DE APROXIMAÇÃO SEGUNDO O H-FEM	67
5.1.1.	Funções da PU	68
5.2.	UNIFORM FEM B-SPLINE EM 1D	75
5.2.1.	Construção da base de funções B-Spline em 1D	76
6.	DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA	82
6.1.	PROBLEMA DISCRETIZADO SEGUNDO MEFM	82
6.2.	PROBLEMA DISCRETIZADO UTILIZANDO O H-FEM.....	83
6.3.	PROBLEMA DISCRETIZADO UTILIZANDO O UNIFORM FEM B-SPLINE.....	84
7.	RESULTADOS NUMÉRICOS	87
7.1.	INTRODUÇÃO	87
7.2.	RESULTADOS OBTIDOS PARA OS EFEITOS DE TRAVAMENTO POR CISCALHAMENTO NA PRIMEIRA FREQUENCIA NATURAL DE UMA PLACA CIRCULAR	87
7.3.	RESULTADOS DE CONVERGÊNCIA PARA FREQUÊNCIA ALVO	90
7.4.	RESULTADOS COMPARATIVOS COM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA DE CASCA HEMISFÉRICA FINA PROPOSTA POR KUNIEDA.....	93
7.5.	RESULTADOS DE CONVERGÊNCIA DE AUTOVALORES.....	95
7.6.	RESULTADOS DE VIBRAÇÕES LIVRES E FORÇADAS EM CASCAS ESFÉRICAS	98

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	
105	
BIBLIOGRAFIA	109

1. INTRODUÇÃO

Esta dissertação refere-se à aplicação de estudos focados em métodos numéricos não convencionais, modelados como cascas de revolução com base na teoria de elementos finitos degenerados (MEFG). O presente trabalho aborda um comparativo entre diversos métodos numéricos não convencionais para avaliar a convergibilidade e custo computacional de cada um.

Este trabalho aborda principalmente os métodos sem malha, dando ênfase àqueles que constroem o espaço de aproximação por produto da partição de unidade com funções que tem boas propriedades de aproximação (funções polinomiais e modos conhecidos da solução do problema de valores no contorno).

No contexto deste trabalho são chamados métodos sem malha, ou métodos numéricos não convencionais, aqueles nos quais o conjunto de equações que governam o problema discretizado não depende de uma malha no sentido forte. Entenda-se por sentido forte que as malhas devem satisfazer requisitos de conformidade exigidos em elementos finitos convencionais e que as funções do espaço de aproximação são construídas no domínio natural do elemento.

Os métodos abordados neste trabalho são listados a seguir: MEFG, H-FEM, *Stable* GFEM e FEM B-*Spline*.

Como complemento é feita uma discussão sobre os procedimentos existentes para abordar o problema da construção das funções de enriquecimento em domínios curvos.

1.1.DESCRICÃO DA PROBLEMÁTICA PROPOSTA

Uma grande gama de equipamentos pode ser modelada considerando a teoria de cascas de revolução e sua aplicação é fundamental em processos industriais, principalmente quando aplicado à indústria de óleo e gás.

Em função de sua alta probabilidade de falhas catastróficas, equipamentos usualmente modelados com cascas de revolução são considerados equipamentos de alta periculosidade, sendo necessário grande conhecimento de sua aplicação, carregamentos e processo construtivo. Outro aspecto importante é sua importância dentro de uma linha de produção. A sua parada ou falha pode acarretar altos custos devido à interrupção do processo produtivo, principalmente no mercado de petróleo e derivados.

Por se tratarem de estruturas, na maioria dos casos, cilíndricas, com tampos de variadas geometrias em suas extremidades e com espessura relativamente pequena em relação as suas dimensões externas, além das verificações analíticas de norma, podem ser analisadas via métodos numéricos não convencionais. Conforme Mesquita e Coda (2005), a maioria dos problemas de engenharia apresenta alta complexidade geométrica, sem equações analíticas para resolução ou na maioria dos casos com muitas simplificações. Para aproximações de resultados mais realistas em geometrias e modelos complexos a utilização da análise numérica via elementos finitos com a teoria de cascas é indicada.

O dimensionamento de estruturas consiste em determinar e quantificar as ações ou carregamentos esperados durante a utilização da estrutura, especificando as dimensões e materiais necessários para alcançar o nível de segurança desejado.

1.2.JUSTIFICATIVA

Em função do aumento da demanda de equipamentos para armazenamento de fluidos pressurizados, principalmente em função das descobertas de novos locais para extração de petróleo no Brasil e com previsão de um crescimento expressivo em logo prazo, torna-se necessário um aprofundamento dos estudos de estruturas modeladas com cascas de revolução e simetria axial de carregamentos para uma maior confiabilidade, segurança e economia em projetos futuros. Nos próximos anos em função do início das atividades de exploração no campo de Libra, no litoral do estado de São Paulo, e maior campo do pré-sal, tem-se a expectativa de incremento no uso de equipamentos *offshore*, sendo que para somente atender a demanda poços localizados na bacia de Campos, Rio de Janeiro, seriam necessárias substituição de aproximadamente 3000 unidades de vasos portáteis, dos quais podem ser modelados e analisados com a utilização da teoria de cascas de revolução.

Outro aspecto relevante para o desenvolvimento da dissertação é a adição de novos estudos de análise via métodos numéricos não convencionais, englobando a teoria de cascas de revolução incluído os métodos numéricos não convencionais para resolução de problemas de vibrações livres e forçadas em casos de carregamentos com simetria axial.

1.3.OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo principal o estudo estrutural de modelos utilizando métodos numéricos não convencionais em conjunto com teoria de cascas de revolução

submetidos carregamentos com simetria axial e também submetidos a esforços dinâmicos. Os objetivos específicos são listados abaixo:

- i. Desenvolver estudos utilizando a teoria de cascas de revolução sob carregamentos com simetria axial utilizando métodos numéricos não convencionais;
- ii. Implementar algoritmos para cálculo e avaliação de esforços e deslocamentos gerados pelos esforços oriundos de cargas com simetria axial, de modo estático e dinâmico, para cada metodologia numérica não convencional;
- iii. Realizar um comparativo entre cada método numérico não convencional aplicado às cascas de revolução em condição de carga com simetria axial para avaliação de convergência e custo computacional de cada metodologia.

1.4.METODOLOGIA

Foi realizada uma pesquisa para avaliar o comportamento de estruturas modeladas com cascas de revolução submetidas a esforços de pressão e esforços variados, levando em consideração incertezas nesses carregamentos. Os seguintes passos foram seguidos na construção da dissertação:

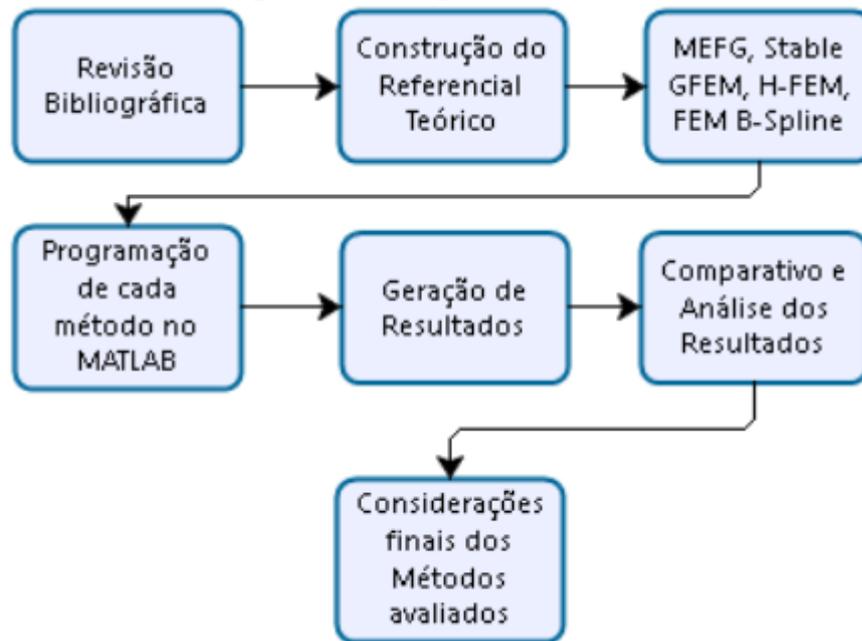
- a) Revisão bibliográfica dos assuntos propostos;
- b) Construção de referencial teórico para posterior aplicação;
- c) Criação de programa para cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas modeladas com cascas de revolução e utilizando métodos numéricos não convencionais;
- d) Análise dos resultados obtidos.

Os resultados foram obtidos por rotinas computacionais construídas no software Matlab® e os resultados avaliados por meio de gráficos e tabelas, onde serão comparados valores de convergência, e erro relativo em relação as soluções de referência de cada problema proposto.

O fluxograma indicado na Figura 1 apresenta a sequência de atividades desenvolvidas neste trabalho. A seguinte sequência será considerada onde inicialmente será realizada uma revisão bibliográfica considerando os trabalhos já desenvolvidos na área e também a verificação de novas metodologias propostas. O segundo passo é a construção de um referencial teórico consistente com elaboração das equações e conceitos para cada método proposto.

Subsequentemente será elaborada programação em Matlab® de cada método numérico não convencional. Na etapa final são obtidos os resultados de cada metodologia e sua comparação de resultados para verificação de alguns pontos importantes como acuracidade dos resultados, custos computacionais, convergência de resultados, entre outros.

Figura 1 - Fluxograma de Trabalho



Fonte: Próprio Autor.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A análise estática, dinâmica e de vibrações de qualquer modelo estrutural é um processo, na maioria dos casos, de grande complexidade, envolvendo um grau elevado de conhecimento do profissional de engenharia. Devido também, a grande complexidade dos modelos matemáticos e métodos de análise via elementos finitos convencionais, existe um grande custo computacional para aproximação dos resultados.

O aprimoramento das ferramentas computacionais de análise estática e dinâmica, além de aprimorar aspectos de segurança, contribuem para uma redução de custos computacionais, ganhos econômicos nos projetos e também maior confiabilidade e similaridade com as condições reais de aplicação.

Dentre os métodos computacionais utilizados para verificações de cargas em regime transiente, podem ser citados o MEF convencional e os métodos numéricos não convencionais. O MEF convencional pode ser descrito como a discretização do modelo em diversas partes denominadas elementos. A conexão entre os elementos é realizada por meio de nós. A breve descrição anterior refere-se ao método mais usual atualmente, onde é necessária a construção de uma malha que pode apresentar condições variadas de refino, conforme as exigências de convergência dos resultados e complexidade geométrica do modelo.

Outros métodos de análise, os métodos numéricos não convencionais, desenvolvidos a partir do método de partição de unidade são empregados em modelos com domínios complexos, descontinuidades ou singularidades. Os métodos não convencionais permitem a construção de espaços de soluções globais a partir de soluções locais utilizando funções de enriquecimento nos espaços de aproximação, tendo como consequência o ganho em custos computacionais e a convergência dos modelos analisados.

2.1.MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DEGENERADOS

Em diversas situações, onde existem componentes estruturais com geometria muito complexa, torna-se imprescindível a geração de uma malha de elementos muito precisa e refinada, gerando grande custo computacional para atingir a convergência esperada e a confiabilidade dos resultados para o problema.

Tendo em vista a redução de custo computacional e o incremento da precisão dos resultados foram desenvolvidos alguns métodos alternativos em relação ao Método de Elementos Finitos (MEF) convencional. Dentre um desses métodos alternativos, pode-se citar

o MEFG, Método de Elementos Finitos Degenerados. De acordo com Garcia, Fancello e Mendonça (2009), métodos sem malha servem como alternativa para evitar perda de precisão nos resultados devido a distorções de malha e proporcionar maior flexibilidade para definição dos espaços de aproximação.

A proposta do MEFG é trabalhar com uma metodologia sem malha de elementos, eliminando diversos inconvenientes referentes a domínios de funções associados a uma malha de elementos finitos. De acordo com Liu (2010), o método sem malha é utilizado para construção de equações algébricas englobando o domínio de um determinado problema sem a total dependência de uma malha discretizada. Os estudos de métodos sem malha utilizam um conjunto de nós dispersos no domínio do problema, sem necessitar de conectividade entre elementos. Conforme Gu e Liu (2001), os métodos sem malha estão divididos em dois grandes grupos, os métodos baseados no domínio do problema e os métodos baseados nas condições de contorno essenciais do problema, ambos discretizados por uma nuvem de nós.

O MEFG teve sua ideia inicial implementada por Gingold e Maraghan (1977), baseado no método SPH (*Smooth Particle Hydrodynamics*), que consiste em um estudo para simulação de fluxo de fluidos sem malha (método Lagrangeano sem malha), onde as coordenadas locais movem-se juntamente com o fluido.

Posteriormente outros estudos do método sem malha foram publicados por Belystcho, Lu e Gu (1994) com *Element Free Galerkin Method*, Melenk e Babuska (1996) e Oden, Duarte e Zienkiewicz (1996) com base no conceito de partição de unidade (PU). O conceito PU é constituído pelo uso de funções de forma lineares, provenientes do MEF convencional, onde seus espaços de aproximação são gerados a partir de propriedades de Delta de Kronecker e parcialmente dependentes de uma malha. Dessa forma, não necessita de condições especiais impostas às condições de contorno essenciais.

Outros métodos, com dependência fraca em relação à uma malha de elementos finitos, foram criados por Belystcho, Lu e Gu (1994) com *Element Free Galerkin Method (EFGM)* e por Duarte e Oden (1995) em *Hp Clouds A-Meshless Methods to Solve Boundary Value Problems*. Nestes artigos a malha tem apenas a função de suporte para a quadratura numérica.

Em ambas metodologias, com dependência parcial ou fraca de uma malha de fundo, as funções utilizadas para enriquecimento são construídas diretamente no domínio real do problema.

Como principal vantagem a ser citada do MEFG em relação ao MEF, segundo Duarte, Babuska e Oden (2000), é a propriedade de produzir refinamentos *hp* com *h* e *p* de forma não uniforme e também a geração de subespaços de aproximações particulares, caso seja conhecida a

característica ou aplicação da solução do problema. Conforme Arndt (2009), este método permite a construção de espaços de solução no domínio global, provenientes de espaços de aproximação no domínio local, sem perdas de precisão em suas funções de aproximação. Com o intuito de promover maior acuracidade das funções de aproximação no GFEM, Babuska, Banerjee e Osborn (2002) realizaram um estudo de qual tipo de função de aproximação é mais efetiva em problemas unidimensionais.

A principal desvantagem dos métodos sem malha, conforme Suarez, Rossi, Suarez e Silva (2012), é a necessidade de implementação de métodos especiais para impor as condições de contorno ao modelo analisado, especialmente em modelos com baixa dependência de uma malha. Outro problema, também citado por Suarez, Rossi, Suarez e Silva (2012) é quando utilizado o enriquecimento dos espaços de aproximação. Esse tipo de enriquecimento pode ocasionar sistemas de equações mal condicionadas levando a não convergência do problema, principalmente tratando-se de enriquecimentos com funções de alta regularidade.

Em relação às aplicações de métodos sem malha podem ser citados diversos problemas de engenharia. Conforme Garcia, Fancello e Mendonça (2009), a metodologia sem malha é aplicada para problemas com singularidades, fenômenos de camada limite em fluidos, problemas de dinâmica explícita ou cargas de curta duração, danos e falhas microestruturais ocasionadas por mudanças de fase. Liew, Huang e Reddy (2003) trabalharam com o MEFG aplicado a placas laminadas em problemas de vibrações livres em placas compósitas moderadamente espessas utilizando o MLSAQ (*moving least squares differential quadrature*). Naderi e Baradaran (2013), trabalharam com placas finas em escala manométrica utilizando o MLS (*moving least squares*) tendo como *case* a verificação de placas grafeno em diferentes condições de contorno.

Neste trabalho, as funções de aproximação serão baseadas no método PU e enriquecidas com funções polinomiais quadráticas, considerando um domínio unidimensional.

2.2.MÉTODO H-FEM

Problemas de engenharia envolvendo autovalores e/ou autovetores são largamente utilizados em análises de componentes submetidos a carregamentos dinâmicos. Especialmente em problemas com necessidade de avaliação de modos elevados de frequências naturais, o método H-FEM apresenta boa convergibilidade e um baixo custo computacional em relação ao MEF convencional. Os espaços de aproximação para o método numérico não convencional H-FEM são construídos com funções de forma similares ao MEF convencional.

Conforme Suarez et al (2015), a classe de regularidade C^0 utilizada no método de elementos finitos convencional apresenta algumas limitações para convergência de problemas modos de frequências naturais muito elevados. Como alternativa para o problema com frequências naturais elevadas os autores propuseram a utilização de espaços de aproximação com funções polinomiais de alta ordem e alta regularidade, a partir da degeneração de funções de Hermite. Ainda conforme Suarez et al (2015), as funções de aproximação de alta ordem e alta regularidade são obtidas a partir de um tensor definido por funções Hermitianas definidas em 1D e posteriormente os espaços de aproximação são definidos em 2D via enriquecimento por partições de unidade do tipo Lipschitz.

O método H-FEM também foi empregado para auxílio de soluções de problemas para redução de ruído no sinal captado para medição de tensões de campo utilizando baseados na correlação de imagem digital. Conforme Barreto (2008), a correlação de imagem digital é uma técnica óptica desenvolvida para determinar campos de deslocamentos e deformações eliminando a necessidade de contato. O sistema consiste na captura de imagens da amostra antes e depois de submetido a esforços, processamento das imagens por meio de um algoritmo de correlação. A determinação dos parâmetros é realizada pela minimização de uma função de erro que associa a solução analítica com os dados obtidos experimentalmente. O estudo realizado por Zhao et al (2012), utiliza funções de Hermite para garantir a continuidade e a suavização dos dados obtidos e seu gradiente ao mesmo tempo. Estudos propostos por Sadati et al (2011) foram utilizados como base ao desenvolvimento realizado por Zhao et al (2012). O método proposto consiste na utilização de funções de aproximação com regularidade C^2 e a regularização proposta por Tikhonov e proporciona a utilização de elementos de Hermite não retangulares para possibilitar a avaliação de regiões específicas reduzindo variações no deslocamento e deformações de placas com furos.

Neste trabalho o H-FEM também é aproximado por funções de forma similares as utilizadas pelo método de elementos finitos convencional.

2.3. MÉTODO *STABLE* GFEM

O método numérico não convencional *Stable* GFEM é oriundo de uma melhoria implementada ao já comentado método MEFG no item 2.1. Conforme Gupta et al (2013), o método *Stable* GFEM se diferencia do MEFG convencional por utilizar algumas modificações

localizadas em funções de enriquecimento e no condicionamento da matriz de rigidez ele torna-se similar ao método de elementos finitos convencional.

Em seu estudo, Gupta et al (2013), realizaram um comparativo entre o MEFG e o SGFEM para problemas de fratura em 2D. Com a utilização do SGFEM e um conjunto específico de funções de enriquecimento foi possível incrementar a acuracidade dos resultados sem a modificação ou apresentar problemas com a matriz de rigidez do problema.

O mal condicionamento da matriz de rigidez e a perda de robustez do MEFG foi estudada por Babuska et al (2012), onde foram implementadas algumas modificações no MEFG, não sendo necessário um enriquecimento em todas as funções de aproximação e eliminando a utilização de funções rampa para problemas em elementos de interface.

Também utilizando o *Stable* GFEM, Gupta et al (2015), realizou estudos para fraturas mecânicas em 3D. O estudo consiste no melhoramento do condicionamento da matriz de rigidez do SGFEM. O tipo de enriquecimento utilizado trata-se de enriquecimentos singulares, ou seja, apenas em nós de elementos que são interceptados pelas bordas da trinca.

2.4. MÉTODO FEM B-SPLINE

Em contrapartida ao método de elementos finitos convencional, o método FEM *B-Spline* e os parâmetros de seu espaço são locais para determinados caminhos ao invés de elementos. Conforme Cottrell, Hughes e Bazilevs (2009), o mapeamento *B-Spline* consiste em um “caminho” abordando múltiplos elementos, sendo todo mapeamento global e não local a cada elemento.

Adicionalmente, no caso das *B-Splines*, as funções são polinômios por partes onde as “peças” diferentes se unem ao longo de linhas de nós infinitamente. Sendo assim, as funções são C^∞ dentro de um elemento, viabilizando a análise de domínios com um alto grau de complexidade, descritos por um único *spline* (ver Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005)).

Utilizando o método FEM *B-Spline*, Kolman, Plesek e Okrouhlik (2014), apresentaram resultados para análises em 1D para número de onda complexo de Fourier, para evitar a distorção e atenuação comumente encontrada no método de elementos finitos convencional. No artigo os autores utilizaram o método proposto por Thompson e Pinsky (1994) que utilizam a análise do número de onda derivada e utilizada para análise de dispersão de MEF de alta ordem, sendo a estratégia estruturada na decomposição discreta de Fourier e adicionalmente a eliminação de variáveis das equações de movimento na parte interna dos nós. Para minimização

dos erros de distorção, o refinamento incrementando os pontos de controle foram mais eficientes em relação à das *B-Splines* em seguimentos com continuidade C^0 .

Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005), realiza estudos de propriedades espectral de aproximação de elementos finitos e NURBS, investigando problemas modais e realizando uma comparação entre elementos finitos convencional e NURBS. O foco principal do estudo é a verificação da eficiência para aproximação de problemas de autovalores para diversos modos de frequência natural. Conforme os autores, os elementos finitos de ordem superior tem desempenho superior do que elementos finitos de baixa ordem para problemas elípticos e parabólicos, sendo são menos eficientes do que os elementos de baixa ordem em aplicações hiperbólicas e não-lineares. A situação é muito mais positiva para elementos NURBS em todos os casos.

3. MODELO DE PRIMEIRA ORDEM EM CASCAS DE REVOLUÇÃO

Neste capítulo é feito um estudo, sobre a ótica do Método de Elementos Finitos (MEF) convencional, dos problemas de placas e cascas de revolução sujeitas a carregamentos com simetria axial de forças. Nele são estabelecidos os fundamentos necessários para uma abordagem mais complexa, onde os espaços de aproximação serão construídos segundo abordagens não convencionais como MEFG, H-FEM e FEM -*Spline*.

Os modelos são construídos com teoria cinemática de Reissner-Mindlin (Reissner, 1945). O escopo de apresentação deste capítulo será realizado segundo os seguintes tópicos considerados indispensáveis para o desenvolvimento da abordagem teórica do tema:

- a) Características geométricas do elemento. Neste item são introduzidos elementos de geometria diferencial e a função de mapeamento para o elemento sólido degenerado.
- b) Construção do modelo cinemático de primeira ordem, para o elemento supracitado, descrito em coordenadas cilíndricas.
- c) Equações constitutivas para materiais homogêneos e isotrópicos com comportamento elástico linear.
- d) Formulação forte e formulação fraca, esta última obtida a partir do princípio dos trabalhos virtuais, para um problema de elasticidade tridimensional.
- e) Problema discretizado e equações de Bubnov-Galerkin.

Os itens supracitados constituem uma recopilção do conhecimento necessário para uma abordagem, utilizando elementos finitos convencionais, da problemática proposta. Procedimentos semelhantes podem ser vistos em Batoz e Dhatt (1992) e Zienkiewicz e Taylor (2005).

3.1. CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DO ELEMENTO

Por tratar-se de cascas de revolução a descrição geométrica é feita em coordenadas cilíndricas como indicado na Figura 2. A geometria é construída por interpolação de coordenadas de pontos sobre as arestas nodais sendo necessário para tal fim definir previamente:

- a) As bases ortonormais associadas aos nós do elemento;
- b) A interpolação de pontos na direção das arestas do elemento;

- c) A interpolação de pontos sobre uma superfície específica do elemento estabelecida a partir das cotas de pontos na direção das arestas.

Nesta seção serão abordados os seguintes tópicos: base pseudo-normal associada aos nós do elemento; função de mapeamento; base covariante associada a pontos no interior do elemento; elemento de arco; elemento de área e de volume.

3.1.1. Vetores Ortonormais aos Nós do Elemento

A base ortonormal associada a um nó k do elemento é estabelecida pelos vetores $[\mathbf{v}_{2k} : \mathbf{v}_{3k} : \mathbf{i}_\theta]$ com mostrado na Figura 2. Os vetores da base supracitada são obtidos a partir dos vetores \mathbf{v}_{3k} definidos a partir dos vetores posição dos pontos extremos das arestas do elemento e do vetor \mathbf{i}_θ normal ao plano de simetria radial como segue.

$$\mathbf{V}_{3k} = \mathbf{X}_k^s - \mathbf{X}_k^i \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_{3k} = \frac{\mathbf{V}_{3k}}{|\mathbf{V}_{3k}|} \quad (2)$$

O vetor \mathbf{V}_{3k} , é o vetor na direção da aresta, o mesmo tem norma igual ao comprimento t_k da aresta na direção do vetor unitário \mathbf{v}_{3k} , portanto pode ser definido como:

$$\mathbf{V}_{3k} = t_k \mathbf{v}_{3k} \quad (3)$$

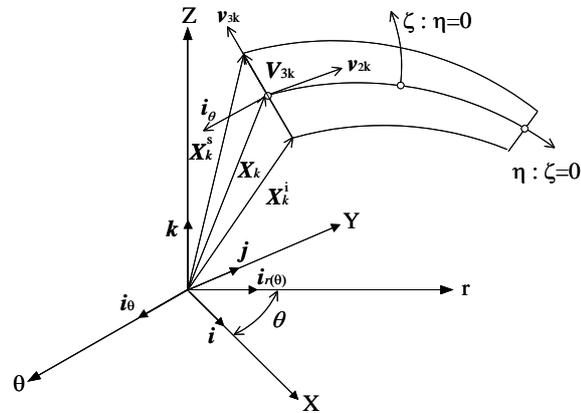
O vetor posição \mathbf{X}_k indicado na Figura 2, associado a pontos sobre a superfície média do elemento é definido pela Eq. (4).

$$\mathbf{X}_k = \frac{\mathbf{X}_k^s + \mathbf{X}_k^i}{2} \quad (4)$$

O vetor unitário \mathbf{v}_{2k} é obtido por produto vetorial do vetor \mathbf{v}_{3k} com o vetor \mathbf{i}_θ normal ao plano de simetria axial conforme a Eq. (5).

$$\mathbf{v}_{2k} = \mathbf{v}_{3k} \times \mathbf{i}_\theta \tag{5}$$

Figura 2 - Base global $[\mathbf{i}_r : \mathbf{k} : \mathbf{i}_\theta]$ e base local $[\mathbf{v}_{2k} : \mathbf{v}_{3k} : \mathbf{i}_\theta]$ do ponto X .



Fonte: Adaptado de Suarez e Proença (2005).

3.1.2. Função de Mapeamento

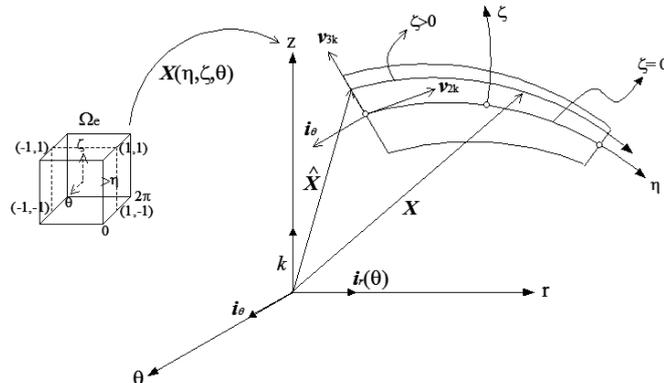
A função de mapeamento para interpolar pontos no interior do elemento é definida pela Eq. (6):

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\eta, \zeta, \theta), \mathbf{X} : \Omega_e \rightarrow R^3 \tag{6}$$

Na Eq. (6) Ω_e é o domínio natural do elemento mostrado na Figura 3, formado por todos os pontos que estão contidos no cubo intrínseco cujo domínio é estabelecido pela Eq. (7).

$$\Omega_e = \{\eta, \zeta, \theta \in \square \mid -1 \leq \eta \leq 1, -1 \leq \zeta \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \tag{7}$$

Figura 3 - Domínio intrínseco Ω_e e vetor posição $\mathbf{X}(\eta, \zeta)$.



Fonte: Adaptado de Suarez e Proença (2005).

A função mapeamento é obtida por uma interpolação linear na direção das arestas \mathbf{v}_{3k} e uma interpolação quadrática sobre a curva $\zeta = cte.$ como indicado a seguir:

Um ponto $\hat{\mathbf{X}}$, com ordenada ζ qualquer, sobre a aresta \mathbf{v}_{3k} é obtido por interpolação linear indicada na Figura 1 e definida pela Eq. (8).

$$\hat{\mathbf{X}}_k(\zeta) = \mathbf{X}_k^s N_s(\zeta) + \mathbf{X}_k^i N_i(\zeta) \quad (8)$$

Onde $N_s(\zeta) = \frac{1}{2}(1+\zeta)$ e $N_i(\zeta) = \frac{1}{2}(1-\zeta)$ são as funções Lagrangeanas de interpolação linear associadas aos pontos \mathbf{X}_k^s e \mathbf{X}_k^i indicados na Figura 3. A descrição destes pontos em coordenadas cilíndricas toma a forma:

$$\mathbf{X}_k^i = r_k^i \mathbf{i}_r + Z_k^i \mathbf{k} \quad (9)$$

$$\mathbf{X}_k^s = r_k^s \mathbf{i}_r + Z_k^s \mathbf{k} \quad (10)$$

A expressão (8) pode ser escrita de forma mais conveniente como indicado a seguir:

$$\hat{\mathbf{X}}_k(\zeta) = \frac{1}{2}(1-\zeta) \mathbf{X}_k^i + \frac{1}{2}(1+\zeta) \mathbf{X}_k^s \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_k(\zeta) = \frac{1}{2}(\mathbf{X}_k^i + \mathbf{X}_k^s) + \frac{1}{2}(\mathbf{X}_k^i - \mathbf{X}_k^s)\zeta \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_k(\zeta) = \mathbf{X}_k + \mathbf{v}_{3k} \frac{t_k}{2} \zeta \quad (13)$$

Um ponto $\mathbf{X}(\eta, \zeta)$, no interior do elemento, conforme mostrado na Figura 2, é obtido por interpolação dos valores $\hat{\mathbf{X}}_k(\zeta)$ correspondentes a cada aresta do elemento como indicado na Eq. (14).

$$\mathbf{X}(\eta, \zeta) = \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \hat{\mathbf{X}}_k(\zeta). \quad (14)$$

Na expressão (14) n corresponde ao número de nós do elemento e $N_k(\eta)$ as funções quadráticas Lagrangeanas associadas aos nós k do elemento dadas pelas expressões:

$$N_1(\eta) = -\frac{1}{2}\eta(1-\eta) \quad (15)$$

$$N_2(\eta) = 2(1-\eta^2) \quad (16)$$

$$N_3(\eta) = \frac{1}{2}\eta(1+\eta) \quad (17)$$

A descrição de \mathbf{X} em coordenadas cilíndricas é estabelecida pela Eq. (18).

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\eta, \zeta) = & \left[\sum_{k=1}^n N_k(\eta) r_k + \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{3k}^r \right] \mathbf{i}_r \\ & + \left[\sum_{k=1}^n N_k(\eta) Z_k + \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{3k}^z \right] \mathbf{k} \end{aligned} \quad (18)$$

3.1.3. Bases Covariantes e Ortonormais

A base covariante definida na Eq. (19) não é necessariamente uma base ortonormal já que seus vetores são tangentes às curvas de Gauss (η, ζ) . Os vetores desta base são obtidos a partir da função de mapeamento da geometria conforme descrito nas Eq. (20)-(22).

$$[\mathbf{F}_\zeta] = [\mathbf{a}_1 : \mathbf{a}_2 : \mathbf{a}_3] \quad (19)$$

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} = r(\eta, \zeta)_{,\eta} \mathbf{i}_r + Z_k(\eta, \zeta)_{,\eta} \mathbf{k} \quad (20)$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta} = r(\eta, \zeta)_{,\zeta} \mathbf{i}_r + Z(\eta, \zeta)_{,\zeta} \mathbf{k} \quad (21)$$

$$\mathbf{a}_3 = r(\eta, \zeta) \mathbf{i}_\theta \quad (22)$$

Descrevendo explicitamente as Eq. (20)-(22) se obtém:

$$\mathbf{a}_1 = \left[\sum_{k=1}^n N_k(\eta) r_k + \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{3k}^r \right] \mathbf{i}_r$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^n N(\eta, \zeta) Z_k + \sum_{k=1}^n N(\eta, \zeta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{3k}^z \right] \mathbf{k} \quad (23)$$

$$\mathbf{a}_2 = \left[\sum_{k=1}^n N_k(\eta) \frac{t_k}{2} v_{3k}^r \right] \mathbf{i}_r(\theta) + \left[\sum_{k=1}^n N_k(\eta) \frac{t_k}{2} v_{3k}^z \right] \mathbf{k} \quad (24)$$

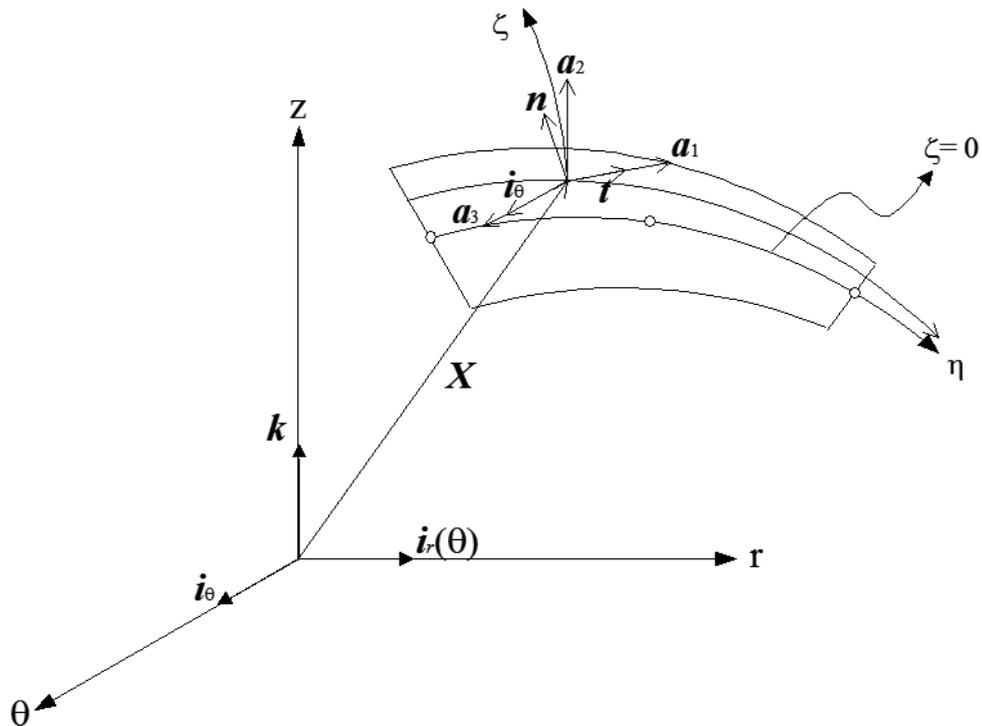
$$\mathbf{a}_3 = \left[\sum_{k=1}^n N_k(\eta) r_k + \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{3k}^r \right] \mathbf{i}_\theta \quad (25)$$

A base ortonormal $[\mathcal{Q}]_X = [\mathbf{t} : \mathbf{n} : \mathbf{i}_\theta]$ no ponto X é obtida a partir dos vetores da base covariante como segue:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} \quad (26)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}_\theta \times \mathbf{t} \quad (27)$$

Figura 4 - Base covariante $[\mathbf{a}_1 : \mathbf{a}_2 : \mathbf{a}_3]$ e base ortonormal $[\mathbf{t} : \mathbf{n} : \mathbf{i}_\theta]$ no ponto X



Fonte: Adaptado de Suarez e Proença (2005).

3.1.4. Elementos de Arco

Os elementos de arco podem ser obtidos por meio de particularizações da primeira forma fundamental da superfície. O elemento de arco correspondente a uma fibra $d\mathbf{X}$ (Figura 5) da superfície é definido como:

$$ds = (d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X})^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

$$d\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} d\theta \quad (29)$$

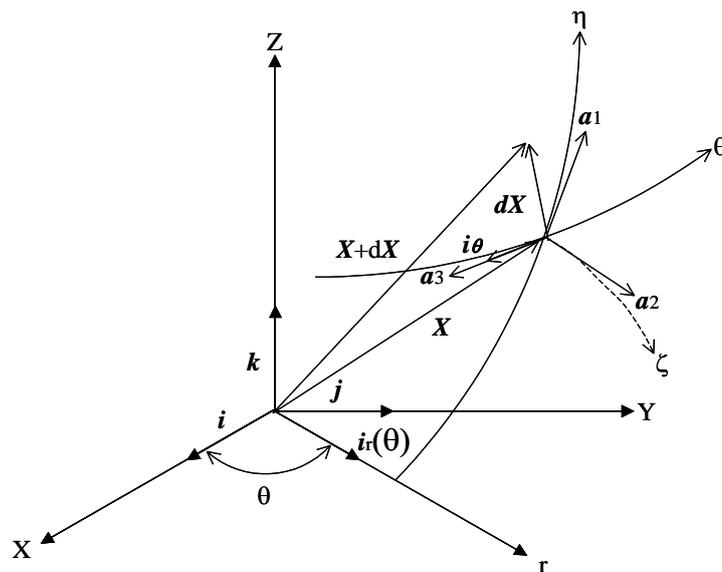
A expressão (29) ainda pode ser escrita em função da base covariante como na Eq. (30):

$$d\mathbf{X} = \mathbf{a}_1 d\eta + \mathbf{a}_2 d\zeta + \mathbf{a}_3 d\theta \quad (30)$$

Por definição a primeira forma fundamental da superfície corresponde ao produto interno descrito na Eq. (31):

$$ds^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (31)$$

Figura 5 - Elemento de área e elemento de volume.



Fonte: Adaptado de Suarez e Proença (2005).

Abrindo a Eq. (31) se obtém:

$$ds^2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 d\eta^2 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 d\zeta^2 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 d\theta^2 + 2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 d\eta d\zeta + 2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 d\eta d\theta + 2\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 d\zeta d\theta \quad (32)$$

Simplificando a expressão (32) já que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_3$ e $\mathbf{a}_2 \perp \mathbf{a}_3$ chega-se a:

$$ds^2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 d\eta^2 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 d\zeta^2 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 d\theta^2 + 2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 d\eta d\zeta \quad (33)$$

Para um elemento de arco sobre a curva $\zeta = cte$ e $\theta = cte$. se tem:

$$ds_\eta = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1)^{\frac{1}{2}} d\eta \quad (34)$$

Para percorrer a curva $\eta = cte$. e $\theta = cte$. o elemento de arco corresponde à ds_ζ é definido por:

$$ds_\zeta = (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2)^{\frac{1}{2}} d\zeta \quad (35)$$

De forma análoga pode-se obter elementos com componentes em duas ou nas três direções da base covariante.

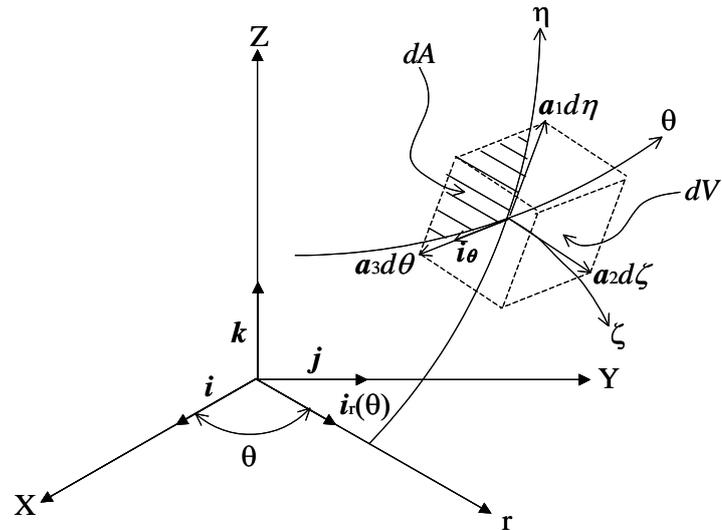
3.1.5. Elemento de Área de Volume

Por definição os elementos diferenciais de área e de volume são dados pelos produtos vetoriais e produto misto dos vetores $\mathbf{a}_1 d\eta$, $\mathbf{a}_2 d\zeta$ e $\mathbf{a}_3 d\theta$, indicados na Figura 6.

Por exemplo, o módulo do elemento de área indicado na Figura 6, e definido por:

$$dA = |\mathbf{a}_1 d\eta \times \mathbf{a}_3 d\theta| = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3| d\eta d\theta \quad (36)$$

Figura 6 - Elemento de área e elemento de volume



Fonte: Adaptado de Suarez e Proença (2005).

Descrevendo a Eq. (36) de forma explícita se obtém:

$$dA = \sqrt{\left(\frac{\partial r(\eta, \zeta)}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z(\eta, \zeta)}{\partial \eta}\right)^2} r(\eta, \zeta) d\eta d\theta \quad (36)$$

O elemento de volume indicado na Figura 6 é obtido por produto misto de vetores como descrito na Eq. (37).

$$dV = (\mathbf{a}_1 d\eta \times \mathbf{a}_2 d\zeta) \cdot \mathbf{a}_3 d\theta = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3 d\eta d\zeta d\theta \quad (37)$$

A forma explícita do elemento de volume é estabelecida pela Eq. (38),

$$dV = \left(\frac{\partial r(\eta, \zeta)}{\partial \eta} \frac{\partial Z(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial r(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial Z(\eta, \zeta)}{\partial \eta} \right) r(\eta, \zeta) d\eta d\zeta d\theta \quad (38)$$

Os aspectos da geometria abordados são referentes a qualquer sólido de revolução independentemente do problema, ser ou não, de simetria axial.

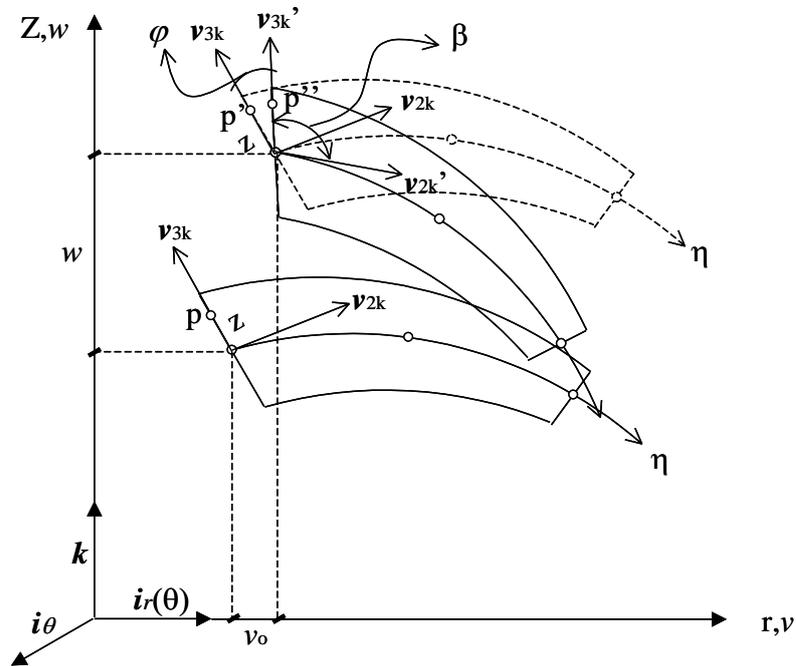
Na próxima subseção será abordada a teoria cinemática de primeira ordem de Reissner-Mindlin que admite deformação cisalhante. Esta teoria foi utilizada para modelar a cinemática no elemento sólido degenerado de Ahmad, Irons e Zienkiewics (1970) na sua versão genérica

e foi posteriormente adaptada em Batoz e Dhat (1992) para modelar cascas sujeitas a simetria radial de forças.

3.2. MODELO CINEMÁTICO DE PRIMEIRA ORDEM (REISSNER-MINDLIN)

O modelo cinemático apresentado nesta seção é o de *Reissner-Mindlin* em primeira ordem com a cinemática descrita em coordenadas cilíndricas. A hipótese cinemática deste modelo consiste em atribuir um comportamento linear dos deslocamentos de membrana e constante para o deslocamento normal à superfície de referência. Este modelo faz parte dos modelos que levam em consideração a deformação cisalhante com é mostrado na Figura 7 onde os vetores $v_{3k'}$ e $v_{2k'}$ não permanecem mais perpendiculares entre si após as rotações sofridas pela seção. Os deslocamentos no interior do elemento para uma coordenada paramétrica ζ específica é obtida por interpolação dos deslocamentos das arestas do elemento indicada pela Eq. (39) como segue.

Figura 7 - Esquema cinemático para o modelo de 1ª ordem



Fonte: Adaptado de Suarez e Proença (2005).

$$\hat{u}_k(\zeta) = \hat{u}_{ok} + \frac{t_k}{2} \zeta \varphi_k v_{2kG} \quad (39)$$

Na Eq. (41), v_{2kG} é o vetor da base ortogonal correspondente ao nó k do elemento em coordenadas globais. O vetor em coordenadas globais é descrito em função do vetor v_{2k} em coordenadas locais através da Eq. (40).

$$\mathbf{v}_{2kG} = [\mathcal{Q}_k] \mathbf{v}_{2k} \quad (40)$$

Na Eq. (40) $[\mathcal{Q}_k]$ é matriz de rotação, descrita na Eq. (41).

$$[\mathcal{Q}_k] = \begin{bmatrix} v_{2k}^r & v_{3k}^r \\ v_{2k}^z & v_{3k}^z \end{bmatrix} \quad (41)$$

Substituindo a Eq. (41) na Eq. (39) se obtém a cinemática segundo o modelo de primeira ordem para um ponto sobre a aresta do k correspondente a uma coordenada ζ definida pela equação vetorial Eq. (42) no plano de simetria radial.

$$\hat{\mathbf{u}}_k(\zeta) = \begin{Bmatrix} v_k \\ w_k \end{Bmatrix} + \varphi_k \frac{t_k}{2} \zeta \begin{Bmatrix} v_{2k}^r \\ v_{2k}^z \end{Bmatrix} \quad (42)$$

O deslocamento no interior do elemento no ponto definido pelo vetor posição $\mathbf{X}(\eta, \zeta)$ é obtido por interpolação dos deslocamentos $\hat{\mathbf{u}}_k(\zeta)$ das arestas conforme descrito pela Eq. (43).

$$\mathbf{u}(\eta, \zeta) = \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \hat{\mathbf{u}}_k(\zeta) \quad (43)$$

Descrevendo a Eq. (43), em forma explícita se obtém:

$$\mathbf{u}(\eta, \zeta) = \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \begin{Bmatrix} v_k \\ w_k \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta \varphi_k \begin{Bmatrix} v_{2k}^r \\ v_{2k}^z \end{Bmatrix} \quad (44)$$

Nas Eqs. (43) e (44), $N_k(\eta)$ são as funções de forma Lagrangeanas do elemento utilizado sendo a ordem polinomial do mesmo definida por $p = n - 1$ onde n é o número de nós do elemento.

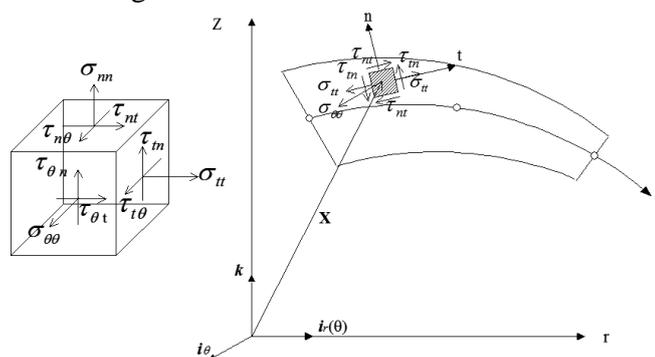
As Eqs. (43) e (44) descrevem as relações cinemáticas, em coordenadas cilíndricas, utilizadas pelo modelo de primeira ordem que considera a deformação cisalhante, também conhecida na literatura técnico científico da área com FSDT (*First shear deformation theory*). Esta teoria embora seja mais adequada para modelar problemas de placas e cascas com relações dentro do intervalo $100 \geq L/t \geq 10$ considera as deformações e tensões cisalhantes ao longo da espessura constantes o que constitui uma inconsistência física da mesma.

3.3.EQUAÇÃO CONSTITUTIVA PARA O PROBLEMA DE SIMETRIA RADIAL

As equações constitutivas estabelecidas nesta seção referem-se a materiais homogêneos, elásticos lineares e isotrópicos. A determinação da equação constitutiva é obtida a partir das restrições de axissimetria e considerações dos modelos cinemáticos de primeira ordem (Reissner-Midlin) que consideram a deformação cisalhante. Com relação as hipóteses do modelo não são consideradas deformações das fibras normais à superfície de referência, portanto $\sigma_{nn} = 0$ (Figura 8). As restrição de deslocamento nulo na direção i_θ juntamente com as propriedades de isotropia do material tornam as tensões cisalhantes sobre a face perpendicular a i_θ também nulas. Portanto, para os problemas com simetria radial de forças, se tem as seguintes restrições nas componentes de tensões indicadas na Eq. (45).

$$\sigma_{nn} = \tau_{\theta n} = \tau_{\theta t} = 0 \quad (45)$$

Figura 8 - Tensor tri-axial de tensões



Fonte: Adaptado de Suarez e Proença (2005).

A matriz constitutiva para este modelo é obtida a partir das restrições descrita na Eq. (45) aplicadas sobre a matriz correspondente ao estado tri-axial da Eq. (46) resultando na relação definida pela Eq. (47).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nn} \\ \tau_{nt} \\ \tau_{n\theta} \\ \tau_{\theta t} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{tt} \\ \varepsilon_{nn} \\ \gamma_{nt} \\ \gamma_{n\theta} \\ \gamma_{\theta t} \end{Bmatrix} \quad (46)$$

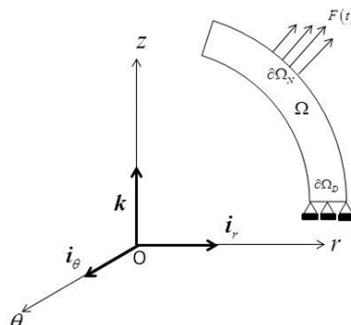
$$\begin{Bmatrix} \sigma_{tt} \\ \tau_{nn} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu \\ & \frac{\kappa(1-\nu)}{2} & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{tt} \\ \gamma_{nn} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \end{Bmatrix} \quad (47)$$

Na equação (47), $\kappa = \frac{5}{6}$ é o coeficiente de correção de cisalhamento de *Reissner*.

3.4.FORMULAÇÃO FRACA DO PROBLEMA DINÂMICO

O problema a ser modelado é de elasticidade tridimensional com restrições nos deslocamentos e nas tensões. O enunciado do problema forte fica definido pelas equações de equilíbrio dinâmico estabelecidas para o sólido de revolução com sua seção no plano de simetria radial indicado na Figura 9.

Figura 9 - Carregamento e condições de contorno essenciais num plano de simetria radial



A formulação forte descrita em função de tensões consiste em determinar o vetor $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in Kin^*$ tal que:

$$div\boldsymbol{\sigma} + \rho\ddot{\mathbf{u}} = 0, \mathbf{x} \in \Omega \quad (48)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}(t), \mathbf{x} \in \partial\Omega_N \quad (49)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{x} \in \partial\Omega_D \quad (50)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_o, \mathbf{x} \in \Omega, t = 0 \quad (\text{a}) \quad (51)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_t, \mathbf{x} \in \Omega, t = 0 \quad (\text{b})$$

O conjunto Kin^* que contém a solução é chamado cinematicamente admissível e é definido pela Eq. (52).

$$Kin^* = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in C^2(\bar{\Omega}) \times [0, t] / \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ em } \partial\Omega_D \right\} \quad (52)$$

Aplicando o método dos resíduos ponderados Galerkin, considerando as funções testes variado apenas no domínio geométrico do problema se obtém o seguinte enunciado para o problema em questão.

Determinar $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) \in \delta_h$ de forma que:

$$\int_{\Omega} R(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{v} d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in Var \quad (53)$$

Na Eq. (53) $R(\mathbf{u}_h)$ é o resíduo descrito na Eq. (54).

$$R(\mathbf{u}_h) = div\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \rho\ddot{\mathbf{u}}_h \quad (54)$$

O conjunto δ_h neste caso é um espaço vetorial definido pela Eq. (55) chamado de conjunto de funções tentativas.

$$\delta_h = \{ \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) \in H^1(\Omega) \times [0, t] / \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \text{ em } \partial\Omega_D \} \quad (55)$$

O espaço vetorial Var_h é denominado espaço das funções testes. O mesmo é definido como:

$$Var_h = \{ \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \in H^1(\overline{\Omega}), \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega_D \} \quad (56)$$

No método de resíduos ponderados (Galerkin) os espaços δ_h e Var_h tem dimensão finita.

A condição de ortogonalidade do resíduo e descrita de forma explícita pela Eq. (57):

$$\int_{\Omega} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v}_h d\Omega + \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in Var_h \quad (57)$$

Aplicando integração por partes na primeira integral da Eq. (57), se tem duas situações relativas a forma de imposição das condições de contorno essenciais;

- a) As condições de contorno são impostas de forma direta como ocorre nos problemas abordados por MEEG e H-FEM. Neste caso a formulação fraca é descrita na Eq. (58).

$$\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_h \partial d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_h d\Omega + \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in Var_h \quad (58)$$

- b) As condições de contorno são impostas de forma fraca como indicado na Eq. (59) como é o caso proposto quando as funções de aproximação não possuem a propriedade delta de Kronecker.

$$\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_h \partial d\Omega + \int_{\partial\Omega_D} \alpha(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_h d\Omega + \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in Var_h \quad (59)$$

As Eq. (58) e (59) podem ser descritas em função das relações constitutivas considerando o material homogêneo e com resposta elástico linear conforme indicado nas Eq. (60) e na Eq. (61) respectivamente.

$$\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_h \partial d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}_h) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in Var_{r_h} \quad (61)$$

$$\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_h \partial d\Omega + \int_{\partial\Omega_D} \alpha(\mathbf{u}_h - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v}_h d\partial\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}_h) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in Var_{r_h} \quad (62)$$

Nas equações (61) e (62), $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)$ e \mathbf{D} são os vetores de deformação correspondentes aos deslocamentos relacionados às funções teste, aos deslocamentos relativos às funções tentativas e o tensor constitutivo para materiais em regime elástico linear. As equações (61) e (62) representam a formulação variacional para o problema dinâmico em regime elástico linear. Um problema decorrente do problema de vibrações forçadas descrito na Eq. (48) é o problema de autovalores e auto vetores ou o também conhecido como problema de vibrações livres. O problema de vibrações livres é obtido, para modos harmônicos, a partir do problema de vibrações forçadas descritos pelas Eq. (48) desconsiderando a força de excitação. Neste caso a solução do deslocamento é descrita por um produto de funções como indicado na Eq. (63).

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \quad (63)$$

Substituindo a Eq. (63) na Eq. (48) se obtém o problema de autovalores e auto vetores independentes do tempo para o problema do sólido elástico formulado como:

Determinar $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in Kin$ tal que:

$$div(\boldsymbol{\sigma}) - \omega^2 \rho \mathbf{u} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (64)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_D \quad (65)$$

O conjunto de das soluções cinematicamente admissíveis neste caso independe do tempo e é estabelecido pela Eq. (66).

$$Kin = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in C^2(\bar{\Omega}), \mathbf{u} = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega_D \right\} \quad (66)$$

Na Eq. (64), ω é a frequência natural do sistema onde o autovalor associado a esta frequência é dado por $\lambda = \omega^2$.

A formulação fraca é obtida pelo método de resíduos ponderados Galerkin de forma similar ao problema dinâmico de vibração forçada. Neste caso como o espaço das funções tentes é o mesmo e o problema passam a ser descrito como determinar $\tilde{\mathbf{u}}_h \in \delta_h$ tal que:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\tilde{\mathbf{u}}_h) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \rho \tilde{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in Var_h \quad (67)$$

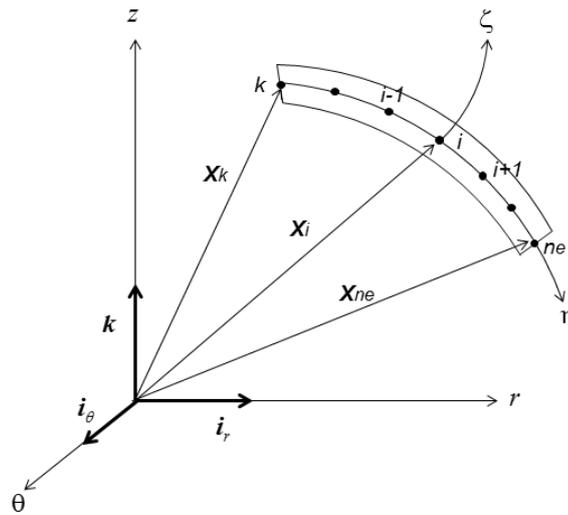
Para o problema de frequências naturais o espaço de funções tentativas é descrito pela Eq. (68) com condições de fronteira homogêneas como segue.

$$\delta_h = \left\{ \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \in H^1(\bar{\Omega}), \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \partial\Omega_D \right\} \quad (68)$$

A partir das formulações fracas serão descritas na próxima seção as formulações discretas para um elemento sólido degenerado aplicado a cascas de revolução.

3.5. PROBLEMA DISCRETIZADO PARA O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DE GALERKIN

O problema discretizado será descrito, segundo a metodologia do Método de Elementos Finitos Galerkin (MEF) para um elemento unidimensional com n_e funções de interpolação como mostrado na Figura 10. As equações de Bubnov-Galerkin aplicadas a um elemento passam a ser definidas como determinar $\mathbf{u}_{eh}(\eta, \zeta) \in \delta_h$ e $\mathbf{v}_{eh}(\eta, \zeta) \in Var_h$ definidas na sua forma discreta para o elemento pelas equações (69) e (70).

Figura 10 - Elemento Lagrangeano de ordem $p = n_e - 1$ 

Fonte: Próprio Autor

$$\mathbf{u}_{eh}(\eta, \zeta) = \mathbf{N}(\eta, \zeta) \mathbf{U}_e \quad (69)$$

$$\mathbf{v}_{eh}(\eta, \zeta) = \mathbf{N}_e(\eta, \zeta) \mathbf{U}_e \quad (70)$$

Nas Eq. (69) e (70) \mathbf{U}_e é o vetor de parâmetros de deslocamentos correspondente ao elemento descrito na Eq. (71).

$$\mathbf{U}_e^T = \{\dots \quad v_k \quad w_k \quad \varphi_k \quad \dots\} \quad (71)$$

A formulação explícita da Eq. (69) é apresentada na Eq. (72).

$$\mathbf{u}(\eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \dots & N_k(\eta) & 0 & N_k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{2k}^r & \dots \\ \dots & 0 & N_k(\eta) & N_k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{2k}^z & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ v_k \\ w_k \\ \varphi_k \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad k = 1, \dots, n \quad (72)$$

Na Eq. (72) $N_k(\eta)$ são as funções de forma que dependem da ordem do elemento.

3.5.1. Vetor de Deformações no Sistema Local de Coordenadas

Para o problema de pequenas deformações o tensor de Green no sistema local de coordenadas é obtido por operações de transformação do gradiente de deslocamento descrito no sistema global de coordenadas e com as funções de interpolação descritas no domínio natural do elemento como descrita na Eq. (73) para um valor fixo de n .

$$\nabla_{\xi} \mathbf{u}_e^n = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial \eta} & \frac{\partial V}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial W}{\partial \eta} & \frac{\partial W}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (73)$$

O tensor (73) pode ser escrito, em forma vetorial, como a transformação linear de um operador de diferenciação $\partial_{\xi}(\cdot)$ atuando sobre o vetor campo de deslocamento, de forma que:

$$\tilde{\nabla}_{\xi} \mathbf{u}_e = \partial_{\xi} \mathbf{u}_e. \quad (74)$$

Na Eq. (74) se tem:

$$\tilde{\nabla}_{\xi} \mathbf{u}_e^T = \left\{ \frac{\partial V}{\partial \eta} \quad \frac{\partial V}{\zeta} \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right\} \quad (75)$$

Onde:

$$\mathbf{u}_e^T = \{V \quad W\} \quad (76)$$

Na Eq. (74) o operador $\partial_{\xi}(\cdot)$ tem a forma:

$$\partial_{\xi}(\cdot)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial \zeta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (77)$$

O vetor das componentes do gradiente $\nabla_{\xi} \mathbf{u}_{eh}$ na forma discretizada é descrito na Eq. (78).

$$\nabla_{\xi} \mathbf{u}_e = \partial_{\xi} \mathbf{N}_e \mathbf{U}_e \quad (78)$$

A formulação explícita da Eq. (78) descrita na Eq. (79).

$$\nabla_{\xi} \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} \cdots & N_{k,\eta}(\eta) & 0 & N_{k,\eta}(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{2r}^k & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & N_k(\eta) \frac{t_k}{2} v_{2r}^k & \cdots \\ \cdots & 0 & N_{k,\eta}(\eta) & N_{k,\eta}(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{2z}^k & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & N_k(\eta) \frac{t_k}{2} v_{2z}^k & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ v_k \\ w_k \\ \varphi_k \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (79)$$

A partir das definições para as formulações discretas das componentes de deslocamento (Eq. (69) e (70)) em pontos do elemento assim como o seu gradiente do deslocamento (Eq. (79)) pode-se definir o vetor de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}_l$ no sistema local de coordenadas de cada ponto de integração por meio da Eq. (80).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l = \mathbf{H} \left(\mathbf{H}_{ev} \mathbf{R} \mathbf{J} \partial_{\xi} \mathbf{N}_e + \mathbf{N}_{ev} \right) \mathbf{U}_e \quad (80)$$

Na Eq. (80) \mathbf{J} , \mathbf{R} e \mathbf{H}_{ev} são o operador jacobiano o operador de rotação e a matriz booleana de transformação descritas nas Eq. (81) e (82).

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} t_r \mathbf{Q}_X^T & t_z \mathbf{Q}_X^T \\ n_r \mathbf{Q}_X^T & n_z \mathbf{Q}_X^T \end{bmatrix} \quad (82)$$

Na Eq. (82), \mathbf{Q}_x é a matriz de rotação correspondente ao sistema local de coordenadas de cada ponto de integração.

$$\mathbf{H}_{ev} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

O operador \mathbf{H}_{ev} é definido por uma matriz booleana utilizada para incorporar a parcela do vetor de deformações ε_θ . Os operadores \mathbf{N}_{ev} , e \mathbf{H} definidos nas equações. (84) e (85) estão relacionados a parcela de deformação normal ε_θ é ao operador booleano utilizado para obter o vetor de deformações ε_l .

$$\mathbf{N}_{ev} = \begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & N_k(\eta)\frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{r}N_k(\eta)\frac{t_k}{2}\zeta v_{2k}^r & \dots \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (85)$$

O vetor de deformações da Eq. (79) pode ainda ser descrito por meio da matriz de deformações conforme indicado nas equações (86) e (87).

$$\varepsilon_l = \mathbf{B}_e \mathbf{U}_e \quad (86)$$

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{H} \left(\mathbf{H}_{ev} \mathbf{R} \mathbf{J} \partial_\xi \mathbf{N}_e + \mathbf{N}_{ev} \right) \quad (87)$$

O desenvolvimento das equações discretizadas para o campo de deslocamento e deformações desenvolvidas nesta seção servem como base para o equacionamento da formulação semi-discreta do problema de vibrações não amortecido abordado segundo o Método de Elementos Finitos na próxima seção.

3.5.2. Formulação Semi-discreta para o Problema de Vibração Forçada segundo MEF

A formulação semi-discreta é obtida utilizando o método de Bubnov-Galerkin para discretizar o domínio do geométrico do problema ficando os parâmetros de deslocamento em função do tempo. Esta formulação é obtida substituindo as equações do campo de deslocamento e deformações definidas nas equações (69), (70) e (86) juntamente com as relações constitutivas definidas pela Eq. (47) nas formulações variacionais do problema dinâmico descrita pela Eq. (58).

A formulação semi-discreta para um elemento sólido degenerado é descrita pela Eq. (88) como segue.

$$\mathbf{V}_e^T \left(\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{N}_e^T \mathbf{F} d\partial\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e d\Omega \mathbf{U}_e(t) + \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e d\Omega \ddot{\mathbf{U}}_e(t) \right) = 0, \quad \forall \mathbf{V}_e \in \mathbb{R}^{3N} \quad (88)$$

Da Eq. (88) se tem que se a mesma é válida para qualquer vetor \mathbf{V}_e então:

$$\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{N}_e^T \mathbf{p} d\partial\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e d\Omega \mathbf{U}_e(t) + \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e d\Omega \ddot{\mathbf{U}}_e(t) = 0 \quad (89)$$

A Eq. (89) descreve a formulação discreta em nível do elemento para o problema de vibração forçada não amortecida. A mesma pode ser apresentada em forma matricial como descrita pela Eq. (90).

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{U}}_e(t) + \mathbf{K}_e \mathbf{U}_e(t) = \mathbf{F}_e(t) \quad (90)$$

Nesta equação (90) se tem as seguintes expressões para a matriz de rigidez \mathbf{K}_e , matriz de massa consistente \mathbf{M}_e e para o vetor de forças consistentes $\mathbf{F}_e(t)$ correspondentes a um elemento.

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e d\Omega \quad (91)$$

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e d\Omega \quad (92)$$

$$\mathbf{F}_e(t) = \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{N}_e^T \mathbf{p}(t) d\partial\Omega \quad (93)$$

Os tópicos estudados neste capítulo constituem a base para introduzir as formulações deste problema segundo os chamados métodos numéricos não convencionais, para construir os espaços de aproximação como: o Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG), FEM B-Spline e H-FEM (Elementos Finitos de Hermite) cujos fundamentos matemáticos são abordados nos capítulos sete e oito deste documento.

4. ESPAÇOS DE APROXIMAÇÃO NO MEFG

Neste capítulo são apresentados os fundamentos matemáticos do MEFG através dos teoremas que garantem a convergência dos espaços construídos com esta metodologia. Por se tratar de uma das metodologias denominadas como métodos de partição de unidade, inicia-se este capítulo definido matematicamente a partição de unidade juntamente com os teoremas que a consolidam.

4.1. PARTIÇÃO DE UNIDADE

Sendo $\Omega \subset R^n$ um domínio aberto e limitado. O conjunto de funções $\{\phi_\alpha(\mathbf{X})\}_\alpha^N$, onde, $\alpha \in \mathfrak{I} = \{\alpha \in R^+ \mid N \leq +\infty\}$ tal que $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{\alpha=1}^N \omega_\alpha$ constitui uma partição de unidade com suporte limitado por uma cobertura aberta $\{\omega_\alpha\}_\alpha^N$ do domínio Ω se:

$$\text{a) } \phi_\alpha(\mathbf{X}) \in C_0^\infty(\omega_\alpha), \alpha \in \mathfrak{I} ; \quad (94)$$

$$\text{b) } \phi_\alpha(\mathbf{X}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega \quad ; \quad (95)$$

$$\text{c) } \sum_{\alpha=1}^N \phi_\alpha(\mathbf{X}) = 1; \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega \quad ; \quad (96)$$

d) Todo subconjunto compacto de Ω intercepta um número finito de suportes ω_α .

O conjunto de funções ϕ_α com as propriedades supracitadas constituem uma partição de unidade com sinal cuja definição matemática é descrita no *Teorema* (3.1).

Teorema 3.1: Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado tal que $\bar{\Omega} = \bigcup_{\alpha=1}^N \omega_\alpha$ para $\alpha \in \mathfrak{S}$.

Então existem funções $\phi_\alpha(\mathbf{X}) \in C_o^\infty(\omega_\alpha)$, $\alpha \in \mathfrak{S}$ tal que $\sum_{\alpha=1}^N \phi_\alpha(\mathbf{X}) = 1$, e $\phi_\alpha(\mathbf{X}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$.

Além disto, se $N = \infty$ com Ω^* compacto e $\Omega^* \subset \Omega$, então Ω^* intercepta um número finito de suportes ω_α . Os detalhes da prova deste teorema são apresentados em Oden e Reddy (1981). Uma característica das PU com sinal é a de que não apresentam cardinalidade fixa, ou seja, em princípio não há limite no número de funções que cobrem um ponto do domínio geométrico do problema. Por outro lado, se tem as partições de unidade do tipo *Lipschitz* que tem cardinalidade fixa e cujas propriedades são apresentadas a seguir.

4.1.1. Partições de Unidade do Tipo Lipschitz

As funções das partições de unidade Lipschitz são do tipo $\phi_\alpha \in H^1(\bar{\omega}_\alpha)$ e satisfazem as seguintes propriedades:

$$\text{a) } \text{supp } \phi_\alpha \in \bar{\omega}_\alpha \quad (97)$$

$$\text{b) } \sum_{\alpha=1}^N \phi_\alpha = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (98)$$

$$\text{c) } \|\phi_\alpha\|_{L^\infty(\square^n)} \leq C_\infty \quad (99)$$

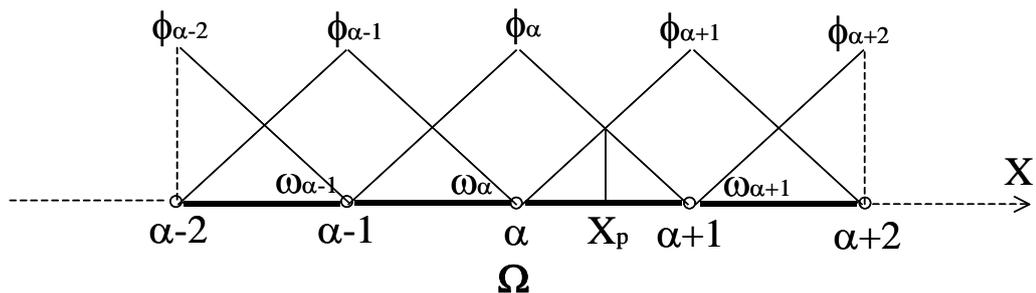
$$\text{d) } \|\nabla \phi_\alpha\|_{L^\infty(\square^n)} \leq \frac{C_G}{\text{diam}(\omega_\alpha)} \quad (100)$$

Nas equações (97) e (98) C_∞ e C_G são constantes independentes de ϕ_α .

As partições de unidade do tipo Lipchitz podem também ser definidas pela expressão (M, C_∞, C_G) , onde C_∞ e C_G são constantes finitas que limitam o valor das funções e de seus gradientes e o número natural M denominado cardinalidade que define um limite para o total de subdomínios ω_α que cobrem um ponto $\mathbf{X} \in \Omega$. Entenda-se cardinalidade o número máximo de subdomínios ω_α que cobrem um ponto de integração $\mathbf{X} \in \Omega$. Sendo assim dada uma cobertura $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ se tem que $\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \text{card}\{\alpha: \mathbf{x} \in \omega_\alpha\} \leq M \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$.

Um exemplo de partição de unidade, com estas características, é a utilizada em elementos finitos convencionais. Neste caso o mais simples são as partições de unidade constituídas pelas funções lineares onde se tem $M = 2$ como pode ser observado na Figura 11.

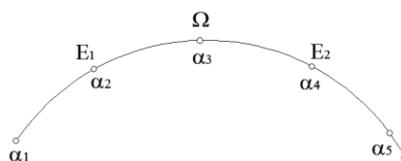
Figura 11 - Partição de unidade linear sobre a cobertura $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$



Fonte: Próprio Autor

Nesta metodologia a geometria e o campo de deslocamento são aproximados independentemente. A malha é suporte das funções de partição de unidade que estão vinculadas aos nós extremos de cada elemento. Estes nós são chamados de nós ativos e sobre seus sistemas locais de coordenadas são construídas as funções de aproximação local do campo de deslocamento. Na Figura 12 é esclarecida esta peculiaridade.

Figura 12 - Elementos quadráticos, nos ativos α_1 , α_3 e α_5



Fonte: Próprio Autor

Para os elementos quadráticos contíguos E_1 e E_2 na Figura 12 os nós ativos correspondem a α_1 , α_3 e α_5 .

Uma das limitações de utilizar funções polinomiais para construir as partições de unidade está na geração de conjuntos de funções de aproximação locais linearmente dependentes não constituindo, portanto, uma base do espaço de aproximação local. Este fato apresentado em Duarte, Babuska e Oden (2000) tem como consequência a obtenção de matriz de rigidez singular sendo necessária a utilização de processos baseados em perturbação da diagonal da matriz de rigidez para contornar este problema conforme apresentado em Babuska Banerjee e Osborn (2002). Neste trabalho é proposta a utilização de partições de unidade construídas a partir de polinomiais racionais conforme Rossi, Suarez e Silva (2012), obtendo-se uma matriz de rigidez global sem problemas graves condicionamento e espaços de aproximação global com regularidade. A construção das partições de unidade baseada em polinomiais racionais será brevemente descrita na seção seguinte.

4.1.2. Partições de unidade do tipo $C_0^k(\Omega)$, $k = 0, 2, 4, \dots$

As partições de unidade supracitadas são funções e Shepard obtidas a partir de funções peso $W_\alpha \in C_0^k$, $k = 0, 2, 4, \dots$ com as propriedades descritas pelas equações (101) a (103).

$$\text{a) } W_\alpha(\bar{s}) \geq 0 \forall \bar{s} \in \omega_\alpha \subset \Sigma, \quad (101)$$

$$\text{b) } W_\alpha(\bar{s}) \in C_0^k(\Sigma), \quad k = 0, 2, 4, \dots \quad (102)$$

$$\text{c) } \forall \bar{s} \in \bar{\Sigma} \rightarrow \text{card}\{\alpha \mid \bar{s} \in \omega_\alpha\} \leq M \in \mathbb{N} \quad (103)$$

Nas equações de (101) a (103) \bar{s} é a coordenada normalizada com relação a um sistema local de coordenadas associada a um nó ativo α como mostrado na Eq. (104).

$$\bar{s} = \frac{s - s_\alpha}{h_\alpha/2} \quad (104)$$

Na Eq. (104) h_α , s_α são o diâmetro do suporte da função peso e a coordenada de arco do nó ativo associado à nuvem suporte da função peso.

As funções peso são do tipo $W_\alpha(s) \in C_0^k$, $k = 0, 2, 4, \dots$ e são definidas pela família de funções descritas pela Eq. (104).

$$W_\alpha(s) = \begin{cases} 0, & s \leq s_\alpha - (h_\alpha/2) \\ \left[1 - \left(\frac{s - s_\alpha}{h_\alpha/2} \right)^m \right]^n, & s_\alpha - (h_\alpha/2) \leq s \leq s_\alpha + (h_\alpha/2), \quad n \geq 1, \quad m = 0, 2, 4 \\ 0, & s \geq s_\alpha + (h_\alpha/2) \end{cases} \quad (105)$$

A regularidade das funções peso definidas pela Eq. (105) são definidas pelas relações,

- a) Para n ímpar $W_\alpha(s) \in C_0^{n-1}(\Sigma)$
- b) Para n par $W_\alpha(s) \in C_0^n(\Sigma)$

Estudos mais detalhados sobre as propriedades de regularidade das funções peso obtidas a partir da Eq. (105) são apresentadas em Rossi, Suarez e Silva (2012). Nas equações (106) a (107) são apresentadas as funções peso obtidas a partir da Eq. (105) como segue.

- a) Funções peso $W_\alpha(s) \in C^0(\Sigma)$ com $m = 2$ e $n = 1$:

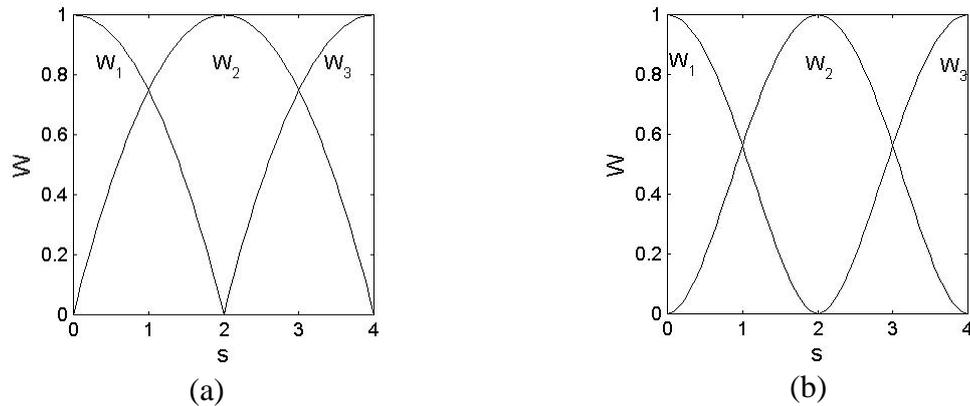
$$W_\alpha(s) = \left[1 - \left(\frac{s - s_\alpha}{h_\alpha/2} \right)^2 \right]^1 \quad (106)$$

- b) Funções peso $W_\alpha(s) \in C_0^2(\Sigma)$ com $m = 2$ e $n = 2$:

$$W_\alpha(s) = \left[1 - \left(\frac{s - s_\alpha}{h_\alpha/2} \right)^2 \right]^2 \quad (107)$$

Nas Figura 13 (a) e (b), são mostradas as funções peso descritas nos itens a e b para $h_\alpha = 4$ e $s_\alpha = \{0, 2, 4\}$, $\alpha = 1, 2, 3$ com relação à coordenada de arco s .

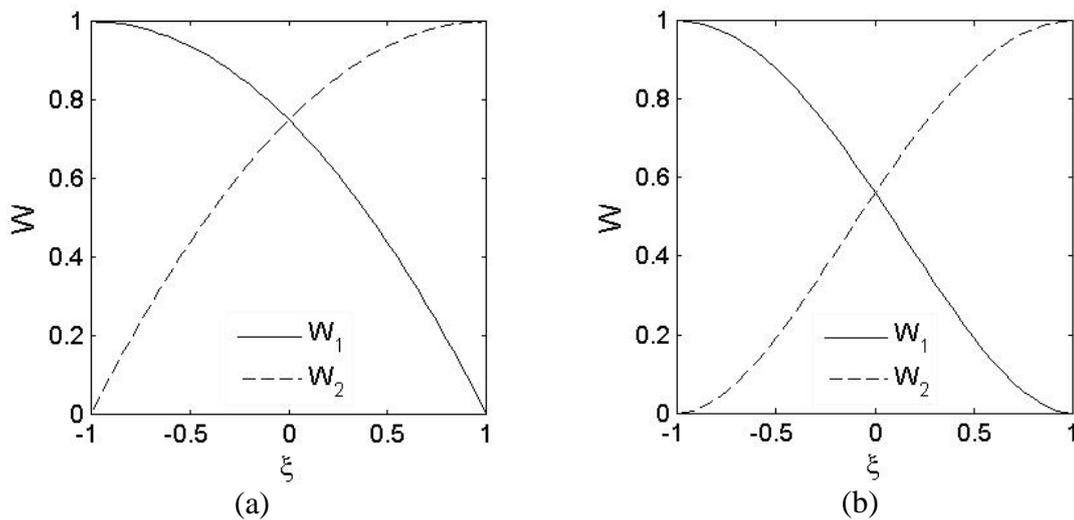
Figura 13 - a) Funções peso $W_\alpha \in C_0^0(\Sigma)$; b) funções peso $W_\alpha \in C_0^2(\Sigma)$.



Fonte: Próprio Autor

As funções partição de unidade PU's são funções de Shepard, definidas no domínio natural do elemento e obtidas pelo processo de normalização das funções peso descritas nas Eq. (105). As funções peso definidas pelas Eq. (106)-(107) descritas no domínio natural do elemento são descritas pelas Eq. (108)-(111) e mostradas nas Figura 14 (a)-(b).

Figura 14 - Função peso $W_\alpha \in C_0^0(\Sigma)$, definida em $[-1,1]$; b) função peso $W_\alpha \in C_0^2(\Sigma)$ definida no domínio natural do elemento $[-1,1]$.



Fonte: Próprio Autor

$$W_1(\xi) = \left[1 - \left(\frac{\xi + 1}{2} \right)^2 \right]^1 \quad (108)$$

$$\mathcal{W}'_2(\xi) = \left[1 - \left(\frac{\xi-1}{2} \right)^2 \right]^1 \quad (109)$$

$$\mathcal{W}'_1(\xi) = \left[1 - \left(\frac{\xi+1}{2} \right)^2 \right]^2 \quad (110)$$

$$\mathcal{W}'_2(\xi) = \left[1 - \left(\frac{\xi-1}{2} \right)^2 \right]^2 \quad (111)$$

As funções da partição da unidade $\varphi_\beta(\xi) \in C_0^k(\Sigma)$, $k = 0, 2, 4, \dots$, $\beta = 1, 2$. obtidas pela normalização das funções peso $\mathcal{W}'_\alpha(\xi)$ são definidas por:

$$\varphi_\beta(\xi) = \frac{\mathcal{W}'_\beta(\xi)}{\sum_{\alpha=1}^2 \mathcal{W}'_\alpha(\xi)} \quad (112)$$

As partir da Eq. (113)-(116) definem-se as partições de unidade no domínio natural do elemento com as regularidades herdadas pelas funções peso utilizadas para obtê-las.

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1 - \left(\frac{\xi+1}{2} \right)^2}{1 - \left(\frac{\xi-1}{2} \right)^2 + 1 - \left(\frac{\xi+1}{2} \right)^2} \quad (113)$$

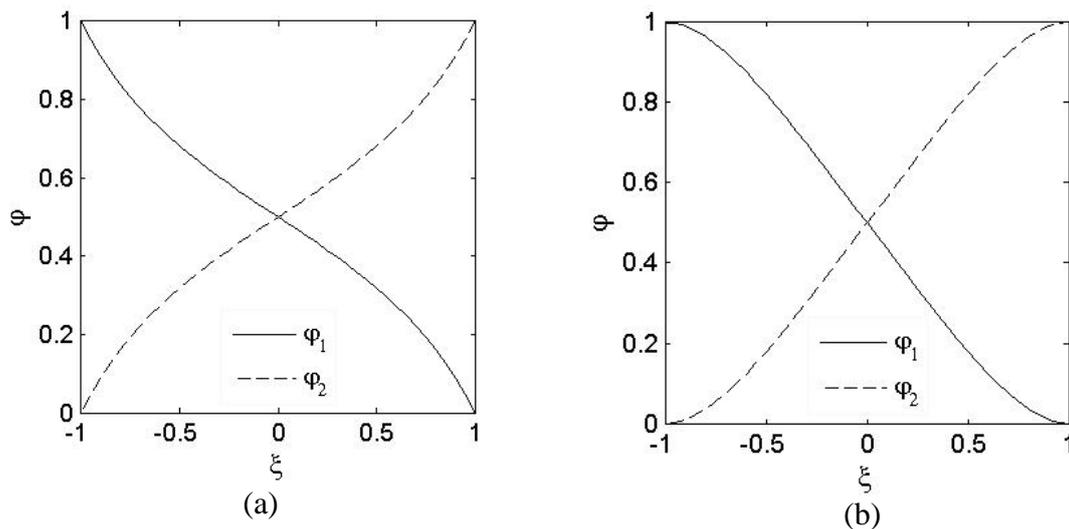
$$\varphi_2(\xi) = \frac{1 - \left(\frac{\xi-1}{2} \right)^2}{1 - \left(\frac{\xi-1}{2} \right)^2 + 1 - \left(\frac{\xi+1}{2} \right)^2} \quad (114)$$

$$\varphi_1(\xi) = \frac{\left[1 - \left(\frac{\xi+1}{2} \right)^2 \right]^2}{\left[1 - \left(\frac{\xi-1}{2} \right)^2 \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{\xi+1}{2} \right)^2 \right]^2} \quad (115)$$

$$\varphi_2(\xi) = \frac{\left[1 - \left(\frac{\xi-1}{2}\right)^2\right]^2}{\left[1 - \left(\frac{\xi-1}{2}\right)^2\right]^2 + \left[1 - \left(\frac{\xi+1}{2}\right)^2\right]^2} \quad (116)$$

As funções descritas pelas Eq. (113)-(114) e pelas Eq. (115)-(116) são representadas no domínio natural do elemento através das Figura 15 (a)-(b).

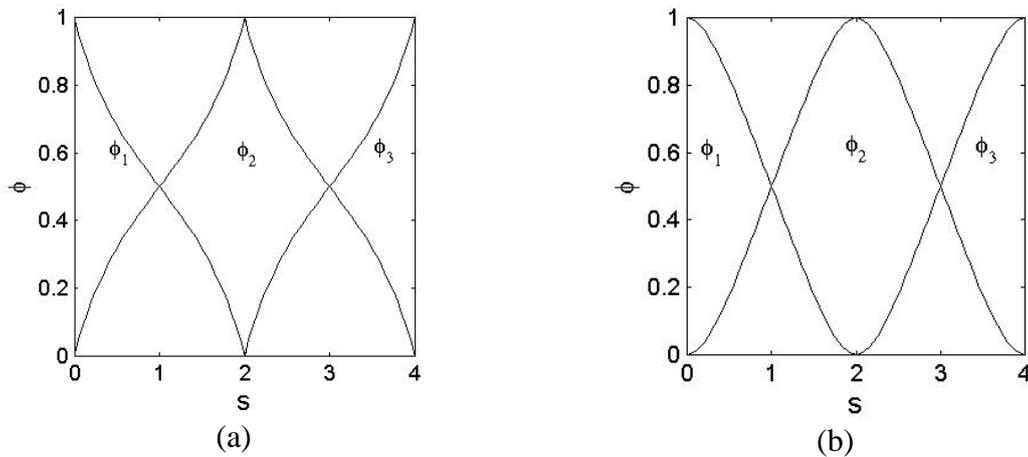
Figura 15 - Função peso $W_\alpha \in C_0^0(\Sigma)$, definida em $[-1,1]$; b) função peso $W_\alpha \in C_0^2(\Sigma)$ definida no domínio natural do elemento $[-1,1]$



Fonte: Próprio Autor

As funções de partição da unidade definidas no domínio físico são obtidas por mapeamento e regra de conectividade usual das funções φ_α definidas no domínio natural do elemento. No domínio físico do problema as funções da PU são denominadas por $\phi_i(s)$, $s \in \bar{\Sigma}$, $i = 1, \dots, N$, sendo N o número de nós ativos. Nas Figura 16 (a)-(b) são mostradas as funções $\phi_i(s) \in C_0^0(\Sigma)$ e $\phi_i(s) \in C_0^2(\Sigma)$ para $s \in [0, 4]$, $i = 1, 2, 3$.

Figura 16 - Função peso $W_\alpha \in C_0^0(\Sigma)$, definida em $[-1,1]$; b) função peso $W_\alpha \in C_0^2(\Sigma)$ definida no domínio natural do elemento $[-1,1]$



Fonte: Próprio Autor

Numa generalização o conjunto de funções pode ser obtido para $\phi_i(s) \in C_0^k(\Sigma)$, $k = 0, 2, 4, \dots$, utilizando as funções peso com regularidades correspondentes.

4.1.3. Construção do espaço de aproximação

O método de elementos finitos generalizados provém das metodologias que constroem o espaço de aproximação por enriquecimento das partições de unidade. Nesta abordagem será considerado o enriquecimento explícito das funções da PU por funções de aproximação, definidas no mesmo domínio local. As funções de aproximação podem ser bases polinomiais ou autofunções da solução quando conhecidas. Entre as potencialidades desta metodologia quando a função da PU tiver suporte compacto sobre o domínio do elemento se tem:

- Cardinalidade limitada e fixa, ou seja, a cobertura sobre cada ponto do domínio é fixo e depende da malha utilizada;
- Possibilidade de impor condições de contorno essenciais de forma direta;
- Refinos h , p e hp adaptativos em alguns aspectos mais simples do que em elementos finitos convencionais. Isto se deve a que as funções de aproximação local são construídas de tal forma que garantem o suporte compacto;
- Possibilidade de introduzir no espaço de aproximação modos que fazem parte da solução do problema de valores no contorno em questão.

A construção do espaço de aproximação global, com as características citadas acima, tem seu formalismo matemático apresentado a seguir.

4.1.4. Espaços de aproximação locais

Seja $\{\phi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ uma partição de unidade do tipo Lipschitz, subordinada a uma cobertura aberta $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ define-se o espaço de aproximação global, a partir de espaços de aproximação local, pela Eq. (117). Na Eq. (117) Q_α é o conjunto de funções de enriquecimento local, ϕ_α é a função da partição de unidade associada a nó ativo α e ω_α é o suporte sobre o qual está definido o espaço de aproximação local.

$$Q = \sum_{\alpha=1}^N \phi_\alpha Q_\alpha \quad (117)$$

A convergência pode ser atingida por refino h , p e hp ou pela construção de espaços locais enriquecidos pela inclusão de autofunções do problema de valores no contorno nos conjuntos Q_α . O espaço global Q construído desta forma herda as propriedades de aproximação e de suavidade dos espaços locais Q_α . Esta afirmação é assegurada pelo teorema apresentado em Melenk e Babuska (1996) que será descrito a seguir.

Teorema 3.2: Seja $\Omega \in R^n$, com $n=1,2,3$, um domínio aberto e limitado. Seja $\{\phi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, $\phi_\alpha \in H^1(\bar{\omega}_\alpha)$ uma partição de unidade subordinada à cobertura $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, de forma que $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{\alpha=1}^N \omega_\alpha$. Seja $\mathbf{u} \in H^1(\Sigma)$ uma função a ser aproximada de forma que em cada suporte $\omega_\alpha \cap \Omega$ \mathbf{u} pode ser aproximada localmente por uma função $\mathbf{u}_\alpha \in Q_\alpha$ tal que:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\alpha\|_{L^2(\omega_\alpha \cap \Omega)} \leq \varepsilon_1(\alpha) \quad (118)$$

$$\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\alpha)\|_{L^2(\omega_\alpha \cap \Omega)} \leq \varepsilon_2(\alpha) \quad (119)$$

Desta forma a função de aproximação:

$$\mathbf{u}_h = \sum_{\alpha=1}^N \phi_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \in Q \subset H^1(\Sigma) \quad (120)$$

Sendo assim se tem a seguinte estimativa global:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Sigma)} \leq \sqrt{M} C_{\infty} \left(\sum_{\alpha=1}^N \varepsilon_1^2(\alpha) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (121)$$

$$\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{L^2(\Sigma)} \leq \sqrt{M} \left(\sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{C_G}{\text{diam}(\omega_{\alpha})} \right) \varepsilon_1^2(\alpha) + C_{\infty}^2 \varepsilon_2^2(\alpha) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (122)$$

O teorema supracitado fundamenta as versões h e p das estimativas a priori do erro em norma $L^2(\Sigma)$, dos espaços com as características citadas.

No MEFG as características de convergência p do espaço de aproximação é assegurada pelos conjuntos Q_{α} . A seguir é mostrada a técnica de construção do espaço de aproximação global definidos aqui como espaços $\text{span}\{\mathcal{F}_N^p\}$.

4.1.5. Espaços de aproximação global sob o domínio do arco

Neste trabalho os espaços de aproximação construídos em domínios definidos por superfícies de revolução com curvatura não nula seguem a metodologia apresentada em Garcia et al. (2009). Neste caso as funções de enriquecimento são definidas no domínio do arco sendo as abscissas referenciadas a um sistema de coordenadas locais centrado em cada suporte ω_{α} conforme Figura 14.

Nesta monografia o conjunto de funções de aproximação global denominado de \mathcal{F}_N^p será particularizada para domínios unidimensionais que é o caso do modelo da formulação semi-analítica proposto para este trabalho é indicada na Eq. (92). Para o modelo em questão o espaço de aproximação global indicado na Eq. (101)-(103) pode ser descrito como:

$$Q = \text{span}\{\mathcal{F}_N^p\} \quad (123)$$

Onde:

$$\mathcal{F}_N^p = \left\{ \left\{ \phi_\alpha Q_\alpha^p \right\} : 1 \leq \alpha \leq N \right\} \quad (124)$$

Na Eq. (124), Q_α^p , descrito na Eq. (125) representa o conjunto de funções locais associadas ao suporte α correspondentes a uma base polinomial de ordem p .

$$Q_\alpha^p = \left\{ L_i(\bar{s}) : 0 \leq i \leq p, i \geq 0, p \geq 0 \right\}. \quad (125)$$

Na Eq. (125) o conjunto de funções Q_α^p é gerado pela base polinomial $L_i(\bar{s})$ e tem dimensão $\dim(\text{span}\{Q_\alpha^p\}) = p+1$. Se os espaços de aproximação global forem obtidos a partir de bases polinomiais tem a propriedade de $P \subset Q$ onde P é o conjunto dos polinômios de grau $g \leq p$ (ver: *Teorema 3.4*). As funções $L_i(\bar{s})$ e o suas derivadas são definidas no domínio normalizado correspondente a cada suporte ω_α e mapeados para o domínio do arco conforme definido nas equações (126) e (127):

$$L_i(s) = \hat{L}_i(\bar{s}) \quad (126)$$

$$\frac{d}{ds}(L_i(s)) = \frac{1}{h_\alpha} \frac{d}{d\bar{s}}(\hat{L}_i(\bar{s})) \quad (127)$$

Em (125) e (126) os termos do lado direito das equações são calculados no domínio $\hat{\omega}_\alpha$.

$$\hat{\omega}_\alpha = \left\{ \bar{s} \in R : |\bar{s}| \leq 1 \right\} \quad (128)$$

$$\bar{s} = \frac{s - s_\alpha}{h_\alpha}. \quad (129)$$

Onde:

$$h_\alpha = |s_{\alpha+1} - s_{\alpha-1}| \quad (130)$$

Na Eq. (129), h_α é a dimensão do suporte ω_α .

O espaço de aproximação global obtido por esta metodologia satisfaz a propriedade que $Q \subset \text{span}\{\mathcal{F}_N^p\}$ que é fundamentada nos seguintes teoremas:

Teorema 3.3: Seja o conjunto $\{\phi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ constituído por funções linearmente independentes formando uma partição de unidade subordinada à cobertura aberta $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ de forma que $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{\alpha=1}^N \omega_\alpha$. Se o conjunto de funções de enriquecimento definido na Eq. (123) é linearmente independente de $\{\phi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, então o conjunto \mathcal{F}_N^p é linearmente independente.

Teorema 3.4: $L_r \in Q$, para $0 \leq r \leq p$.

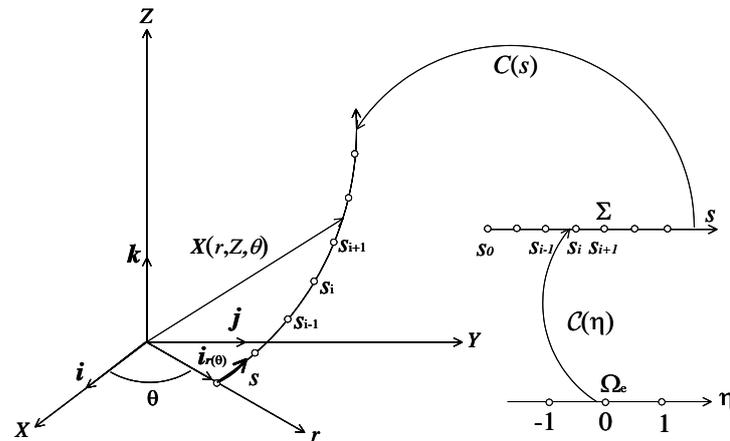
As provas dos teoremas (3.3) e (3.4) são encontradas em Duarte et al. (1996).

Uma das características deste método é a construção das funções de enriquecimento no domínio real do problema físico. Para o caso de domínios curvos como ocorre em cascas de revolução à construção das funções sobre o domínio do arco é obtida por uma dupla parametrização como será mostrada a seguir.

4.2.SISTEMÁTICA DA PARAMETRIZAÇÃO GLOBAL DO DOMÍNIO

A ideia é que os enriquecimentos nodais sejam construídos sobre o domínio paramétrico global em coordenadas de arco. Neste sentido a técnica envolve um mapeamento entre o domínio natural do elemento, onde estão definidas as funções partição de unidade e o domínio paramétrico global do problema. As relações de mapeamento são estabelecidas entre pontos da curva, que definem o domínio paramétrico global do problema e o elemento unidimensional (linear, quadrático, cúbico etc.). A seguir são mostrados a ideia básica do método e um roteiro para a construção das funções de aproximação local para um problema em domínio definido sobre um arco de circunferência.

Figura 17 - Funções mapeamento $\mathcal{C}(\eta): \Omega_e \rightarrow s$ e $C(s): \Sigma \rightarrow R^3$



Fonte: Próprio Autor

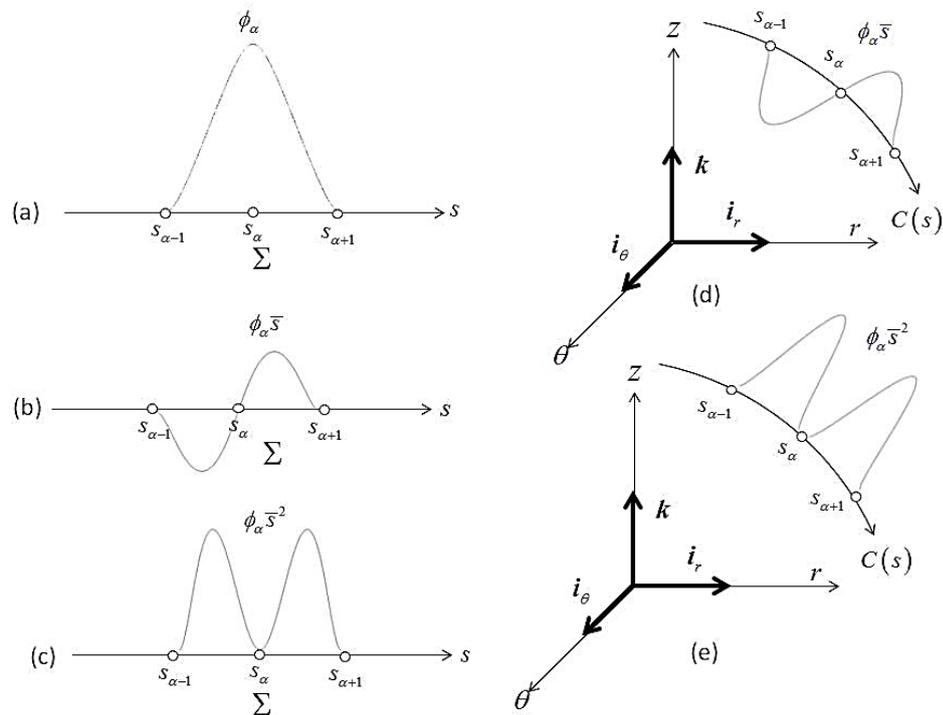
Seja $C(s): \Sigma \rightarrow R^3$ uma função que a partir de um domínio paramétrico define a curva em R^3 como a indicada na Figura 17. Sendo $C(s)$, com $s \in \Sigma$ e $\Sigma = \{s \in R / s_o \leq s \leq s_f\}$, uma curva suave com a função vetor normal definida em todos os pontos da mesma. Esta função chamada de mapeamento da curva relaciona cada coordenada $s \in \Sigma$ com pontos $X(r, z) \in R^3$ conforme Figura 17. A segunda função mapeamento, utilizada neste procedimento, estabelece uma relação discreta entre pontos de um elemento padrão unidimensional (linear, quadrático, cúbico etc.) e os pontos de um elemento do domínio paramétrico Σ . A relação é dita discreta a função $\mathcal{C}(\eta): \Omega_e \rightarrow s \in \{s \in R / s_{i-1} \leq s \leq s_{i+1}\}$, mapeia para um subdomínio de Σ correspondente ao elemento definido pela malha.

A função $C(s)$ define a curva no domínio do problema físico.

A construção do espaço de aproximação local é feita sobre o domínio paramétrico global Σ . A seguir será apresentado um roteiro para a construção de dos espaços de aproximação local sobre o domínio do arco.

Figura 18 - a) Partição de unidade $\phi \in C^2(\Sigma)$; b) PU enriquecida com função linear $\phi \bar{s}$

c) PU enriquecida com função quadrática



Fonte: Próprio Autor

Para facilitar a compreensão propõe-se construir o espaço local associado à nuvem α da Figura 18, obedecendo a seguinte sequência de operações:

a) Normalizar a coordenada $s \in \Sigma$ com relação ao sistema local da nuvem α de forma que:

$$\bar{s} = \frac{s - s_\alpha}{h_\alpha} \quad (131)$$

Na Eq. (131) h_α é maior das distâncias entre $|s_{\alpha-1} - s_\alpha|$ e $|s_{\alpha+1} - s_\alpha|$, e \bar{s} é a coordenada normalizada com relação a este raio de forma a satisfazer (126).

b) Construção da base de enriquecimento local correspondente à nuvem α :

$$\{L_i(\bar{s})\}_\alpha = \{1, \bar{s}, \bar{s}^2\} = \{L_1(s), L_2(s), L_3(s)\}_\alpha \quad (132)$$

$$\left\{ \frac{d\hat{L}_i(\bar{s})}{d\bar{s}} \right\}_\alpha = \{0, 1, 2\bar{s}\}_\alpha \quad (133)$$

c) Construção do espaço de aproximação local por produto da partição de unidade:

$$\{\psi_i(\eta)\}_\alpha = \{\phi_\alpha(\eta), \phi_\alpha(\eta)\bar{s}, \phi_\alpha(\eta)\bar{s}^2\}, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (134)$$

O conjunto de funções definido em (134) é representado nas Figura 18, (a), (b) e (c) no domínio paramétrico e (d) e (e) no domínio físico do problema.

Como as funções da PU são definidas no domínio natural do elemento a derivada dos produtos indicados na Eq. (135) é determinada no domínio natural do elemento, portanto:

$$\frac{d\hat{L}_i}{d\eta} = \frac{dL_i}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} \frac{ds}{d\eta} \quad (135)$$

Na Eq. (135) $\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{1}{h_\alpha}$, desta forma pode-se redefinir a equação (136) como:

$$\frac{d\hat{L}_i}{d\eta} = \frac{d\hat{L}_i}{d\bar{s}} \frac{1}{h_\alpha} \frac{ds}{d\eta} \quad (136)$$

Com as derivadas das funções de enriquecimento, definidas no domínio natural do elemento, o produto pela partição de unidade é feito de forma usual, para cada função, como indicado na Eq. (134). Generalizando este procedimento para cada nuvem obtém-se o conjunto de aproximação global definido na Eq. (124).

5. ESPAÇOS DE APROXIMAÇÃO NÃO CONVENCIONAIS

Dentre os espaços de aproximação construídos com técnicas alternativas serão comentados neste capítulo as famílias de Hermite generalizadas ou denominados de H-FEM (ver: Mazzochi, Rossi e Suarez (2014)) e o método FEM B-Spline (Burla (2008)).

5.1. ESPAÇOS DE APROXIMAÇÃO SEGUNDO O H-FEM

O espaço de aproximação comentado nesta seção é obtido a partir dos Métodos de Partição de Unidade (MPU), onde a PU é obtida a partir de funções polinomiais com regularidade $C_0^k(\Sigma)$, $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$, contudo as funções de enriquecimento (ou funções de completude do espaço de aproximação), não são obtidas por produto com as funções da PU e sim através de condições de continuidade inter-elementos. A construção do espaço de aproximação comentado nesta seção seguirá o enfoque utilizado em Mazzochi, Rossi e Suarez (2014). No trabalho supracitado o autor constrói as funções da PU e as funções de enriquecimento no domínio natural do elemento a partir de condições de continuidade para as funções e suas derivadas nas fronteiras dos elementos. Para espaços de aproximação unidimensionais esta metodologia apresenta as seguintes potencialidades:

- a) Capacidade de construir espaços interpolados com a regularidade supracitada visto

$$\text{que a continuidade das derivadas inter-elementos é } \frac{d^k \varphi(s)}{ds^k} \Big|_{s=s_{i+1}}^{e_i} = \frac{d^k \varphi(s)}{ds^k} \Big|_{s=s_{i+1}}^{e_{i+1}} = 0$$

$$, \text{ para as funções de interpolação e } \frac{d^k \varphi(s)}{ds^k} \Big|_{s=s_{i+1}}^{e_i} = \frac{d^k \varphi(s)}{ds^k} \Big|_{s=s_{i+1}}^{e_{i+1}} = 1 \text{ para as funções}$$

de completude do espaço de aproximação;

- b) Matriz de rigidez sem problemas graves de condicionamento com o incremento da ordem polinomial contrariamente do que ocorre na matriz de rigidez de espaços construídos segundo o GFEM;
- c) Possibilidade de enriquecimento local das funções que constituem a PU do espaço de aproximação com funções da solução analítica do problema em questão;
- d) Melhora significativa com relação ao FEM convencional na abordagem de problemas de autovalores/autovetores no que diz respeito ao aumento de precisão

na obtenção de frequências relativamente altas (acima de dez por cento dos modos aproximados numericamente pelo sistema linear).

Como pontos negativos da aplicação destas funções na construção de espaços de aproximação unidimensional podem ser citados:

- a) A ordem polinomial das funções de aproximação para um campo com regularidade $C_0^k(\Sigma)$ é dada por $p = 2^{n_{DE}} k + 1$, portanto elevada, implicando diretamente no custo de integração numérica elevado;
- b) A partir de $k \geq 2$ as funções da partição de unidade começam a apresentar um platô que fica mais pronunciado à medida que o valor de k é incrementado. Este fato tem como consequência a diminuição da capacidade de o espaço de aproximação representar os modos de flexão tendo, portanto, consequência direta no aumento de rigidez destes modos.

A seguir será abordado de forma sucinta o roteiro para obter as funções de interpolação para espaços de aproximação em 1D. A construção do espaço de aproximação é feita de forma separada para as funções da PU e para as funções de completude do espaço de aproximação no domínio natural do elemento como será mostrado a seguir.

5.1.1. Funções da PU

As funções de partição de unidade são obtidas no domínio natural do elemento $\Omega_e = -1 \leq \xi \leq 1$. Os elementos construídos com estas funções não são isoparamétricos, ou seja, a função que mapeia a geometria, neste caso, será feita por polinômios de interpolação de Lagrange.

A seguir serão determinadas as funções $\phi_l(\xi)$ sobre o domínio natural do elemento utilizado para construir a PU no domínio físico definido na variável de arco $s \in \Sigma$. Para os espaços unidimensionais abordados neste trabalho a ordem polinomial das funções supracitadas necessária para obter espaços com regularidade $C_0^k(\Sigma)$, $k = 1, 2, 3$ é obtida pela Eq. (137).

$$p = 2^{n_{DE}} k + 1 \tag{137}$$

Na Eq. (137), p é a ordem polinomial, n_{DE} é a ordem da dimensão do espaço de aproximação neste caso é adotado $n_{DE} = 1$, e k a regularidade das funções da PU no domínio físico global. As ordens polinomiais necessárias para construir as PU com regularidades supracitadas são mostradas na Tabela 1.

Tabela 1 - Ordem Polinomial e Regularidade

p	k
3	1
5	2
7	3

A partir das ordens polinomiais as funções as funções $\phi_I(\xi)$, $I = 1, 2$ são obtidas a partir do polinômio genérico definido na Eq. (138) (Gilat e Subramaniam (2008)).

$$\phi_I(\xi) = a_p \xi^p + a_{p-1} \xi^{p-1} + \dots + a_1 \xi + a_0 \quad (138)$$

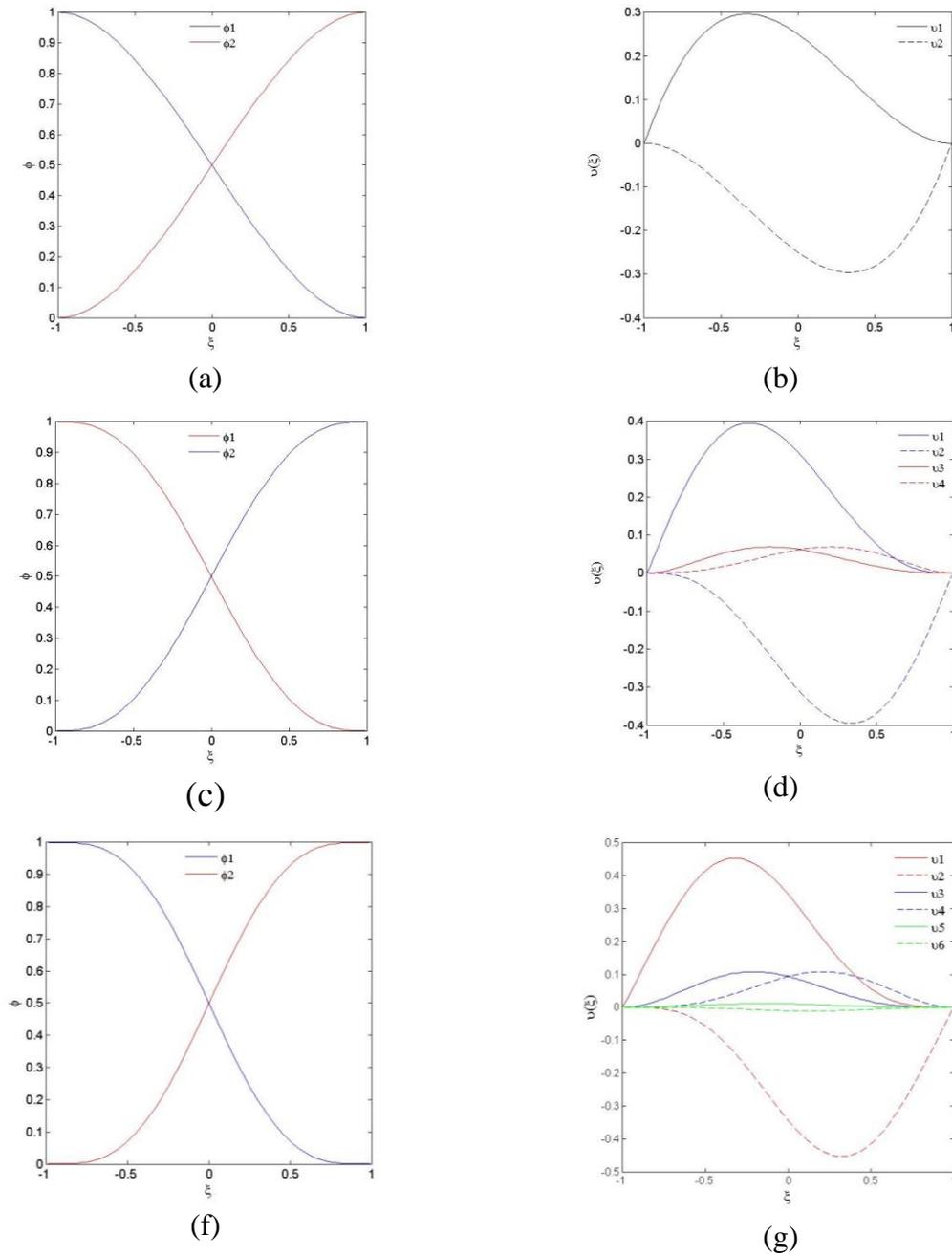
Na Eq. (138), p é a ordem polinomial em cada situação neste caso se tem $p \in \wp = \{3, 5, 7\}$.

As condições de continuidade inter-elementos para obter as funções são definidas na Tabela 2 como segue:

Tabela 2 - Condições de Continuidade Inter-elementos da Função ϕ_I

$\left. \frac{d^j f_I}{dx^j} \right _{x=x_j}$	$j = 0$	$0 \leq j \leq k$
$J = I$	1	0
$J \neq I$	0	0

Figura 19 - a) funções a,c,f definidas em $[-1,1]$ correspondem as funções das PU's com regularidade $C_0^1(\Sigma)$, $C_0^2(\Sigma)$ e $C_0^3(\Sigma)$ respectivamente; b) as funções b,d,g definidas no domínio $[-1,1]$ são funções de completude dos espaços com regularidade $C_0^1(\Sigma)$, $C_0^2(\Sigma)$ e $C_0^3(\Sigma)$



Fonte: Próprio Autor

A formulação explícita das funções construídas segundo as exigências de continuidade inter-elementos descritas na Tabela 1 são mostradas na Figura 19 (a)-(c)-(f) e definidas como segue:

a) Funções definidas no domínio natural do elemento com regularidade $C_0^1(\Sigma)$:

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \quad (139)$$

$$\phi_2(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \quad (140)$$

b) Funções definidas no domínio natural do elemento com regularidade $C_0^2(\Sigma)$:

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{16}(1-\xi)^3(3\xi^2+9\xi+8) \quad (141)$$

$$\phi_2(\xi) = \frac{1}{16}(1+\xi)^3(3\xi^2-9\xi+8) \quad (142)$$

c) Funções definidas no domínio natural do elemento com regularidade $C_0^3(\Sigma)$:

$$\phi_1(\xi) = 0,1562\xi^7 - 0,6562\xi^5 + 1,0937\xi^3 - 1,0937\xi + 0,5 \quad (143)$$

$$\phi_2(\xi) = -0,1562\xi^7 + 0,6562\xi^5 - 1,0937\xi^3 + 1,0937\xi + 0,5 \quad (144)$$

As funções de completude para os espaços supracitados garantem, juntamente com as funções da PU, seqüências que convergem para o espaço da solução forte do problema.

O número de funções de completude definidas no domínio natural do elemento depende da regularidade sendo que para um espaço do tipo $C_0^k(\Sigma)$ se tem o conjunto $\{v_j(\xi)\}_{j=1}^{2k}$ para as funções de completude definidas no domínio natural do elemento.

As funções $v_j(\xi)$ são obtidas a partir do polinômio genérico definido na Eq. (145) onde as constantes $\{b_i^j\}_{i=0}^{p=2k+1}$ são determinadas a partir das exigências de continuidade inter-elementos estabelecidas na Tabela 3

$$v_J(\xi) = b_p^J \xi^p + b_{p-1}^J \xi^{p-1} + \dots + b_1^J \xi + b_0, \quad J = 1, \dots, 2k \quad (145)$$

Tabela 3 - Condições de continuidade inter-elementos para determinar os coeficientes b_i^J do polinômio definido na Eq. (145)

$v_J(\xi)$	$v_J(-1)$	$v_J(1)$	$\frac{dv_J}{d\xi}(-1)$	$\frac{dv_J}{d\xi}(1)$...	$\frac{d^k v_J}{d\xi^k}(-1)$	$\frac{d^k v_J}{d\xi^k}(1)$
1	0	0	1	0	...	0	0
2	0	0	0	1	...	0	0
...
$2k-1$	0	0	0	0	...	1	0
$2k$	0	0	0	0	...	0	1

A formulação explícita das funções de completude são definidas em função de a regularidade a seguir:

- a) Funções com regularidade $C_0^1(\Sigma)$, $v_J(\xi) = 1, \dots, 2$;

$$v_1(\xi) = \frac{1}{4}(\xi+1)(\xi-1)^2 \quad (146)$$

$$v_2(\xi) = \frac{1}{4}(\xi-1)(\xi+1)^2 \quad (147)$$

- b) Funções com regularidade $C_0^2(\Sigma)$, $v_J(\xi) \quad J = 1, \dots, 4$;

$$v_1(\xi) = \frac{1}{16}(\xi-1)(\xi+1)(\xi^2 + 7\xi - 5) \quad (148)$$

$$v_2(\xi) = -\frac{1}{16}(\xi-1)(\xi+1)(\xi^2 - 7\xi - 5) \quad (149)$$

$$v_3(\xi) = \frac{1}{16}(\xi-1)(\xi+1)(\xi^2 + \xi - 1) \quad (150)$$

$$v_4(\xi) = \frac{1}{16}(\xi-1)(\xi+1)(\xi^2 - \xi - 1) \quad (151)$$

- c) Funções com regularidade $C_0^3(\Sigma)$, $v_J(\xi) \quad J = 1, \dots, 6$.

$$v_1(\xi) = \frac{5}{32}\xi^7 - \frac{1}{32}\xi^6 - \frac{21}{32}\xi^5 + \frac{5}{32}\xi^4 + \frac{3}{32}\xi^3 - \frac{15}{32}\xi^2 - \frac{19}{32}\xi + \frac{11}{32} \quad (152)$$

$$v_2(\xi) = 0,15625\xi^7 + 0,03125\xi^6 - 0,65625\xi^5 - 0,15625\xi^4 + 1,09375\xi^3 + 0,468750\xi^2 - 0,59375\xi - 0,34375 \quad (153)$$

$$v_3(\xi) = 0,0625\xi^7 - 0,03125\xi^6 - 0,25\xi^5 + 0,15625\xi^4 + 0,3125\xi^3 - 0,21875\xi^2 - 0,125\xi + 0,09375 \quad (154)$$

$$v_4(\xi) = -0,0625\xi^7 - 0,03125\xi^6 + 0,25\xi^5 + 0,15625\xi^4 - 0,3125\xi^3 - 0,21875\xi^2 + 0,125\xi + 0,09375 \quad (155)$$

$$v_5(\xi) = 0,0104167\xi^7 - 0,0104167\xi^6 - 0,03125\xi^5 + 0,03125\xi^4 + 0,03125\xi^3 - 0,03125\xi^2 - 0,0104167\xi + 0,0104167 \quad (156)$$

$$v_6(\xi) = 0,0104167\xi^7 + 0,0104167\xi^6 - 0,03125\xi^5 - 0,03125\xi^4 + 0,03125\xi^3 + 0,03125\xi^2 - 0,0104167\xi - 0,0104167 \quad (157)$$

As funções da PU e as funções de enriquecimento no domínio físico do problema são obtidas a partir de mapeamento das funções no domínio natural do elemento com funções de interpolação Lagrangeanas. A ordem das funções de interpolação Lagrangeanas utilizadas para o mapeamento devem ser tais que minimizem o erro entre o domínio físico aproximado por CAD e a geometria interpolada pelo elemento.

Neste trabalho são utilizadas seguintes funções de interpolação dependendo do tipo de curva geratriz da superfície de revolução.

- a) A curva geratriz é um segmento que gera superfícies cilíndricas, superfícies tronco-cônicas e placas circulares. Neste caso são utilizadas funções de Lagrangeanas de interpolação linear;

$$r(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi)r_i \quad (158)$$

$$z(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi)z_i \quad (159)$$

Nas equações (158) e (159) as funções de interpolação $N_i(\xi)$ são funções Lagrangeanas de interpolação linear definidas pelas equações (160) e (161).

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (160)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (161)$$

- b) Curvas de revolução definida por parábolas como o parabolóide e o hiperbolóide de revolução são interpoladas por polinomiais Lagrangeanas quadráticas. Nestes casos o mapeamento é exato e é definido pelas equações (162) e (163);

$$r(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) r_i \quad (162)$$

$$z(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) z_i \quad (163)$$

As funções $N_i(\xi)$ são as funções de interpolação quadráticas definidas pelas Eq. (164)-(166).

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \quad (164)$$

$$N_2(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (165)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \quad (166)$$

- c) Curvas de revolução definidas por arcos de circunferências são meadas exatamente pelas funções:

$$r(\xi) = R \cos[\theta(\xi)] \quad (167)$$

$$z(\xi) = R \text{sen}[\theta(\xi)] \quad (168)$$

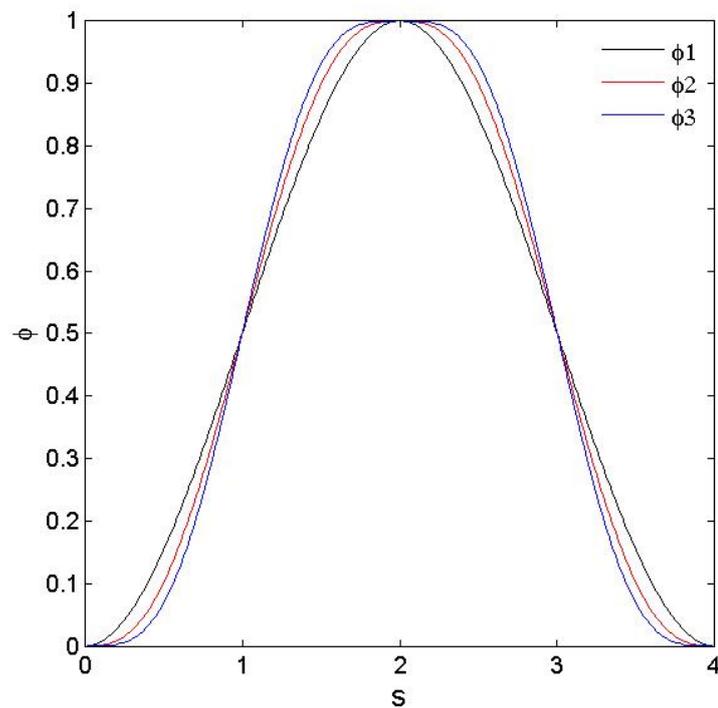
Nas equações (167) e (168), R é o rádio do arco de circunferência e $\theta(\xi)$ é o arco mapeado com funções de interpolação lineares definido pela Eq. (169):

$$\theta(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) \theta_i \quad (169)$$

As funções partição e unidade com regularidade $C_0^k(\Sigma)$, $k = 1, 2, 3$ definida sobre o intervalo $S \subset \Sigma$, $S = [0, 4]$, são mostradas no domínio físico na Figura 20.

Figura 20 - Funções de partição da unidade definidas no intervalo $s \in [0, 4]$ com

Regularidades: $C_0^1(\Sigma)$, $C_0^2(\Sigma)$ e $C_0^3(\Sigma)$



Fonte: Próprio Autor

O último método que será comentado neste documento trata sobre a utilização do método FEM-B-Spline para obter espaços unidimensionais de aproximação de alta regularidade no domínio físico do problema.

5.2.UNIFORM FEM B-SPLINE EM 1D

Neste método os espaços de aproximação são construídos a partir de funções B-Splines definidas sobre um grid unidimensional com distribuição uniforme dos nós. As funções utilizadas neste trabalho foram previamente utilizadas por Burla (2008) e tem as seguintes características:

- a) As funções *B-Spline* constituem uma PU construída a partir de funções periódicas sobre o domínio global Σ ;
- b) O espaço gerado pelas funções *B-Spline* não possui a propriedade delta de Kronecker com relação as fronteiras de Dirichlet;
- c) O grid nem sempre coincide com a geometria do problema mesmo em espaços de aproximação unidimensional.

Os espaços de aproximação global são do tipo $C_0^k(\Sigma)$, $k = p - 1$, onde p é a ordem polinomial das funções de aproximação e k a ordem de regularidade do espaço obtido no domínio global.

5.2.1. Construção da base de funções *B-Spline* em 1D

A construção da base de funções *B-Spline* é levada a cabo sobre um grid definido num domínio paramétrico com $p + 1$ nós igualmente espaçados onde os nós extremos têm coordenadas paramétricas $r_i = -\frac{p+1}{2}$ e $r_f = \frac{p+1}{2}$. Para cada nó do grid se tem uma função da base associada porem os valores mapeados para o domínio físico são os valores das funções da PU no intervalo $-1 \leq r \leq 1$.

A construção das funções *B-Spline* definidas sobre um grid uniforme (de nós igualmente espaçados) são funções polinomiais definidas pela Eq. (170).

$$\phi_i(r) = \sum_{j=0}^p \alpha_{ij} r^j \quad (170)$$

Os coeficientes α_{ij} são determinadas a partir dos critérios de continuidade inter-elementos que se quer da função aproximada $f_e(r)$ obtida por combinação linear das funções da base definida pela Eq. (171).

$$f_e(r) = \sum_{i=0}^p \left(\sum_{j=0}^p \alpha_{ij} r^j \right) u_i \quad (171)$$

Para as funções de ordem p se quer uma continuidade inter-elementos do tipo $C^{p-1}(\Sigma)$ sendo esta condição garantida pela continuidade da derivada entre os elementos do grid e e $e+1$ como indicado na Eq. (172).

$$\frac{\partial^m f_e}{\partial r^m}(1) = \frac{\partial^m f_{e+1}}{\partial r^m}(-1), \quad m = 0, 1, 2, \dots, p-1 \quad (172)$$

A continuidade da função entre os elementos para a função representada é obtida para a primeira equação correspondente a $m=0$ definida por $f_e(1) = f_{e+1}(-1)$. A formulação explicita da Eq. (172) é descrita pela Eq. (173).

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=0}^p \frac{j!}{(j-m)!} \alpha_{0j} \right) u_0 + \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=0}^p \frac{j!}{(j-m)!} a_{ij} - \sum_{j=0}^p \frac{j!}{(j-m)!} a_{ij} (-1)^{j-m} \right) u_i \\ & - \left(\sum_{j=0}^p \frac{j!}{(j-m)!} \alpha_{p+1j} (-1)^{j-m} \right) u_{p+1} = 0 \end{aligned} \quad (173)$$

Na Eq. (173), as constantes u_i , $i = 0, 1, 2, \dots, p+1$, são arbitrárias, portanto para que a Eq. (173) seja nula cada um dos três termos entre parênteses deve-se anular. A partir desta consideração os valores de $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{p+1}$ para cada valor de $m = 0, 2, \dots, p-1$ são obtidos $p(p+2)$, equações linearmente independentes porem resultando numa matriz retangular e um sistema homogêneo. Uma forma de obter o sistema com solução única e a matriz quadrada consiste em adicionar ao sistema linear supracitado a propriedade de partição de unidade das funções onde:

$$\sum_{i=0}^p \phi_i(r) = \sum_{i=0}^p \left(\sum_{j=0}^p \alpha_{ij} r^j \right) = 1 \quad (174)$$

Desta forma se obtém o sistema linear com matriz quadrada com dimensão $\dim = (p+1)^2$.

Através das equações (173) e (174) se obtém em função da ordem polinomial p as funções de aproximação definidas no domínio paramétrico do grid e com regularidade no

domínio físico do problema de $C^{p-1}(\Sigma)$. A descrição explícita das funções de aproximação uniforme B-Spline com ordens de $p = 2,3,4,5$, são discriminadas nos itens a-d como segue.

- a) Funções quadráticas com regularidade $C^1(\Sigma)$ definidas no intervalo paramétrico do grid, $-\frac{3}{2} \leq r \leq \frac{3}{2}$ e mostradas na Figura 21 a.

$$\phi_1(r) = \frac{1}{8}(1 - 2r + r^2) \quad (175)$$

$$\phi_2(r) = \frac{1}{8}(6 - 2r^2) \quad (176)$$

$$\phi_3(r) = \frac{1}{8}(1 + 2r + r^2) \quad (177)$$

- b) Funções cúbicas com regularidade $C^2(\Sigma)$ definidas no intervalo paramétrico do grid $-2 \leq r \leq 2$ e mostradas na Figura 21 b.

$$\phi_1(r) = \frac{1}{48}(1 - 3r + 3r^2 - r^3) \quad (178)$$

$$\phi_2(r) = \frac{1}{48}(23 - 15r + 3r^2 + 3r^3) \quad (179)$$

$$\phi_3(r) = \frac{1}{48}(23 + 15r - 3r^2 - 3r^3) \quad (180)$$

$$\phi_4(r) = \frac{1}{48}(23 + 15r + 3r^2 + 3r^3) \quad (181)$$

- c) Funções de ordem $p = 4$ com regularidade $C^3(\Sigma)$ definidas no intervalo paramétrico do grid $-\frac{5}{2} \leq r \leq \frac{5}{2}$ mostradas na Figura 21 c.

$$\phi_1(r) = \frac{1}{348}(r+1)^4 \quad (182)$$

$$\phi_2(r) = \frac{1}{348}[(3+r)^4 - 5(r+1)^4] \quad (183)$$

$$\phi_3(r) = \frac{1}{348} \left[(r+5)^4 - 5(r+3)^4 + 10(r+1)^4 \right] \quad (184)$$

$$\phi_4(r) = \frac{1}{348} \left[(r-3)^4 - 5(1-r)^4 \right] \quad (185)$$

$$\phi_5(r) = \frac{1}{348} (1-r)^4 \quad (186)$$

d) Funções de ordem $p=5$ com regularidade $C^4(\Sigma)$ definidas no intervalo paramétrico do grid $-3 \leq r \leq 3$ e mostradas na Figura 21 d.

$$\phi_1(r) = \frac{1}{3840} (1-r)^5 \quad (187)$$

$$\phi_2(r) = \frac{1}{3840} \left[(3-r)^5 - 6(1-r)^5 \right] \quad (188)$$

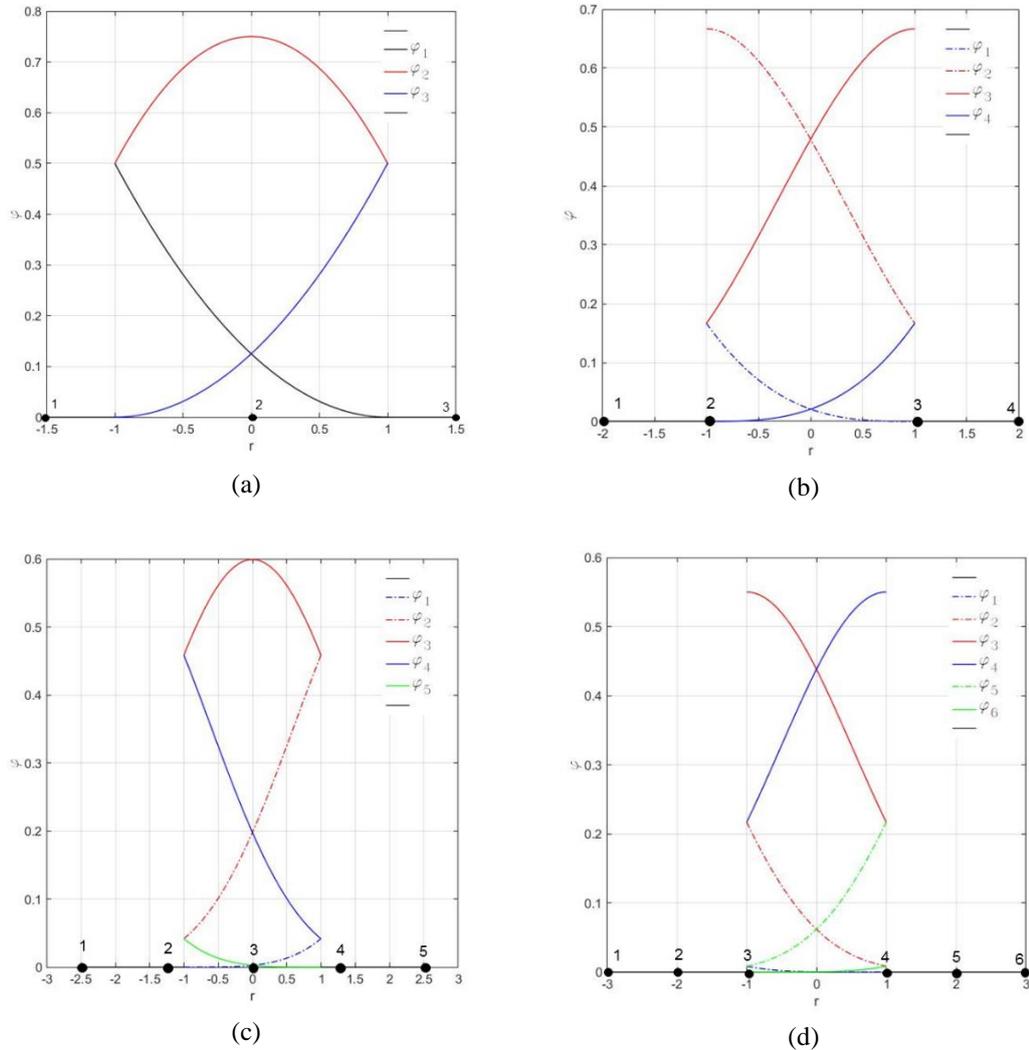
$$\phi_3(r) = \frac{1}{3840} \left[(5-r)^5 - 6(3-r)^5 + 15(1-r)^5 \right] \quad (189)$$

$$\phi_4(r) = \frac{1}{3840} \left[(5+r)^5 + 6(3+r)^5 + 15(1+r)^5 \right] \quad (190)$$

$$\phi_5(r) = \frac{1}{3840} \left[(3+r)^5 - 6(1+r)^5 \right] \quad (191)$$

$$\phi_6(r) = \frac{1}{3840} (1+r)^5 \quad (192)$$

Figura 21 - Funções Uniformes B-Spline (a) função uniforme B-Spline de ordem $p=2$ no domínio paramétrico do grid; (b) função uniforme B-Spline de ordem $p=3$ definida no domínio paramétrico do grid; (c) função uniforme B-Spline de ordem $p=3$ no domínio paramétrico do grid; (d) função uniforme B-Spline de ordem $p=4$ definida no domínio paramétrico do grid.



Fonte: Próprio Autor

Como pode ser observado nas Figura 21 (a) e (d) a região representada graficamente está no intervalo de $-1 \leq r \leq 1$ ou seja o intervalo onde os valores das funções e seus gradientes serão mapeadas para o domínio natural do elemento. Por outro lado, fica claro através das Figura 20 (b) e (d) que os nós do grid no domínio paramétrico nem sempre coincidem com os nós do elemento, cujo domínio natural é realizado a integração numérica. Este fato torna evidente a consideração de algumas regras de mapeamento entre o domínio paramétrico do grid e o domínio natural do elemento que serão comentadas a seguir.

a) *Mapeamento de funções de ordem ímpar:*

Quando as funções do grid definido no domínio paramétrico do grid têm ordem ímpar há intervalos entre nós do grid definidos por $-1 \leq r \leq 1$ (ver Figura 21(b) e (d)). Neste caso o mapeamento para o domínio físico e o mapeamento Lagrangeano usual utilizado no MEF. Deve-se ressaltar, entretanto que o que está sendo feito é um duplo mapeamento definidos por:

$$L(\tilde{L}(\omega_r) \rightarrow \omega_\xi) \rightarrow s \quad (193)$$

Na Eq. (193) ω_r é o domínio paramétrico do grid e ω_ξ é o domínio natural do elemento definido no intervalo $-1 \leq \xi \leq 1$. Para o caso de funções de ordem ímpar $\tilde{L} = I$ ou seja a transformação é a identidade, $\xi = r$. O mapeamento $L(\omega_\xi) \rightarrow s$, para $s \in \Sigma$ é levado a cabo por interpolação Lagrangeana como indicado na Eq. (194).

$$s(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} N_i(\xi) s_i \quad (194)$$

Onde as funções $N_i(\xi)$ são definidas pelo produto de Lagrangeano, como indicado na Eq. (195).

$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{p+1} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_j - \xi_i)} \quad (195)$$

b) *Mapeamento de funções de ordem par:*

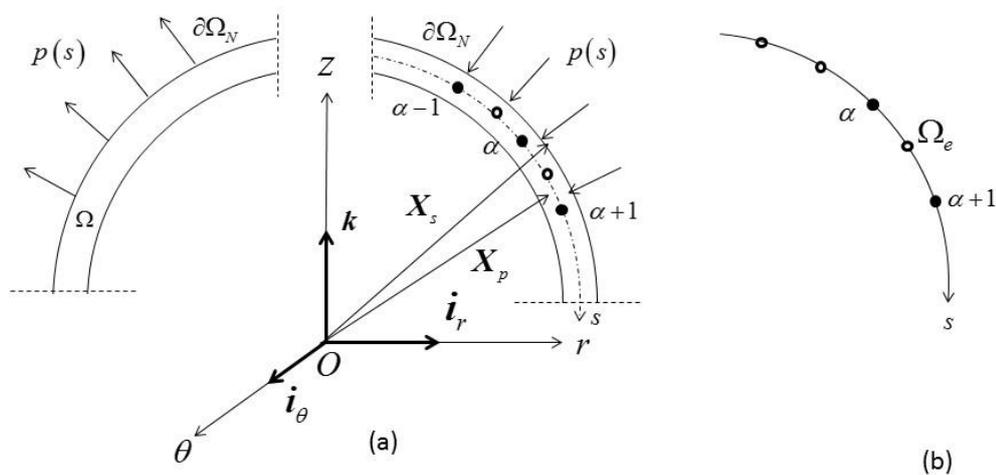
Para funções B-Spline de ordem par as coordenadas dos nós do grid não coincidem com o intervalo $-1 \leq r \leq 1$, ou seja, não se tem nós com coordenadas paramétricas $r = -1$ e $r = 1$ (ver Figura 20 (a) e (c)). Neste caso a transformação $\tilde{L}(\omega_r) \rightarrow \omega_\xi$ é definida por uma translação do sistema de coordenadas definida neste caso por $\xi = r + 1$, se $-1 \leq r \leq 0$ e $\xi = r - 1$, $0 \leq r \leq 1$. O mapeamento definido pela transformação $L(\omega_\xi) \rightarrow s$ é Lagrangeano conforme Eq. (194).

6. DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA

A montagem da matriz de rigidez da matriz de massa e do vetor de cargas consistentes é mostrada através de um exemplo, constituído por um trecho de casca de revolução representado sobre o plano de simetria radial indicadas na Figura 22.

O problema discretizado será abordado para os espaços de aproximação obtidos segundo o GFEM o H-FEM e o FEM B-Spline.

Figura 22 - Seção da casca sob força distribuída p atuando na face $\partial\Omega_N$.



Fonte: Próprio Autor

6.1. PROBLEMA DISCRETIZADO SEGUNDO MEFM

Para efeitos didáticos, serão descritas as funções globais do espaço de aproximação correspondentes à nuvem α do elemento Ω_e da Figura 22. Neste exemplo os espaços de aproximação local serão construídos por enriquecimento com funções polinomiais de ordem $p=2$ homogêneo conforme descrito pela Eq. (134). A montagem da matriz de rigidez será feita para o ponto $X_p \in \Omega_e$ e o vetor de cargas consistentes para o ponto de integração $X_s \in \partial\Omega_{Ne}$ ambos cobertos pelas nuvens α e $\alpha+1$. A equação cinemática para modelo de primeira ordem é obtida a partir da Eq. (72) levando em consideração que se tem mais de uma função aproximando cada grau de liberdade. Sendo assim a matriz N_{ep} de Eq. (72) e o vetor de

parâmetros de deslocamento descrito na Eq. (71) são redefinidos para os espaços de aproximação obtidos segundo MEFM pelas equações (196) e (197)

$$\mathbf{N}_{ep} = \begin{bmatrix} \cdots & \psi_j^k(\eta) & 0 & \psi_j^k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{2k}^r & \cdots \\ \cdots & 0 & \psi_j^k(\eta) & \psi_j^k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{2k}^z & \cdots \end{bmatrix} \quad (196)$$

$$\mathbf{U}_e^T = \{ \cdots v_j^k w_j^k \varphi_j^k \cdots \}, \quad k = \alpha, \alpha + 1 \quad j = 1, \dots, p \quad (197)$$

A partir destas observações os passos seguintes para obter \mathbf{K}_e , \mathbf{M}_e e \mathbf{F}_e são idênticos aos descritos no capítulo dois, deste trabalho, utilizando elementos finitos convencionais descritos nas equações (91) a (93).

6.2. PROBLEMA DISCRETIZADO UTILIZANDO O H-FEM

O problema discreto construído com os espaços de aproximação segundo H-FEM será realizado para o elemento definido entre os nós α e $\alpha + 1$ da Figura 21. O espaço de aproximação no elemento neste exemplo será construído com funções de Hermite com ordem polinomial $p = 5$ definidas nas Eq. (141) e (142) para as funções da PU e as Eq. (148) a (151) para funções de enriquecimento. Desta forma a matriz de funções de forma e o vetor parâmetros de deslocamento correspondentes ao elemento são descritos nas equações (198) e (199).

$$\mathbf{N}_{ep} = \begin{bmatrix} \phi_i^k(\eta) & 0 & \phi_i^k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{2r}^k & \mathcal{G}_{j+i}^k(\eta) & 0 & \mathcal{G}_{j+i}^k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{2k}^r \\ 0 & \phi_i^k(\eta) & \phi_i^k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{2z}^k & 0 & \mathcal{G}_{j+i}^k(\eta) & \mathcal{G}_{j+i}^k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{2k}^z \end{bmatrix} \quad (198)$$

$$\mathbf{U}_e^T = \{ v_i^k w_i^k \varphi_i^k v_{i+j}^k w_{i+j}^k \varphi_{i+j}^k \}, \quad k = \alpha, \alpha + 1, \quad i, j = 1, 2. \quad (199)$$

A partir das equações (198) e (199) a determinação das matrizes de rigidez, massa consistente e o vetor de forças consistentes são definidos de forma idêntica à comentada na subseção anterior, ou seja, de forma idêntica ao FEM convencional.

6.3.PROBLEMA DISCRETIZADO UTILIZANDO O *UNIFORM FEM B-SPLINE*

A abordagem da sistemática que utiliza o FEM B-*Spline* para construir os espaços de aproximação local no suporte do elemento é similar ao FEM quando são utilizadas funções de interpolação de Lagrange. Entretanto ao contrário do que no FEM convencional as funções B-*Spline* são definidas sobre um grid uniforme que não está necessariamente ajustado as fronteiras do domínio do problema físico e as funções de a aproximação não tem a propriedade delta de Kronecker. Uma consequência decorrente deste fato é que os nós, da malha suporte de integração numérica, não coincidem necessariamente com os nós do grid fato que ocorre quando a ordem das funções B-*Spline* é par. Para contornar este problema pode-se forçar a condição de contorno essencial na fronteira de Drichlet utilizando: multiplicadores de Lagrange, método de penalidade por barreiras ou funções de fronteira como foi apresentado em Burla (2008). Por este motivo a temática será abordada sobre dois aspectos:

a) *Formulação do problema para um elemento do domínio:*

Na formulação do problema para o elemento do domínio é determinada a matriz de funções de forma e o vetor de parâmetros de deslocamento. As matrizes de rigidez, massa consistente e o vetor de forças consistentes para este elemento são obtidos de forma similar ao FEM convencional sendo descritas pelas equações (91) a (93).

A matriz de funções de forma e o vetor de parâmetros de deslocamentos correspondentes a um elemento do domínio são descritas pelas equações (200) e (201).

$$\mathbf{N}_{ep} = \begin{bmatrix} \cdots & \phi_i^k(\eta) & 0 & \phi_i^k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{2k}^r & \cdots \\ \cdots & 0 & \phi_i^k(\eta) & \phi_i^k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{2k}^z & \cdots \end{bmatrix} \quad (200)$$

$$\mathbf{U}_e^T = \left\{ \cdots v_i^k \quad w_i^k \quad \phi_i^k \quad \cdots \right\}, \quad k = \alpha, \alpha + 1 \quad i = 1, \dots, p + 1 \quad (201)$$

Na Eq. (199), para as funções com ordem ímpar para cada valor de k , $i = 1, \dots, \frac{p+1}{2}$, para os índices pares se tem para cada valor de k , $i = 1, \dots, p + 1$, este fato se deve a que as funções de ordens pares são validas para os intervalos $-1 \leq r \leq 0$ e $0 \leq r \leq 1$. A partir das

equações (200) e (201) são determinadas as matrizes \mathbf{K}_e , \mathbf{M}_e e o vetor de forças consistentes \mathbf{F}_e de forma idêntica à descrita nas equações (91) a (93).

b) Formulação para o elemento sobre a fronteira de Dirichlet

Como foi citado anteriormente as funções de forma *B-Spline* não possuem a propriedade delta de Kronecker sendo assim as condições de contorno essenciais neste trabalho são impostas por meio de penalidades externas por barreiras. A formulação discretizada para incorporar a penalidade no elemento de fronteira é definida na Eq. (202) como segue.

$$\mathbf{K}_{pe} = \int_{\partial\Sigma_N} \lambda \mathbf{N}_{pe}^T \mathbf{N}_{pe} d\partial\Sigma \quad (202)$$

Na Eq. (202) λ é o fator de penalidade e \mathbf{N}_{pe} é a matriz de funções de forma que contempla a penalidade definida por:

$$\mathbf{N}_{pe} = \begin{bmatrix} \cdots & S_v \phi_i^k(r) & 0 & S_\varphi \phi_i^k(r) \frac{t_k}{2} \zeta v_{2k}^r & \cdots \\ \cdots & 0 & S_w \phi_i^k(r) & S_\varphi \phi_i^k(r) \frac{t_k}{2} \zeta v_{2k}^z & \cdots \end{bmatrix} \quad (203)$$

Na Eq. (203) S_v , S_w e S_φ , tem valor 1 quando os graus de liberdade v , w e φ são prescritos e zero quando não são prescritos.

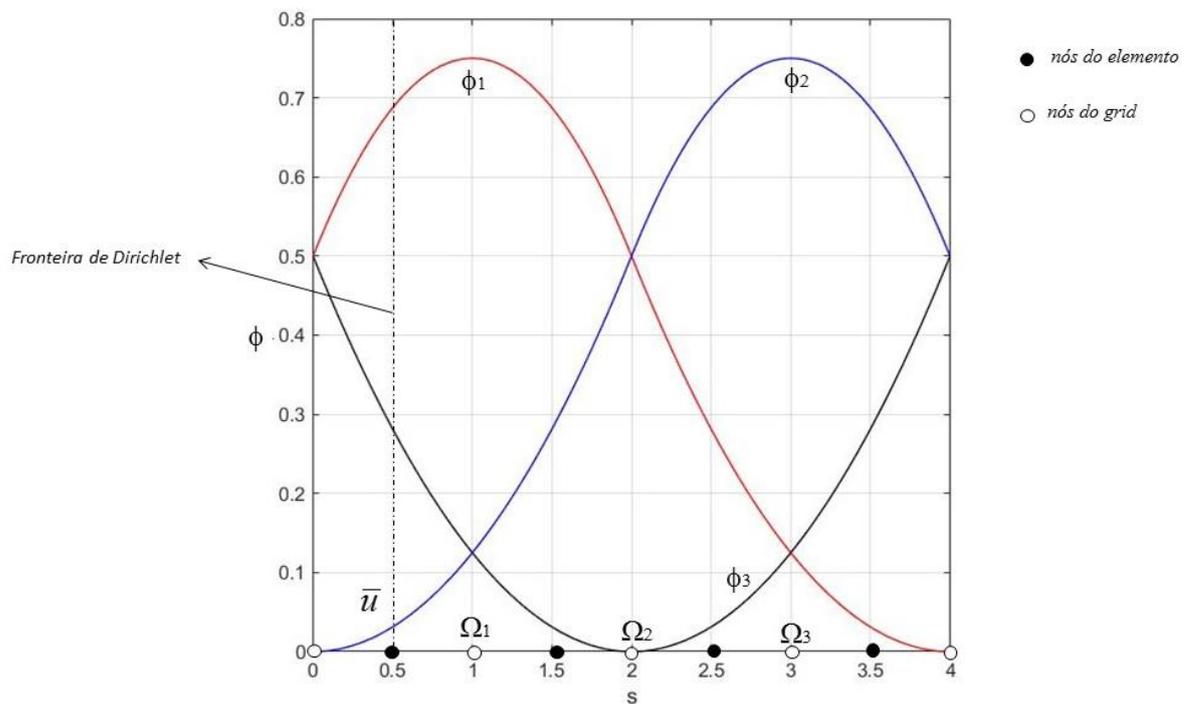
Nas fronteiras onde há necessidade de impor as condições de contorno de forma fraca a parcela da rigidez correspondente a penalização é composta de duas matrizes: uma é adicionada à matriz de rigidez global descrita pela Eq. (204) e segunda descrita pela Eq. (205) é adicionada ao vetor global de forças consistentes.

$$\mathbf{K}_{ep} = \int_{\partial\Sigma_{eD}} \lambda \mathbf{N}_{pe}^T \mathbf{N}_{pe} d\partial\Sigma \quad (204)$$

$$\mathbf{F}_{ep} = \int_{\partial\Sigma_{D_e}} \lambda \mathbf{N}_{ep}^T \mathbf{N}_{ep} d\partial\Sigma \bar{\mathbf{U}} \quad (205)$$

Na Eq. (205) \bar{U} é o vetor de parâmetros de deslocamentos prescritos na fronteira de Dirichlet associados as funções B-Spline que tem valores não nulos sobre esta fronteira. Um exemplo desta consideração é mostrado na Figura 23.

Figura 23 - Funções B-Spline de aproximação global de ordem $p = 2$. Fronteira de Dirichlet na cota $s = 0.5$ onde as funções ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 apresentam valores não nulos no nó 1 do elemento Ω_1



Fonte: Próprio Autor

No exemplo mostrado na Figura 23 as funções globais ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 tem valores não nulos no nó do elemento Ω_1 onde são prescritas as condições de contorno de essenciais e o vetor \bar{U} é descrito pela Eq. (206) como segue.

$$\bar{U}^T = \left\{ \dots \quad \bar{v}_i^1 \quad \bar{w}_i^1 \quad \bar{\varphi}_i^1 \quad \dots \right\}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (206)$$

7. RESULTADOS NUMÉRICOS

7.1. INTRODUÇÃO

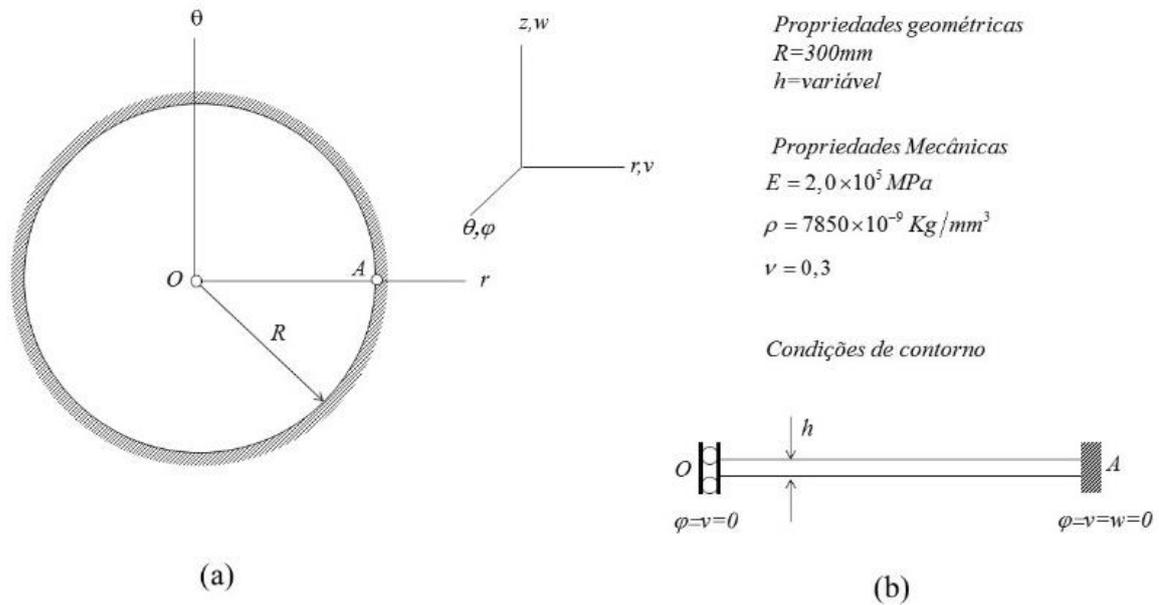
O capítulo de resultados numéricos será abordado através da discussão de quatro estudos de caso que sejam:

- a) Estudo dos efeitos de travamento devido à cisalhamento sobre a primeira frequência natural em placas circulares;
- b) Análise dos efeitos da regularidade dos espaços de aproximação obtidos segundo MEFG, H-FEM e FEM *B-Spline* na convergência para uma frequência alvo específica;
- c) Estudo do erro relativo das frequências naturais com relação a uma solução de referência para um intervalo definido por 50% dos primeiros modos aproximados numericamente;
- d) Estudo de convergência de autovalores para verificação da influência da regularidade dos espaços de aproximação globais;
- e) Estudo dos efeitos de vibração forçada produzido por forças impulsivas aplicadas no plano de simetria radial em cascas de revolução cilíndricas e esféricas.

7.2. RESULTADOS OBTIDOS PARA OS EFEITOS DE TRAVAMENTO POR CISALHAMENTO NA PRIMEIRA FREQUENCIA NATURAL DE UMA PLACA CIRCULAR

O estudo do efeito de travamento de cisalhamento sobre o primeiro modo natural de vibração livre foi verificado por meio da primeira frequência natural para uma placa circular com propriedades geométricas mecânicas e condições de contorno indicadas na Figura 24.

Figura 24 - a) Placa circular engastada; b) Propriedades geométricas, mecânicas e condições de contorno



Fonte: Próprio Autor

Os resultados obtidos foram analisados por meio do erro relativo da primeira frequência natural determinado pela Eq. (207) juntamente com o número de condição da matriz de rigidez descrita na Tabela 4 por R/h . A análise do número de condição se faz necessária em decorrência da matriz de rigidez ficar mal condicionada para valores muito pequenos da espessura.

$$E_r = \frac{|\omega_h - \omega_a|}{|\omega_a|} \quad (207)$$

Na Eq. (207) ω_a são os resultados analíticos para primeira frequência natural do modelo de placa fina obtidos segundo Wang e Wang (2014).

Os resultados obtidos referem-se aos seguintes estudos de caso:

- A. Espaço de aproximação gerados segundo MEFG com o domínio discretizado com um *grid* uniforme de treze nós e funções de aproximação obtidas por enriquecimento explícito e homogêneo da PU $C_0^2(\Sigma)$ com funções polinomiais de ordem $p = 3$. Na construção do modelo foram utilizados 151 graus de liberdade.

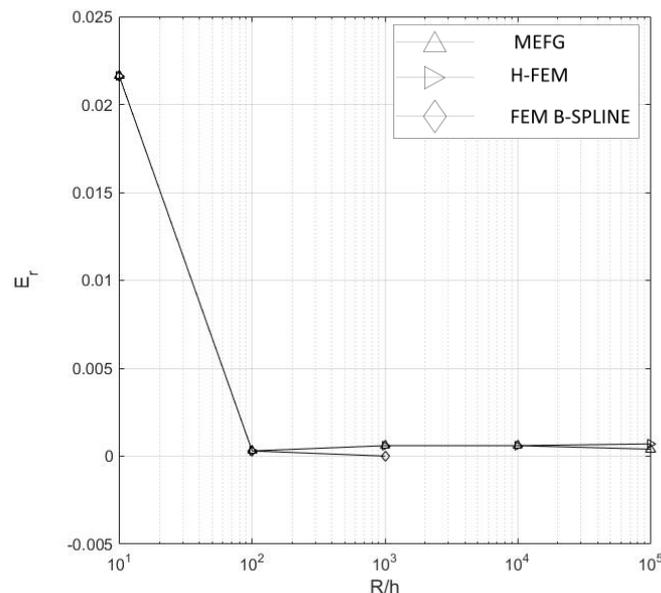
- B. Espaço de aproximação obtido segundo H-FEM com o domínio discretizado com um grid uniforme de 25 nós, funções de aproximação Hermitianas de ordem $p = 3$ e regularidade $C_0^1(\Sigma)$. Na construção do modelo foram utilizados 145 graus de liberdade.
- C. Espaço de aproximação com regularidade $C_0^2(\Sigma)$ obtido segundo o método FEM B-Spline a partir de um grid constituído de 48 nós e funções de partição de unidade de ordem cúbica. O modelo numérico foi obtido com 150 graus de liberdade.

Os resultados dos estudos de caso A, B e C são mostrados por meio da Tabela 4 e da Figura 25.

Tabela 4 - Resultados de E_r

R/h	A - MEFG	B - H-FEM	C - FEM B-Spline
10	0,0261	0,0261	0,0261
10^2	0,0003	0,0003	0,0003
10^3	0,0006	0,0006	0,000007
10^4	0,0006	0,0006	-----
10^5	0,0004	0,0007	-----

Figura 25 - Efeitos de travamento na primeira frequência natural para as estratégias A, B e C



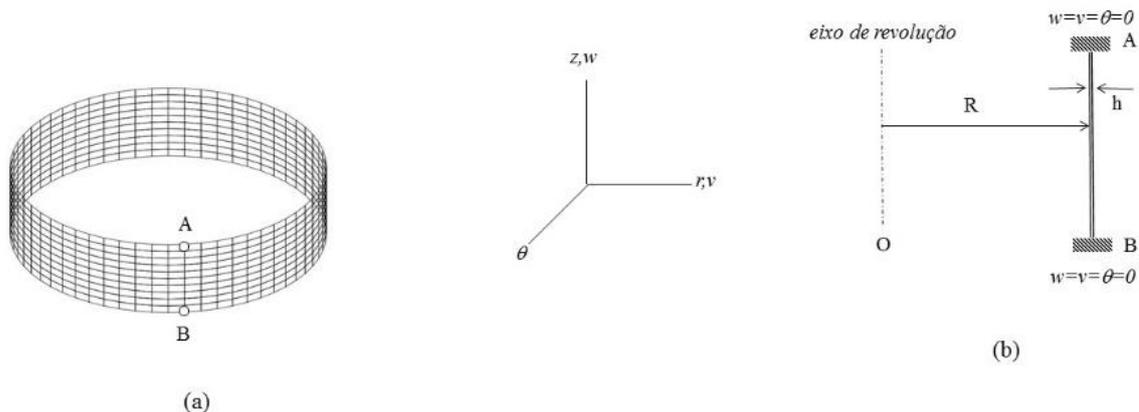
Fonte: Próprio Autor

Por meio do erro relativo mostrado na Figura 25 é possível concluir que para análise de travamento em função de esforço de cisalhamento o Caso A apresenta melhores resultados em relação aos demais métodos. O Caso B, apesar de apresentar um erro relativo superior ao caso A, apresenta custos computacionais inferiores por utilizar uma menor regularidade em suas funções de aproximação. Já para o Caso C não houve convergência de resultados para as relações de R/h de 10^4 e 10^5 . Para todos os casos supracitados não houve ocorrência de travamento de membrana por cisalhamento. A imposição de condições de contorno necessárias para o MEFG impõe erros maiores em relação aos métodos H-FEM e FEM B-Spline. O ganho computacional da utilização do método H-FEM, para este estudo de caso, representou um ganho computacional de 40%, em função de sua rápida convergência.

7.3.RESULTADOS DE CONVERGÊNCIA PARA FREQUÊNCIA ALVO

O estudo de caso proposto neste exemplo tem como finalidade analisar a performance dos espaços de aproximação construídos segundo a versão p : do MEF, do MEFG, do H-FEM e do FEM B-Spline, com relação à convergência para uma frequência alvo previamente estabelecida. O estudo de caso é feito para uma casca cilíndrica curta com as propriedades geométricas, mecânicas e condições de contorno indicadas na Figura 26.

Figura 26 - a) casca cilíndrica curta; b) condições de contorno e dimensões



R	300 mm
h	3 mm
H	150 mm

E	2,05e5 MPa
ρ	7,850e-6 kg/mm ³
ν	0,3

Fonte: Próprio Autor

Em virtude da dificuldade de se encontrar uma solução analítica para o modelo vibrações livres de uma casca cilíndrica semi-espessa é utilizada uma solução de referência obtida através da *Rule of Thumb* proposta por Givoli (2008) na Eq. (208).

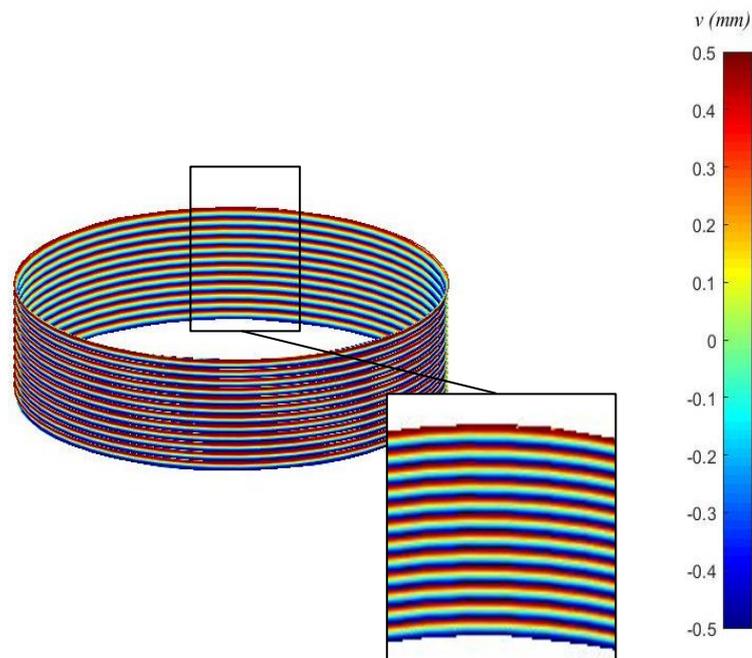
$$\mathbf{M} = r_o \boldsymbol{\varepsilon}^{d/(2p)} \mathbf{N} \quad (208)$$

Na Eq. (208) $r_o = 1$, d é a dimensão do espaço de aproximação, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o erro de aproximação desejado, p é a ordem do espaço de aproximação, N é o número de graus de liberdade utilizados para aproximar o problema elíptico de autovalores/autovetores e M a ordem de frequência desejada.

A solução de referência é obtida a partir de um espaço de aproximação com regularidade $C^0(\Sigma)$ construído com cinquenta elementos Lagrangeanos unidimensionais de quinta ordem que aproximam a solução com 747 graus de liberdade.

A frequência alvo do estudo de caso proposto é $\omega = 6554,13460\text{Hz}$ correspondente ao autovalor descrito no plano de simetria radial indicados na Figura 27. A frequência alvo é o autovalor associado foram obtidos a partir da Eq. (208) para um erro $\boldsymbol{\varepsilon} = 1 \times 10^{-12}$.

Figura 27 – Autovalor axissimétrico associado a ordem $m=42$



Os resultados são obtidos através do erro relativo indicado na Eq. (208) para as estratégias A-D discriminadas a seguir e detalhados na Tabela 5 e Figura 28.

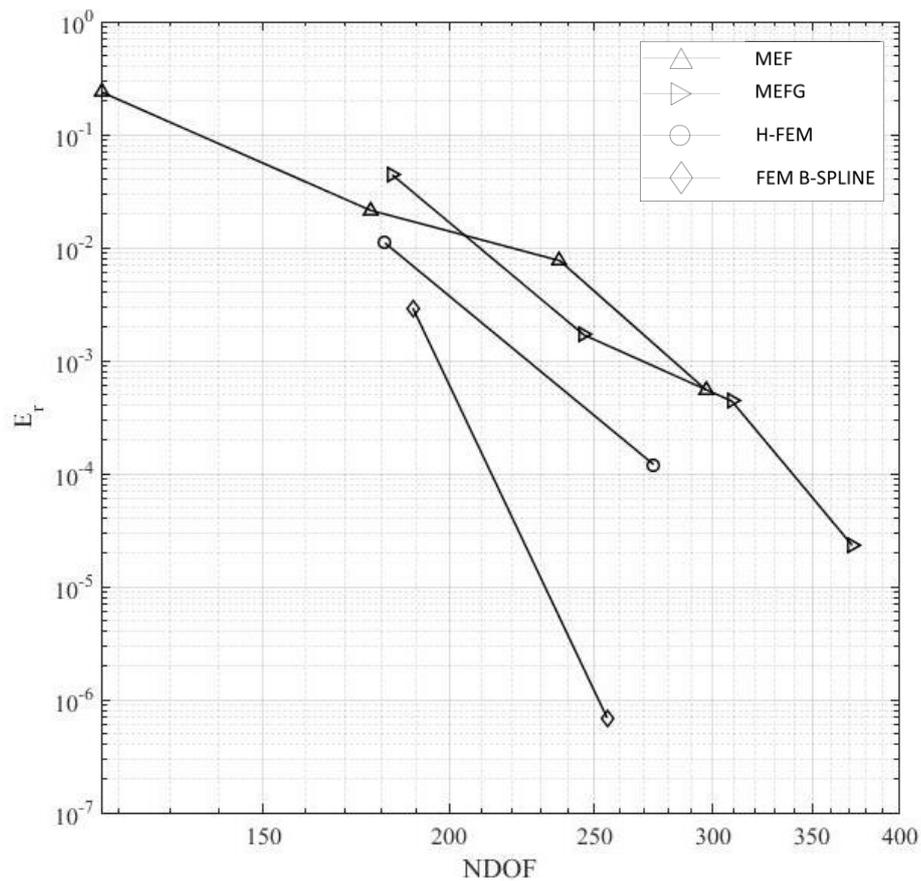
- A. Espaço de aproximação com regularidade $C^0(\Sigma)$ obtido a partir do Método de Elementos Finitos com vinte elementos Lagrangeanos unidimensionais definidos no conjunto $L = \{L_2, L_3, L_4, L_5\}$;
- B. Espaço de aproximação obtido a partir do Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG) por enriquecimento explícito da PU com regularidade $C^2(\Sigma)$ com funções polinomiais de ordem $p = \{2, 3, 4, 5\}$ e um *grid* constituído de vinte e um nós.
- C. Espaços de aproximação com regularidade $C^1(\Sigma)$ e $C^2(\Sigma)$ obtidos segundo Método Elementos Finitos Hermite Generalizado (H-FEM) com um *grid* de trinta e um nós e ordens $p = \{3, 5\}$.
- D. Espaços de aproximação obtidos a partir do FEM B-Spline com ordens polinomiais $p = \{3, 5\}$ e um *grid* constituído cinquenta e cinco nós.

$$E_r = \frac{|\omega_h - \omega_a|}{|\omega_a|} \quad (208)$$

Tabela 5 - Resultados do autovalor associado a ordem m=42

<i>A - MEF</i>		<i>B - MEFG</i>		<i>C - H-FEM</i>		<i>D - FEM B-Spline</i>	
<i>NDOF</i>	ω_h	<i>NDOF</i>	ω_h	<i>NDOF</i>	ω_h	<i>NDOF</i>	ω_h
117	8106,2671	183	6843,9161	-----	-----	-----	-----
177	6694,3436	246	6565,2037	181	6626,30967	189	6573,20249
237	6604,4264	309	6557,0090	-----	-----	-----	-----
297	6557,7400	372	6554,2868	274	6554,92193	255	6554,139107

Figura 28 - Erro relativo com relação à frequência ω_{42}



Fonte: Próprio Autor

Os melhores resultados foram encontrados para o método FEM B-Spline, o qual apresentou convergência dos resultados de forma mais eficiente que os demais métodos. Em função da maior regularidade do campo interpolado pelos métodos H-FEM e FEM B-Spline, os erros relativos foram menores em relação aos métodos MEF e MEFG. Foi possível confirmar que o MEF não é uma boa alternativa para aproximação de frequências relativamente altas.

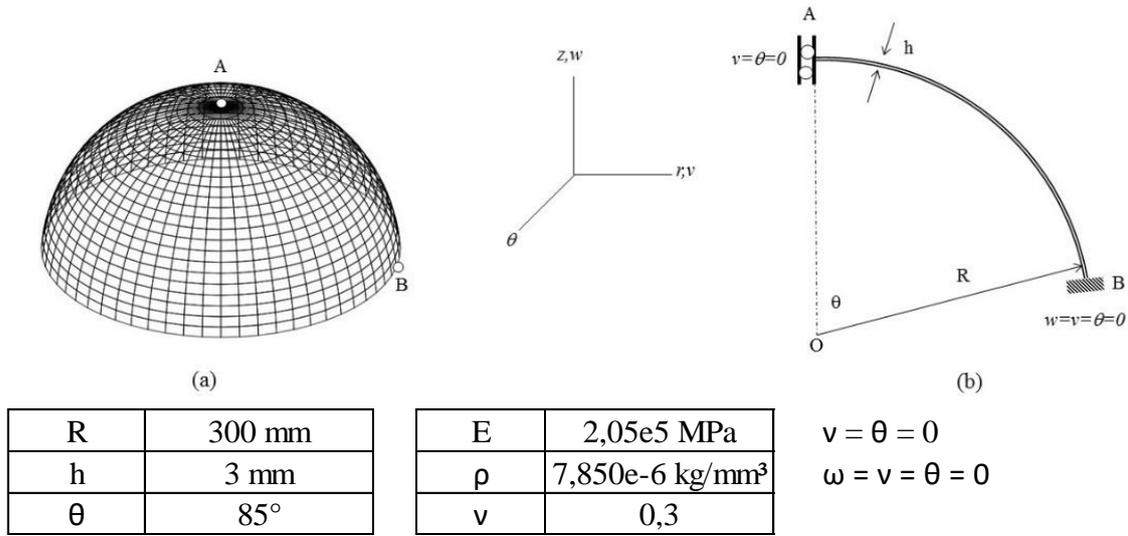
7.4.RESULTADOS COMPARATIVOS COM RELAÇÃO À SOLUÇÃO ANALÍTICA DE CASCA HEMISFÉRICA FINA PROPOSTA POR KUNIEDA

Este estudo de caso tem com finalidade mostrar a proximidade de resultados obtidos para os valores normalizados das dez primeiras frequências naturais obtidas por Kunieda (1984) considerando as inercias das duas componentes do campo de deslocamento (v, w) e os modelos numéricos que constroem os espaços de aproximação segundo: O Método de Elementos Finitos

(MEF); o Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG); O Método de Elementos Finitos Hermite Generalizado (H-FEM) e o Método FEM B-Spline.

Os resultados do estudo de caso referem-se a uma casca fina com propriedades geométricas, mecânicas e condições de contorno indicadas na Figura 29 a seguir.

Figura 29 - (a) Setor de calota esférica com ângulo cônico de 85°; (b) propriedades geométricas e condições de contorno no plano de simetria radial



Fonte: Próprio Autor

Os resultados obtidos referem-se aos seguintes estudos de caso:

- A. Espaço de aproximação construído segundo o Método de Elementos Finitos com uma malha de 28 elementos isoparamétricos de ordem cúbica sendo o modelo numérico construído com 250 graus de liberdade.
- B. Espaço de aproximação gerados segundo MEFG com o domínio discretizado com um grid uniforme de 21 nós ativos e funções de aproximação obtidas por enriquecimento explícito e homogêneo da $PU C_0^2(\Sigma)$ com funções polinomiais de ordem $p = 3$. Na construção do modelo numérico foram utilizados 247 graus de liberdade.
- C. Espaço de aproximação obtido segundo H-FEM com o domínio discretizado com um grid uniforme de 43 elementos, funções de aproximação Hermitianas de ordem $p = 3$ e regularidade $C_0^1(\Sigma)$. Na construção do modelo numérico foram utilizados 259 graus de liberdade.

D. Espaço de aproximação com regularidade $C_0^2(\Sigma)$ obtido segundo FEM *B-Spline* a partir de um grid constituído de 83 nós e funções de partição de unidade de ordem cúbica. O modelo numérico foi obtido com 249 graus de liberdade.

Os resultados dos estudos de caso A, B, C e D são mostrados por meio da Tabela 6 para os valores normalizados de frequências naturais definidos pela Eq. (209) a seguir.

$$\Omega_i = \left(\frac{\gamma}{Eg} \right)^{\frac{1}{2}} \omega_i R, \quad i = 1, \dots, 10 \quad (209)$$

Na Eq. (209) ω_i são as frequências naturais, contudo, notar que o valor normalizado associado Ω_i está em segundos “s”. O resultado encontrado para o exemplo estudado está descrito na Tabela 6 a seguir.

Tabela 6 – Resultados Obtidos

$\Omega(s)$	<i>Kunieda</i>	<i>A - MEF</i>	<i>B - MEFG</i>	<i>C - H-FEM</i>	<i>D - FEM B-Spline</i>
1	0,7900	0,7900	0,7900	0,7900	0,7921
2	0,9470	0,9470	0,9470	0,9470	0,9478
3	0,9910	0,9910	0,9910	0,9910	0,9917
4	1,033	1,0320	1,0325	1,0322	1,0335
5	1,093	1,0920	1,0926	1,0921	1,0944
6	1,182	1,1800	1,1811	1,1802	1,1840
7	1,305	1,3020	1,3033	1,3014	1,3073
8	1,462	1,4560	1,4590	1,4562	1,4638
9	1,624	1,6190	1,6216	1,6184	1,6210
10	1,712	1,7060	1,7102	1,7062	1,7221

7.5.RESULTADOS DE CONVERGÊNCIA DE AUTOVALORES

A convergência de autovalores foi realizada para o exemplo do cilindro curto com propriedades geométricas mecânicas e condições de contorno indicadas na Figura 31. Este estudo de caso tem como objetivo verificar a influência da regularidade dos espaços de aproximação globais construídos segundo MEF, MEFG, H-FEM e FEM *B-Spline*. As

estratégias construídas a partir das metodologias supracitadas terão a mesma ordem polinomial e graus de liberdade próximos, tornando o quanto possível, a influência dos resultados dependentes apenas da regularidade dos espaços de aproximação global. A influência da regularidade dos espaços de aproximação global unidimensionais na aproximação de problemas elípticos de autovalores e autovetores é constatada através do estimador a priori de Eq. (208), Givoli (2008).

$$e_i = |\lambda_i^h - \lambda_i| \leq Ch^{2(p-k)} \lambda_i^{(p+1)/(k+1)} \quad (210)$$

Na Eq. (210) $h e_i$ é a estimativa do erro a priori correspondente ao autovalor “ i ”, λ_i^h e λ_i são os autovalores aproximados e exatos de ordem “ i ”, h é a dimensão do elemento, p é a ordem polinomial e k é a regularidade do espaço de aproximação global. A constante C é independente de h , λ_i^h , λ_i , p e k . Da análise da Eq. (210) fica claro que para um determinado autovalor λ_i o aumento da regularidade diminui a estimativa de erro a priori assim como o aumento da ordem polinomial aumenta a estimativa deste erro. Nos espaços de aproximação global do tipo $C^0(\Sigma)$ como é o caso dos espaços de aproximação global obtidos segundo o MEF é comum se notar descontinuidades no digrama do espectro de autovalores a partir de uma determinada ordem denotando os chamados *Branches* acústicos e óticos (Hughes (1987)).

O incremento da ordem polinomial do espaço de aproximação produz um aumento da ordem na qual ocorre a descontinuidade no espectro de autovalores este fato foi constatado em Cottrel et al (2006).

Neste exemplo serão comparados os erros relativos descritos pelas Eq. (211) dos autovalores de ordem definidas nos intervalos $\{\lambda_i^h\}_{i=1}^{40}$ e $\{\lambda_i^h\}_{i=40}^{80}$.

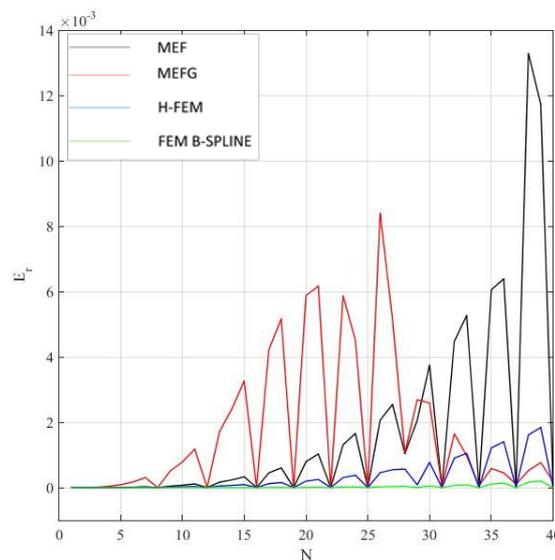
$$E_r = \frac{|\lambda_i^h - \lambda_i|}{|\lambda_i|} \quad (211)$$

Na Eq. (211) os autovalores λ_i^h são os autovalores aproximados obtidos pelos espaços de aproximação das estratégias de A-D propostas a seguir e λ_i é o autovalor correspondente a solução de referência utilizada no exemplo da frequência alvo (item 7.3). As estratégias utilizadas para construir os espaços de aproximação global são descritas a seguir.

- i. Caso A: Espaço de aproximação construídos segundo o MEF com vinte e oito elementos lagrangeanos de terceira ordem. O modelo numérico aproxima o problema com 249 graus de liberdade;
- ii. Caso B: Espaço de aproximação obtido a partir do Método de Elementos Finitos Generalizados (GFEM) por enriquecimento explícito e homogêneo da $PU(C^2(\Sigma))$ com funções polinomiais de ordem $p = 3$ com suportes sobre um grid de vinte e um nós. O modelo numérico aproxima o problema com 246 graus de liberdade;
- iii. Caso C: Espaços de aproximação com regularidade $C^1(\Sigma)$ obtidos segundo Método Elementos Finitos Hermite Generalizado (H-FEM) com um grid de quarenta elementos de ordem polinomial $p = 3$. O modelo numérico aproxima o problema com 240 graus de liberdade;
- iv. Caso D: Espaço de aproximação obtido a partir do FEM B-Spline com ordem polinomiais $p = 3$ e um grid constituído oitenta e um nós. O modelo numérico aproxima o problema físico com 249 graus de liberdade.

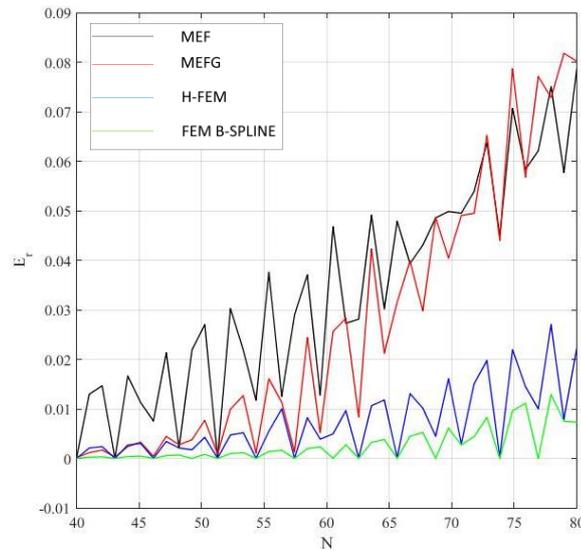
Os resultados de convergência para dois intervalos de erros relativos são mostrados nas Figura 31 e Figura 32, considerando os intervalos de $1 \leq N \leq 40$ e $40 \leq N \leq 80$, respectivamente.

Figura 30 - Erro relativo de autovalores para o intervalo de $1 \leq N \leq 40$;



Fonte: Próprio Autor.

Figura 31 - Erro relativo dos autovalores no intervalo de $40 \leq N \leq 80$



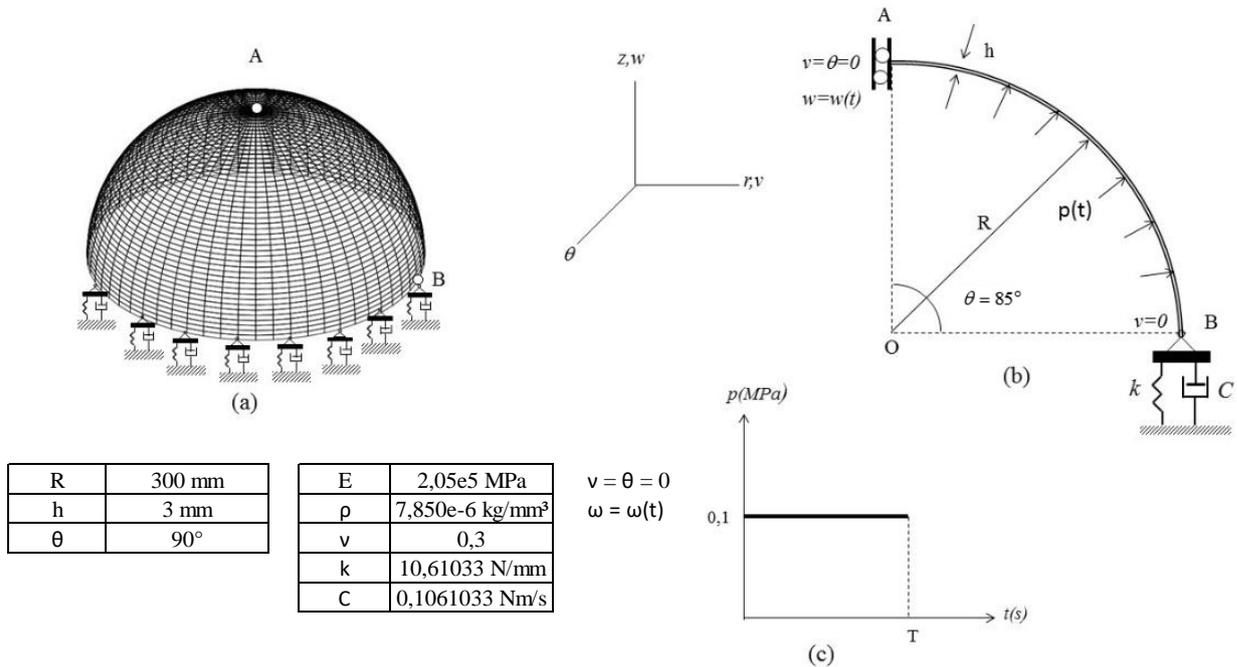
Fonte: Próprio Autor.

Todos os métodos analisados obtiveram erros relativos baixos em relação à solução de referência. O método que apresentou o pior desempenho foi o MEF em função de sua baixa regularidade das funções de aproximação. Para o método MEFG, a regularidade das funções de aproximação não é a mesma do campo interpolado, demonstrando, portanto, variação no erro relativo de acordo com o intervalo de tempo. Os métodos numéricos não convencionais com resultados mais satisfatórios, para ambos intervalos de erro relativo foram o H-FEM e o FEM *B-Spline*.

7.6.RESULTADOS DE VIBRAÇÕES LIVRES E FORÇADAS EM CASCAS ESFÉRICAS

Os resultados mostrados neste exemplo para o deslocamento transversal no topo da casca e para o esforço normal na direção radial na base em B foram obtidos para uma casca esférica com propriedades mecânicas geométricas e condições de contorno indicados na Figura 32.

Figura 32 - a) Cascas hemisférica; b) Propriedades geométricas e condições de contorno; c) pressão definida por um pulso com duração T.



Fonte: Próprio Autor.

Na Figura 32 são mostradas as condições de contorno utilizada, entretanto, serão analisados resultados considerados três tipos de condição de contorno que sejam:

- Condição de contorno rígida simplesmente apoiada no vínculo B;
- Condições de contorno para simular uma função Pasternak visco elástica associada ao vínculo B com relação ao grau de liberdade w conforme indicado na Figura 32.

Os resultados foram analisados por meio do comportamento no tempo do deslocamento transversal $w_A(t)$ no ponto A topo da casca e do esforço normal $N_\theta(t)$ no ponto B da base da casca. Por falta de uma solução analítica para modelo de cascas moderadamente espessas os resultados foram comparados a solução de referência utilizada no estudo de caso para a análise de convergência alvo descrita neste exemplo pela estratégia A. Na integração do tempo das equações dinâmicas foi utilizado o método de Newmark com intervalos de tempo $\Delta t = 1,0e - 4s$ utilizado no estudo de caso a e $\Delta t = 1,0e - 3s$ utilizado nos estudos de caso b. Os espaços de aproximação utilizados nos estudos de caso são discriminados a seguir:

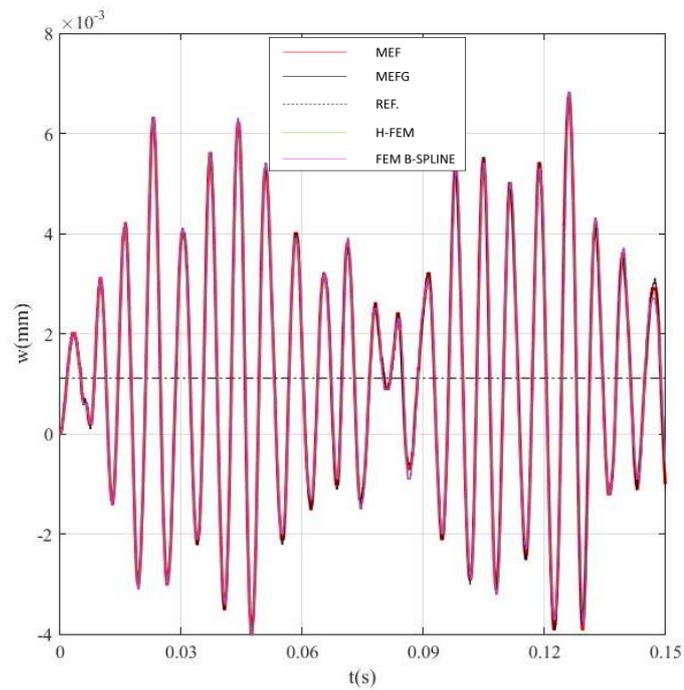
- A. Espaço de aproximação com regularidade $C^0(\Sigma)$ construído com cinquenta elementos Lagrangeanos unidimensionais de quinta ordem que aproximam a solução com 747 graus de liberdade conforme o MEF.
- B. Espaço de aproximação com regularidade $C^2(\Sigma)$ construídos segundo o MEFG com um grid de 25 nós ativos e enriquecimento explícito e homogêneo da PU com funções polinomiais de ordem $p = 2$. O problema foi aproximado com 222 graus de liberdade.
- Soluções de deslocamento transversal w_A e do esforço normal N_θ obtidos para o problema estático com vínculo rígido e com de fundação elásticas de Pasternak no ponto B. Os resultados foram obtidos com a estratégia A e apresentados na Tabela 7, sendo a solução de referência, representada pela linha pontilhada.
- C. Espaço de aproximação com regularidade $C^1(\Sigma)$, construído segundo H-FEM, com ordem polinomial $p = 3$. O modelo foi aproximado com grid de quarenta elementos quadráticos e foram utilizados 243 graus de liberdade.
- D. Espaço de aproximação com regularidade $C^2(\Sigma)$ construído segundo FEM B-Spline com ordem polinomial $p = 3$. O modelo numérico foi construído a partir de oitenta elementos quadráticos resultado num grid de oitenta e um nós sendo o problema linear aproximado com 249 graus de liberdade.

Tabela 7 - Resultados do problema estático para as estratégias i e ii

<i>Case</i>	w_A (mm)	N_θ (N)
<i>Rígido</i>	0,0011125	4,55007
<i>Elástico-Pasternak</i>	1,4148067	4,50060

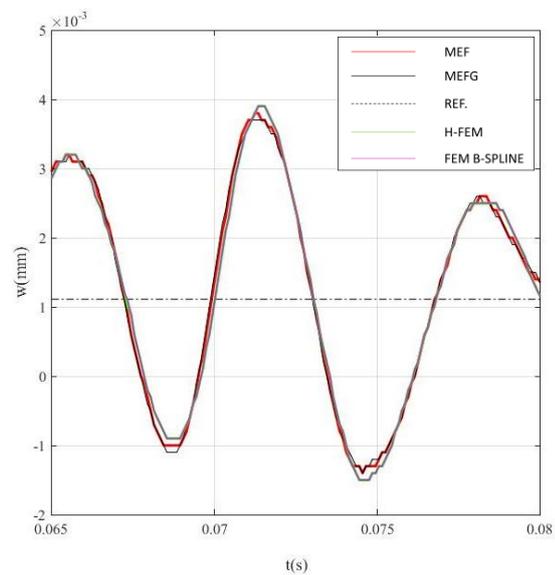
- Resultados do deslocamento $w_A(t)$ e do esforço normal $N_\theta^B(t)$ forma obtidos para pressão indicada na Figura 33 aplicada num intervalo de $t = 0,15s$. Os comportamentos do descolamento transversal estão descritos nas Figura 33 e 34 e para esforço normal nas Figura 35 e 36 a seguir.

Figura 33 - Deslocamento transversal w_A no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 0,15s$



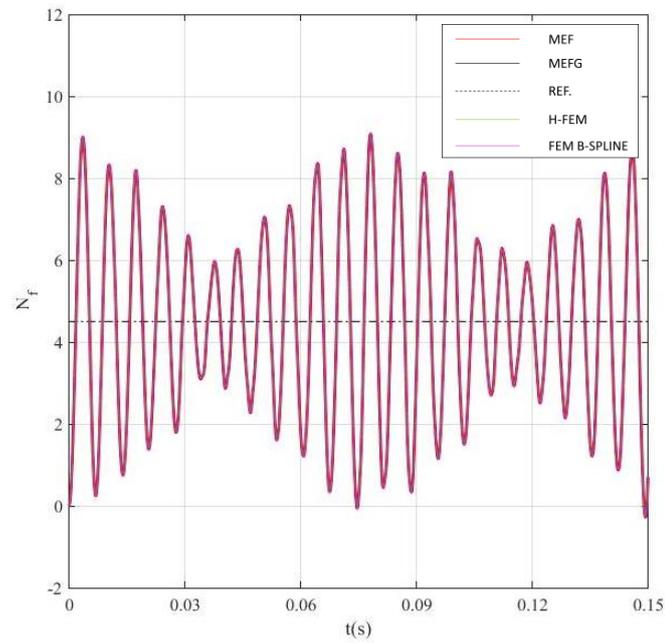
Fonte: Próprio Autor.

Figura 34 - Deslocamento transversal w_A no intervalo de tempo $0,06s \leq t \leq 0,08s$



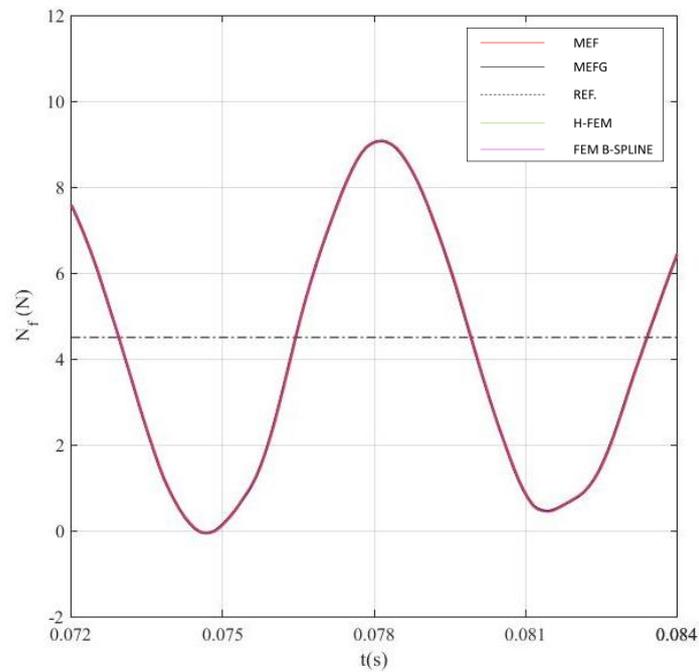
Fonte: Próprio Autor.

Figura 35 - Comportamento do esforço normal $N_\theta(N)$ no ponto B no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 0.15s$



Fonte: Próprio Autor.

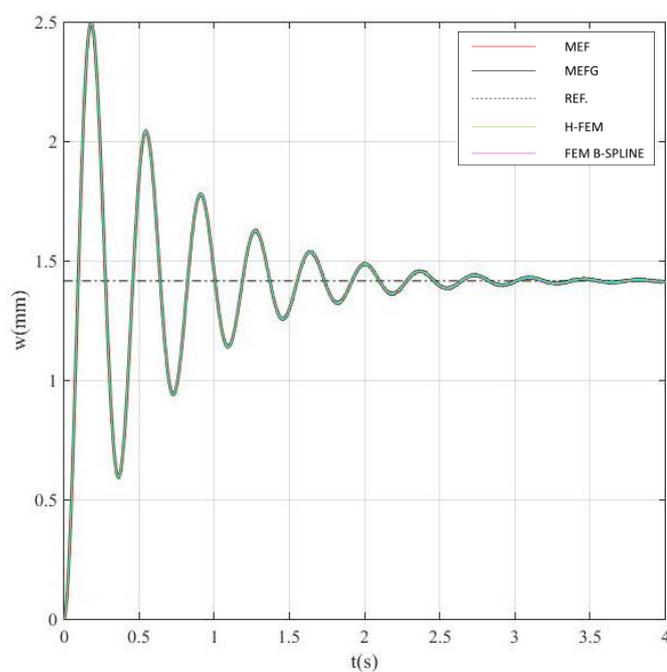
Figura 36 - Comportamento do esforço normal $N_\theta(N)$ no intervalo de tempo $0,06s \leq t \leq 0,08s$



Fonte: Próprio Autor.

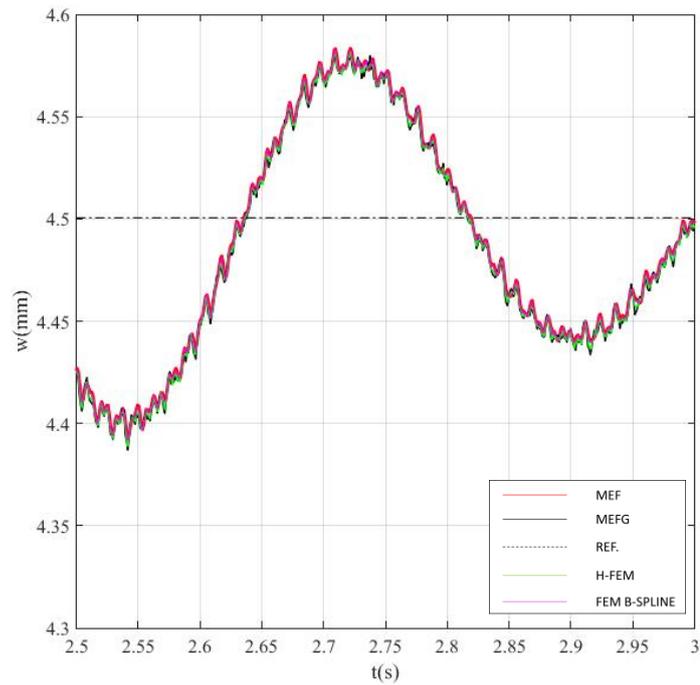
- b) O exemplo analisado neste estudo de caso é constituído de uma modelo simplificado para uma fundação visco elástica representada por um sistema mola amortecedor com propriedades mecânicas indicadas na Figura 32. Neste exemplo foi considerado um intervalo do pulso de aplicação da pressão de $t = 4s$. Ao contrário do exemplo anterior as soluções obtidas neste estudo de caso experimentam perda de energia dinâmica por conta do amortecimento e convergem com o tempo para a solução estática sob fundação elástica tipo Pasternak como os valores indicados na Tabela 7. Os resultados em deslocamento transversal e esforço normal correspondentes às estratégias propostas são mostradas nas Figura 37-38 para deslocamento transversal e Figura 39-40 para esforço normal.

Figura 37 - Comportamento do deslocamento transversal w_A no intervalo $0s \leq t \leq 4s$



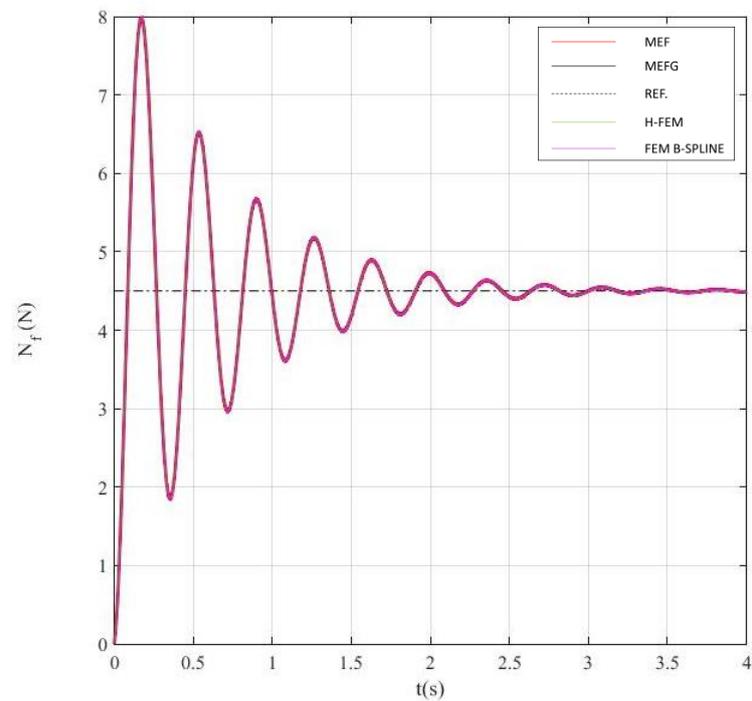
Fonte: Próprio Autor.

Figura 38 – Comportamento do deslocamento transversal w_A no sub intervalo $2,5s \leq t \leq 3s$.



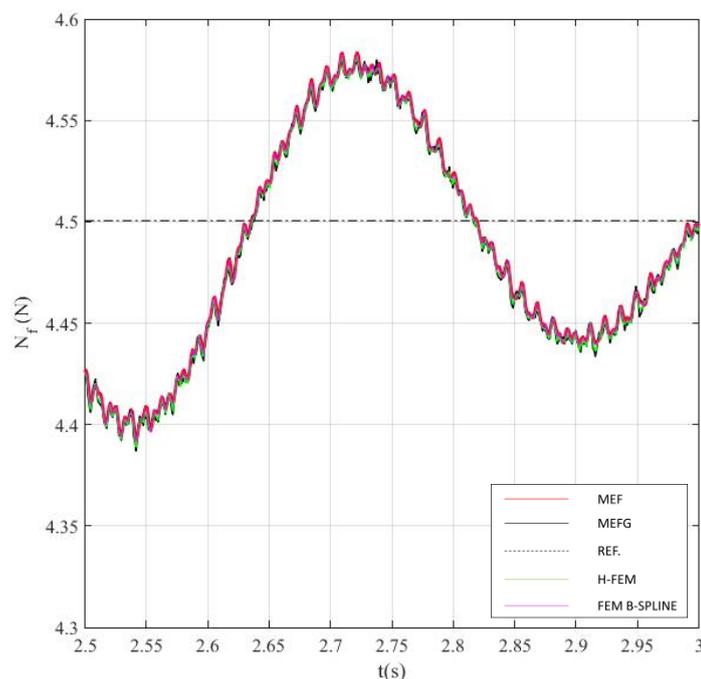
Fonte: Próprio Autor.

Figura 39 - Comportamento no tempo do esforço normal $N_\theta(t)$ para o intervalo $0s \leq t \leq 4s$



Fonte: Próprio Autor.

Figura 40 - Comportamento no tempo para $N_\theta(t)$ no subintervalo $2,5s \leq t \leq 3s$



Fonte: Próprio Autor.

Para os casos D e E os resultados apresentados foram melhores em relação aos casos B e C. A mesma condição de regularidade das funções de aproximação determina o nível de precisão dos resultados. Para o caso B a regularidade $C^2(\Sigma)$ não é garantida na integração dos campos de aproximação, demonstrando erros relativos ligeiramente superiores em relação aos métodos D e E. Nas Figura 38 e 40 pode-se perceber um ruído nos resultados, ocasionados pela perda de convergência pela integração no tempo, por ter sido utilizado um incremento de tempo elevado para o caso.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para a análise de travamento da placa circular sob carregamento de cisalhamento o Caso A apresenta melhores resultados em relação aos demais métodos em função da não necessidade de imposição de condições de contorno e/ou penalizações. O Caso B, apesar de apresentar um erro relativo superior ao caso A, apresenta custos computacionais inferiores por utilizar uma menor regularidade em suas funções de aproximação. Já para o caso C não houve convergência de resultados para as relações de R/h de 10^4 e 10^5 . Conforme descrito anteriormente o Caso A

(MEFG) apresenta melhor desempenho e menor erro relativo em relação aos demais métodos, considerando a análise de travamento por cisalhamento.

Para a verificação de frequência alvo, o comparativo realizado utilizando uma casca cilíndrica curta apresentou erros relativos (Figura 28) evidenciando que as estratégias B, C e D apresentaram os resultados mais próximos da solução de referência do que a estratégia A. Analisado este fato a luz do estimador a priori apresentado em Givoli (2008) pode-se concluir, para espaços de aproximação unidimensionais, que a baixa regularidade do espaço de aproximação, neste caso $C^0(\Sigma)$, juntamente com o incremento da ordem polinomial aumentam o erro em norma euclidiana com relação a solução de referência.

Em contrapartida, quando a resposta é analisada em termos de taxa de convergência nota-se um resultado satisfatório para a estratégia D para determinação de autovalores. Deve-se ressaltar aqui que neste caso além de se ter um incremento da ordem polinomial se tem um incremento na ordem da regularidade dos espaços que são $C^2(\Sigma)$ e $C^4(\Sigma)$ maiores do que nas estratégias B e C. Neste exemplo nota-se que a comparação dos resultados quando são utilizados métodos diferentes não permite conclusões categóricas apesar da tentativa de comparar espaços com mesma ordem polinomial e mesmo número de graus de liberdade para aproximar o problema.

Considerando a verificação da casca hemisférica fina, deve-se ressaltar aqui que estes resultados são ilustrativos já que se trata de modelos cinemáticos diferentes. Os resultados de frequências naturais propostos por Kunieda (1984) são referentes a um modelo de casca fina onde a parcela de inércia rotacional não é levada em consideração ao contrário do modelo utilizado neste trabalho que é o Reissner-Midlin, que leva em consideração a inércia rotacional no modelo. Uma observação pertinente a estes resultados, e certamente esperados, é que os resultados a partir da terceira frequência natural são ligeiramente menores para os modelos analisados em relação a da solução analítica proposta por Kunieda. Este fato se deve a que o modelo cinemático de Reissner-Midlin ser mais flexível em relação ao modelo casca fina, já que são levadas em conta a deformação cisalhante e a inércia rotacional.

Para convergência de autovalores, nos resultados observados nota-se diferenças relativas pequenas com relação à solução de referência para todas as estratégias analisadas, embora, nota-se uma perda gradual de convergência com relação a estratégia A e um comportamento oscilante para o Caso B. Deve-se ressaltar aqui que o Caso A corresponde aos espaços de aproximação construídos segundo MEF com regularidade $C^0(\Sigma)$ e que reconhecidamente não aproximam bem autovalores relativamente altos (acima de dez por cento

dos autovalores aproximados pelo sistema linear do problema de autovalores e autovetores). No caso da estratégia B o espaço de aproximação construído segundo MEEG tem regularidade $C^2(\Sigma)$, contudo esta regularidade não é a do campo interpolado por ele obtido. Como não se tem provas matemáticas formais sobre a influência da regularidade do espaço interpolado na precisão nos problemas de autovalores e autovetores é prematuro defender uma justificativa categórica sobre os resultados observados. Por outro lado os resultados preliminares mostrados nas Figura 33 e 34, mostra que os resultados mais próximos das soluções de referência foram obtidos pelos espaços de aproximação com regularidade $C^1(\Sigma)$ para campo interpolado obtido segundo o H-FEM (Caso C) e o espaço de aproximação com regularidade $C^2(\Sigma)$ para o campo interpolado obtido conforme FEM B-Spline (Caso D). Para todas as estratégias propostas neste estudo de caso os resultados mais próximos da solução de referência foram obtidos pela Caso D deve-se à regularidade do campo interpolado que é a maior que foi de todas as estratégias propostas.

Para os resultados de vibrações livres e forçadas, as Figura 35-36 mostram um comportamento não amortecido esperado já se trata de uma fundação rígida. Os comportamentos das estratégias analisadas são semelhantes no tempo ficando evidente dois períodos de propagação da onda mecânica no ponto A da casca. A análise do comportamento no sub intervalo $0,06s \leq t \leq 0,08s$ para as estratégias propostas mostram comportamento muito próximo da solução de referência (estratégia A) para as estratégias D e E. Em termos de regularidade da solução aproximada os campos obtidos com as estratégias D e E tem necessariamente regularidade $C^1(\Sigma)$ e $C^2(\Sigma)$, por outro lado, não se tem prova matemática formal que a regularidade do campo aproximado pela estratégia B seja $C^i(\Sigma)$, $i=1,2$. A influência da regularidade do espaço interpolado tem um papel fundamental na precisão dos modos e frequências relativamente altas (acima de 10% dos modos e frequências aproximados pelo sistema linear) (ver Givoli (2008)). Quanto maior a suavidade do campo interpolado maior será a precisão dos modos frequências aproximadas pelo sistema linear. As Figura 35-36 mostra um comportamento semelhante para as estratégias analisadas evidenciando dois períodos de propagação de onda nos intervalos $0s \leq t \leq 0,075s$ e $0,075s \leq t \leq 0,15s$. Nas Figura 38 e 40 as estratégias estudadas mostram resultados semelhantes e muito próximos da solução de referência, contudo, nas Figura 38 e 40 nota-se, na análise do subintervalo $2,5s \leq t \leq 3s$, a presença de um ruído, ou seja perda de convergência com relação ao modo harmônico amortecido para os dois casos estudados. Uma explicação possível para este fato pode estar na

perda de convergência de integração no tempo devido ao incremento ser muito elevado para o caso estudado.

Em relação aos objetivos da dissertação, conclui-se que foi possível atender aos três objetivos específicos estabelecidos onde foi possível contruir um referencial teórico consistente para os métodos numéricos não convencionais estudados, desenvolver em forma computacional para obtenção dos resultados e realizar o comparativo dos resultados obtidos para avaliação dos casos propostos. Foram desenvolvidas quatro metodologias utilizando métodos numéricos não convencionais aplicados a cascas de revolução. Também foram implementados algoritmos para avaliação de esforços e deslocamentos para todos os métodos com completa possibilidade de aplicação para casos usuais de engenharia. Em todos os casos estudados, os métodos numéricos não convencionais mostraram-se vantajosos em relação ao MEF convencional, principalmente problemas com a necessidade de verificação de frequências associadas a autovalores de alta ordem, onde a convergência é obtida somente com grandes custos computacionais. O método não convencional com melhor performance para os estudos de caso realizados neste trabalho foi o FEM *B-Spline* em função de sua rápida convergência em relação aos demais métodos estudados.

Como sugestão de continuidade aos estudos deste trabalho, fica a implementação e avaliação dos métodos numéricos não convencionais considerando também algumas incertezas. Estas incertezas podem ser oriundas de propriedades de materiais, variações geométricas das estruturas avaliadas ou até mesmo variação em seus carregamentos. A inclusão de incertezas garante modelos com grande proximidade aos modelos reais e físicos. Outro assunto relevante seria o incremento do estudos do método FEM *B-Spline*, o qual teria grande aplicabilidade nos pacotes comerciais de cálculo numérico.

BIBLIOGRAFIA

- AHMAD, S.; IRONS, B. M.; ZIENKIEWICS, O. C. **Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements.** International Journal of Numerical Methods in Engineering, 2, 419-451, 1970.
- ALBUQUERQUE, L.B. **Categorização de Tensões em Modelos de Elementos Finitos de Conexão Bocal-Vaso de Pressão.** Dissertação de Mestrado, Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, Universidade de São Paulo, 1999.
- ARNDT, M. **O Método de Elementos Finitos Generalizados Aplicados à Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas.** Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná, 2009.
- BABUSKA, I.; BANERJEE, U.; OSBORN, J.E. **On principles of the selection of shape functions for the Generalized Finite Element Method.** Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191:5595-5629, 2002.
- BABUSKA, I.; BANERJEE, U. **Stable generalized finite element method (SGFEM),** Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 201-204:91-111, 2012.
- BARRETO, E. **Utilização do Método de Correlação de Imagens na Caracterização de Materiais Metálicos e Poliméricos.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense, 2008.
- BATOZ, J.L.; DHATT, G. **Modélisation des structures par éléments finis.** 3, Editions, Hermès, Paris, 1992.
- BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; REALI, A.; SCOVAZZI, G. **Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows.** Computational Methods Applied to Mechanical Engineering, 197:173-201, 2007.
- BELYSTCHO, T.; LU, Y.; GU, L. **Element Free Galerkin Methods.** International Journal of Numerical Methods in Engineering, 37:229-56, 1994.
- BURLA, R. K. **Finite Element Analysis Using Uniform B-Spline Approximation and Implicit Boundary Method.** Tese de Doutorado, Universidade da Flórida, 2008.
- COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; REALI, A. **Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis.** Computational Methods Applied to Mechanical Engineering, 196:4160-4183, 2006.
- COTTRELL, J. A.; REALI, A.; BAZILEVS, Y.; HUGHES, T. J. R. **Isometric Analysis of Structural Vibrations.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195: 5257-5296, 2006.
- COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; BAZILEVS, Y. **Isometric Analysis Toward Integration of CAD and FEA.** 1 ed. Singapura: Wiley, 2009.

DUARTE, C. A.; BABUSKA, I.; ODEN, J. T. **Generalized Finite Element Method Three Dimensional Structural Mechanics Problems.** Computer and Structures, vol 77, pp 215-232, 2000.

DUARTE, C. A.; ODEN, T. J. **Hp Clouds A-Meshless Methods to Solve Boundary Value Problems.** Ticam Report, 1995.

EVANS, J. A.; BAZILEVS, Y.; BABUSKA, I.; HUGHES, J. R. T. **n-Widhts, sup-infs, and optimally ratios for the k-version of the isogeomtric finite element method.** Computational Methods Applied to Mechanical Engineering, 198:1726-1741, 2009.

FRANCO, J. R. Q.; PONTER, A. R. S.; BARROS, F. B. **Adaptive F.E. method for the shakedown and limit analysis of pressure vessels.** European Journal of Mechanics A/Solids, 22: 525-533, 2003.

GARCIA, O. A.; FANCELLO, E. A.; MENDONÇA, P. T. R. **Developments in the application of the generalized finite elemento method to thick shell problems.** Computational Mechanics, 44:669-682, 2009.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 4 ed. São Paulo: Atlas, 1994. 207p.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas. Uma Introdução com Aplicações usando o MATLAB.** Porto Alegre: Bookman, 2008.

GINGOLD R. A.; MARAGHAN J.J. **Smoothed particle hydrodynamics: theory and applications to non spherical stars.** Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 181:375–89, 1977.

GIVOLI, D. **On the number of reliable finite-element eigenmodes.** Communications in Numerical Methods in Engineering, 24: 1967-1977, 2008.

GU, Y. T.; LIU, G. R. **A meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for free vibration analyses for solids.** Computational Mechanics, 27: 199-198, 2001.

GUPTA, V.; DUARTE, C. A.; BABUSKA, I.; BANERJEE, U. **A stable and optimally convergente generelized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics.** Computational Methods Applied to Mechanical Engineering, 266:23-39, 2013.

GUPTA, V.; DUARTE, C. A.; BABUSKA, I.; BANERJEE, U. **Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 289:355-386, 2015.

HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. **Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement.** Computational Methods Applied to Mechanical Engineering, 194:4135-4195, 2005

HUGES, T. J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.** Prentice-Hall, Inc. A Divison of Simon & Schuster Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1987.

KOLMAN, R.; PLESEK, J.; OKROUHLIK, M. **Complex wavenumber Fourier analysis of the B-spline based finite element method.** *Wave Motion*, 51: 348-359, 2014.

KUNIEDA, H. **Flexural axisymmetric free vibrations of a spherical dome: Exact results and approximate solutions.** *Journal of Sound and Vibration*, 92: 1-10, 1984.

LIEW, K. M.; HUANG, Y. Q.; REDDY, J. N. **Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method.** *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:2203-2222, 2003.

LIU, G. R. **Meshfree methods: Moving beyond the finite element method.** CRC Press In LLC, 2010.

THOMPSON, L. L.; PINSKY, P. M. **Complex wavenumber Fourier analysis of the p-version finite element method.** *Computational Mechanics*, 13: 255–275, 1994.

MAZZOCHI R.; ROSSI. R.; SUAREZ O. A. G. **High regularity quadrilateral Hermitian finite element applied to the approximation of natural frequencies of free vibration and elastic response of forced vibration.** CILAMCE, 2014.

MELENK, J.M.; BABUSKA, I. **The partition of unity finite element method: Basic theory and applications.** *Computer Methods in Applied and Engineering*, Vol. 139, No 1-4, pp. 289-314, 1996.

MESQUITA, D. M.; CODA, H. B. **Uma Formulação dos Elementos Finitos Aplicada à Análise Elastoplástica de Cascas.** *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, v. 7, n. 22, p. 89-105, 2005.

NADERI, A.; BARADARAN, G. H. **Element Free Galerkin Method for Static Analysis of Thin Micro/Nanoscale Plates Based on the Nonlocal Plate Theory.** *International Journal of Engineering*, Vol. 26, No 7, pp. 795-806. 2013.

ODEN, J. T.; DUARTE, C. A.; ZIENKIEWICZ, O. C. **A new cloud-based hp finite element method.** *Computer Methods in Applied and Engineering*, Vol. 153, No 1-2, pp. 117-126, 1996.

ODEN, J. T.; REDDY, J. N. **An introduction to the mathematical theory of finite elements.** John Wiley and Sons, New York, 1976.

REISSNER, E., **The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates,** *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12, pp. A68–77, 1945.

ROSSI, R.; SUAREZ, O. A. G.; SILVA, C. R. A., **Enrichment of a rational polynomial family of shape functions with regularity $C_0^k, k = 0, 2, 4$.** *Engineering Computations in International Journal of Computer-Aided Engineering and Software*, 29: 636-660, 2012.

SADATI, M.; LUAP, C.; KROGER, M.; GUSEV, A. A. OTTINGER, H. C., **Smooth full field reconstruction of velocity and its gradients from noisy scattered velocimetry data in a cross-slot flow.** *J Rheol*, 55(2):353-377, 2011.

SUAREZ, O. A. G.; ROSSI, R.; ALTAFINI C. R.; SILVA, C. R. A., **On the numerical determination of eigenvalues/eigenvectors using a high regularity finite element method.** Applied Mathematical Modelling, 39:396-413, 2015.

SUAREZ, O. A. G.; PROENÇA S. P. B. **Método De Elementos Finitos Generalizados (MEFG) na Análise de Placas Circulares e Cascas de Revolução com Simetria Radial de Forças.** Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2005.

WANG, C. Y., WANG, C. M., **The vibration modes of concentrically supported free circular plates.** Journal of Sound and Vibration, 333: 835-847, 2014.

ZHAO, J.; ZENG, P.; PAN, B.; LEI, L.; DU, H.; HE, W.; LIU, Y.; XU, Y., **Improved Hermite finite element smoothing method for full-field strain measurement over arbitrary region of interest in digital image correlation.** Optics and Lasers in Engineering, 50:1662-1671, 2012.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method Volume 2: Solid Mechanics.** Ed. 6, Butterworth-Heinemann, 2005.