UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL
ÁREA DO CONHECIMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL - PPGMAT

LUIZ AMBROZI

JOGOS EM UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

CAXIAS DO SUL
2017

UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

JOGOS EM UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Caxias do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Isolda Gianni de Lima

CAXIAS DO SUL

2017

Jogos em uma sequência didática para o ensino de análise combinatória

Luiz Ambrozi

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Caxias do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Caxias do Sul, 13 de novembro de 2017.

Banca Examinadora:

Profª. Drª. Isolda Gianni de Lima – Orientadora
(UCS)

Profª. Drª. Laurete Zanol Sauer
(UCS)

Profª. Drª. Helena Noronha Cury
(Unifra)

A496j Ambrozi, Luiz
Jogos em uma sequência didática para o ensino de Análise Combinatória / Luiz Ambrozi. – 2017.
162 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de Caxias do Sul, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, 2017.
Orientação: Isolda Gianni de Lima.

1. Análise Combinatória. 2. Sequência Didática. 3. Jogos. 4. Fazer e Compreender. I. Lima, Isolda Gianni de, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UCS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus, por mostrar e iluminar os meus caminhos, me ensinando diariamente que todas as coisas do meu dia a dia, aqui neste mundo, possuem seu próprio tempo para serem cumpridas. E para nós, que somos seus servos e discípulos, e que estamos aqui por meio de sua graça divina, saibamos cada vez mais que o caminho da felicidade se revela na doação ao próximo.

Agradeço também ao maior presente que pude receber neste meu percurso em vida, meu irmão Lucas Ambrozi, que buscou compreender que seu irmão, neste período, teve que ter uma dedicação especial com seus estudos. Mas fica como promessa, que, após este ciclo, teremos mais tempo para desfrutarmos juntos.

Agradeço, carinhosamente, aos meus pais, Nadir Ambrozi e Teresa Dalpubel Ambrozi, meus mentores da vida, que me apoiaram em todos os instantes, para que eu conseguisse finalizar mais esta caminhada. Sem os seus conselhos e a experiência que me passaram, em todos os momentos de minha caminhada, certamente, não teria conseguido concluir este trabalho. Vocês são para mim uma verdadeira fonte de inspiração.

Agradeço à professora Isolda Gianni de Lima, orientadora, amiga e companheira, que acreditou no potencial do meu trabalho. Uma excelente pessoa, que buscou, durante este longo percurso, incentivar-me, desafiar-me e orientar-me, para que eu aperfeiçoasse cada vez mais meu trabalho e minha prática docente. Peço que Deus, com sua luz divina, sempre a ilumine, para que ela possa continuar estimulando e agraciando mais pessoas com o seu conhecimento.

Faço um agradecimento especial ao Colégio Sacalabriniano Nossa Senhora Medianeira, por ter me cedido o espaço para a realização deste projeto, com uma turma da segunda série do Ensino Médio, do ano de 2016. Agradeço ao apoio da coordenadora pedagógica, Veredianie Santarosa, e da diretora Ir. Isaura Paviani, por orientações e incentivos durante este percurso; certamente, todo o conhecimento agregado neste período será de grande valia na minha formação profissional.

Por fim, agradeço também aos meus colegas de mestrado, pelos momentos de aprendizagem e discussões, e aos meus professores, pelo conhecimento compartilhado neste período. Agradeço também à banca de qualificação e de defesa por me proporcionarem momentos ricos de discussão, aprendizagem e sugestões, para aprimorar a minha dissertação.

RESUMO

Neste trabalho desenvolve-se uma proposta de ensino para aprimorar o raciocínio combinatório, através da utilização de jogos no planejamento, na aplicação e avaliação de uma sequência didática inspirada nas orientações de Zabala, para subsidiar a prática docente no ensino de Análise Combinatória. A dissertação relata uma pesquisa que teve o intuito de explorar conceitos combinatórios por meio de atividades diversificadas, envolvendo recursos digitais, jogos e estudos orientados, a fim de fortalecer e diversificar o ensino e a aprendizagem deste conteúdo, procurando tornar as aulas mais atrativas e dinâmicas. Alguns dos jogos utilizados para a criação da sequência didática não são originais, outros já foram aplicados por pesquisadores ou professores, porém, aqui, foram reorganizados, ajustados ou adaptados de modo a adequar e potencializar a sua utilização, no contexto da prática elaborada. As várias atividades, promovidas para a realização dos jogos ou as de etapa posterior, foram planejadas de modo a explorar o raciocínio combinatório. A pesquisa é fundamentada na visão construtivista do fazer e compreender, de Piaget, e resultou como produto deste trabalho uma sequência didática denominada Dinâmica Combinatória, que integra as atividades dinamizadas numa sequência de ensino que envolve ações, direcionadas para a compreensão dos conceitos combinatórios. Juntamente com este processo de compreensão, construiu-se um espaço para os alunos explorarem, com orientação do professor, toda a simbologia que contempla o conteúdo de Análise Combinatória, a fim de que conhecessem as fórmulas que integram as técnicas de contagem. Por fim, faz-se uma avaliação da aprendizagem, com a utilização do Jogo Trilha Combinatória, criado especialmente para a aplicação dos conhecimentos construídos, por meio das ações que constituem as jogadas, verificando se ocorreu aprendizagem. A análise dos dados obtidos com a pesquisa foi qualitativa, e avaliou formulários, diários de anotações, registros fotográficos, entre outros e revelou aprendizagens e envolvimento dos estudantes para além das expectativas do pesquisador. Conclui-se que a Dinâmica Combinatória tornou-se um recurso didático potencial para a aprendizagem e o desenvolvimento do raciocínio combinatório, propiciando um processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória dinâmico e atrativo.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Sequência Didática. Jogos. Fazer e Compreender.

ABSTRACT

In this paper, a teaching proposal is developed to improve the combinatorial reasoning through the use of games in the planning, application and assessment of a didactic sequence, inspired by Zabala guidelines, to subsidize the teaching practice in Combinatorial Analysis teaching. The dissertation reports a research that aims to explore combinatorial concepts through diversified activities, involving digital resources, games and guided studies, in order to strengthen and diversify the teaching- learning process of this content, trying to make classes more attractive and dynamic. Some of the games used to create the didactic sequence are not original and some of them have already been applied by other researchers or teachers, but in this paper they have been reorganized, adapted and tailored to make them suitable and enhance their use in the practice context. The several activities, promoted for the accomplishment of the games or those of a later stage, were planned aiming to explore the combinatorial reasoning. The research is based on Piaget 's constructivist view of ” the doing and the understanding “ and resulted in a didactic sequence called Combinatorial Dynamics, which integrates the energized activities in a teaching sequence involving actions directed towards the understanding of the combinatorial concepts. Together with this process of comprehension, a space was built for students to explore, with the teacher's guidance, all the symbology that contemplates the content of Combinatorial Analysis, getting them to know the formulas which integrate the counting techniques. Finally, an evaluation of learning is made, using the Combination Track Game, created specially for the application of the constructed knowledge through games, verifying if the learning process was achieved. The research results are from a qualitative analysis that evaluated forms, journals, photographic records, among others and revealed students' learning and involvement beyond the researcher's expectations. It is concluded that Combinatorial Dynamics has become a potential didactic resource for the learning process and for the development of combinatorial reasoning, providing a dynamic and attractive Combinatorial Analysis Teaching and Learning process.

Keywords: Combinatorial Analysis. Didactic Sequence. Games. Doing and Understanding.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURAS

Figura 1 – Tabuleiro de *Stomachion* 24
Figura 2 – Tabuleiro com um quadrado mágico 25
Figura 3 – *Layout* do Jogo *Yellow Out* 40
Figura 4 – *Layout* do Jogo *Twibik* 40
Figura 5 – *Layout* do Jogo Pulo do Sapo 41
Figura 6 – Tabuleiro utilizado no Jogo do Quadrado 42
Figura 7 – Tabuleiro original do Jogo Senha 42
Figura 8 – Tabuleiro do Jogo Bicolorido 43
Figura 9 – Tabuleiro do Jogo Trilha Combinatória 44
Figura 10 – Atividades no laboratório de informática 51
Figura 11 – Alunos discutindo os desafios 54
Figura 12 – Jogo do Quadrado: Águia 1 56
Figura 13 – Jogo do Quadrado: Gama 3 56
Figura 14 – Jogo do Quadrado: Beta 3 56
Figura 15 – Jogo do Quadrado: Beta 1 57
Figura 16 – Resposta da equipe Alfa 58
Figura 17 – Resposta da equipe Ômega 58
Figura 18 – Tabuleiro do Jogo Senha adaptado (Tabuleiro do desafiado) 60
Figura 19 – Tabuleiro do Jogo Senha adaptado (Tabuleiro do desafiante) 60
Figura 20 – Tabuleiro: Ômega 2 61
Figura 21 – Tabuleiro: Delta 2 62
Figura 22 – Tabuleiro: Matrix 1 62
Figura 23 – Jogo Senha questão 1: Equipe Delta 64
Figura 24 – Jogo Senha questão 2: Equipe Águia 64
Figura 25 – Jogo Senha questão 3: Equipe Alfa 64
Figura 26 – Jogo Senha questão 4: Equipe Beta 64
Figura 27 – Jogo Senha questão 5: Equipe Matrix 65
Figura 28 – Jogo Senha questão 6: Equipe Gama 65
Figura 29 – Jogo Senha questão 7: Equipe Ômega 65

Figura 30 – Tabuleiro do Jogo Bicolorido 66
Figura 31 – Jogo Bicolorido: (Águia 1 *versus* Águia 2)........ 67
Figura 32 – Jogo Bicolorido: Beta........ 68
Figura 33 – Jogo Bicolorido: Águia 68
Figura 34 – Jogo Bicolorido: Águia 69
Figura 35 – Jogo Bicolorido: Ômega 69
Figura 36 – Jogo Bicolorido: Alfa........ 69
Figura 37 – Jogo Bicolorido: Alfa........ 71
Figura 38 – Jogo Bicolorido: Águia 71
Figura 39 – Jogo Bicolorido: Ômega 72
Figura 40 – Resposta da equipe Delta 77
Figura 41 – Resposta da equipe Beta 77
Figura 42 – Resposta da equipe Águia 78
Figura 43 – Tabuleiro do Jogo Trilha Combinatória........ 79
Figura 44 – Jogando Trilha Combinatória: Equipe + ou -........ 81
Figura 45 – Jogando Trilha Combinatória: Equipe Os Vorazes........ 81
Figura 46 – Trilha Combinatória: Equipe PPT........ 82
Figura 47 – Trilha Combinatória: Equipe + ou -........ 82
Figura 48 – Trilha Combinatória: Equipe Os Vorazes........ 83
Figura 49 – Trilha Combinatória: Equipe + ou -........ 84
Figura 50 – Pareceres dos alunos sobre a Dinâmica 86
Figura 51 – Resoluções da questão 3 da Avaliação Cumulativa........ 87
Figura 52 – Resoluções da questão 9 da Avaliação Cumulativa........ 88
Figura 53 – Análise das aulas da Dinâmica Combinatória........ 90

QUADROS

Quadro 1 – Tabulação: Jogo *Yellow Out*........ 51
Quadro 2 – Tabulação: Jogo *Twibik*........ 52
Quadro 3 – Tabulação: Jogo Pulo do Sapo........ 53
Quadro 4 – Tabulação das respostas do questionário do Jogo Senha 63
Quadro 5 – Avaliação........ 74
Quadro 6 – Parecer 85

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNC	Base Nacional Curricular
BNCC	Base Nacional Curricular Comum
Enem	Exame Nacional do Ensino Médio
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
MEC	Ministério da Educação e Cultura
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
Pisa	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
RPG	*Role-Playing Game*
Saeb	Bidimensional Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 12
2 REFERENCIAL TEÓRICO 19
2.1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 19
2.2 JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA 21
2.3 ANÁLISE COMBINATÓRIA 22
2.4 FAZER E COMPREENDER NA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO 26
2.5 REVISÃO DE LITERATURA 31
3 METODOLOGIA 35
3.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA 36
3.2 DINÂMICA COMBINATÓRIA 38
3.2.1 Etapa 0 39
3.2.2 Etapa 1 39
3.2.3 Etapa 2 41
3.2.4 Etapa 3 42
3.2.5 Etapa 4 42
3.2.6 Etapa 5 43
3.2.7 Etapa 6 44
3.3 AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 45
3.3.1 Avaliação dos resultados 48
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES 49
4.1 INÍCIO DO PERCURSO 49
4.2 RACIOCÍNIO LÓGICO 50
4.3 JOGO DO QUADRADO 55
4.4 JOGO SENHA 59
4.5 JOGO BICOLORIDO 66
4.6 ESTUDO ORIENTADO 73
4.7 JOGO TRILHA COMBINATÓRIA 78
4.8 A DINÂMICA COMBINATÓRIA NO PARECER DOS ALUNOS 84
4.9 PRODUTO DA DISSERTAÇÃO 91
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 92

REFERÊNCIAS 97
APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 102
APÊNDICE B – TERMO DE ANUÊNCIA 103
APÊNDICE C – TABELA DE REGISTROS DE JOGADAS 104
APÊNDICE D – CARTELA ADAPTADA DO JOGO SENHA 105
APÊNDICE E – ETAPAS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 107
APÊNDICE F – ARQUIVO DO PRODUTO DA DISSERTAÇÃO 133

1 INTRODUÇÃO

A partir do período de redemocratização brasileira, uma série de transformações sociais, econômicas e educacionais vem acontecendo no cenário nacional, especialmente da década de 90 em diante. Assim como na economia, o desenvolvimento humano, sobretudo pelo viés da educação, passa a seguir orientações globais definidas por instituições internacionais, que estabelecem padrões e metas a serem atingidas pelas nações. De acordo com Bavaresco (2014, p. 72), “os relatos produzidos por organismos internacionais sobre o progresso educacional, de forma comparativa entre as nações, pressionam governos e sociedades para que se adaptem e respondam a essas transformações”.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Médio:

> Mesmo considerando os obstáculos a superar, uma proposta curricular que se pretenda contemporânea deverá incorporar como um dos seus eixos as tendências apontadas para o século XXI. A crescente presença da ciência e da tecnologia nas atividades produtivas e nas relações sociais, por exemplo, que, como consequência, estabelece um ciclo permanente de mudanças, provocando rupturas rápidas, precisa ser considerada. (BRASIL, 2000, p.12).

Segundo os PCNs, deve-se criar e manter propostas curriculares que se encaixem com ambientes vinculados ao avanço científico e tecnológico, fortalecendo as relações sociais da nação como um todo. As tendências para o século XXI devem apresentar e estabelecer ciclos permanentes de mudanças, que busquem romper antigos paradigmas da educação, visando melhorias no ensino de ciências e buscando um aperfeiçoamento que fortaleça avanços, igualando nosso ambiente educacional ao de países desenvolvidos, que apresentam grande evolução nos ambientes relacionados à pesquisa científica.

No entanto, com base em resultados levantados de instrumentos de avaliação, que vêm sendo aplicados, e considerando as políticas educacionais na contemporaneidade, evidenciam-se descompassos entre o avanço educacional e o desenvolvimento econômico do Brasil, apresentado nas últimas décadas. Sistemas de avaliação de resultados educacionais, em nível nacional e internacional, tais como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa), Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e a Provinha Brasil, expõem resultados que provocam um estado de crise no sistema educacional brasileiro, comprometendo o desenvolvimento científico, tecnológico e, consequentemente, econômico e social.

Nessa conjuntura, seguindo tendências e orientações globais definidas para países em desenvolvimento, o Brasil passa a visar melhorias no que se refere ao ensino de ciências, buscando desenvolvimento e inovação tecnológica. É nesse cenário que a "ênfase na questão do desenvolvimento tecnológico atribui lugar de destaque para a ciência na modernidade, tendo na educação seu principal meio de inserir o maior número de indivíduos, para que atuem de forma produtiva em prol desse desenvolvimento". (BAVARESCO, 2014, p.105).

Segundo Bocasanta,

> oferecer ao brasileiro o que lhe falta – conhecimentos – é significado como empoderar os sujeitos para a construção de um futuro promissor e de um país melhor. Sua baixa escolaridade seria um risco para a competitividade entre os países e requer fortes e eficazes controles para que seja eliminada. (BOCASANTA, 2014, p. 105).

Isso tudo converge para o entendimento de que, no mundo em que vivemos, o domínio da ciência, da tecnologia e dos meios que permitem a inovação é imprescindível para qualquer nação. Para isso, é necessário reconfigurar a educação de modo a focalizar a alfabetização científica, que afeta profundamente e dá ênfase à reflexão crítica e ao modo de ensinar as crianças e os jovens. Conforme Pinheiro e Silva (2010, p.73), "precisamos de uma imagem de ciência e tecnologia que possa trazer à tona a dimensão social do desenvolvimento científico-tecnológico, entendido como produto resultante de fatores culturais, políticos e econômicos". Deve-se, então, estimular, no ambiente educacional, a criação de meios e métodos que foquem a curiosidade intelectual e o senso crítico, capacitando os alunos a aprenderem a aprender, a criarem autonomia para continuarem aprendendo e buscando o que precisam aprender durante toda a sua vida.

Conforme os PCNs:

> O aumento dos saberes que permitem compreender o mundo favorece o desenvolvimento da curiosidade intelectual, estimula o senso crítico e permite compreender o real, mediante a aquisição da autonomia na capacidade de discernir. Aprender a conhecer garante o aprender a aprender e constitui o passaporte para a educação permanente, na medida em que fornece as bases para continuar aprendendo ao longo da vida. (BRASIL, 2000, p. 15).

A educação, desta forma, deve propor alternativas para que os alunos ampliem e aprimorem o conhecimento, com estratégias que envolvam e estimulem o seu desenvolvimento cognitivo. Percebe-se, nestes últimos anos, que está havendo um esforço nesta direção, pois os projetos educacionais propostos pelos governos federal e estadual sugerem fortemente que, em todos os níveis de educação, promova-se o prazer pela pesquisa e investigação.

É com esse espírito de renovação que o Brasil está adotando uma reforma geral na educação básica, com a criação de uma Base Nacional Curricular Comum (BNCC),[1] que tem como objetivo, segundo o Ministério da Educação Brasileira (MEC), definir as competências e os conhecimentos essenciais que deverão ser oferecidos a todos os estudantes, na parte comum da sua formação. A BNCC[2] aponta as disciplinas de Matemática, Português, Educação Física, Artes, Sociologia e Filosofia como obrigatórias para o Ensino Médio, ocupando até 60% da carga horária total. Os 40% restantes estão sendo previstos para serem preenchidos com estudos e aprofundamentos de interesse dos alunos, em cinco áreas de seus estudos: Linguagens, Matemática e suas tecnologias, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Formação Técnica e Profissional.

Nesse processo de desenvolvimento e no foco deste trabalho, cabe uma atenção especial para a área da Matemática, pois se entende que está inserida em diversos campos de estudos e constitui um dos pilares do desenvolvimento cognitivo dos alunos, da tecnologia e economia da sociedade como um todo. Segundo os PCNs:

> Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento. (BRASIL, 2000, p. 111).

A Matemática deve ser uma disciplina escolar que auxilie no desenvolvimento de habilidades e competências, capacitando os jovens a contribuírem com a melhoria da própria vida e da sociedade que integram.

Assim sendo, falar do ensino da Matemática requer que se pense em processos pedagógicos que colaborem para o desenvolvimento das estruturas de pensamento. E há vários recursos didáticos que podem auxiliar o professor no planejamento de atividades de aprendizagem, como estratégias lúdicas, apoiadas por materiais concretos e jogos, para serem utilizados, com o fim de proporcionar ao aluno que se desenvolva e construa o pensamento matemático, e de contribuir para a compreensão de conceitos e ideias matemáticas. Para D'Ambrósio (2001), é importante que os professores compreendam a Matemática como uma disciplina de investigação e de experimentação, em que o avanço se dá como consequência do processo de pesquisa, da criação de estratégias e da resolução de problemas.

---

[1] Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=40361>. Acesso em: jun. 2017.
[2] Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/educacao/2017/02/conheca-as-mudancas-que-ocorrerao-no-ensino-medio>. Acesso em: jun. 2017.

Com estas considerações, propõe-se neste trabalho a pesquisa e a criação de uma sequência didática que se aproxime do modelo proposto por Zabala (1998), integrando aspectos históricos, jogos e estudos orientados para a aprendizagem de Análise Combinatória, em que se considera o desenvolvimento do pensamento lógico, motor e cognitivo para o saber-fazer na resolução de problemas que envolvem arranjos, permutações e combinações, mas partindo do entendimento e da aplicação do princípio da contagem, para compreender a formação de grupos de objetos, segundo as condições que os caracterizam.

Para Morgado et al. (1991, p. 18), "a solução de um problema combinatório exige quase sempre a engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita". E esses são aspectos, ao mesmo tempo, fundamentais e de dificuldade para os estudantes. Conforme aponta Pinheiro (2015), os problemas combinatórios mobilizam a capacidade do indivíduo de analisar, interpretar e de avaliar diferentes situações ou contextos. Para o estudante conseguir desenvolver tais aptidões, é possível buscar um meio atrativo que o anime a estudar e estimule o seu raciocínio.

Para Carvalho (2009), o uso de jogos é uma maneira atraente e interessante de motivar os alunos para conteúdos que envolvem habilidades lógicas. O autor destaca que o jogo desempenha um papel importante em processos que estimulem o raciocínio lógico-matemático, auxiliando os estudantes a desenvolverem o pensamento intuitivo e dedutivo, e também a sua capacidade de concentração, complementando os aspectos de resolução de problemas combinatórios citados por Pinheiro e Morgado. Neste sentido, com a utilização de jogos, pode-se aprimorar e estimular o nosso método dedutivo e organizacional na resolução de problemas combinatórios, pois as habilidades exigidas na construção de soluções apresentadas nos jogos se assemelham com situações criadas nas atividades que envolvem o raciocínio combinatório.

Na prática docente, através de experiências vivenciadas, estudos, leituras e troca de experiências com outros professores, observa-se que a Análise Combinatória é um tema em que os estudantes sentem dificuldades em diferenciar os conceitos que resultam nas técnicas de formação de agrupamento. É comum tropeçarem quando procuram diferenciar se o problema é de ordem ou de natureza, pois sempre apresentam contextualização que exige uma adequada interpretação, para que consigam criar uma estratégia de solução.

Assim, o desenvolvimento deste trabalho foi mobilizado pela seguinte questão de pesquisa: **Qual a colaboração de uma sequência didática, com atividades em que se utilizam materiais manipuláveis, recursos digitais e jogos, para a aprendizagem de Análise Combinatória?** Elegendo esta a questão de pesquisa, pretende-se alcançar, como objetivo geral: **analisar a aplicação de uma sequência didática com atividades que integram o uso de jogos, desafios e roteiros de estudo no processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória**.

Como forma de organizar etapas e condições para o alcance desse propósito, tem-se como **objetivos específicos:**

– conhecer o parecer de professores sobre o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória;

– pesquisar, selecionar e construir jogos relacionados aos diferentes métodos de contagem;

– auxiliar os estudantes a identificarem e compreenderem as características que diferenciam a formação de agrupamentos por meio de sua ordem ou natureza;

– criar e aplicar uma sequência didática, utilizando os jogos (selecionados e adaptados ou construídos), que contribuam para a compreensão e a diferenciação dos conceitos de contagem, permutações, arranjos e combinações;

– avaliar se a sequência didática construída e aplicada produz melhores condições de aprendizagem de Análise Combinatória;

– considerando os resultados das análises, aprimorar a sequência didática, constituindo-a como o produto da pesquisa, como sugestão didática para o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória.

Associa-se ao delineamento dos objetivos o interesse do professor-pesquisador por este estudo, que tem origem na percepção, durante as aulas de Matemática, de que muitos alunos demonstram dificuldades em fazer construções lógicas diante de situações-problema apresentadas. Através de observações e diálogos, percebem-se dificuldades de raciocínio e de concentração, que prejudicam a resolução de problemas lógicos. No entanto, observa-se que um número pequeno de alunos consegue criar estratégias hábeis para a resolução de tais problemas. Logo, surgiram questionamentos sobre o porquê de somente um pequeno grupo conseguir construir e criar meios para solucionar problemas algébricos e numéricos, sem utilizar algoritmos clássicos para suas resoluções.

Por meio de muitas conversas, percebeu-se que os alunos, que possuíam maior aptidão com a matemática e desenvolviam construções lógicas com facilidade, faziam uso de jogos que estimulavam o raciocínio, como o cubo mágico, quebra-cabeças, *Role-Playing Game* (RPG) ou jogo de interpretação de personagens e palavras cruzadas, entre outros. No decorrer dos anos letivos, percebeu-se que os alunos que tinham esses *hobbies*, que estimulavam o raciocínio, não tinham grandes dificuldades em analisar e diferenciar métodos de contagem. Tal constatação concorda com o que afirma Carvalho (2009), de que o jogo é um desencadeador de reflexão dos sujeitos, proporcionando construções significativas do ponto de vista cognitivo. Assim, podem ser utilizados com conteúdos importantes que englobam o terceiro eixo estruturante da matemática, por estarem ligados à interpretação de dados no meio social, pois, como consta nos PCNs (BRASIL, 2000, p. 126), “a análise de dados tem sido essencial em problemas sociais e econômicos, como nas estatísticas relacionadas à saúde, populações, transportes, orçamentos e questões de mercado”.

Portanto, dada a importância da análise de dados e métodos de contagem em meio social, pensou-se que, para potencializar a aprendizagem, havia a necessidade de se criar algo que motivasse os alunos e estimulasse o raciocínio para a construção de conceitos de Análise Combinatória. Assim, chegou-se ao uso de materiais lúdicos, concretos e jogos, que podem auxiliar na compreensão de tais conceitos no ensino da Matemática. Conforme Grando (2000, p. 1), “as atividades lúdicas são inerentes ao ser humano. Cada grupo étnico apresenta sua forma particular de ludicidade”.

Porém, para a composição da sequência didática, foram criadas atividades dinâmicas, que vão além da utilização de materiais manipuláveis. Foram integrados aspectos históricos, atividades interativas, uso de tecnologia, jogos e, por fim, a formalização de conceitos, de modo que o aluno pudesse compreendê-los através do fazer como explica Piaget (1978, p. 40), que as ações exercidas num sentido ou em outro, criam dinamismo na ação de desenvolver a aprendizagem por meio de ações.

A estruturação desta dissertação foi feita em capítulos, visando a sua concretização; assim, está dividida em cinco capítulos, incluindo-se esta *introdução*, em que estão definidos os objetivos deste trabalho, a justificativa da escolha do tema e o problema de pesquisa.

No segundo capítulo, *Referencial teórico*, apresentam-se seções relacionados aos contextos da Educação Matemática, especialmente no que se refere ao uso de jogos no ensino da Matemática; exploram-se alguns conceitos e fatos históricos da Análise Combinatória; apresenta-se a fundamentação teórica da pesquisa no Fazer e Compreender, na visão construtivista de Piaget, e apresentam-se alguns trabalhos, já realizados, no que se refere ao ensino de Análise Combinatória.

No terceiro capítulo, o da *Metodologia*, apresenta-se a pesquisa desenvolvida e suas características, além de conceituar sequência didática, na visão de Zabala, que serviu como orientação para a estruturação da Dinâmica Combinatória, que também é apresentada, com suas etapas, e que se identifica com a sequência didática de Zabala.

O quarto capítulo, *Resultados e discussões*, é dedicado à análise de dados e discussão dos resultados da Dinâmica Combinatória. Nesse capítulo mostra-se como os alunos conseguiram desenvolver as atividades durante a aplicação da Dinâmica Combinatória e se essa sequência produz resultados eficazes na aprendizagem de Análise Combinatória, e destaca-se a Dinâmica Combinatória como produto da dissertação.

No quinto capítulo, *Considerações finais*, retoma-se o objetivo geral e busca-se construir respostas para o problema de pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico desta pesquisa é apresentado considerando as seguintes seções: educação matemática, jogos no ensino da Matemática, construção do conhecimento através do fazer e compreender, Análise Combinatória e sua origem e uma revisão de literatura.

2.1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A Matemática é uma ciência que exige pensamento abstrato e que foi construída a partir de problemas reais. No seu desenvolvimento aprimorou-se como ciência, acompanhando o desenvolvimento da humanidade e o avanço tecnológico. Segundo D'Ambrósio (1996), isso é absolutamente natural, pois os meios de observação e de processamento de dados têm outra natureza e uma ligação muito forte com a diversidade cultural de cada tempo.

Ainda, conforme D'Ambrósio (1996), a Matemática é acessível até o nível primário, pois, nesse período, é bastante comum observar que o desenvolvimento da Matemática é acompanhado por ações em que a criança manipula objetos concretos ou imaginados como sendo concretos, como é a natureza do pensamento da criança, que nessa etapa começa a realizar operações mentalmente, porém, que se referem a objetos ou situações passíveis de serem manipuladas ou imaginadas de forma concreta. (LA TAILLE, 2003).

Porém, a partir da década de 70, iniciou-se o movimento da Matemática Moderna, ditando uma nova metodologia para as aulas, sendo o ensino baseado na formalidade e no rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra. As aulas de Matemática, que no período pós-primário também deveriam contemplar as características visual e concreta, para que o aluno pudesse, além de solucionar equações, pensá-las em situações, ao menos, imaginadas como concretas. No entanto, ainda hoje, passados quase 50 anos dessa reforma estrutural no ensino da Matemática, o que se pode ver, ainda com frequência, é que são utilizados métodos de transmissão de conteúdos que precisam ser assimilados por memorização, prejudicando os estudantes em suas aprendizagens e provocando desencantos em relação à Matemática. Muitos não conseguem ativar o raciocínio lógico, nem mesmo para executar cálculos simples. Sobre isso, D'Ambrósio (1996, p. 61) comenta que “obviamente algo está errado com a filosofia que orienta a organização e o funcionamento do sistema educacional”.

A educação matemática deve ampliar a visão dos estudantes sobre as várias formas de perceber e utilizar a matemática, por vezes teórica, em outras aplicada, mas sempre consistente e desafiadora, solicitando procedimentos e operações práticas e mentais. Como argumento, tem-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) que:

> A matemática do Ensino Médio tem um valor formativo que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta para a vida cotidiana e para muitas tarefas especificas em quase todas as atividades humanas. (BRASIL, 2000, p. 40).

A matemática escolar tem um papel muito maior do que ensinar a executar algoritmos e memorizar métodos, deve ajudar na estruturação do pensamento humano. Por sua vez, esse também com grande importância, aplicando-se em praticamente todos os meios da sociedade, no simples troco do supermercado ou em grandes projetos arquitetônicos.

O educador auxilia os alunos a criarem o hábito de investigação na matemática, fazendo com que explorem muito mais do que fórmulas prontas, teoremas ou axiomas, mas, sim, que explorem significados, podendo associá-los a situações próprias, contextualizadas, também na vivência diária. Para Schmidt (2007), isso não se trata de reduzir o ensino a práticas utilitaristas ou apenas de aplicações, mas de integração de ações que desafiem o intelecto.

O aluno precisa desenvolver o interesse por explorar novas formas de ver a matemática. Para isso, precisa vivenciar o que aprende, podendo compreender e construir significados para os conceitos. O professor deve participar, explorando, junto com o aluno, acertos e também erros, pois, para D'Ambrósio (1989, p. 17), "é a partir do estudo dos erros cometidos pelos alunos que poderemos compreender as interpretações por eles desenvolvidas". Conforme o projeto, atualmente em discussão para ser implantado, da Base Nacional Curricular, "[...] os conhecimentos matemáticos tornam-se imprescindíveis para as diversas ações humanas, das mais simples às mais complexas, tais como compreensão de dados em gráficos, realização de estimativas e percepção do espaço que nos cerca". (BRASIL, 2016, p. 116).

Pode-se, então, destacar a importância de buscar novos caminhos para despertar o interesse dos alunos, pesquisando e construindo novas metodologias, procurando criar estratégias para que eles se envolvam. A matemática, por sua natureza, oferece a possibilidade de ser explorada com um olhar abrangente, aproveitando-se da fonte de modelos de fenômenos que nos cercam e que podem ajudar a construir uma educação mais instigante, que desperte curiosidade e conscientize os alunos de que é uma ciência fundamental para o desenvolvimento de uma sociedade.

2.2 JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

A matemática traz consigo grandes significados, ideias e conceitos, alguns com fácil compreensão e outros bastante complexos, mas todos exigem uma aptidão lógica para serem compreendidos. Tais significados e conceitos podem ser expressos como “verdades”, que desafiam a compreendê-las e a interpretá-las em situações cotidianas. Segundo Ribeiro (2009, p. 4), uma das funções da disciplina de Matemática é o desenvolvimento de competências para resolver problemas do cotidiano. Nesse contexto, tem-se o uso de jogos, que acompanha, desde sempre, a evolução da humanidade. Segundo Strapason e Bisognin:

> No decorrer da história da humanidade, observa-se que o jogo fez parte de várias classes sociais, influenciando positivamente no desenvolvimento afetivo, físico, social e moral daqueles que jogam, sendo, portanto, um importante fator de socialização entre povos. (2013, p. 7).

O jogo, para muitos povos, teve grande importância, pois foi um meio de socialização e integração, em torno do qual se observa um sistema organizacional que auxilia o participante a policiar-se, em seu ambiente natural. Strapason e Bisognin (2013) afirmam que para o ser humano, desde a infância, os jogos auxiliam no desenvolvimento de normas e comportamentos, até se tornar adulto.

Conforme Ribeiro (2009, p. 3), “o jogo pode ser considerado um meio pelo qual o participante consiga expressar suas qualidades”. Para os professores, serve também como um instrumento que ajuda a conhecer melhor os alunos. Para Silva e Kodama:

> Quando uma criança brinca, demonstra prazer em aprender e tem oportunidade de lidar com suas pulsões em busca da satisfação de seus desejos. Ao vencer as frustrações aprende a agir estrategicamente diante das forças que operam no ambiente e reafirma sua capacidade de enfrentar os desafios com segurança e confiança. A curiosidade que a move para participar da brincadeira é, em certo sentido, a mesma que move os cientistas em suas pesquisas. Assim, seria desejável conseguir conciliar a alegria da brincadeira com a aprendizagem escolar. (2004, p. 3).

A inserção de jogos nas brincadeiras serve de estímulo para que a criança tenha satisfação e prazer em fazer construções mentais e associar métodos e processos, que fazem parte do jogo, a situações de aprendizagem escolar. Muitos dos desafios propostos ao aluno, através do jogo, sugerem ações como no trabalho de um pesquisador, que, com o explorar e o avançar de sua pesquisa, vai aprendendo e construindo novos conceitos e vislumbrando novos conhecimentos. De acordo com Silva e Kodama (2004), os jogos são instrumentos que ajudam a exercitar e estimular um agir: pensar em estratégias, com lógica e critérios, a serem seguidas, podendo auxiliar no desempenho escolar dos alunos.

A utilização de jogos para o ensino e a aprendizagem de Matemática é destacada em muitas pesquisas, sempre com resultados que apontam aprendizagens motivadoras e interessantes. Além de desenvolver habilidades matemáticas, o jogo é um grande estímulo ao raciocínio lógico e à reflexão. De acordo com Strapason e Bisognin (2013), sempre é necessário pensar antes de realizar qualquer jogada e a cada jogada é possível construir um novo raciocínio.

Para Grando (2000), o conhecimento matemático está implícito na ação do jogo. Através da tomada de consciência associada ao ato de jogar, pode-se construir e definir noções conceituais. Ainda para essa autora, conceitos e noções são construções do indivíduo. Na sua interação com os observáveis, o indivíduo atuará no caráter nocional e, quando estiver coordenando imperatoriamente, estabelecendo relações lógico-matemáticas, estará trabalhando em nível conceitual. Vários conceitos e noções matemáticas podem coexistir na ação do jogo, que, nesse caso, se relacionam e se integram na ação.

Os jogos dão suporte aos alunos e fazem com que consigam utilizar mais de uma habilidade ao mesmo tempo, levando-os ao aprendizado, com base no uso concreto de saberes. Dessa forma, Strapason e Bisognin (2013) mostram que os jogos podem tornar o conteúdo matemático mais eficaz e interessante, auxiliando no desenvolvimento da linguagem e do raciocínio dedutivo, que são exigidos nas jogadas, gerando, assim, uma argumentação por ter feito uma ou outra escolha.

2.3 ANÁLISE COMBINATÓRIA

No cotidiano da escola, os alunos resolvem exercícios e problemas combinatórios sem saber, exatamente, o que são e para que servem. Então, o que seria Análise Combinatória? Como argumentar a favor do ensino e da aprendizagem desse conteúdo?

Para Hazzan (2004), a análise combinatória visa a desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes agrupamentos formados sob certas condições. Dante (2008) refere-se a problemas que envolvem o cálculo do número de agrupamentos que podem ser feitos com os elementos de um ou mais conjuntos, submetidos a certas condições. De acordo com Barreto Filho e Silva (2000), a Análise Combinatória constitui um ramo da Matemática, que tem por objetivo resolver problemas que consistem, basicamente, em escolher e agrupar elementos de um conjunto. Conforme Souza (2013), tais problemas são situações que envolvem contagem de possíveis agrupamentos de elementos de um ou mais conjuntos.

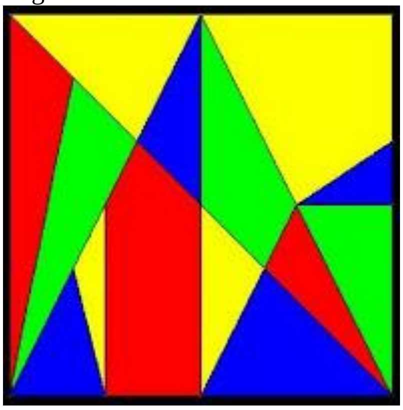
Para muitos autores de livros didáticos, utilizados para o ensino de análise combinatória, esse é um ramo da Matemática que envolve técnicas de contagem para solucionar problemas que formam agrupamentos sob certas condições. Assim, uma definição possível é: análise combinatória é um ramo da Matemática que explica como formar e contar agrupamentos através de técnicas de contagem, sendo que os elementos se agrupam pela ordem ou por sua natureza.

A Análise Combinatória, na maioria dos livros de Ensino Médio, é o conteúdo de aplicação de problemas de contagem. Mas, além dos problemas de contagem, a Análise Combinatória busca explorar outros conteúdos matemáticos como análise de estruturas e relações discretas. Para Morgado (1991, p. 2), o objetivo da Análise Combinatória é "contar e classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas".

Pode-se associar outras situações ligadas à Análise Combinatória a problemas de existência que se inserem no princípio de Dirichlet, que diz: "Queremos guardar m objetos em n gavetas. Se m > n, então alguma gaveta deverá conter mais de um objeto." Esse princípio é informalmente conhecido como a Casa dos Pombos, que está associado à inclusão e exclusão. Está ligado também ao que, na Matemática, entende-se por relações de recorrência ou princípios de reflexão. Esse princípio, segundo Morgado e Carvalho (2014), descreve que se n + 1 objetos devem ser colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.

Tem-se, na visão de Vasques e Noguti (2004), que de fato a Análise Combinatória teve origem ainda na Antiguidade, e foi através de Arquimedes, que viveu em Siracusa, no século III a.C., que se passou a ter conhecimento acerca dos problemas de contagem. É atribuído a ele um problema de combinação de peças em um tabuleiro, que ficou conhecido como Tabuleiro de *Stomachion* (Figura 1). Sabe-se, segundo esses autores, que *Stomachion* tem a mesma origem da palavra estômago, mas não há certeza de que foi realmente Arquimedes quem inventou o jogo ou se ele apenas explorou o problema proposto em algum manuscrito mais antigo.

Figura 1 – Tabuleiro de *Stomachion*

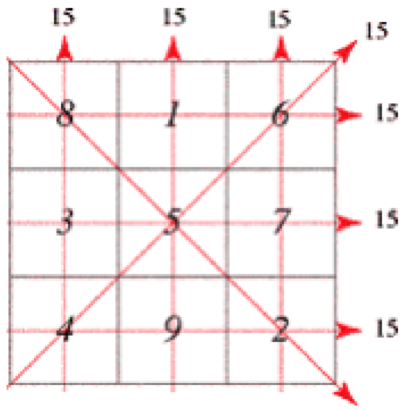


Fonte: Pinterest (2016).

Segundo o historiador Reviel Netz, que publicou um artigo no jornal americano *The New York Times*, em 2003, o jogo *Stomachion* não era um passatempo para Arquimedes, mas um objeto de pesquisa, em que buscava solucionar "de quantas formas distintas poderiam se encaixar as 14 peças deste jogo, de modo a conseguir formar um quadrado?" Não se sabe se Arquimedes esgotou este estudo, obtendo a resposta, mas o resultado encontrado, recentemente, foi de 17.152 maneiras, sendo que esta resposta surgiu de um grupo de pesquisa da Universidade da Califórnia, em San Diego, composto por Dr. Persi Diaconis, Dra. Susan Holmes, Dr. Ronald Graham e Dr. Fan Chung, no ano de 2003.

Durante muito tempo, acreditava-se que a Análise Combinatória, ou o cálculo combinatório, estivesse desligado do cálculo aritmético; segundo Pastor (1939, apud VASQUEZ; NOGUTI, 2004, p. 2), "o conceito moderno do número é, porém, uma das provas do papel preponderante que a noção de ordem desempenha nas diversas teorias matemáticas". Os primeiros registros do cálculo combinatório foram os quadrados mágicos, sendo estes um arranjo de números em um quadrado de ordem *n*, em que a soma dos números de suas linhas, colunas e diagonais resulta sempre em um mesmo valor. Pode-se ver um exemplo de quadrado mágico na Figura 2.

Figura 2 – Tabuleiro com um quadrado mágico



Fonte: Acervo do autor (2017).

Uma poesia infantil parece ter sobrevivido em várias culturas e serve para introduzir o campo de problemas combinatórios:

> Quando eu estava indo para St. Ives,
> Eu encontrei um homem com sete mulheres,
> Cada mulher tem sete sacos,
> Cada saco tem sete gatos,
> Cada gato tem sete caixas,
> Caixas, gatos, sacos e mulheres,
> Quantos estavam indo para St. Ives?[3] (BIGGS, 1979).

Segundo Biggs, esta poesia, conhecida desde por volta de 1730, conforme Vasquez e Noguti (2004), é usualmente interpretada como uma brincadeira. Entretanto, poder-se-ia supor que, nas entrelinhas, existiriam propósitos bem mais sérios, pois há um problema similar no Líber Abaci: “sete mulheres velhas estão indo para Roma; cada uma delas têm sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas; e cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas?”[4], escrito por Leonardo de Pisa, que dificilmente negaria uma conexão entre este problema e a poesia infantil.

Segundo Tavares e Brito (2005, p. 33), a Teoria Combinatória apareceu como um capítulo novo da Matemática em fins do século XVII e, em poucos anos, surgiram três livros notáveis: *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 por Blaise Pascal e publicado em 1665), *Dissertatio de arte combinatória* (Leibniz, 1666e *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669), de Athanasius Kircher, além de trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718).

[3] Livro histórico sobre aritmética, escrito por Leonardo de Pisa (Leonardo Fibonacci) no ano de 1202.
[4] Tradução feita pelo autor.

Na Análise Combinatória, estuda-se a formação, a contagem e as propriedades dos agrupamentos que podem ser constituídos, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção. Esses agrupamentos distinguem-se, fundamentalmente, em três espécies: arranjos, permutações e combinações, e podem ser formados de objetos distintos ou repetidos.

Hoje, a Análise Combinatória serve de base para várias teorias da Análise Matemática, como: probabilidades, determinantes, teoria dos números, teoria dos grupos e topologia, entre outras. Com isso, é foco de muita atenção, e não existe, na literatura, uma definição desta ciência que abarque todas as suas ramificações.

2.4 FAZER E COMPREENDER NA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

A Matemática escolar é uma disciplina que, em muitas das noções e em conceitos, pode exigir aptidões relacionadas a construções lógicas. Tais aptidões, de certo modo, podem ser construídas ou aperfeiçoadas através de interações com materiais que auxiliem a exercitar o cérebro para a construção das mesmas. Piaget (1995), em sua teoria da Epistemologia Genética, diz que o conhecimento surge pela interação entre sujeito e objeto, fortalecendo a ideia da construção do raciocínio lógico, derivado também de ações com materiais manipuláveis, sendo, nessa teoria, o construtivismo a base do desenvolvimento cognitivo.

Na mesma obra, Piaget afirma que existem períodos de desenvolvimento mental, que se dividem em: *sensório motor*, *pré-operacional*, *operacional concreto* e *operacional formal*. Cada período é dividido em estágios e níveis, que possuem características próprias.

A primeira fase do desenvolvimento, que Piaget designa como sensório-motor, está ligada a um egocentrismo total da criança, em que tudo o que ela manipula está ligado à extensão de seu próprio corpo. O seu conhecimento desenvolve-se através de suas ações sobre os objetos que, de certo modo, satisfazem a sua curiosidade, podendo imitar vários comportamentos. Como pensamento lógico, nessa fase, a criança começa a perceber e manipular objetos de diversas formas, ainda não podendo reconhecer os mesmos por uma distinção conceitual.

Na segunda fase do desenvolvimento, a criança consegue diferenciar algumas formas pelo seu tamanho e feitio; seu pensamento começa a fazer diferenciações através da visualização e da manipulação de materiais, deixando de lado sua percepção egocêntrica.

Na terceira fase é que se dá um passo maior em relação a alguns conceitos mais abstratos ligados ao raciocínio. Entretanto, para a criança desenvolver alguns aspectos mais aprofundados em relação à matemática, ligados a esta fase do desenvolvimento, é importante a manipulação de objetos lúdicos, pois auxiliam a diminuir bloqueios lógicos que possam surgir e para que "[...] o aluno se sinta estimulado a aprender, diminuindo, assim, os bloqueios que a Matemática exerce sobre alguns deles e conseguindo mostrar como a mesma é importante e de que maneira se faz presente em seu cotidiano". (BEZERRA; ASSIS, 2011, p. 2).

Para Piaget (1995), o crescimento cognitivo se dá por um processo de assimilação e acomodação, associado ao fazer e compreender; de modo prático, é compreender na ação, ao pensar sobre a ação. No desenvolvimento do conhecimento, a assimilação, que pode ser entendida como o fazer, está ligada às ações do sujeito sobre o objeto. Tais ações podem ocorrer por meio de situações que são proporcionadas em um ambiente de aprendizagem, apoiadas por materiais que possam auxiliar no desenvolvimento cognitivo. Gonçalves afirma que,

> [...] devido às dificuldades de compreensão por parte das crianças, dos procedimentos algorítmicos a elas submetidos, sugere que para resolver cálculos, é importante que as crianças tenham a sua disposição os mais variados materiais (fichas, palitos, grãos de cereais, contadores, jogos, e outros) para manipularem a vontade, representando as quantidades citadas nos problemas envolvendo as operações e realizando com eles as ações necessárias para se chegar à resposta desejada. (2011, p. 24).

No desenvolvimento lógico do pensamento matemático e das verdades que são construídas, a ação do aluno, com os objetos, torna-se de extrema importância, pois, como a criança, consegue associar com mais facilidade operações e procedimentos que, muitas vezes, parecem ser abstratos. Conforme Moreira (1999, p. 100), "quando o organismo (a mente) assimila, ele incorpora a realidade e seus esquemas de ação, impondo-se ao meio". Isto quer dizer que, na ação com objetos, é possível compreender verdades matemáticas, podendo tomar-se como exemplo o sentido das operações como a soma e a subtração, em que, através de agrupamentos de objetos, formando novos grupos com mais componentes, a criança começa a assimilar o sentido da adição ou, retirando componentes dos grupos, compreende o sentido da subtração.

Piaget (1995) destaca que, para acontecer o desenvolvimento cognitivo e, por consequência, a evolução ou a compreensão de conceitos, é importante, igualmente, a acomodação, componente do processo de adaptação que surge simultaneamente ou após a ação, quando o aluno busca compreender os conceitos por ele construídos, através do fazer. A partir disto, dá-se o desenvolvimento cognitivo, e os alunos conseguem criar e formalizar conceitos. Refere-se a uma reestruturação do pensamento, quando o aluno se depara com situações que ainda estão em desequilíbrio cognitivo ou sem encontrar relação com outros conceitos formados. Entende-se o que seria a formação de conceitos através de uma ação, como a do princípio multiplicativo, ou da multiplicação. Supondo que o aluno crie 5 grupos com 3 objetos idênticos cada, e que já conheça o sentido da soma, associa que 3+3+3+3+3=15. Porém, ele percebe, na construção do algoritmo, que o número 3 aparece 5 vezes. No momento em que ocorre tal observação, é que se inicia o processo de acomodação, ou seja, o aluno começa a construir alguns conceitos básicos, e consegue associar que, se juntar 5 grupos com 3 elementos idênticos, formam-se 15 elementos. Portanto, por 5 vezes o 3 é que se repete, ou seja, cria uma nova solução ou representação para o problema, e observa que 3+3+3+3+3 = 5x3 =15.

Como consequência da assimilação, como ato de fazer, e da acomodação, como ato de compreender, o desenvolvimento cognitivo humano adapta-se a novas situações, criando novos conceitos, conforme as situações apresentadas. De acordo com Moreira (1995, p. 100), “experiências acomodadas dão origem, posteriormente, a novos esquemas de assimilação e um novo estado de equilíbrio é atingido”.

Nessa terceira fase do desenvolvimento cognitivo, segundo Piaget (1995), o aluno ainda não é capaz de fazer certos raciocínios lógicos, de lidar com as ideias que são consideradas no contexto formal da matemática. Surge, então, a quarta fase do desenvolvimento, conhecida como operatório-formal. Nessa fase, a dedução lógica é um instrumento do qual o adolescente começa a fazer uso. Ele inicia levantando hipóteses, e a construir operações mentais e reconhecê-las. Nesse período, muitos não conseguem ainda compreender conceitos e teoremas da matemática. Essa falta de compreensão, na visão de Piaget (1978, p. 143), é devida ao fato de esses indivíduos experimentarem uma espécie de lacuna eventual, que faz com que os alunos não tenham uma boa receptividade a novos conceitos. No entanto, essa lacuna pode ser preenchida através de situações que satisfaçam o interesse do aluno, por meio de problemas que se encaixem em estruturas de pensamentos já constituídas. As interações com verdades abstratas não podem deixar de lado ações do sujeito com o objeto, pois é nelas que o adolescente vivencia o desenvolvimento cognitivo. Ou seja, ao manipular ou explorar situações concretas, tomando os jogos como exemplo, que buscam induzir o pensamento, faz-se florescer as ligações das ações envolvidas com os conceitos que devem ser construídos. Por isso, é recomendável a utilização de materiais manipuláveis ou jogos em ambientes de aprendizagem, para alunos adolescentes, e até mesmo para adultos. Como afirma Souza:

> O material a ser utilizado deve proporcionar ao aluno o estímulo à pesquisa e a busca de novos conhecimentos, o propósito do uso de materiais concretos, no ensino escolar, é o de fazer o aluno adquirir a cultura investigativa, o que o preparará para enfrentar o mundo com ações práticas, sabendo-se sujeito ativo na sociedade. (2007, p. 111).

A ação com objetos faz com que o aluno consiga assimilar de maneira mais construtiva conceitos e relações presentes na matemática. Tais materiais ajudam a organizar as estruturas cognitivas, de modo que chega à acomodação de maneira mais consistente e eficaz. Moreira (1999, p. 102) diz que “a mente, sendo uma estrutura (cognitiva) tende a funcionar em equilíbrio, aumentando, permanentemente, seu grau de organização interna e de adaptação ao meio”.

O raciocínio lógico e seu estímulo, no quarto estágio de desenvolvimento cognitivo, conforme descreve Piaget (1995), devem ser exercitados pelo aluno, para que suas estruturas mentais venham a se fortalecer. Do contrário, o desenvolvimento cognitivo passa a reproduzir ações e não busca criar novas estratégias de resoluções de problemas. Se não ocorrer estímulo de pensamento diversificado e adaptado a novas situações, que explorem conceitos por meio de técnicas diferenciadas, englobando a tecnologia e outros recursos instigando a curiosidade, isso se refletirá negativamente no ensino da matemática, como afirma D’Ambrósio:

> É bastante comum o aluno desistir de solucionar um problema matemático, afirmando não ter aprendido como resolver aquele tipo de questão ainda, quando ele não consegue reconhecer qual o algoritmo ou processo de solução apropriado para aquele problema. Falta aos alunos uma flexibilidade de solução e a coragem de tentar soluções alternativas, diferentes das propostas pelos professores. (1989, p. 15).

O desenvolvimento, as construções de estruturas lógicas e suas aplicações para a resolução de problemas matemáticos, que se relacionam com as fases operatório-formal e formal, segundo Piaget, se não acontece adequadamente, impede o aluno de criar estruturas de pensamento, e ele passa a utilizar predominantemente a memória, como aprendizado para a reprodução de algoritmos e procedimentos impostos a ele. Ele não se sente mais desafiado e passa a acreditar em construções de raciocínio preestabelecido, em que a busca pelo novo ou pela descoberta já não faz mais tanto sentido. D’Ambrósio (1989, p. 16) mostra que “ao aluno não é dada, em nenhum momento, a oportunidade ou gerada a necessidade de criar nada, nem mesmo uma solução mais interessante”.

As ações que buscam estimular a assimilação e a acomodação devem continuar sendo exploradas em todas as etapas, pois, durante as mesmas, continuam ainda a formalização e o fortalecimento de estruturas de pensamento, e podem surgir resultados esperados em menos tempo, que são chamados, por Piaget (1978), de ações de êxito precoce. Já a partir de certo nível, em que ocorrem êxitos precoces, os conceitos começam a influenciar as ações.

Os êxitos precoces ocorrem devido à tomada de consciência, e o aluno assimila através de suas ações. Com isso, ele consegue fazer algumas previsões do que poderá acontecer, "a ação é um reforço de suas capacidades de previsão e a possibilidade, em presença de uma dada situação, de dar um plano de utilização imediata". (PIAGET, 1978, p.174).

Portanto, as ações que os alunos tendem a desenvolver, antes da formação de novos conceitos, buscam associações a conceitos preestabelecidos em outros momentos, ajudando-os a formalizarem novas conclusões, em ações que eles executam no momento. Ou seja, é assim que a conceituação começa a criar autonomia dando liberdade para o aluno começar a fazer inferências, associando aquilo que ele já sabe com aquilo que ele irá aprender.

No entanto, parece que os conceitos vão surgindo do fazer, e a compreensão se dá em ação, quando o aluno consegue dominar o novo conceito. Por exemplo, o ato de fazer um bolo parece simples. Já que é algo que podemos desenvolver por meio de uma receita, basta seguir os passos e tudo está feito, mas entender os procedimentos e as reações que acontecem com as misturas dos componentes do bolo não é tão simples assim. Piaget explica:

> Na verdade os problemas são mais profundos e voltam a determinar em que consistem as coordenações das ações, se existirem em seus esquemas próprios, e as coordenações conceituais, lógico-matemáticas ou causais, às quais se dirige o pensamento, desde as tomadas de consciência elementares até as conceituações superiores. (1978, p. 176).

A simples ação ou alguns conceitos preestabelecidos não são suficientes para obter um avanço completo. O que se necessita, para que o compreender seja consequência do fazer, é aplicar ações que produzam coordenações lógicas, ações que tenham uma estrutura contínua formando sequências práticas, formando conceitos, pois é a partir do fazer organizado e prático que o conceito cria-se como estrutura mental e, "em condições ideais e somente na prática serão notados e colocados em evidência certos pressupostos". (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 79).

Piaget (1978, p.175) diz que "os esquemas de assimilação podem modificar-se por adaptação aos objetos, e que eles estão assim aptos a correções diversas", ou seja, o papel do professor torna-se evidente na mediação, fazendo com que o aluno se direcione a ações que ajudem a compreender o que está se passando. É o professor que direciona sua prática, de modo a fazer com que o aluno consiga separar a razão das coisas que estão na ação, gerando assim a compreensão.

Entende-se, em síntese, que a finalidade do fazer é o que irá direcionar o compreender em ação. Por isso, o professor, ao pensar em uma atividade, deve ter uma organização bem-estruturada e com propósitos claros, porque o sucesso do compreender em ação pode partir de alguns fracassos iniciais, que ajudam a direcionar para um sucesso que “se traduz por processos de equilibração conjunta, bem mais do que por um finalismo diferenciado em minúcias”. (PIAGET, 1978, p. 175).

Por meio destes conceitos e afirmações, será idealizada e sustentada, através desta visão, uma metodologia de ensino diversificada, de tal modo que instigue a curiosidade do aluno. Para tal, serão proporcionados vários recursos para o fazer, no desenvolvimento das atividades, visando a explorar e compreender os conceitos, como forma de construir o conhecimento. Assim, ao realizar as diversas atividades propostas, visa-se a construção dos conceitos, numa forma de equilibração, entre fazer e compreender, da qual pode resultar a aprendizagem.

2.5 REVISÃO DE LITERATURA

Nesta seção são discutidas algumas pesquisas realizadas no contexto educacional, relacionadas ao estudo da Análise Combinatória. Muitos autores têm desenvolvido pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem desse conteúdo, e proposto estratégias para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a importância de não se ensinar somente com a metodologia, bastante comum, de resolução de problemas combinatórios. Dentre os estudos realizados nessa direção, são trazidas, aqui, ideias propostas por Sabo (2010), Chilela (2013), Mendonça (2011), Fonseca (2012), Oliveira (2014), Leandro (2006), Campos (2011) e Pinheiro (2015).

Sabo (2010), em seu trabalho, faz uma ampla revisão bibliográfica sobre o que estava sendo construído para o ensino de Análise Combinatória, e como a disciplina vinha sendo ministrada nas escolas. Na sua revisão, Sabo (2010, p. 33) afirma que “a falta de conhecimento do professor em relação ao conteúdo matemática, reflete-se nas dificuldades apresentadas pelo professor em ensinar Análise Combinatória” e são aspectos comuns descritos nos trabalhos por ele pesquisados. Da experiência que se tem, sabe-se que para o Ensino Médio, a Análise Combinatória vem sendo cobrada com maior frequência, tanto que, em exames, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), tem sido bastante forte o enfoque dado a exercícios e problemas combinatórios. Segundo as pesquisas de Sabo (2010), muitos professores desviam esse tema na sala de aula ou ensinam o conteúdo por meio de fórmulas prontas, fazendo com que os alunos deixem de desenvolver a intuição e o senso combinatório por meio de induções lógicas.

Chilela (2013, p. 11) afirma que “o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória é crítico principalmente devido ao conflito entre resolução de problemas e o uso de um formulário”. O autor comenta que muitos professores não incentivam o desenvolvimento do raciocínio combinatório, que é base para cálculos relacionados à teoria das probabilidades e que esses definem os conceitos por meio de fórmulas já prontas, como constam nos livros. Pode-se pensar em dificuldades em que o próprio professor tem em relação a este conteúdo. Sabo (2010) destaca que existem poucos cursos de formação continuada relacionados a esse tema e que a maioria das faculdades ensina tópicos de Análise Combinatória, em algumas aulas da disciplina de Estatística.

No entanto, ambos os autores buscam desenvolver, em seus trabalhos, metodologias de ensino que auxiliem no aprimoramento das técnicas de ensino de Análise Combinatória. Sabo (2010) dá um enfoque maior para a formação de professores, enquanto Chilela (2013) procura criar um instrumento metodológico que aprimore a aprendizagem de problemas de contagem.

Mendonça (2011) desenvolveu um estudo sobre as perspectivas de ensino da Análise Combinatória, por meio de uma visão construtivista, que atribui ao professor um papel de mediador. O autor mostra grande preocupação sobre o modo como os assuntos referentes à análise combinatória estão sendo abordados por muitos professores, tanto que, em sua pesquisa, ele juntou quatro professores dispostos a delinear novas maneira de ensinar, por meio de perspectivas construtivistas.

Pode-se, então, associar as ideias desses autores com as de Zabala (1998, p. 18), quando ele refere que “a maneira de configurar as sequências de atividades é um dos traços mais claros que determinam as características diferencias da prática educativa”. Confirma-se, assim, que se pode, através de ações conjuntas, criar novas possibilidades, como mostra também Fonseca (2012), que cria uma sequência de atividades embasadas na resolução de problemas de contagem, como forma de estimular o pensamento combinatório em problemas do cotidiano.

Fonseca (2012, p. 17) afirma que “o raciocínio combinatório é um componente essencial do pensamento formal e um pré-requisito importante para o raciocínio lógico formal”, ou seja, o modo de abordar o conteúdo deve contemplar ações e promover o aprendizado também de habilidades e competências que enriqueçam o desenvolvimento cognitivo dos alunos. Tal desenvolvimento deve ser complementado por compreensão sobre o fazer, como diz Piaget (1978): as ações devem consistir em uma construção de equivalências que crie situações de tomada de consciência, gerando a compreensão dos conceitos estimulados pelo fazer.

De acordo com Oliveira,

> [...] para conseguir uma evolução do raciocínio combinatório, de forma que os alunos compreendam e tenham concepções corretas para os trabalhos com Análise Combinatória, ainda recomenda-se que a organização do ensino apresente atividades que abranjam o pensamento recursivo e os pensamentos sistemáticos de enumeração, em vez de centrar o ensino e aprendizagem apenas na definição e na aplicação de fórmulas. (2014, p. 32).

Segundo o autor, outra vez fica claro que é importante ter formas e meios que remetam os alunos a ações que estimulem o raciocínio; no entanto, também não se pode deixar de lado as definições e técnicas de soluções de problemas. O que Oliveira (2014) quer dizer é que não se deve deixar de promover a construção dos conceitos junto com os alunos, propiciando meios, como o uso de materiais manipuláveis que levem a uma ação que direcione para a compreensão de conceitos. Após passarem por estágios de compreensão, os alunos podem ser desafiados a criar definições e técnicas de soluções de problemas, ao invés de as receberem prontas e tendo o duro papel de decorá-las e empregá-las em rotinas de exercícios de repetição.

Outra questão a se observar é que, na maioria das vezes, o que o professor possui de recurso para trabalhar a Análise Combinatória é apenas o livro didático. Sobre isso, Oliveira (2014) e também Pinheiro (2015) fizeram um levantamento de como está sendo abordado este conteúdo nos livros e, infelizmente, o que constataram foi que é feita uma explanação basicamente voltada às fórmulas e definições. Ambos os autores destacam que este tipo de abordagem tem muito a ver com a formação matemática dos professores, ficando as construções dos conceitos como uma prática que depende muito da capacidade pedagógica de os professores transformarem essa metodologia de exposição e reprodução em sala de aula.

Sabendo da importância em se estimular o raciocínio lógico dos alunos, em praticamente todas as pesquisas citadas neste trabalho, fica evidente que os conteúdos desta parte da matemática não podem ser abordados apenas como exercícios numéricos, por reprodução de fórmulas prontas. Na pesquisa de Leandro (2006), encontra-se que a falta de raciocínio dedutivo interfere no modo como o aluno justifica ou explica uma determinada resolução de problema que lhe é apresentada.

Segundo Campos (2011), muitos dos trabalhos associados à Análise Combinatória sugerem que a aprendizagem se dê, especificamente, por meio da resolução de problemas. No entanto, nas pesquisas do autor citado acima, observasse que na sua maioria os trabalhos desenvolvidos por outros autores, que usavam tal metodologia de resolução de problemas, eram compostos de atividades simples e repetitivas, que não remetem o aluno a construir o conceito, mas sim faz com ele apenas reproduza fórmulas prontas. Segundo esse autor, os problemas de Análise Combinatória devem englobar formas variadas de resolução e de operações combinatórias, pois é essa variedade que faz com que os alunos pensem mais e estimulem o seu raciocínio. Para ele, ainda, os conceitos não devem ser reduzidos a situações repetitivas, mas sim o conceito deve ser explorado em situações diversificadas, fazendo os alunos remeterem o seu pensamento à compreensão dos mesmos por meio de ações. No entanto o autor descreve que na maioria dos trabalhos por ele pesquisado, ocorre um tipo de treinamento nas atividades propostas, que enfatiza a reprodução do conhecimento, e não há uma forma de construção do conhecimento.

Na pesquisa realizada, observou-se que há muitos trabalhos sendo desenvolvidos sobre o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória. A maioria dos estudos aponta que há problemas no ensino e busca enfatizar que a aprendizagem deve ocorrer de forma sequencial, em grau de dificuldade, com atividades diversificadas que estimulem o pensamento dos alunos. Entende-se também que, para promover a compreensão, deve-se trazer o aluno, o mais próximo possível, dos conceitos, por meio do fazer e do pensar sobre as ações executadas, tirando destas reflexões o sentido, os significados dos conceitos e uma condição aprimorada de desenvolvimento do raciocínio.

3 METODOLOGIA

Inicialmente, é importante compreender o que é pesquisa. Segundo Goldenberg (2007), é um trabalho de produção de conhecimento sistemático, não meramente repetitivo, mas produtivo, que faz avançar a área do conhecimento à qual se dedica. Para Goldenberg (2007), o ato de pesquisar está diretamente relacionado a coisas que se faz e não a objetos que alguém pode tocar ou ver. Pode-se entender que o ato de pesquisar contém certa preciosidade e não é um processo mecânico de produzir conclusões prévias. Numa pesquisa científica, espera-se produzir algo que venha a contribuir com o meio científico.

Com esse sentido, esta pesquisa tem natureza qualitativa e caráter descritivo-explicativo, em que os fatos e as situações são explorados, compreendidos e detalhados através da análise dos dados construídos para esse fim. Sobre a abordagem, essa foi feita de forma direta; ocorreu no ambiente escolar durante as aulas de Matemática, em que se aplicou a proposta planejada para o experimento pedagógico criado. Os objetivos da pesquisa estão ligados à criação de uma sequência didática, que venha a contribuir com o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória.

A parte prática da pesquisa foi realizada no Colégio Scalabriniano Nossa Senhora Medianeira, uma escola que possui espaço amplo, que comporta boas salas de aula, laboratório de informática com internet, locais variados para estudos individuais e em grupos, laboratório de psicomotricidade, biblioteca, laboratório de Física, Química e Biologia, um centro de idiomas, ginásio de esportes, espaço ecológico, sala de cinema, centro de convivência, entre outros. De orientação católica, a escola existe há mais de 100 anos e tem tradição como instituição educacional. Atualmente, possui por volta de 650 alunos, com idades que variam de quatro meses, ingressantes no berçário, até 18 anos, dos que frequentam o Ensino Médio.

A sequência didática foi aplicada em uma turma da 2ª série do Ensino Médio, composta por 22 estudantes, 15 meninos e sete meninas, oriundos da região de Bento Gonçalves, onde a escola se localiza. Os dados da pesquisa têm origem nas observações do professor, anotadas em um diário de bordo, nas produções dos estudantes, nos registros das suas falas e em respostas a questionários respondidos no decorrer da aplicação da sequência didática, planejada como parte experimental da pesquisa. Para produzir os resultados dessa aplicação, avaliar o alcance dos objetivos e construir a resposta ao problema de pesquisa, os dados foram organizados e analisados segundo orientações da análise de discurso, que

Gondim e Fischer (2009) buscam associar, com o intuito de compreender e apresentar, com clareza, os resultados obtidos com a aplicação da sequência didática.

3.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Ao planejar a sequência didática, teve-se como propósito desenvolver o processo de ensino para promover a aprendizagem, o que está vinculado com o ato de planejar e de avaliar o que foi planejado e aplicado. Segundo Ramos (2009), o planejamento deve ser dinâmico e constantemente alimentado pela prática docente, sendo, assim também, um momento de reflexão sobre os objetivos que se quer alcançar.

Segundo Zabala (1998), os conteúdos para a aprendizagem são todos aqueles que podem possibilitar o desenvolvimento da capacidade motora, afetiva, de relação interpessoal e de inserção social do aluno. Este deve ser e sentir-se o ator principal para o desenvolvimento da aprendizagem, disposto e comprometido com seu papel, orientado pelo professor, que precisa identificar diferentes graus de conhecimento dos estudantes, como princípio da organização didática, que pode auxiliar a todos a avançarem da condição inicial em que se encontram. A aprendizagem, por sua vez, depende de uma série de princípios e ações de ambos, que fazem com que o estudante possa compreender o que o professor propõe-se a ensinar.

Ao pensar em uma sequência didática para ensinar determinado conteúdo, a mesma deve contemplar a organização didática como um percurso que auxilie para o desenvolvimento de aprendizagens pretendidas. Segundo Zabala (1998), uma sequência didática, para ser completa, deve conter os seguintes elementos:

1. apresentação de uma situação problemática;
2. problemas ou questões;
3. respostas intuitivas ou suposições;
4. fontes de informação;
5. busca de informação;
6. elaboração de conclusões;
7. generalizações;
8. exercícios de memorização;
9. prova ou exame;
10. avaliação.

Para Zabala (1998), uma sequência didática com todos esses elementos é muito próxima do ideal, pois envolve uma grande variedade de atividades, que por sua vez permitem planejar várias estratégias, sempre relacionadas aos objetivos de aprendizagem estipulados pelo professor.

No entanto, criar e aplicar uma sequência didática não é suficiente, pois ensinar, para Zabala (1998), envolve uma série de relações que devem conduzir à elaboração, por parte do estudante, de representações pessoais sobre o conteúdo que, por sua vez, é o objeto de aprendizagem. Ao definir o conteúdo de Análise Combinatória como objeto de estudo, surge uma série de questionamentos, tais como: O que se deve enfatizar, o Princípio Fundamental da Contagem ou fórmulas e aplicações? Como abordar o conteúdo? Por onde começar? Será que estudantes conseguirão diferenciar os vários tipos de grupo? No entanto, Morgado et al. afirmam que

> a Análise Combinatória ou simplesmente Combinatória é muitas vezes entendida por maior parte dos alunos, apenas como os estudos de combinações, arranjos e permutações. No entanto, nesse conteúdo cabe tratar de vários outros tipos de problemas e dispõe, além das combinações, arranjos e permutações, de outras técnicas para atacá-los: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey são exemplos de técnicas poderosas de Análise Combinatória. (1991, p.1).

Para os autores Morgado et al. (1991), há dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em Análise Combinatória:

– demonstrar a existência de subconjuntos de elementos, de um conjunto finito dado, que satisfazem certas condições;

– contar ou classificar os subconjuntos, de um conjunto finito, que satisfazem certas condições dadas.

É importante que o professor trabalhe a aprendizagem dos conceitos de Análise Combinatória de forma cuidadosa e investigativa, evitando a reprodução mecânica, para que a mesma não seja interpretada apenas como um conjunto de fórmulas complicadas, o que é danoso e torna tudo muito confuso.

Com a sequência didática elaborada para esta investigação, propõe-se ao aluno a construção do conhecimento na realização, com reflexão, de atividades práticas propostas, com apoio de materiais manipuláveis ou digitais. A construção do conhecimento se dará a partir da criação de estratégias para a resolução de atividades propostas aos estudantes, o que, segundo Piaget (1978), estão ligadas a condutas instrumentais, que buscam fazer com que os alunos construam o conhecimento através da associação daquilo que estão fazendo com a manipulação dos objetos propostos a eles.

Como preocupação central no planejamento, o que se procurou, constantemente, foi que os estudantes desenvolvessem o raciocínio lógico através das estratégias de jogos, integrando uma sequência didática que contribua para a compreensão e a diferenciação da ideia geral de contagem e dos conceitos de permutação, arranjo e combinação.

3.2 DINÂMICA COMBINATÓRIA

A sequência didática construída é denominada de Dinâmica Combinatória, e é composta de sete etapas, uma de organização e de apresentação do contexto histórico, chamada de etapa zero e outras seis etapas, de 1 a 6, cujo percurso por elas deve, por hipótese, fortalecer e estimular o pensamento combinatório, com a realização dos jogos virtuais, jogos de tabuleiro e roteiros de estudo relacionados ao tema de estudo.

A Dinâmica Combinatória foi planejada a partir do modelo proposto por Zabala (1998), partindo da história, que serve de base para o conteúdo relacionado à Análise Combinatória, através de problemas que nortearam a formalização do seu estudo. A composição dos jogos também foi pensada de maneira sequencial, visando a que o aluno intuísse os conceitos através da prática associada a problemas e a tirar conclusões, a partir das soluções de desafios propostos por ele.

Faz parte da Dinâmica Combinatória, conforme os elementos propostos por Zabala (1998), para uma sequência didática, a busca por informação, o que foi proposto aos alunos através de um estudo orientado e elaborado pelo professor, e que teve o papel de auxiliar ou intervir sempre que solicitado. Após o desenvolvimento dos jogos, os alunos têm como tarefa a resolução de atividades extras, associadas aos conceitos sugeridos nos desafios, e que servem para avaliar a compreensão que tiveram com relação aos conceitos construídos. No final da Dinâmica Combinatória, os alunos são avaliados em relação às aprendizagens, também através de provas, o que é orientado pela escola e, no final, respondem questões de autoavaliação e estimou a metodologia usada pelo professor, respondendo perguntas sobre pontos positivos, dificuldades e até sobre preferências, ao compararem a estratégia proposta com uma metodologia mais tradicional, desenvolvida com explicações do professor, seguida da resolução de exercícios para a fixação dos conteúdos transmitidos.

Apresenta-se, a seguir, uma breve descrição das etapas da Dinâmica Combinatória, as quais estão detalhadas na forma de planos de aula, no Apêndice E deste trabalho, proposta que visa como planejamento de uma sequência didática.

3.2.1 Etapa 0

Como início dos estudos, visa-se fazer uma introdução de todo o trabalho a ser desenvolvido na Dinâmica Combinatória, com a qual são explorados os conceitos fundamentais da Análise Combinatória.

O contexto histórico é apresentado aos alunos através de problemas e textos sobre a história da Análise Combinatória e sobre os historiadores matemáticos, que construíram este conhecimento matemático. Questões desafiadoras são propostas para animar e despertar a curiosidade dos estudantes a participarem, com disposição e envolvimento, de todas as atividades.

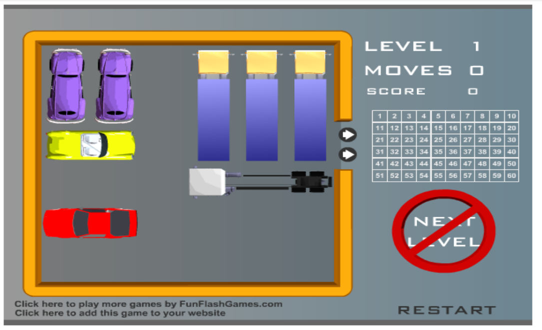
Ações de organização acontecem nessa etapa, como a definição das equipes e dos nomes para cada uma, além de algumas instruções sobre o preenchimento do diário de bordo para os registros de cada equipe. A Etapa 0 acontece em uma aula, com duração de uma hora.

3.2.2 Etapa 1

A primeira etapa contém três jogos, a serem acessados pela internet, que envolvem desafios que requerem habilidades lógicas para serem solucionados. No decorrer de uma hora, os estudantes passam pelos três e, no final de cada um, respondem questões sobre a forma como pensaram para solucionar os desafios de cada jogo. Nos minutos finais, é proposto um problema sobre o princípio da contagem, para o qual cada estudante deverá explicar como pensou em cada passo que leva à solução.

Jogo 1 – *Yellow Out* (Figura 3): O jogo do estacionamento, de onde o carro amarelo deve ser retirado, com o menor número possível de movimentos.

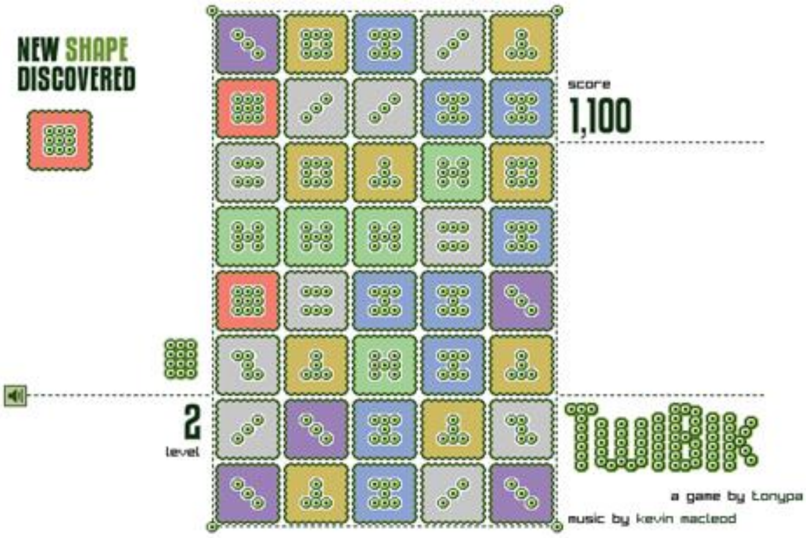
Figura 3 – *Layout* do Jogo *Yellow Out*



Fonte[5]: *Site* do Terra (2016).

Jogo 2 – *Twibik* (Figura 4): Desafio de atenção e raciocínio rápido, para associar pares de peças iguais que vão sendo disponibilizadas em lugar de pares que são retirados.

Figura 4 – *Layout* do Jogo *Twibik*

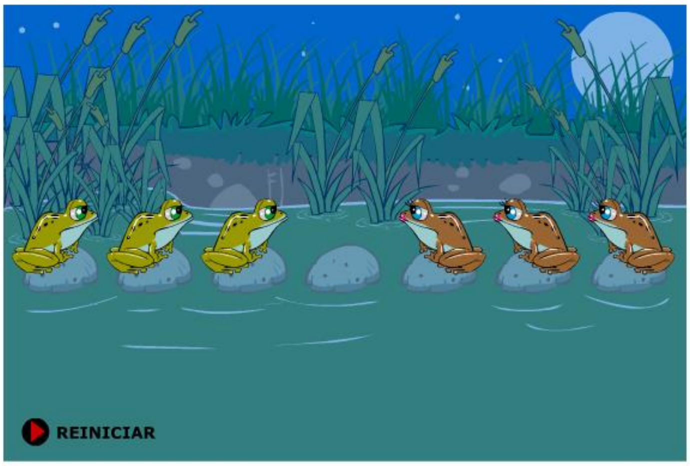


Fonte[6]: *Site* do Terra (2016).

Jogo 3 – Pulo do Sapo (Figura 5): Um jogo de atenção e estratégia para deslocar um grupo de três sapos para a margem oposta daquela onde se encontram.

[5] Disponível em: <http://www.terra.com.br/webgames/yellowout/yellowout.htm>. Acesso em: 15 ago. 2016.
[6] Disponível em: <http://www.terra.com.br/webgames/yellowout/yellowout.htm>. Acesso em: 15 ago. 2016.

Figura 5 – *Layout* do Jogo Pulo do Sapo



Fonte[7]: *Site* de jogos (2016).

Os alunos, no decorrer dos jogos, preenchem uma tabela (Apêndice C), com as pontuações obtidas, o tempo de resolução dos jogos, o nível alcançado e o número de soluções, conforme o jogo disputado.

3.2.3 Etapa 2

Esta etapa consiste na realização do Jogo do Quadrado,[8] que foi desenvolvido pelos professores e pesquisadores Rezende, Lopes e Teodoro (2009), com o intuito de explorar o raciocínio combinatório e o cálculo de probabilidades. A atividade é realizada em equipes de três componentes, definidos por sorteio, e requer o tempo de duas horas. O que se espera com esta atividade é o desenvolvimento da ideia do Princípio Fundamental da Contagem, que serve como princípio introdutório para resolver problemas de Análise Combinatória. Os alunos têm a oportunidade de explorar o jogo e avaliar se o mesmo é ou não de azar, respondendo um questionário pós-jogo.

O Jogo do Quadrado é um jogo simples que utiliza o mesmo tabuleiro do Jogo da Velha (Figura 6) e os movimentos de captura de peças possuem algumas semelhanças com os das peças peão e torre no Jogo de Xadrez. São utilizadas apenas duas peças, uma para cada equipe, e vence o jogo quem capturar a peça do adversário ou chegar primeiro no ponto de partida do adversário. A Figura 6 mostra o tabuleiro utilizado nesta etapa da Dinâmica Combinatória:

---

[7] Disponível em: <http://jogos.testeqi.com.br/o-pulo-do-sapo>. Acesso em: 15 ago. 2016.
[8] Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxii_cnmac/pdf/372.pdf>. Acesso em: 7 out. 2016.

Figura 6 – Tabuleiro utilizado no Jogo do Quadrado

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fonte: Elaboração do autor (2016).

3.2.4 Etapa 3

Na terceira etapa da Dinâmica Combinatória, busca-se explorar outro jogo, conhecido como Jogo Senha (Figura 7), com o qual são desenvolvidos alguns conceitos que embasam as técnicas de contagem: permutação e arranjo. Essa etapa acontece no decorrer de duas horas, durante as quais os alunos trabalham em equipes organizadas pelo professor.

O Jogo Senha foi desenvolvido em 1970 pelo israelense Mordechai Meirovitz e o objetivo, com as jogadas, é descobrir a sequência que compõe a senha de quatro cores, repetidas ou não, dentre seis cores distintas.

Figura 7 – Tabuleiro original do Jogo Senha

Fonte[9]: Wikipédia (2016).

O tabuleiro do jogo foi adaptado, para a aplicação em sala de aula, para uma cartela (Apêndice D), utilizando lápis de cor no lugar das peças coloridas.

3.2.5 Etapa 4

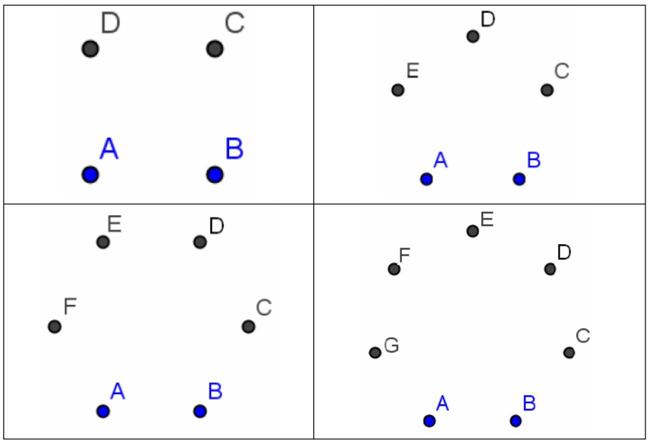
Na etapa quatro da Dinâmica Combinatória, são explorados agrupamentos que se diferenciam pela natureza dos seus elementos, ou seja, a atividade é desenvolvida visando à introdução ao conceito de contagem, designado de combinação simples. Para explorar este

[9] Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Mastermind>. Acesso em: 8 out. 2016.

conceito, é utilizado o Jogo Bicolorido, criado, inicialmente, para explorar conceitos geométricos e que foi readaptado para explorar, também, conceitos combinatórios. A atividade tem duração de uma hora e é desenvolvida em equipes.

O Jogo Bicolorido foi proposto, originalmente, na obra de Gardiner (1991) e, posteriormente, Borin (1995) utilizou-o com o intuito de introduzir e desenvolver conceitos de ceviana,[10] concorrência de cevianas e pontos notáveis de um triângulo, que são temas importantes da Geometria Euclidiana para o Ensino Fundamental. Porém, o jogo utilizado para esta atividade tem origem em uma pesquisa realizada por Carla Soares Silva, em 2010, que o adaptou para explorar conceitos de combinação simples, numa configuração de tabuleiro, como está mostrado na Figura 8.

Figura 8 – Tabuleiro do Jogo Bicolorido



Fonte: Elaboração do autor (2016).

3.2.6 Etapa 5

Na quinta etapa, os alunos, organizados em grupos, realizam um estudo sobre as técnicas de contagem, aprofundando conhecimentos em fontes como livros e materiais disponíveis na internet, sobre conceitos que fundamentam essas técnicas e estruturam a Análise Combinatória. Os resultados dos estudos de cada grupo são socializados, em sala de aula, com o apoio de *slides*. Para esta etapa, são previstas até seis horas aulas para a realização das pesquisas, de estudos, da organização e apresentações em sala de aula.

Para o desenvolvimento desta etapa de aprofundamento e formalização dos conhecimentos construídos com a realização dos jogos, os alunos são organizados em sete

[10] Ceviana é uma reta que passa pelo vértice de um triângulo e corta o lado oposto.

equipes, sendo que cada uma deve pesquisar, estudar e planejar uma apresentação para os demais colegas, de um dos seguintes temas:

1. conceito de fatorial;
2. equações envolvendo fatorial;
3. permutações simples;
4. permutação com repetição;
5. arranjos simples;
6. combinações simples;
7. permutações circulares.

As equipes desenvolvem e apresentam os estudos em sala de aula, no laboratório de informática e na biblioteca, seguindo um roteiro de estudo elaborado pelo professor.

3.2.7 Etapa 6

Esta é a última etapa da sequência didática e, como atividade em sala de aula, os alunos são desafiados para uma disputa, de diversão e conhecimento, na realização do Jogo Trilha Combinatória[11], planejado para uma aplicação descontraída de conhecimentos sobre Análise Combinatória. A previsão de duração do jogo é de uma hora e acontece na forma de uma disputa entre as equipes que vivenciaram a Dinâmica Combinatória.

Segue, na Figura 9, a imagem do tabuleiro do jogo.

Figura 9 – Tabuleiro do Jogo Trilha Combinatória

Fonte: Produção do autor (2016).

[11] Jogo criado pelo mestrando.

No tabuleiro há uma trilha que deve ser percorrida por um peão de cada equipe, que tem uma determinada cor para cada equipe, a partir do lançamento de dois dados, cuja combinação dos números define quantos passos podem ser avançados. As cores dos pontos de parada determinam as cores de cartas, que ficam empilhadas sobre o tabuleiro, com desafios combinatórios, que devem ser respondidos, para que seja possível prosseguir. Existem penalidades, no caso de erros, de suspensão por uma jogada, e pontos de risco da trilha, os de cor preta, que levam a equipe para a prisão, de onde só poderá sair respondendo, com acerto, um desafio com maior grau de complexidade, retirado de cartas do baralho preto.

3.3 AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Ao falar em avaliação, pode-se dizer que é uma forma de definir o desempenho escolar, geralmente, por instrumentos como provas com questões abertas ou na forma de testes. Mas o ato de avaliar não é somente quantificar, mais que isso, implica aceitação e acolhimento das atividades que estão sendo avaliadas. Conforme Luckesi:

> O ato de avaliar, devido a estar a serviço da obtenção do melhor resultado possível, antes de mais nada, implica a disposição de acolher. Isso significa a possibilidade de tomar uma situação da forma como se apresenta, seja ela satisfatória ou insatisfatória, agradável ou desagradável, bonita ou feia. (2000, p. 1).

Avaliar não é simplesmente determinar um valor para o rendimento do estudante em instrumentos de verificação da aprendizagem sobre determinado assunto, mas é a possibilidade de analisar todo um contexto, referindo-se às ações do professor, às dos estudantes, ao desenvolvimento dos estudos, às dificuldades e aos avanços, no decorrer de todo o processo. Para proceder a uma avaliação com sentido qualitativo, é importante considerar o contexto do ambiente de aprendizagem, para, com isso, definir metas e objetivos, especialmente os de acolhimento. Para Luckesi (2000), não é possível avaliar um objeto, uma ação e muito menos uma pessoa, caso ela seja recusada ou excluída dos princípios, ou julgada previamente.

Ao aceitar acolher, no meio em que se realiza um processo avaliativo, parte-se do delineamento de dois momentos que são recorrentes no processo avaliativo: o momento de diagnosticar e o de decidir. Sendo que, para Luckesi (2000), não há como tomar decisões adequadas sem haver diagnóstico nem de diagnosticar sem tomar alguma decisão. Tais momentos devem ser constituídos de critérios que decorrem do sentido e significado do que deve ser avaliado.

No ato de avaliar, considera-se, além da aprendizagem do aluno, a metodologia de ensino do professor e o material didático utilizado pelo professor, se é adequado para que o aluno compreenda as noções e os conceitos que devem ser aprendidos.

Da intencionalidade com que se escolhe um tema de conhecimento, os conteúdos de aprendizagem e as estratégias de ensino, decorrem os critérios de avaliação. Mas, além dos critérios de avaliação, segundo Luckesi (2000), deve-se levar em conta três pontos básicos para a avaliação: 1) dados relevantes; 2) instrumentos; 3) utilização dos instrumentos.

O conteúdo Análise Combinatória, objeto de estudo deste trabalho, está estruturado no Tema 3, dos PCN+, em que se encontra:

> A Contagem, ao mesmo tempo em que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. (BRASIL, 2015, p. 126).

Conforme consta nos PCN+, ao ensinar a Análise Combinatória, deve-se ter como objetivo estimular o raciocínio, ajudando em métodos organizacionais referentes a informações e problemas que exigem um pensamento lógico, criando assim um raciocínio dito combinatório.

Assim, para avaliar se, com a Dinâmica Combinatória, é possível alcançar tais objetivos de aprendizagem, são considerados diversos instrumentos para dar visibilidade às aprendizagens relevantes propostas neste trabalho. Com isso, consideram-se seis tipos de instrumentos de avaliação, todos envolvendo as atividades realizadas pelos alunos:

→ dados preenchidos na tabela (Apêndice C) de registros, em que se busca analisar pontuações, tempo de resolução dos jogos, nível de desempenho e número de soluções, em cada jogo disputado;

→ informações que constam no diário de registros dos alunos, sobre a realização das atividades extraclasse, propostas no livro didático sugerido pela escola, com critérios como cumprimento das tarefas, organização e apresentação, com explicações e linguagens corretas das resoluções;

→ produções dos estudantes no decorrer das atividades desenvolvidas, em sala de aula, nas etapas da Dinâmica Combinatória, compostas de exercícios relacionados aos jogos e que propõem um pensamento lógico do tipo que é requerido na resolução de problemas de Análise Combinatória;

→ produção e apresentação do material de estudos e socialização, resultantes da aplicação da etapa cinco, orientada por roteiro de estudos elaborado pelo professor, para que os estudantes, organizados em equipe e com o embasamento propiciado pelos jogos, compreendam e formalizem as técnicas de contagem compartilhando-as com toda a turma;

→ avaliação cumulativa, que é um instrumento didático fortemente sugerido pela escola, que tem por base a aplicação de uma prova que engloba questões descritivas e objetivas;

→ desempenho, aplicação e colaboração dos estudantes e das suas equipes, no desenvolvimento do Jogo Trilha Combinatória.

O intuito de aplicar atividades relacionadas aos jogos decorre do propósito de averiguar se a utilização de jogos, que envolvem raciocínio combinatório, ajuda a potencializar o conceito de contagem e favorece a proposição de estratégias de resolução de problemas oriundos da árvore das possibilidades, um processo que dá origem ao princípio da contagem. A aplicação de exercícios do livro didático da escola, com diferentes níveis de complexidade, é utilizada em todo o percurso; no final da aplicação de cada jogo, os mesmos servem como meio de avaliar, se houve avanços no desenvolvimento cognitivo e no raciocínio lógico dos estudantes.

Todas as atividades devem ser desenvolvidas no diário de registros. O estudo e a apresentação da formalização dos conceitos, orientados por um roteiro de estudos, servirão para verificar a hipótese de que os jogos auxiliam no entendimento dos principais conceitos e das definições da Análise Combinatória, pois, se tal ocorre, esses podem ser compreendidos, com o apoio do livro ou de outros materiais, compartilhados e socializados com os colegas, como conhecimentos adquiridos com aprendizagem autônoma. O Jogo Trilha Combinatória desempenha um papel de teste de conhecimentos, aplicado na forma de desafios, numa competição lúdica entre equipes, com situações-problema sobre os diferentes conceitos estudados. Por fim, com a avaliação cumulativa, houve o intuito de fazer uma última averiguação sobre como ocorreu, ou se não ocorreu, a aprendizagem, possibilitando aos estudantes compreenderem, reconhecerem, diferenciarem, analisarem e aplicarem os conceitos combinatórios.

3.3.1 Avaliação dos resultados

A avaliação dos resultados visa a conhecer o alcance e os efeitos da proposta desenvolvida neste trabalho. Mas este processo vai muito além de avaliar se os alunos obtiveram sucesso com a realização das atividades; relaciona-se também com as mudanças de atitudes dos mesmos, no sentido atribuído por Zabala (1998), para quem o objetivo de avaliar é poder analisar capacidades da pessoa e não apenas o cognitivo.

Os dados avaliados, neste trabalho, buscaram explorar o desenvolvimento de diversos aspectos de aprendizagem, visando ao desenvolvimento de conteúdos factuais, conceitos e princípios, conteúdos procedimentais e, também, de atitudes dos alunos perante as situações apresentadas a eles, averiguando se as diversas ações propostas, individualmente ou por meio de trabalhos em equipe, realmente colaboraram para produzir conhecimento.

Para proceder à análise desses quatro aspectos da aprendizagem, citados acima, os dados são separados, segundo indicativo de tipos de resultados, categorizando-os em cada etapa de desenvolvimento da sequência didática. O que se busca observar é o que emerge como fatos relevantes nas produções dos alunos, com o sentido de averiguar se o que foi desenvolvido resultou em reproduções mecânicas ou aplicação e construção de conceitos gerados por ações associadas ao fazer e compreender.

Há, também, a análise dos registros do professor, que busca cruzar os resultados para se chegar a algum indicativo de mudanças, do resolver ou executar, simplesmente, para ações que, por reflexão sobre o fazer, produzem conceituações; que investiga o quanto a compreensão dos conteúdos está ligada ao fazer; que dá destaque aos obstáculos que os alunos superaram, com a realização das atividades de aprendizagem. Conforme Piaget (1978, p. 176), “o fazer é compreender em ação uma dada situação em grau suficiente para atingir os fins propostos”.

A análise dos registros leva em conta se, através das etapas, vão ocorrendo novas adaptações, por meio das ações que se conectam e criam o que Piaget (1978, p. 178) denomina de “implicações significantes”. Estas deverão ser destacadas através de constatações comuns dos alunos nas equipes de trabalho ou de forma individual. Espera-se, assim, mostrar que aprendizagem tem grande significância em relação ao compreender e ao fazer, sem uma ordem ou quantidade predefinidas desses acontecimentos.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são colocados em discussão os dados construídos durante a aplicação da sequência didática, nomeada de Dinâmica Combinatória. Ressalta-se que essa é estruturada a partir das orientações de Zabala (1998, p. 20), que define sequência didática como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim" conhecidos por professores e alunos.

A Dinâmica Combinatória foi composta por sete etapas, identificadas como Etapa 0, Etapa 1, ..., Etapa 6, com atividades diversas, associando história, jogos, trabalhos em equipe e estudo orientado. Quanto à sua aplicação, a mesma foi realizada no Colégio Scalabriniano Nossa Senhora Medianeira, em uma turma com 22 alunos de uma segunda série do Ensino Médio. Para a realização das atividades, os alunos integraram sete equipes, antecipadamente definidas, como é a norma do colégio, pelo conselheiro da turma; portanto, as equipes foram mantidas conforme solicitação da coordenação pedagógica. Quanto ao número de componentes, seis equipes foram formadas com três componentes e uma com quatro componentes, totalizando as sete equipes.

4.1 INÍCIO DO PERCURSO

Logo no início dos trabalhos, como Etapa 0, aconteceu a organização; as equipes escolheram um nome que as representava, sendo, então, as equipes designadas como: Gama, Matrix, Ômega, Alfa, Beta, Delta e Águia. Cada integrante também recebeu um nome especial como participante da Dinâmica Combinatória, que constitui o nome da equipe seguido de um número de identificação, como, por exemplo: Gama 1, Gama 2, Matrix 1, Matrix 2, assim por diante. Esta forma de nomear os alunos e as equipes garantiu a manutenção de sigilo do nome dos participantes, preservando a identidade, durante a aplicação, coleta e análise de dados, de onde se originaram os resultados deste trabalho.

Nesta etapa, também, ocorreu uma introdução feita pelo professor, sobre a Análise Combinatória, com alguns fatos históricos que motivaram e formalizaram esse campo da matemática. Foram apresentados aos alunos problemas associados ao Jogo *Stomachion*, aos quadrados mágicos e uma poesia que se associa a problemas ligados ao *Liber Abacci*, livro histórico sobre aritmética, escrito por Leonardo de Pisa (Leonardo Fibonacci), no ano de 1202.

Para preparar os alunos, foram apresentados problemas contextualizados, para que fossem resolvidos. Muitos deles buscavam soluções diretas e que pareciam óbvias; os problemas eram resolvidos sem analisar seu contexto como um todo. Mas, quando as respostas e as soluções eram apresentadas de formas distintas por algum colega ou pelo professor, ouviu-se, frequentemente, que nunca pensariam daquela forma, pois as questões pareciam diretas ao invés de exigirem um pouco mais de engenhosidade para serem solucionadas.

No final da Etapa 0, alguns alunos mostraram certa ansiedade associada a uma dose de desconfiança. Muitos pareciam dispostos a explorar os problemas e não se mostravam assustados com o que deveriam aprender.

Na próxima seção, descreve-se o primeiro contato dos alunos com problemas que estimulam o uso de estratégias, com desafios para serem resolvidos, com limite de tempo, na forma de jogos virtuais que buscam estimular o raciocínio lógico. As análises referem-se ao desempenho dos alunos e à melhora de performance com o desenvolvimento dos jogos.

4.2 RACIOCÍNIO LÓGICO

Na Etapa 1, os alunos foram colocados em situações que provocam o uso do raciocínio lógico para a elaboração de estratégias que solucionem problemas de modo rápido e eficaz.

Num primeiro momento, a atividade foi desenvolvida no laboratório de informática, de modo a possibilitar a realização de três jogos de raciocínio lógico. O objetivo desta etapa esteve relacionado à percepção dos alunos na criação de estratégias rápidas para resolução de problemas; foram verificadas suas tomadas de decisão, ao percorrerem os diversos níveis de dificuldades do jogo. Conforme Grando (2000, p. 20), a importância deste tipo de atividade está ligada a “um caminho que vai da imaginação à abstração, através de processos de levantamento de hipóteses e testagem de conjecturas, reflexão, análise, síntese e criação, pela criança, de estratégias diversificadas de resolução dos problemas em jogo”. Na Figura 10, abaixo, mostra-se uma das equipes no desenvolvimento de uma das atividades, nesse caso, o Jogo Pulo do Sapo.

Figura 10 – Atividades no laboratório de informática

Fonte: Acervo do autor (2016).

Para o desenvolvimento de cada jogo, as equipes tiveram um tempo de dez minutos para jogar e fazer as anotações, os quais estão associados ao que é sugerido em um quadro (Apêndice C) elaborado especificamente para as análises. O quadro aponta dados, como tempo de solução da atividade, pontuação atingida e nível alcançado, sendo que para cada jogo há itens específicos a serem preenchidos.

O primeiro jogo em que se procedeu o registro de dados foi o *Yellow Out* (Quadro 1), com a pontuação média alcançada pela equipe, nível máximo a que a equipe chegou e o número de movimentos realizados para atingir esse nível máximo.

Neste jogo, o propósito era tirar um carro, o amarelo, do estacionamento com o menor número de manobras possível. Os alunos precisaram de muita concentração, para avaliar as possibilidades de manobra, antes de executar algum movimento, pois, nesse jogo, quanto menor for o número de movimentos a executar maior é a pontuação, sendo que, para cada nível há um número mínimo de movimentos que determina a pontuação, que vai sendo acumulada à medida que aumenta o nível. Nesse primeiro jogo, houve grande variedade nos resultados, como se observa abaixo

Quadro 1 – Tabulação: Jogo *Yellow Out*

Equipe	Pontuação média máxima	Nível alcançado	Número médio de movimentos para o nível alcançado
Beta	2.051	17	33
Delta	1.503	11	35
Alfa	1.946	15	44
Gama	997	7	8
Matrix	2.500	19	66
Ômega	1.270	9	8
Águia	2.061	17	42

Fonte: Elaborado pelo autor (2016).

Das observações em sala de aula, percebeu-se, também, que os alunos atuavam individualmente, buscavam solucionar seus problemas sem discuti-los com os colegas. Por conta desse individualismo, houve, em alguns casos, a competição entre integrantes da mesma equipe: queriam ver quem conseguiria melhor resultado na atividade. Disso, provavelmente, resultou a disparidade nos desempenhos, conforme se vê no Quadro 1, que pode ser entendido como resultado a falta de concentração, trazendo dificuldades na criação de estratégias para tirar o carro amarelo do estacionamento. Ações sem reflexão podem ser pensadas, como em Piaget (1978, p. 176), em que "as coordenações de pensamento chegam a reunir os múltiplos e sucessivos dados em quadros simultâneos", o que pode interferir nas escolhas, levando a jogadas e movimentos que não colaboram para a solução do desafio. Ainda assim, observa-se que somente duas equipes não conseguiram superar o nível 10, que seria o nível mínimo, testado pelo professor, ao jogar aleatoriamente, sem criar uma estratégia para movimentar os carros no estacionamento; isto pode ser considerado um aspecto positivo, indicando que, na primeira jogada, a maior parte dos alunos atingiu o nível mínimo, segundo critérios do professor.

O segundo jogo foi o *Twibik*, que é uma associação de formas e que pode acontecer em duas modalidades: uma (Normal) sem controle de tempo ou pontuação, e outra (Action), em que o jogador tem até 100 segundos para tentar fazer a maior pontuação possível. Os alunos praticaram na opção normal e depois fizeram anotações do nível e da pontuação que conseguiram alcançar no tempo de 100 segundos. O Quadro 2 apresenta a pontuação média das equipes, oriundas das médias individuais de cada jogador, e o nível máximo alcançado por equipe.

Quadro 2 – Tabulação: Jogo *Twibik*

Equipes	**Pontuação média**	**Nível alcançado**
Beta	7.351	5
Delta	2.492	3
Alfa	4.437	3
Gama	5.936	6
Matrix	5.527	5
Ômega	7.903	6
Águia	5.688	5

Fonte: Elaborado pelo autor (2016).

No desenvolvimento do segundo jogo, destaca-se uma melhora significativa quanto à semelhança dos dados. O jogo exigia concentração para poder associar formas e cores, com seus pares idênticos, e havia "um segredo" que alguns alunos, logo, descobriram: poderiam eliminar mais de duas peças por vez e, se assim fosse, subtrairiam mais peças e maior seria a pontuação. No entanto, para chegar a essa conclusão, os alunos deveriam descobrir, por investigação, hipótese e teste, qual seria a melhor estratégia para pontuar mais, pois não há nenhuma menção a esta possibilidade nas regras do jogo.

Fazendo a média da pontuação das equipes, obtém-se o valor 5.620 pontos. Vale ressaltar que, individualmente, apenas seis alunos, dos 22 que participaram, não ultrapassaram essa pontuação média. Ainda sobre os desempenhos individuais, dois alunos superaram, quase dobrando, a média dos pontos; o aluno Gama 2 fez 10.334 pontos e o aluno Ômega 2 conseguiu 10.125 pontos. Como esse jogo envolvia percepção e estratégias apuradas, é possível dizer que jogos podem auxiliar na adaptação do pensamento, criando mais habilmente estratégias para a solução de desafios, como declara Grando (2000, p. 21): "É no jogo e pelo jogo que a criança é capaz de atribuir aos objetos, através de sua ação lúdica, significados diferentes, desenvolver a sua capacidade de abstração e começar a agir independentemente."

O terceiro jogo, último da Etapa 1, foi o Pulo do Sapo, cuja solução consistia na descoberta de uma estratégia de como trocar as posições dos sapos. Para tabular os resultados das jogadas, organizou-se o Quadro 3 com o tempo da primeira solução, pois mostra o quanto o aluno demorou para solucionar o problema pela primeira vez, solicitando que o mesmo fizesse mais alguma solução, buscasse criar alguma estratégia ou acertar na sorte. Registrou-se, também, o número de alunos da equipe que conseguiu e dos que não conseguiram solucionar o problema proposto no jogo.

Quadro 3 – Tabulação: Jogo Pulo do Sapo

Equipe	**Tempo da 1ª solução**	**Alunos que solucionaram o desafio**	**Alunos que não solucionaram o desafio**
Beta	1 min	1	2
Delta	7 min	2	1
Alfa	2 min	3	-
Gama	3 min	3	-
Matrix	1,5 min	3	-
Ômega	1 min	3	-
Águia	2 min	4	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2016).

O terceiro e último jogo da Etapa 1 é o que tem maior nível de exigência, como estratégia de pensamento, pois apresenta uma única solução e, muitas vezes, os alunos conseguem solucionar o problema por tentativa e erro, não memorizando um algoritmo para a solução do problema, e observou-se que os alunos já fizeram uso mais alinhado de estratégias, fazendo simulações de jogada no papel, antes de executar o jogo. Para enfrentar o desafio do jogo, os alunos abandonaram as tentativas individuais, sendo essa a prática observada nos dois jogos anteriores; antes de começarem a jogar buscavam determinar, com desenhos e anotações, alguma estratégia na equipe, que pudesse ajudá-los na solução do que lhes era proposto. Como consequência desta organização, apesar de nem todos terem alcançado a solução e de algumas equipes terem mantido o individualismo, a maioria apresentou a solução no tempo esperado.

Figura 11 – Alunos discutindo os desafios

Fonte: Acervo do autor (2016).

Com os dados dos Quadros 1, 2 e 3, evidenciam-se indicativos de avanços em relação ao desenvolvimento do nível de abstração e de imaginação dos alunos, comparando seus desempenhos. Tal comparação está de acordo com o que afirma Grando (2000, p. 21), de que "as antecipações, previsões e análises a serem processadas no jogo dependem desta situação imaginária".

Conclui-se, a partir da análise dos dados tabulados dos três jogos, dos registros individuais e das equipes e da percepção do professor, conforme Grando (2000, p. 21), que "os elementos do jogo representam entes concretos, mas a situação de jogo, vivenciada pelo aluno e que o leva à ação, é baseada numa situação irreal e metafórica, criada pelo homem".

Tal ação requer uma exercitação ao modo de criar estratégias e soluções para os desafios que são impostos, e não mais ou apenas como tentativas, mas que resultam, também, da compreensão das ações, que vai ampliando e complexificando as estratégias em pensamento. Como afirma Piaget (1978, p. 134), “surge o papel crescente das abstrações reflexivas destinadas a oferecer os instrumentos para essas reconstruções e ultrapassagens”.

Com a finalização desta etapa, segue-se para a Etapa 2, na próxima seção. A mesma busca desbravar novas reflexões e aprimorar os instrumentos para a resolução de problemas, por meio da introdução ao Princípio Fundamental da Contagem, que foi reconstruído e aprimorado com a utilização do Jogo Quadrado. Com a próxima atividade, o aluno construirá novas ultrapassagens, direcionando e formalizando cada vez mais os conceitos que englobam a Análise Combinatória.

4.3 JOGO DO QUADRADO

A atividade da Etapa 2 foi estruturada a partir do tabuleiro do jogo da velha, associando alguns movimentos do jogo de xadrez. Esta atividade teve, como principal finalidade, explorar alguns conceitos básicos de contagem e ajudar a compreender a fundamentação da Árvore das Possibilidades, como base mentora do princípio da contagem. A ideia de explorar este jogo foi a de poder ensinar matemática através de problemas, buscando desenvolver o raciocínio combinatório dos alunos, juntamente com o princípio multiplicativo. Lopes e Rezende (2010, p. 668) entendem que, com este jogo, “fica evidente que usamos o problema para ensinar matemática, o que é diferente de ensinar matemática para resolver problemas”.

Uma situação-problema construída para o jogo deve apresentar, conforme Lopes e Rezende:

> [...] aspectos-chave para o conceito que se quer estudar; o aluno deve ser levado a interpretar o enunciado da questão, estruturar a situação que lhe é apresentada, utilizar o que aprendeu para resolver outros problemas, o que exige retificações e rupturas. (2010, p. 664).

Portanto, para se efetivar o conhecimento matemático e conseguir indagar retificações e rupturas dos conceitos, criando, assim, novos conceitos, o próprio aluno também deve estar disposto a explorar ao máximo o que lhe é apresentado. Somente assim, de acordo com Lopes e Rezende (2010, p. 664), “um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos através de uma série de generalizações”.

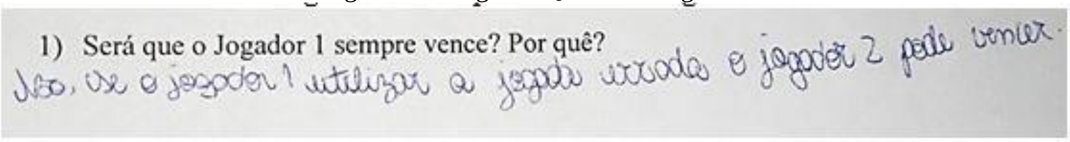
Para a apreciação dos resultados do Jogo do Quadrado, foram utilizadas as respostas às perguntas entregues aos alunos depois do jogo, que são as mesmas que os autores Lopes e Rezende (2010) utilizaram no trabalho que desenvolveram. Os questionamentos feitos após o jogo foram:

1) Será que o Jogador 1 sempre vence? Por quê?

2) É possível ocorrer empate? Por quê? O jogo é de azar ou de estratégia? Se, ao invés de oito, aumentarmos o número de jogadas para nove, quais os possíveis resultados do jogo?

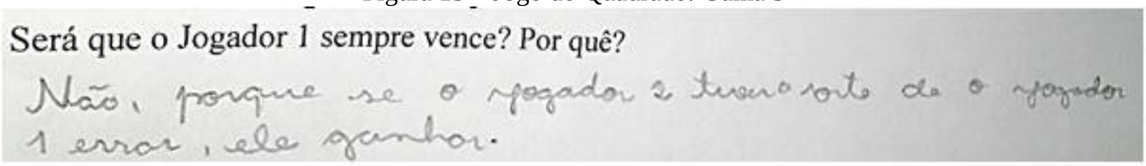
Analisando as respostas dos alunos, constatou-se que, dos 22 alunos, apenas 10 responderam que o Jogador 2 tem chance de vencer o jogo, como foram as respostas dos alunos Águia 1 e Gama 3 (Figuras 12 e 13).

Figura 12 – Jogo do Quadrado: Águia 1


1) Será que o Jogador 1 sempre vence? Por quê?
Não, se o jogador 1 utilizar a jogada errada o jogador 2 pode vencer.

Fonte: Acervo do autor (2016).

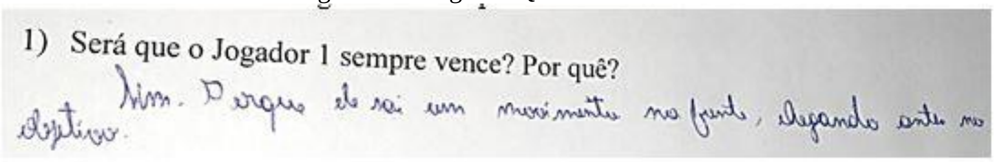
Figura 13 – Jogo do Quadrado: Gama 3


Será que o Jogador 1 sempre vence? Por quê?
Não, porque se o jogador 2 tiver sorte de o jogador 1 errar, ele ganha.

Fonte: Acervo do autor (2016).

Percebe-se que ambos responderam que o Jogador 2 só ganharia, caso o Jogador 1 cometesse um erro, levando a crer que esses 10 alunos atingiram um dos principais objetivos desse questionamento: elencar as possibilidades de jogadas. Os demais alunos responderam sim à pergunta, de que o Jogador 1 sempre vence, pois ele inicia o jogo, como aponta o aluno Beta 3.

Figura 14 – Jogo do Quadrado: Beta 3


1) Será que o Jogador 1 sempre vence? Por quê?
Sim. Porque ele sai um movimento na frente, chegando antes no objetivo.

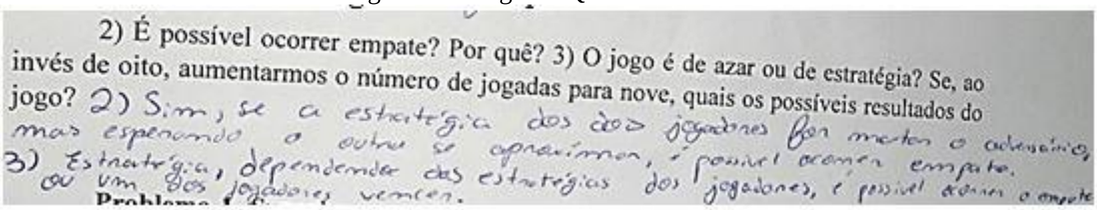
Fonte: Acervo do autor (2016).

Isso leva a crer que esses alunos não pensaram em possibilidades de outras jogadas, direcionaram o pensamento apenas para o fazer, para o ato de jogar e ganhar o jogo, eliminando a possibilidade de o Jogador 2 ganhar.

As respostas da segunda pergunta surpreenderam e confirmaram a hipótese de descarte da possibilidade de o Jogador 2 ganhar, pois 20, dos 22 alunos, responderam que pode haver empate. Isso demonstra que eles avançaram, pois tentaram organizar, em pensamento, algumas possibilidades de jogadas, antes de responder a pergunta.

Na segunda questão, 18 alunos responderam que o jogo é de estratégia, pois o Jogador 1 só deixaria de ganhar, caso escolhesse a opção errada de jogada, como responde o aluno Beta 1. De fato, mesmo parecendo impossível, a princípio existe essa possibilidade de o Jogador 1 perder a jogada, e os alunos acabaram descobrindo esta possibilidade.

Figura 15 – Jogo do Quadrado: Beta 1


2) É possível ocorrer empate? Por quê? 3) O jogo é de azar ou de estratégia? Se, ao invés de oito, aumentarmos o número de jogadas para nove, quais os possíveis resultados do jogo? 2) Sim, se a estratégia dos dos jogadores for melhor o adversário, mas esperando o outro se aproximar, é possível ocorrer empate.
3) Estratégia, dependendo das estratégias dos jogadores, é possível ocorrer o empate ou um dos jogadores vencer.

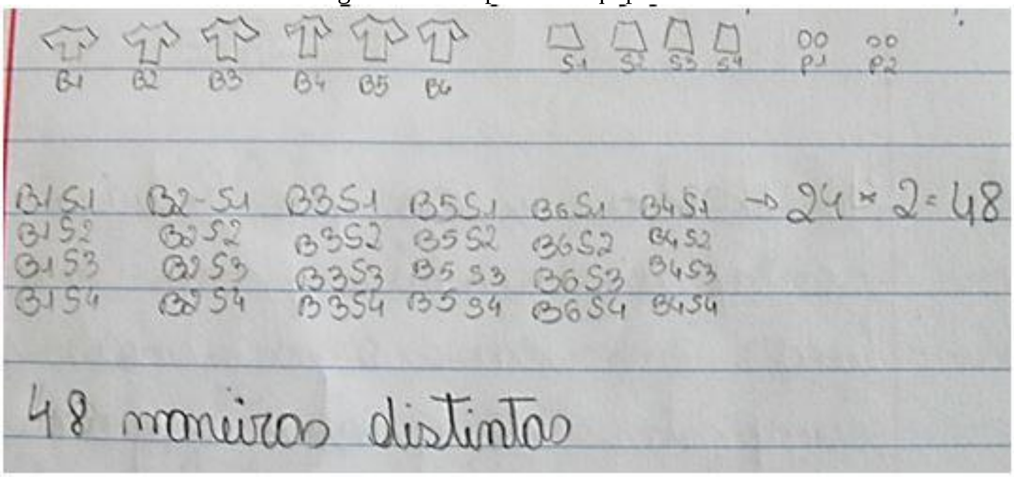
Fonte: Acervo do autor (2016).

Na sequência da pergunta dois, caso fosse aumentada uma jogada, ficando nove ao invés de oito, 17 alunos responderam que ainda poderia ocorrer empate ou vitória do Jogador 1, e que a vitória do Jogador 2 dependeria de uma estratégia muito mal-elaborada do Jogador 1. Com isso, deduz-se que os alunos chegaram a essas conclusões preparando possibilidades de jogadas. Os outros cinco alunos não responderam ou ignoraram essa parte da pergunta. Observou-se que os que responderam fizeram testes para chegar a algumas conclusões sobre o funcionamento do jogo. Os testes observados estão ligados à construção de árvore de possibilidades, pois os alunos buscaram descrever todos os conjuntos de jogadas possíveis.

Posteriormente à realização do jogo, foi proposto aos alunos um exercício em forma de desafio. Todas as equipes buscaram criar uma representação da situação, por meio de uma árvore de possibilidades, de modo bastante informal, e o interessante é que muitos já utilizaram um princípio multiplicativo para solucionar o desafio, como, por exemplo, as equipe Alfa e Ômega.

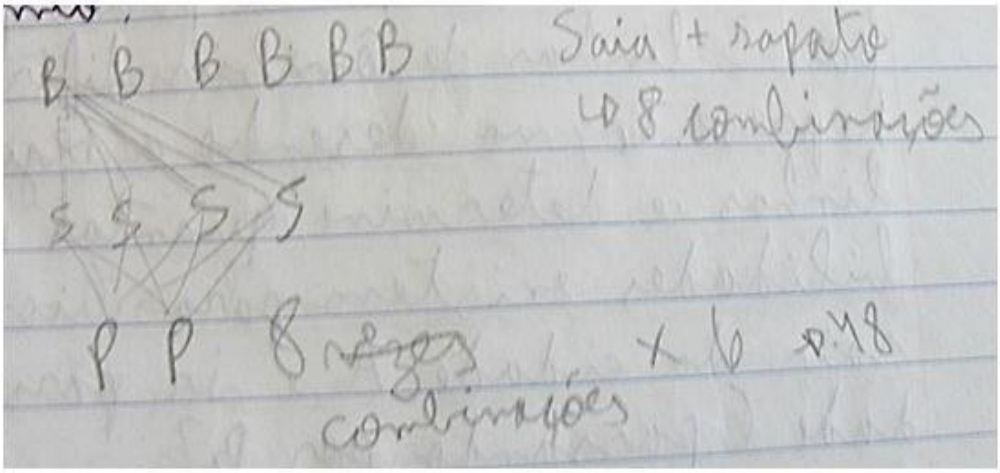
“Jeniffer vai participar da promoção de uma loja de roupas que está oferecendo um vale-compras de R$ 1.000,00 para o participante que apresentar primeiro o maior número de combinações distintas, ao menos em uma peça, com o kit de roupas escolhido pela loja. O kit é composto de: seis blusas, quatro saias e dois pares de sapato. Quantas são as maneiras distintas que Jeniffer tem para combinar as peças do vestuário, para ter chance de concorrer ao prêmio?”

Figura 16 – Resposta da equipe Alfa



Fonte: Acervo do autor (2016).

Figura 17 – Resposta da equipe Ômega



Fonte: Acervo do autor (2016).

Com a resolução do desafio, os alunos questionaram se não haveria uma forma mais prática para solucionar esse tipo de exercício. Surge então um debate sobre qual seria um bom método para solucionar esse tipo de exercício; um dos alunos, o Ômega 2, sugere a resolução de mais alguns exercícios do livro integrado do colégio, para servirem como testes de investigação. De fato, foi o que aconteceu, pois já havia sido antecipado que teriam exercícios como tarefa de casa, para serem apresentados na aula seguinte.

Na aula subsequente, foi solicitado que os alunos apresentassem as resoluções no quadro negro. Percebeu-se, claramente, que muitos deles já estavam aplicando, diretamente, o princípio multiplicativo da Análise Combinatória. No entanto, quando surgia alguma dúvida de como iniciar a resolução dos exercícios, enumeravam algumas possibilidades, na forma de árvore, para depois aplicarem a multiplicação necessária.

Fazendo uma análise breve de acertos e erros, conclui-se que quinze alunos acertaram todas as questões, três erraram duas, dois erraram quatro questões e dois alunos não fizeram a tarefa. Com base nesses dados, chegou-se à conclusão de que pelo menos 62% dos alunos construíram o sentido do princípio da contagem, mesmo sem terem dado indícios, nem mesmo em comentários, que já conheciam esse princípio, o que, para os demais alunos, foi somente uma questão de tempo, pois todos alcançaram este objetivo de aprendizagem.

A compreensão do Princípio Fundamental da Contagem, por meio da construção do conjunto de jogadas, de fato está associada à árvore de possibilidades, que induz ao princípio multiplicativo da Análise Combinatória. Essa conversão, em pensamento, se dá para Piaget (1978, p. 134), “por etapas da abstração reflexiva, que corresponde aos momentos sucessivos de tomada de consciência e da compreensão”. Portanto, é possível concluir, nesta etapa, que o aluno estruturou um modo mais eficaz de solucionar os problemas, que construíu atalhos e chegou às soluções por meio de um princípio construído de modo análogo à análise da formação dos agrupamentos.

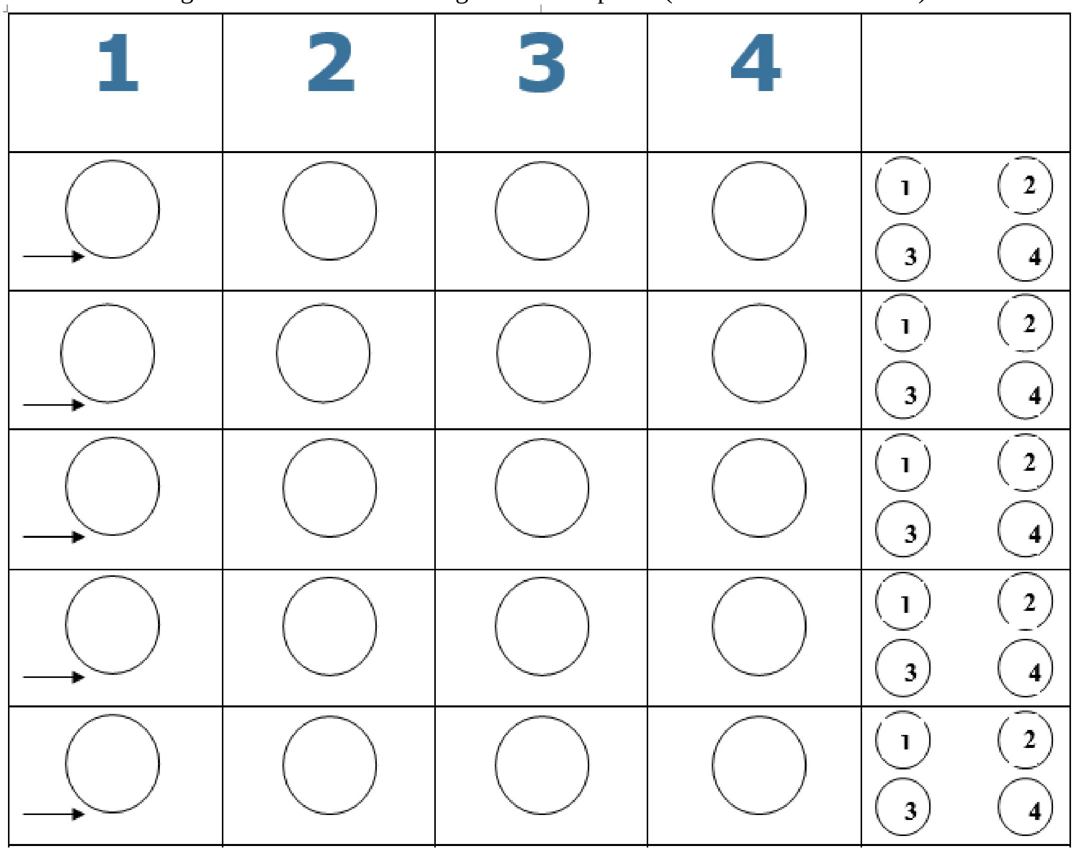
Na sequência das atividades, na próxima seção analisa-se a Etapa 3, em que foi aplicado o Jogo Senha, adaptado do original, mantendo-se alguns de seus princípios, para auxiliar os alunos a conceberem e estruturarem o pensamento associado à resolução de problemas de permutações e arranjos simples.

4.4 JOGO SENHA

O Jogo Senha, como atividade da Etapa 3, envolve o decifrar de um enigma formado por um determinado número de cores, que um jogador desafia outro jogador a decifrar. Normalmente, é jogado em duplas; no entanto, o mesmo foi explorado pelas equipes já formadas no início da dinâmica, nas quais os componentes das equipes se desafiavam entre si.

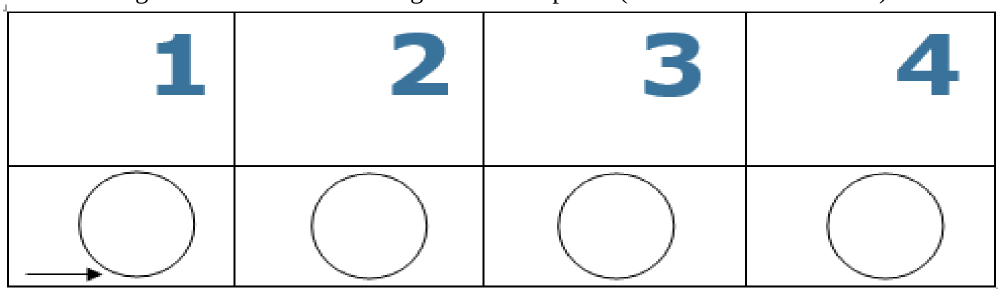
Este jogo, na versão comercial, em geral bem conhecida, tem um tabuleiro em que se joga e há também versões *online* disponíveis. Neste trabalho, para a atividade em sala de aula, com o intuito de explorar os conceitos de Permutações e de Arranjos Simples, foi adaptado um tabuleiro, aplicado à atividade, utilizando lápis de colorir e papel, conforme mostrados nas Figuras 18 e 19, abaixo:

Figura 18 – Tabuleiro do Jogo Senha adaptado (Tabuleiro do desafiado)



Fonte: Acervo do autor (2016).

Figura 19 – Tabuleiro do Jogo Senha adaptado (Tabuleiro do desafiante)



Fonte: Acervo do autor (2016).

Como se observa nas Figuras 18 e 19, o tabuleiro foi dividido em duas partes: a Figura 18 é a do tabuleiro do aluno que será desafiado, e que terá que testar as possíveis senhas. A Figura 19 é a do tabuleiro do desafiante, que cria a sua senha. As regras do jogo, como desenvolvido em sala de aula, são as seguintes:

– definir desafiante e desafiado;

– o desafiante dispõe de oito cores, exceto branco e preto;

– o desafiante forma uma senha de cores diferentes, pintando a sua cartela;

– o desafiado tenta adivinhar a senha do desafiante, pintando uma sequência de cores na primeira linha da sua cartela;

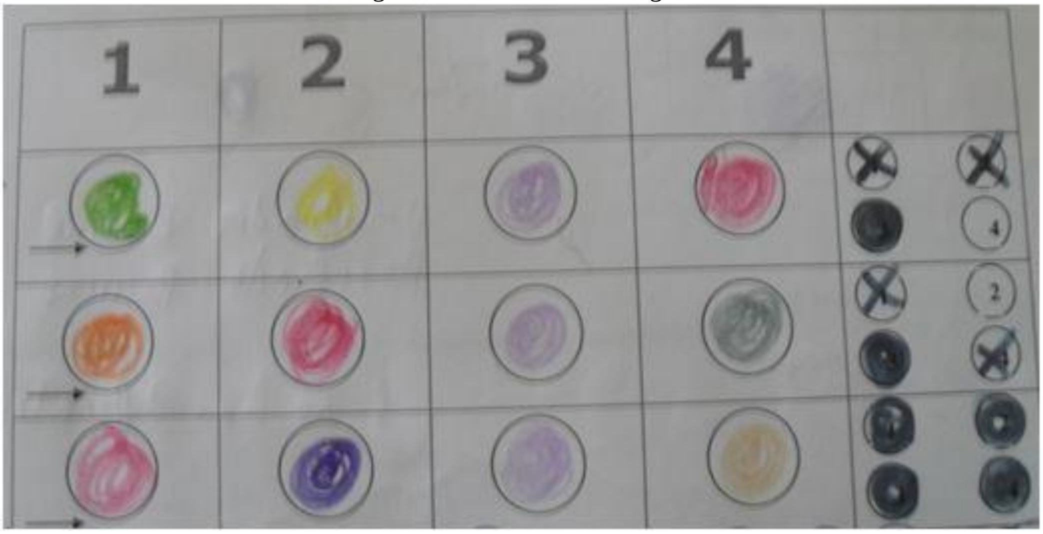
– ao lado da linha de cada jogada, em que há quatro círculos, o desafiante pinta um círculo preto em cada cor e correspondente posição corretas; deixa um círculo em branco a cada cor correta, mas em posição errada, e marca um “x” a cada cor que não pertence à senha;

– o desafiado tem nove tentativas para descobrir a senha. Caso não acerte a senha, o mesmo desafiado contabilizará nove pontos;

– numa segunda rodada, invertem-se os papéis de desafiante e desafiado, vencendo o jogo aquele que acertar a senha com menor número de tentativas (fileiras pintadas).

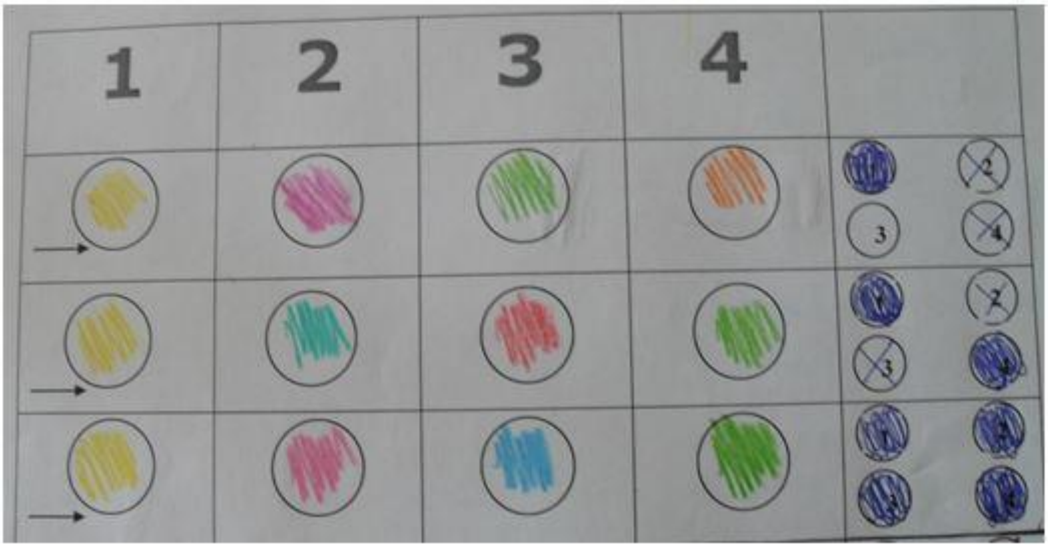
No decorrer da atividade, pôde-se perceber envolvimento e colaboração de todos os alunos. Em duplas, buscaram criar estratégias para tentar solucionar a senha do desafiante de modo mais rápido e eficiente. Muitos alunos conseguiram acertar a senha em apenas três ou quatro jogadas, utilizando o pensamento de eliminar possibilidades de cores, raciocinando sobre as marcas nos círculos das linhas de cada jogada, como fizeram os alunos Ômega 2, Delta 2 e Matrix 1, cujas cartelas são mostradas nas Figuras 20 a 21.

Figura 20 – Tabuleiro: Ômega 2



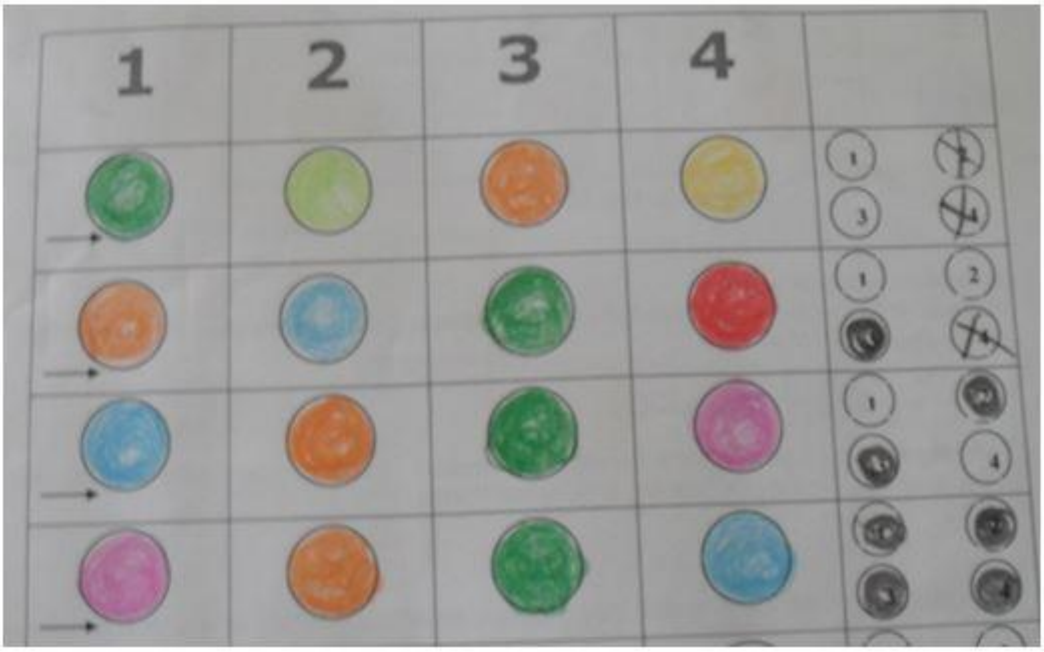
Fonte: Acervo do autor (2016).

Figura 21 – Tabuleiro: Delta 2



Fonte: Acervo do autor (2016).

Figura 22 – Tabuleiro: Matrix 1



Fonte: Acervo do autor (2016).

Ao buscar estratégias para solucionar a senha de maneira rápida, percebeu-se que o jogo “propicia o desenvolvimento de habilidades como análise de possibilidades, tomada de decisão, trabalho em grupo, saber perder e ganhar”. (CARVALHO, 2009, p. 32).

Após o desenvolvimento do jogo em sala de aula, os alunos responderam sete perguntas relacionadas a possíveis modos de formação de senhas utilizando cores. As perguntas exploravam problemas de contagem que estavam associados a Permutações e a Arranjos Simples e foram as seguintes:

1) Utilizando três cores, para preencher três espaços, sem repetição, quantas senhas diferentes podemos formar?

2) Utilizando quatro cores para preencher os quatro espaços da senha, sem repetição, quantas senhas diferentes é possível formar?

3) E se pudéssemos escolher entre cinco cores, quantas senhas diferentes é possível formar?

4) No caso do jogo, onde formaram senhas escolhendo entre seis cores, qual é o número total de senhas possíveis repetindo as cores? Caso não haja repetição das cores, qual é o número total de senhas que podemos formar?

5) Usando seis cores e fixando a primeira cor, por exemplo amarela, quantas senhas diferentes podemos formar?

6) Se pudermos escolher entre seis cores para quatro espaços, com repetição, quantas senhas diferentes é possível formar?

7) Dispondo de quatro cores distintas, de quantos modos diferentes podemos formar uma senha, sendo que as cores adjacentes não podem ser iguais?

Para registro dos desempenhos de acertos e erros, em relação a estas questões, criou-se o Quadro 4, conforme segue.

Quadro 4 – Tabulação das respostas do questionário do Jogo Senha

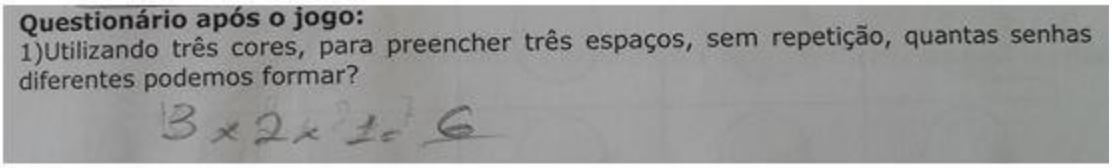
Questões	**Acertos**	**Erros**
Questão 1	21	1
Questão 2	18	4
Questão 3	18	4
Questão 4	18	4
Questão 5	8	14
Questão 6	17	5
Questão 7	18	4

Fonte: Acervo do autor (2016).

Analisando o Quadro 4, percebeu-se que os alunos fizeram mais acertos. Na correção das questões, observou-se que os erros aconteciam mais na proposição das resoluções, indicando que, para alguns, o princípio da contagem não estava totalmente assimilado e, em outros, havia dificuldade na interpretação da questão. Na questão cinco, em que os alunos tiveram mais erros do que acertos, a maioria não considerou a exclusão da uma cor fixada dentre seis que foram indicadas, o que pode ser um erro de interpretação.

Na sequência de figuras abaixo, Figuras 23 a 29, são mostradas boas resoluções das questões, tomando-se questões distintas de equipes distintas, como forma de ilustrar o modo informal como o Jogo Senha auxiliou os alunos a associarem os conceitos de Permutações e de Arranjos Simples, sem ainda conhecê-los formalmente.

Figura 23 – Jogo Senha questão 1: Equipe Delta

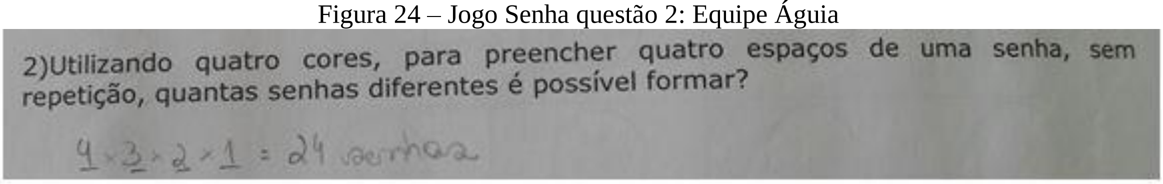


Questionário após o jogo:
1)Utilizando três cores, para preencher três espaços, sem repetição, quantas senhas diferentes podemos formar?

$3 \times 2 \times 1 = 6$

Fonte: Acervo do autor (2016).

Figura 24 – Jogo Senha questão 2: Equipe Águia

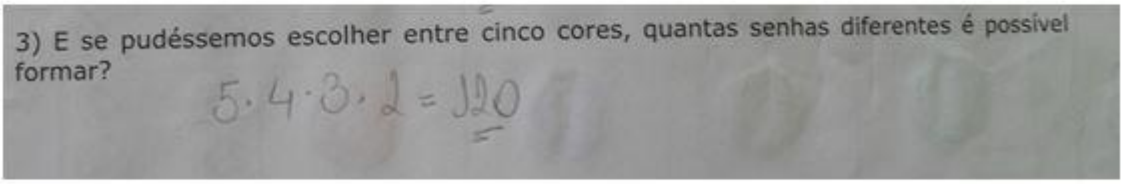


2)Utilizando quatro cores, para preencher quatro espaços de uma senha, sem repetição, quantas senhas diferentes é possível formar?

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ senhas

Fonte: Acervo do autor (2016).

Figura 25 – Jogo Senha questão 3: Equipe Alfa

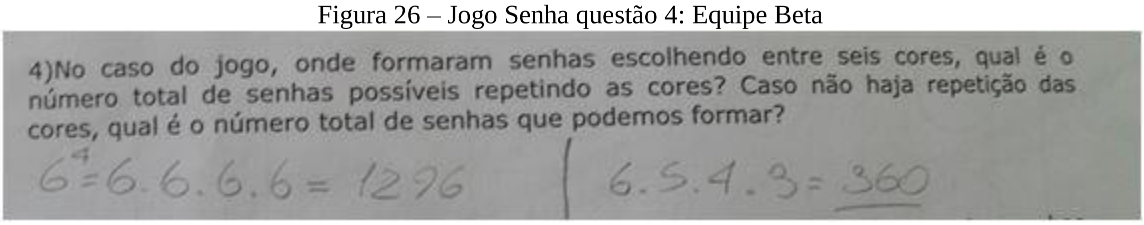


3) E se pudéssemos escolher entre cinco cores, quantas senhas diferentes é possível formar?

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

Fonte: Acervo do autor (2016).

Figura 26 – Jogo Senha questão 4: Equipe Beta

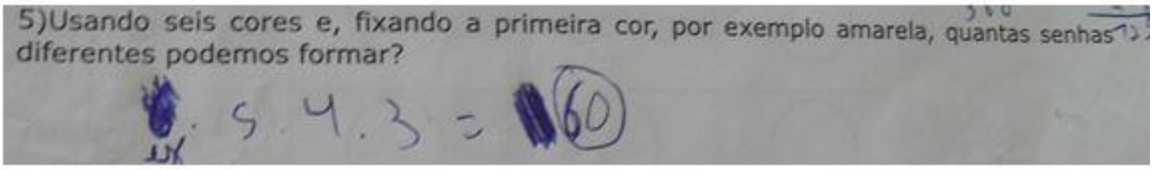


4)No caso do jogo, onde formaram senhas escolhendo entre seis cores, qual é o número total de senhas possíveis repetindo as cores? Caso não haja repetição das cores, qual é o número total de senhas que podemos formar?

$6^4 = 6.6.6.6 = 1296$ | $6.5.4.3 = 360$

Fonte: Acervo do autor (2016).

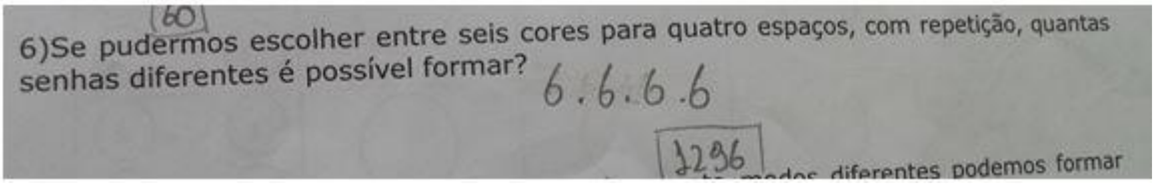
Figura 27 – Jogo Senha questão 5: Equipe Matrix


5)Usando seis cores e, fixando a primeira cor, por exemplo amarela, quantas senhas diferentes podemos formar?

5 . 4 . 3 = 60

Fonte: Acervo do autor (2016).

Figura 28 – Jogo Senha questão 6: Equipe Gama

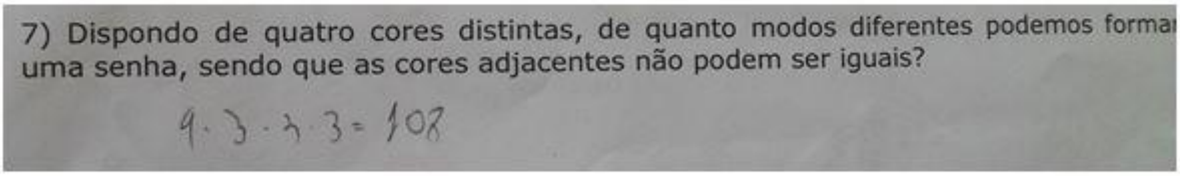

6)Se pudermos escolher entre seis cores para quatro espaços, com repetição, quantas senhas diferentes é possível formar?

6 . 6 . 6 . 6

1296

Fonte: Acervo do autor (2016).

Figura 29 – Jogo Senha questão 7: Equipe Ômega


7) Dispondo de quatro cores distintas, de quanto modos diferentes podemos formar uma senha, sendo que as cores adjacentes não podem ser iguais?

4 · 3 · 3 · 3 = 108

Fonte: Acervo do autor (2016).

Com a análise das respostas do questionário pós-jogo, percebeu-se que a compreensão dos conceitos estava ocorrendo para os alunos; por meio de suas ações, eles conseguiram compreender como solucionar os problemas apresentados. Para Piaget (1978, p. 59) isso se dá, pois há o surgimento dos significados, que estão sendo revelados de modo progressivo, por meio de ações que, depois do jogo, aconteceram em pensamento. A ação que está implícita no jogo gera a compreensão dos conceitos, o que é decorrência, segundo Piaget (1986), de uma tomada de consciência, que vinha sendo adquirida por meio de ações anteriores.

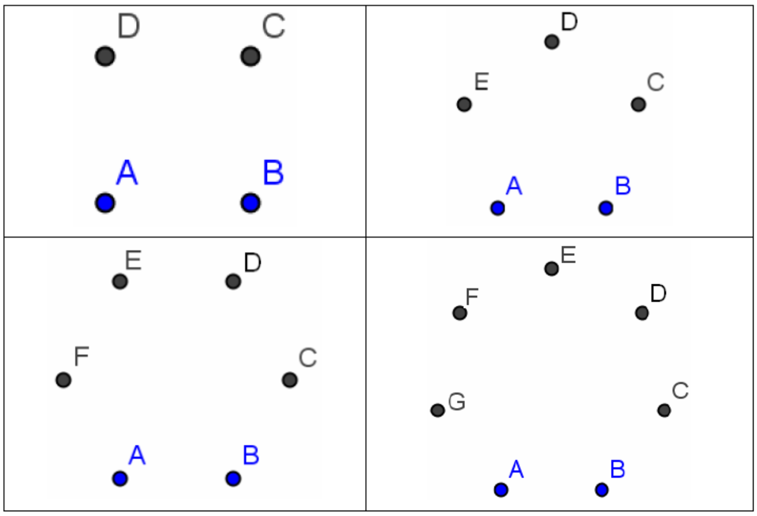
A seguir, apresentam-se dados coletados na Etapa 4, cujas atividades foram propostas a partir do Jogo Bicolorido. Com esse jogo exploraram-se conceitos de Geometria, buscando propiciar aos alunos uma tomada de consciência que os ajudasse a perceber e formalizar a ideia de agrupamentos, que se distinguem por natureza dos seus elementos. Os agrupamentos explorados envolvem a distinção de arestas e diagonais, cada uma definida por dois pontos, independentemente da ordem em que são tomados.

4.5 JOGO BICOLORIDO

O Jogo Bicolorido foi escolhido e adaptado com o intuito de trabalhar conceitos ligados a Combinações Simples, por meio de análise de segmentos que determinam um polígono, aqui mais especificamente um triângulo. Segundo o criador do jogo, Barbosa (1997), o propósito era auxiliar a deduzir a equação que calcula o número de diagonais em um polígono regular, conteúdo que, normalmente, é trabalhado com o oitavo ano do Ensino Fundamental. Neste trabalho, esse jogo faz parte da Etapa 4 da sequência didática e, como os alunos já identificavam e diferenciavam, muito bem, uma diagonal e um segmento de lado de um polígono, acabaram por responder as perguntas ligadas ao jogo de forma direta, com o auxílio de ilustrações simples. No final desta atividade, concluiu-se que o jogo possibilitou alcançar o objetivo que se tinha com ele, que era o de explorar o conceito de combinações simples, associadas à construção de segmentos dispostos através dos vértices de um polígono dado.

O Jogo Bicolorido é normalmente jogado em duplas. Na sala de aula, os alunos que estavam organizados nas equipes de três componentes formavam duplas e se desafiavam entre si. Quem perdia na disputa de duplas ficava fora uma rodada e esperava para jogar com o perdedor da outra rodada, fazendo uma espécie de rodízio entre os integrantes das equipes, para ver quem conseguia ganhar mais vezes. O objetivo da atividade estava ligado à criação de estratégias para poder descobrir um modo de não perder o jogo, sem deixar espaços abertos, dificultando assim as jogadas do outro jogador. Este, que utilizamos na sequência didática, foi adaptado de Silva (2010), para explorar conceitos de combinação simples, numa configuração de tabuleiro, como está mostrado na Figura 30.

Figura 30 – Tabuleiro do Jogo Bicolorido



Fonte: Acervo do autor (2016).

Para desenvolver esta atividade, são necessários alguns materiais de fácil acesso, como uma folha, onde são representados os vértices dos polígonos considerados, caneta ou lápis de cor, pelo menos, duas cores diferentes. As regras são bem simples:

– define-se quem inicia o jogo, por exemplo, num “par ou ímpar”;

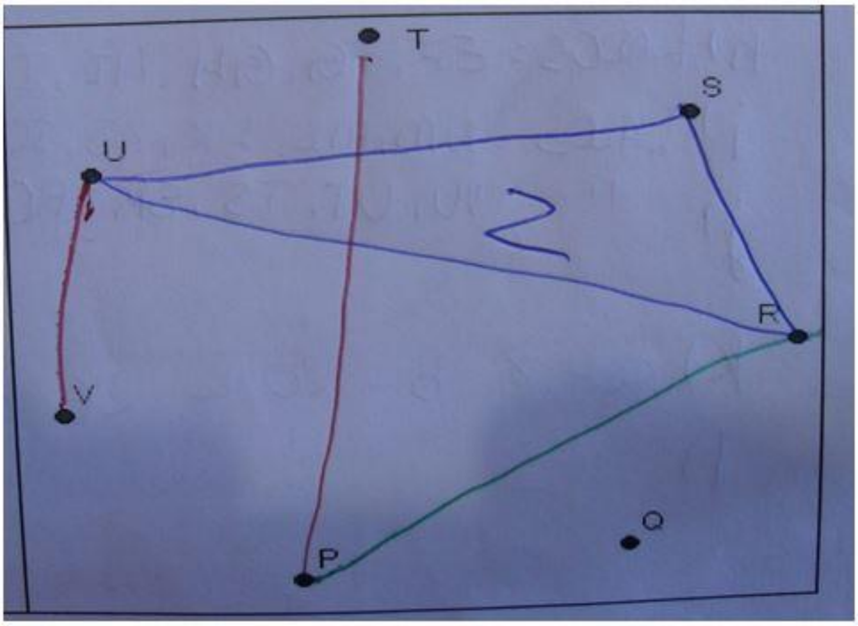
– o jogo inicia no tabuleiro de quatro pontos, passando-se, gradativamente, para outros, com maior número de pontos;

– os jogadores, cada qual com uma caneta ou lápis de cores distintas, devem construir, sucessiva e alternadamente, segmentos de reta com extremos nos pontos do tabuleiro. Esses segmentos podem ser lados ou diagonais do polígono representado no tabuleiro, por seus vértices;

– em cada etapa, é vencedor aquele que fechar, por primeiro, um triângulo monocromático (Figura 30), indicando que o fechou com a sua caneta ou seu lápis.

Os alunos mostraram grande entusiasmo com este jogo, pois, segundo eles, assemelha-se, em raciocínio, ao “jogo da velha”, e “tem sabor de competição”.

Figura 31 – Jogo Bicolorido: Águia 1 *versus* Águia 2



Fonte: Acervo do autor (2016).

Para transformar as ações dos jogos em pensamento, foram feitas, depois de jogarem, as perguntas de (a) a (f), que são as seguintes:

(a) Com quatro pontos não colineares, A, B, C e D, quantos segmentos de reta podemos formar?

(b) Com cinco pontos não colineares, A, B, C, D e E, quantos segmentos podemos formar?

(c) Com seis pontos não colineares, A, B, C, D, E e F, quantos segmentos podemos formar?

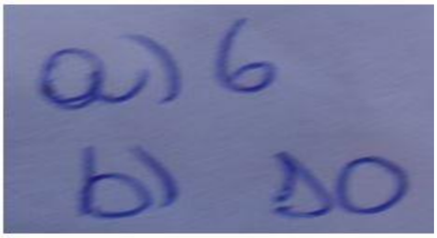
(d) E, com sete pontos não colineares, A, B, C, D, E, F e G, quantos segmentos podemos formar?

(e) Seguindo essa mesma lógica, quantos segmentos podemos formar com oito, nove e com 10 pontos não colineares?

(f) E com *n* pontos não colineares, quantos segmentos podemos formar?

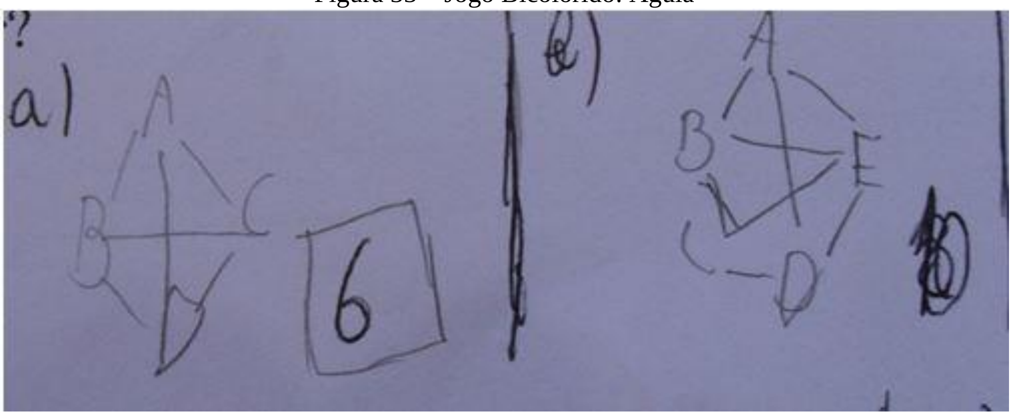
O que se observou, nas respostas das equipes, é que somente duas equipes, Gama e Matrix, não responderam corretamente as perguntas; parecem ter permanecido ligadas à ação, presas ao que era o comando do jogo. Ambas as equipes afirmaram que esqueceram o significado da palavra *segmento* e que interpretaram a pergunta, como o número de triângulos que poderiam ser formados no polígono. As demais equipes acertaram as perguntas mostrando entendimento; alguns responderam de maneira direta e outros por meio de ilustrações, como se observa nas Figuras 32 e 33, respectivamente, da equipe Beta e Águia, para responderem as perguntas das letras (a) e (b).

Figura 32 – Jogo Bicolorido: Beta



Fonte: Acervo do autor (2016).

Figura 33 – Jogo Bicolorido: Águia

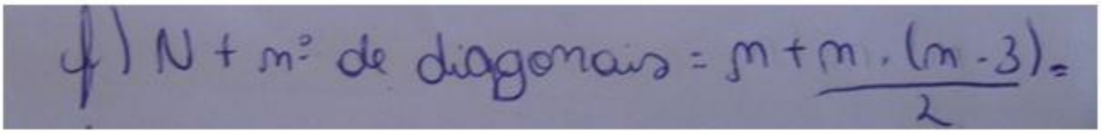


Fonte: Acervo do autor (2016).

Para as respostas das perguntas (c), (d) e (e), os demais alunos usaram as mesmas intuições lógicas apresentadas acima, chegando a respostas corretas.

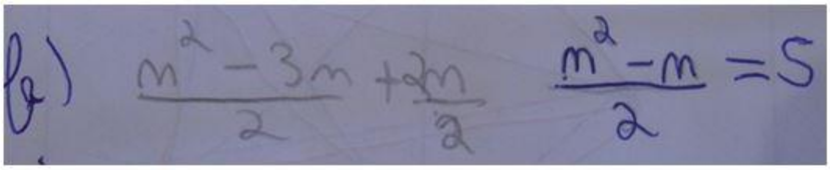
Na pergunta (f), em torno de 60% da turma conseguiram obter a resposta correta; os demais deixaram a pergunta em branco ou responderam qualquer coisa, para não deixar de responder. Seguem (Figuras 34 a 36) algumas respostas de alunos que acertaram a pergunta.

Figura 34 – Jogo Bicolorido: Águia



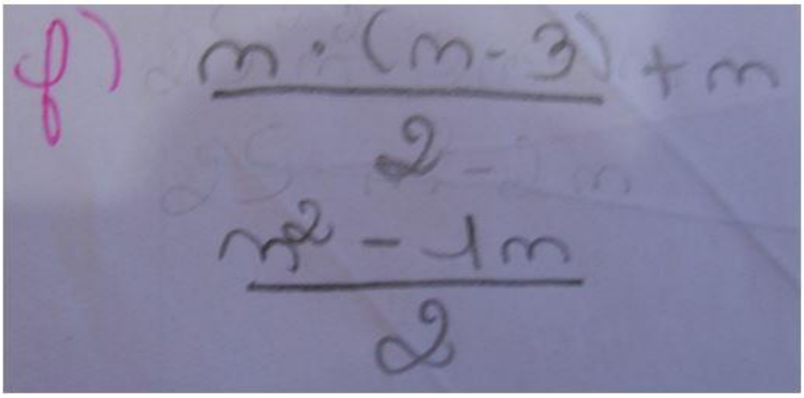
Fonte: Acervo do autor (2016).

Figura 35 – Jogo Bicolorido: Ômega



Fonte: Acervo do autor (2016).

Figura 36 – Jogo Bicolorido: Alfa



Fonte: Acervo do autor (2016).

A apresentação e as generalizações das repostas acima estão ligadas ao fato de os alunos terem um conhecimento prévio do estudo de polígonos regulares e as partes que o compõem. Para Piaget (1978, p. 71), isso ocorre, pois "um certo número de fatos notáveis mostram essa passagem gradual de regras características das ações dos indivíduos às coordenações operatórias", mas ele mesmo salienta que ainda podem ocorrer defasagens, como no caso de duas equipes já mencionadas, que não conseguiram associar ou lembrar qual era o significado da palavra *segmento* e de não conseguirem criar um modelo algébrico para calcular o total de segmentos que se pode formar com os vértices de um polígono. No entanto, mesmo com dificuldades de interpretação, de compreensão de alguns significados ou de atingirem a condição de uma generalização algébrica, os alunos, na sua maioria, conseguiram responder adequadamente as perguntas que introduzem o conceito de combinação, que foi proposto com novas ações em pensamento, conforme segue.

Na sequência das atividades, foram propostas novas perguntas, pontuadas da letra (g) até a letra (l), com o intuito de dar sequência ao questionário já respondido, sendo que a maioria das respostas encontradas estava correta. Muitos dos alunos buscaram responder as novas perguntas de forma direta, sem expressar algum esboço algébrico ou geométrico para a solução, e outros buscaram citar e enumerar os segmentos que formavam os lados e as diagonais do polígono, de modo a se sentirem mais seguros quanto à solução apresentada. Segue abaixo o novo bloco de perguntas e algumas respostas dos alunos.

(g) Dos segmentos formados no item (a), quantos são lados e quantos são diagonais do quadrilátero ABCD?

(h) Em (b), quantos são lados e quantos são diagonais do pentágono ABCDE?

(i) Quantos segmentos são lados e quantas diagonais há no hexágono ABCDEF?

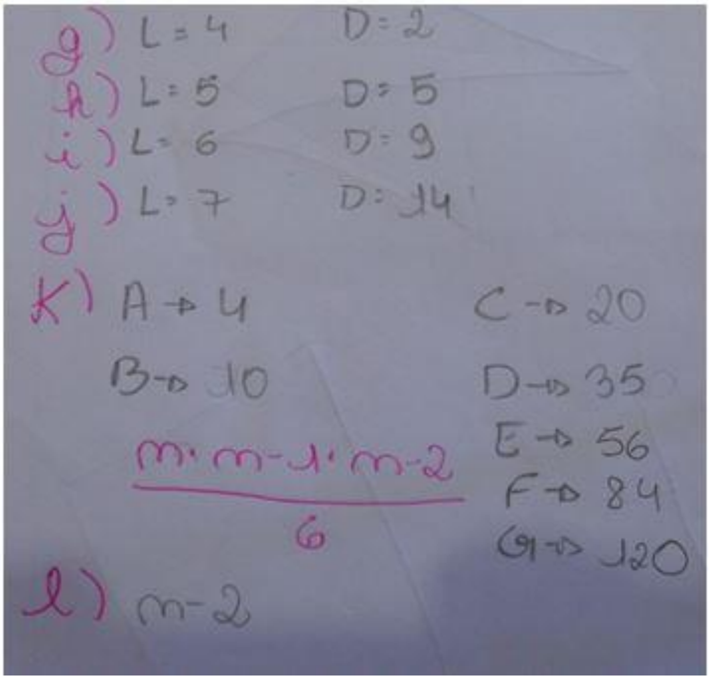
(j) E dos segmentos formados com sete pontos, quantos são lados e quantos são diagonais do heptágono ABCDEFG?

(k) Quantos triângulos podemos formar em cada situação informada nos itens (a), (b), (c), (d) e (f) do questionário apresentado anteriormente?

(l) (Desafio) Para um polígono regular de *n* lados, quantos triângulos internos conseguimos formar?

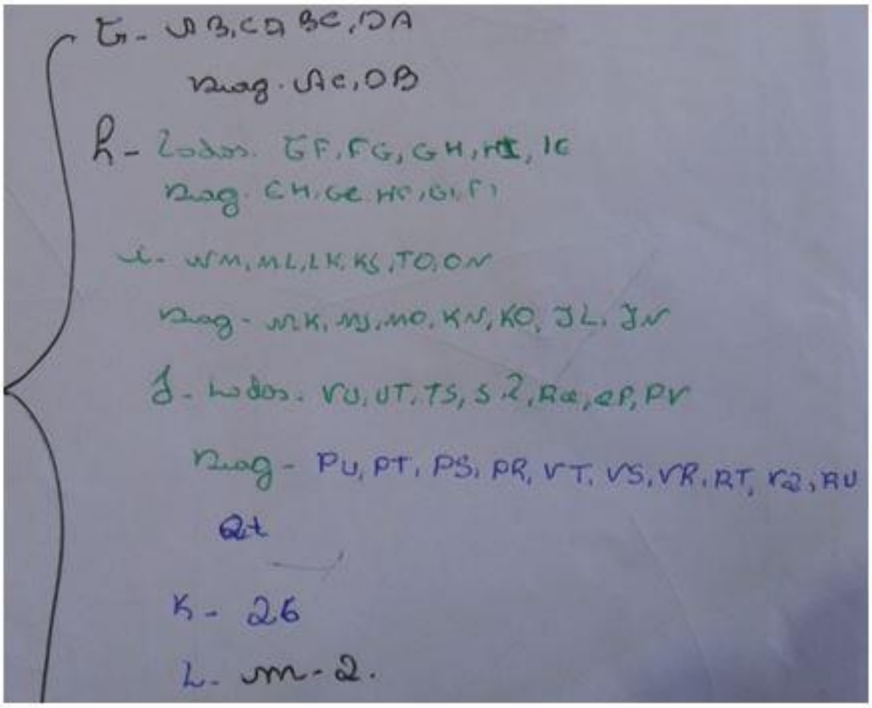
Nas Figuras 37, 38 e 39, observam-se as resoluções e respostas de três equipes: Alfa, Águia e Ômega, respectivamente, das perguntas feitas de (g) a (l).

Figura 37 – Jogo Bicolorido: Alfa



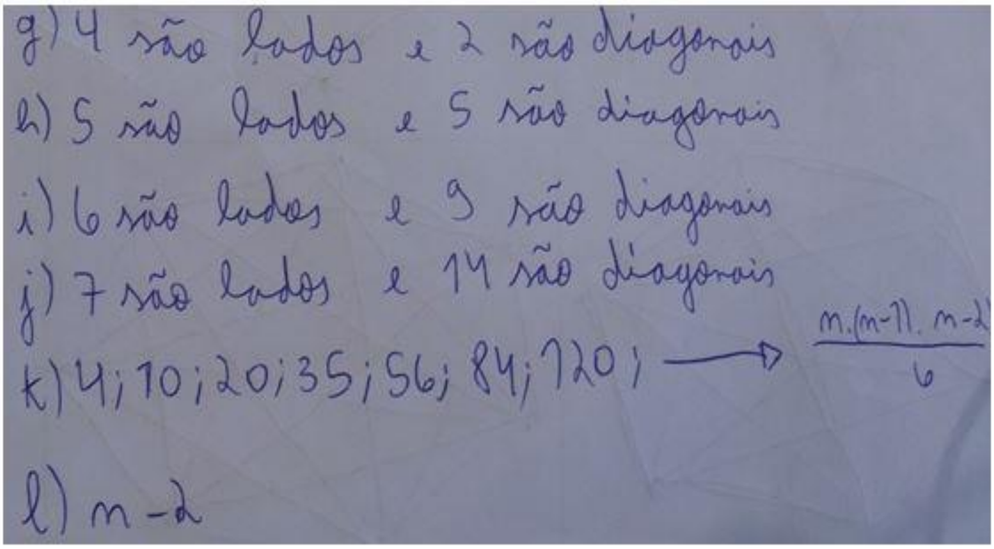
Fonte: Acervo do autor (2016).

Figura 38 – Jogo Bicolorido: Águia



Fonte: Acervo do autor (2016).

Figura 39 – Jogo Bicolorido: Ômega



Fonte: Acervo do autor (2016).

Analisando as respostas dos alunos, em suas equipes, percebeu-se que todos erraram a resposta da (k), pois no geral somaram o total de segmentos formados no polígono, ou seja, o número de diagonais mais os lados e diminuíram dois. A ideia de diminuir dois está correta, porém deve-se aplicar tal ideia para *n* lados do polígono e não *n* segmentos formados no polígono. Pode-se associar tal equívoco ao que refere Piaget (1978, p. 72): num novo conhecimento pode acontecer que "o indivíduo começa por pensar apenas em seu comprimento ou largura no equilíbrio e não nas duas condições simultaneamente, daí resulta a ligação de sua ação a de apoiar, com os equívocos que vimos", ou seja, os alunos aqui esqueceram que o número de triângulos pode ser calculado em função dos lados do polígono, e acabaram confundindo lados com o total de segmentos, lados ou diagonais, que compõem o polígono.

Apesar desses equívocos, constatou-se que houve, sim, compreensão e diferenciação daquilo que foi proposto. Conforme foi aumentando o nível de exigências de raciocínio nas atividades, ficou evidente que, aos poucos, os alunos alcançaram os objetivos de aprendizagem, o que, conforme afirma Piaget (1978, p. 72), indica que "os progressos das regras próprias à ação do indivíduo e os das coordenações se tornam explicativas".

Assim, os resultados, observados nas análises das atividades nessas quatro primeiras etapas, são indicativos de que a sequência de jogos da Dinâmica Combinatória promoveu uma tomada de consciência, que fez com que os alunos associassem conceitos que estudaram anteriormente com novas estratégias, podendo criar novos conceitos, gerando a compreensão por meio da ação. Este fato, segundo Piaget (1978, p. 61), "deve-se aos princípios de relacionamentos que se caracterizam, de maneira biomórfica de ações em comum, gerando novas relações e novos conceitos". Naturalmente, quando os alunos desenvolveram as atividades do tema de casa, propostas no livro integrado, percebeu-se claramente que os conceitos foram compreendidos, pois dos 22 alunos, que integraram as sete equipes, apenas três erraram uma questão. Os demais acertaram todas as questões, mostrando o alcance dos objetivos de aprendizagem, entendidos como possíveis de serem atingidos, com as atividades vinculadas aos jogos.

Na próxima seção, que está ligada à Etapa 5 da Dinâmica Combinatória, os alunos receberam alguns assuntos a serem estudados por meio de orientação do professor, com a finalidade de aperfeiçoarem a linguagem relacionada à Análise Combinatória. Além de formalizar a linguagem, os mesmos estudaram as definições e os conceitos formais da linguagem combinatória, conhecendo suas fórmulas como também sua aplicação. No andar da atividade, apresentaram para os colegas o que estudaram e aprenderam por meio de trabalho avaliativo.

4.6 ESTUDO ORIENTADO

Nesta etapa da Dinâmica Combinatória, os alunos envolveram-se em uma atividade de estudo orientado, pesquisando as técnicas mais usuais de contagem aplicadas no estudo da Análise Combinatória. As equipes foram orientadas a criar alguns *slides* para compartilhar e explicar as fórmulas e algumas aplicações dessas técnicas de contagem, explicando e exemplificando como compreendê-las e utilizá-las.

O objetivo desta atividade foi incentivar os alunos a buscarem, por sua conta, complementar os estudos realizados em sala de aula, como forma de perceberem que teriam autonomia suficiente para fundamentar e esclarecer os conceitos que encontrariam em livros ou *sites*, auxiliados, se necessário, pelo professor. No quadro abaixo, tem-se uma síntese da avaliação do que foi apresentado pelas equipes, considerando a apresentação feita aos colegas, o conhecimento demonstrado como domínio de conteúdo e a resolução de questões propostas.

O estudo orientado aconteceu na biblioteca e no laboratório de informática da escola, onde os alunos pesquisaram sobre os tópicos de conteúdos que foram apresentados a eles. O professor buscou sanar as dúvidas conforme as necessidades dos mesmos. A atividade se desenvolveu durante o período de aula, ou seja, durante duas horas. Os alunos buscaram conceitos e definições usando o suporte oferecido pela escola. Já o trabalho, na forma como foi apresentado para a classe, os alunos elaboraram em casa, esclarecendo algumas dúvidas com o professor via redes sociais.

No dia das apresentações, foram feitas algumas anotações relacionadas à apresentação, ao domínio do conteúdo e às questões que as equipes trouxeram para os colegas resolverem.

Quadro 5 – Avaliação do estudo orientado

Equipe	**Apresentação**	**Domínio de conteúdo**	**Questões apresentadas**
Gama	*Fatorial, conceito e aplicações* Apresentaram domínio de conteúdo; todos os integrantes, quando questionados, souberam responder usando definições e conceitos	Usaram definições retiradas de *sites* e de livros sugeridos pelo professor. Tinham clareza dos métodos de solução, apresentando mais de uma maneira para solucionar as atividades	Eram questões simples, dando enfoque à importância de se reconhecer o símbolo de fatorial “!” e como devemos usá-lo
Matrix	*Equações, envolvendo fatorial* A equipe ressaltou a definição de fatorial, mas apresentou problemas de aplicação na resolução de equações simples e médias	Os alunos mostraram ter um grande domínio na decomposição dos termos do fatorial, para solucionar os problemas apresentados, o que se considera importante	Não apresentaram questões de grau muito elevado, porém as que foram apresentadas conseguiram desmitificar para os demais colegas os modos e as técnicas necessárias para se chegar a uma solução
Ômega	*Permutações simples* Foram claros na explicação dos conceitos, enfatizando que as permutações simples são utilizadas em casos de formação de agrupamentos, nos quais se utilizam todos os *n* elementos, para formar	Além de utilizar a regra prática com a aplicação de fatorial, mostraram aos colegas que, em muitos casos, é vantajoso aplicar o Princípio Fundamental da Contagem	Buscaram dar enfoques em questões de Vestibular de nível médio

	conjuntos com *n* elementos		
Alfa	*Permutações com repetição* A equipe enfatizou o uso de permutações com repetições, mas nem todos os integrantes mostraram clareza na explicação do conceito	Mostraram que sabiam utilizar a equação, porém ainda tinham dúvidas sobre o significado da aplicação deste conceito em problemas contextualizados	Apresentaram questões de nível fácil, nas quais pediam a formação de anagramas com as letras de palavras que possuíam repetição de letras
Beta	A equipe deixou claro que tal técnica é aplicada simplesmente em situações nas quais se irá formar agrupamentos com *p* elementos, estando dispostos para agrupar *n* elementos	Apresentaram três modos de solução para problemas envolvendo arranjos, deixando claro qual é sua diferença, quando comparados a uma permutação	As questões apresentadas tinham um nível fácil, médio e difícil, sendo que tiveram a delicadeza de explicar todas as questões utilizando os três modos de resolução apresentados por eles
Delta	Mostrou pouco envolvimento com a apresentação do trabalho, trouxe conceitos e definições referentes ao uso das combinações simples; porém não tinham clareza nas suas explicações	Somente um dos três integrantes do grupo apresentou o trabalho; os demais, quando questionados, não souberam explicar as situações apresentadas, deixando claro que ambos não procuraram o auxílio do professor para a construção do trabalho	As questões apresentadas eram fáceis e os alunos trouxeram as suas resoluções prontas em *slides*, nos quais ficava claro que copiaram as resoluções de um *site*, pelo modo como apresentaram a formatação
Águia	A equipe buscou explorar o conceito de permutações circulares, deixando claro que seu	A equipe, composta por quatro componentes, deixou perceber que somente dois deles	O nível de questões apresentado se encaixava em um modo de fácil resolução, sendo que tais

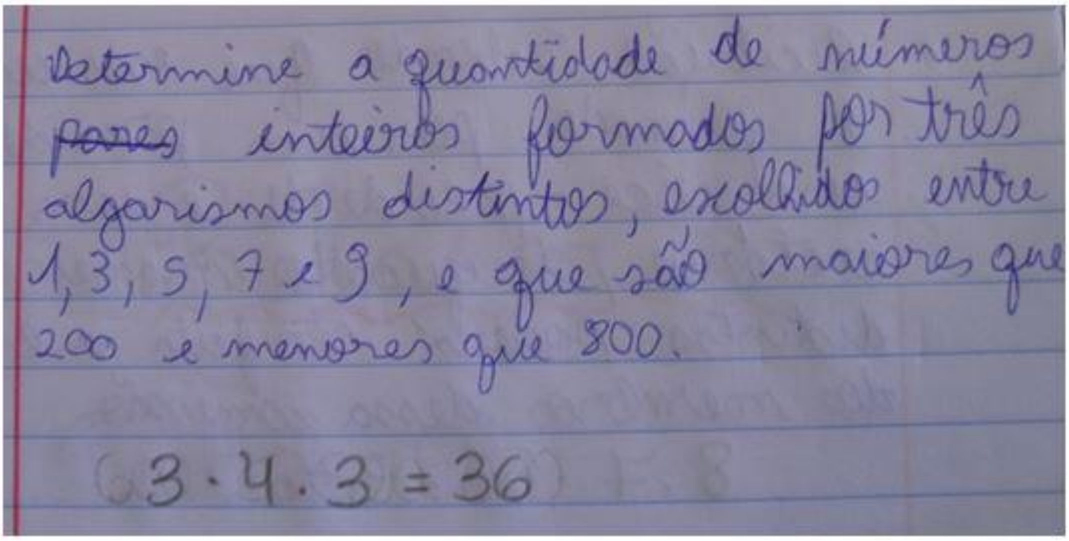
	uso no Ensino Médio em questões de Vestibular ou Enem, não aparece com frequência como os demais conceitos	sabiam esclarecer os conceitos e os modelos de aplicação	questões foram uma sugestão do professor, com o intuito de esclarecer os conceitos de modo simples, sem buscar tanto aprofundamento, pois tal tópico é pouco explorado em livros e bibliografias para o Ensino Médio

Fonte: Elaboração do autor.

Após as apresentações, o professor retomou os conceitos, fazendo um fechamento, esclarecendo algumas dúvidas que persistiam quanto ao entendimento e à identificação dos métodos ou das técnicas de contagem em problemas. Com a análise dos trabalhos escritos e a avaliação das apresentações dos alunos, percebeu-se que houve evolução na compreensão dos tipos de agrupamento, permutação, combinação ou arranjo, no entendimento das suas fórmulas e das suas aplicações em situações-problema, o que, para Piaget (1978, p. 102) é "uma útil confirmação da existência de nossas fases e das interpretações propostas, a respeito das relações entre a conceituação e a ação".

Para avançar na confirmação de que fazer e compreender estão ligados de modo a se complementarem, busca-se, ainda, analisar os questionamentos dos alunos após percorrerem as etapas da Dinâmica, até a Etapa 5, quando fica claro que as questões de pensamento combinatório podem ser resolvidas utilizando princípio de contagem, mesmo que estes agrupamentos se diferenciem pela sua ordem ou natureza. Com a finalização do Estudo Orientado, os alunos foram desafiados a resolverem mais algumas questões que envolviam conceitos de Análise Combinatória, que foram retiradas do livro integrado, com a finalidade de enriquecer o entendimento dos alunos. A Figura 40 serve para ilustrar um desses casos:

Figura 40 – Resposta da equipe Delta

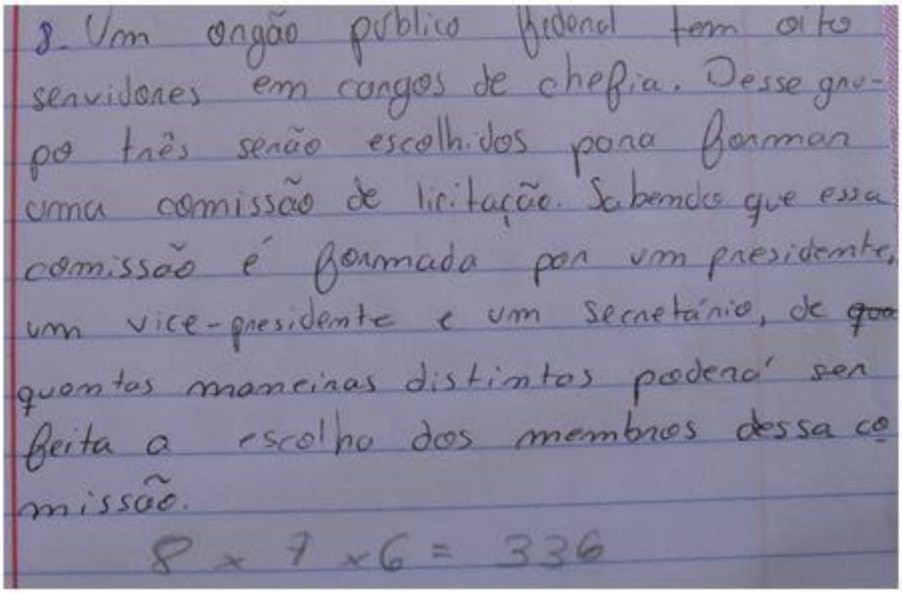

Determine a quantidade de números ~~pares~~ inteiros formados por três algarismos distintos, escolhidos entre 1, 3, 5, 7 e 9, e que são maiores que 200 e menores que 800.

$3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$

Fonte: Acervo do autor (2016).

A questão respondida pela equipe Delta poderia ser escrita como um Arranjo Simples descrito na forma de $3.A_{4,2}$, mas os alunos optaram por aplicar o Princípio Fundamental da Contagem, mostrando que eles possuem a compreensão desse conceito básico, e que podem aplicá-lo para solucionar as questões. Em outros momentos, em sala de aula, era muito difícil perceber o domínio dos alunos sobre esse conceito. Outro exemplo, como esse, mostrado na Figura 40, é a questão respondida pela equipe Beta.

Figura 41 – Resposta da equipe Beta


8. Um orgão público federal tem oito servidores em cargos de chefia. Desse grupo três serão escolhidos para formar uma comissão de licitação. Sabendo que essa comissão é formada por um presidente, um vice-presidente e um secretário, de ~~qua~~ quantas maneiras distintas poderá ser feita a escolha dos membros dessa comissão.

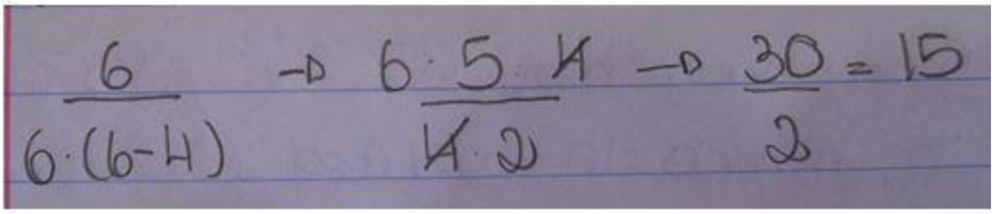
$8 \times 7 \times 6 = 336$

Fonte: Acervo do autor (2016).

O problema acima, também, poderia ser resolvido como aplicação de Arranjos Simples, fazendo $A_{8,3}$, mas a equipe mostrou compreender a resolução por meio de uma ação válida e simples, alcançando um dos objetivos deste trabalho, que é a compreensão que permite resolver exercícios sem a necessidade "tradicional", que se tinha, de os alunos decorarem fórmulas a serem aplicadas.

Mas, algumas equipes também mostraram o uso de fórmulas, como a equipe Águia (Figura 41) na resolução do seguinte exercício: "(ACAFE-SC) Uma confeitaria produz seis tipos diferentes de bombons de frutas. O número de embalagens diferentes que ela pode formar, sabendo que em cada embalagem deve conter quatro tipos diferentes de bombons, é:"

Figura 42 – Resposta da equipe Águia



Fonte: Acervo do autor (2016).

Buscando interpretar as diferentes formas de resolução apresentadas nos trabalhos desenvolvidos pelos alunos, conclui-se que os diferentes modos de solucionar os exercícios está, segundo Piaget (1978, p. 174), "ligado à capacidade que o ser humano tem de buscar um plano de utilização imediata para cada situação que lhe é apresentada". Pode-se então dizer que os mesmos solucionaram as situações apresentadas do modo mais conveniente, aplicando um conceito-base, como uma ação simples e prática ou fórmulas representativas de soluções diferenciadas, mas sem a obrigatoriedade de aplicar apenas técnicas prontas expressas por meio de fórmulas.

Na última seção de análise das etapas, deparou-se com a Etapa 6, composta por um jogo denominado Trilha Combinatória, que buscava desafiar os alunos a usarem seus conhecimentos relacionados à Análise Combinatória, para superarem os obstáculos impostos.

4.7 JOGO TRILHA COMBINATÓRIA

A sexta etapa é a última da Dinâmica Combinatória, e foi planejada para que os alunos se enfrentassem, divertindo-se com um novo jogo, criado, especialmente, para testar e avaliar os conhecimentos propostos, como objetivos de aprendizagem nesta sequência didática, agora com ações de pensamento e em discussão com pares, possibilitando ainda compreender ideias incompletas. O Jogo Trilha Combinatória foi elaborado visando à aplicação de conhecimentos de Análise Combinatória em questões de resolução processual das técnicas de contagem, e problemas, estes para serem resolvidos na forma como os alunos entendessem ser a melhor, definidos dentre os propostos, por lançamento de dados, que também requer a aplicação, no caso, de um conhecimento específico. A trilha é jogada em um tabuleiro, formado por um caminho de desafios, que englobam o conteúdo de Análise Combinatória, estudado pelos alunos, durante o percurso da Dinâmica Combinatória. As equipes originais deram lugar a novas equipes, a CMY, PPT, Os Vorazes e + ou -, que competiram separadas em dois momentos, devido ao grande número de alunos para as dimensões do tabuleiro. No término, os vencedores de cada momento anterior enfrentaram-se num terceiro momento, e final, no tabuleiro.

O Jogo Trilha Combinatória, criado pelo autor deste trabalho, contém o tabuleiro, mostrado na Figura 43, dois dados não viciados, e cartões com desafios em forma de exercícios ou problemas, envolvendo o conteúdo de Análise Combinatória, e alguns peões de marcação das paradas no percurso, que representam, com cores diferentes, as equipes que estão jogando no tabuleiro.

Figura 43 – Tabuleiro do Jogo Trilha Combinatória

Fonte: Acervo do autor (2016).

O jogo foi composto, basicamente, por oito regras, que orientaram o percurso e os desafios, a saber:

1°) os participantes sortearão quem inicia o jogo; será a equipe que sortear o maior número ao lançar um só dado. Os demais seguem jogando conforme a ordem decrescente dos números sorteados;

2°) a movimentação dos peões, no percurso da Trilha, se dará segundo a combinação simples ($C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$) dos números dos dois dados lançados, simultaneamente, sendo *n* o maior valor e *p* o menor valor, valendo o primeiro lançamento em que *n* e *p* são diferentes;

3°) após a movimentação do peão, tendo esse parado em uma casa azul, vermelha ou amarela, a equipe resolve o desafio de uma carta, da que está acima na pilha de cartas, voltada para baixo, que tem como referência a mesma cor da casa em que o peão parou;

4°) para avançar, e ter direito a jogar os dados na próxima rodada, a equipe deverá acertar a pergunta da carta; caso erre, devolverá a carta, que vai por último no baralho, e ficará fora da rodada seguinte;

5°) no final da rodada da qual a equipe ficou fora, esta retira outra carta do baralho de mesma cor e, se acertar, retornará à trilha. Se errar novamente, continuará a 4ª regra;

6°) se a equipe cair numa casa de cor preta, estará impedida de retirar qualquer carta e vai para a cadeia;

7º) para sair da cadeia, na rodada seguinte a equipe deverá solucionar o problema da carta de cima do baralho preto; caso a equipe erre o problema da carta do baralho preto, volta para a cadeia e permanece presa por duas rodadas, e assim por diante, até solucionar o problema contido na carta;

8°) todos saem do marco Início, e vence o jogo a equipe que chegar, por primeiro, no marco Chegada.

Para completar a avaliação proposta com a aplicação da Trilha Combinatória, os alunos responderam, nas equipes do jogo, as questões sorteadas das cartas do jogo, durante as jogadas, e entregaram ao professor, para serem avaliadas. Ao observar os alunos, no decorrer das jogadas, percebeu-se um grande envolvimento e espírito de competitividade em todas as equipes, que se engajaram querendo ganhar a competição da Trilha Combinatória. Nas Figuras 44 e 45, tem-se uma boa ideia do envolvimento dos alunos no jogo da Trilha.

Figura 44 – Jogando Trilha Combinatória: Equipe + ou -

Fonte: Acervo do autor (2016).

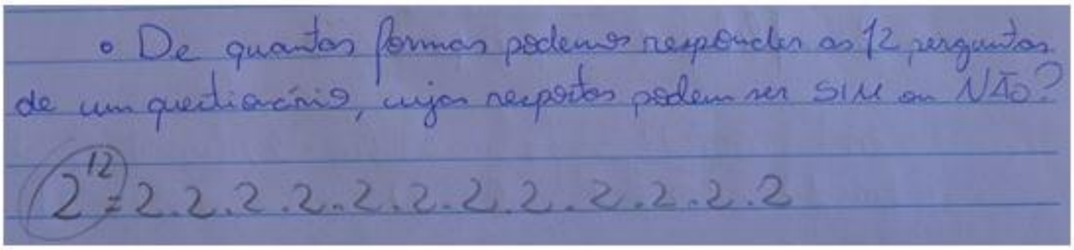
Figura 45 – Jogando Trilha Combinatória: Equipe Os Vorazes

Fonte: Acervo do autor (2016).

As resoluções das questões da Trilha também auxiliam na análise e permitem chegar a algumas conclusões sobre a aprendizagem dos alunos.

Uma primeira questão a ser analisada foi sorteada pela equipe PPT; a questão envolve o Princípio Fundamental da Contagem para a sua resolução.

Figura 46 – Trilha Combinatória: Equipe PPT

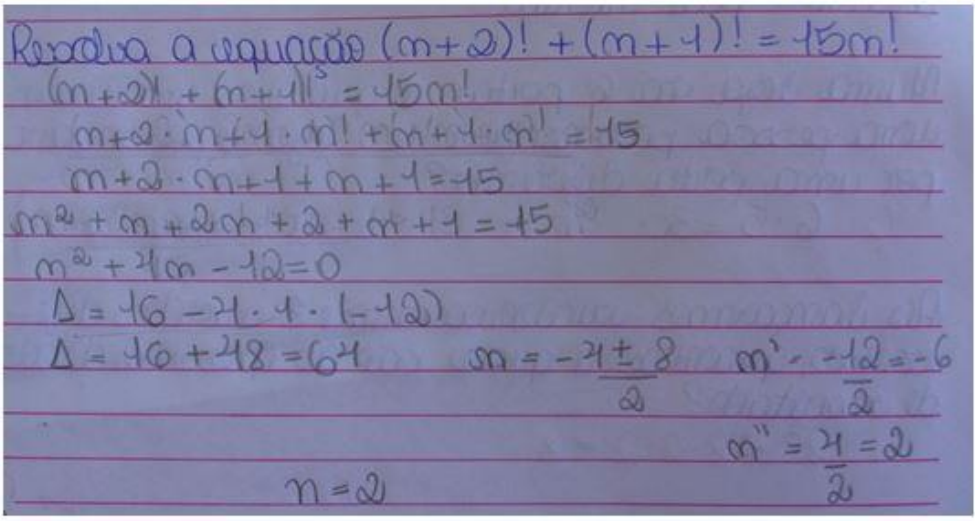


Fonte: Acervo do autor (2016).

Percebe-se claramente, aqui, a aplicação correta do Princípio Fundamental da Contagem, indicando que a equipe alcançou o entendimento sobre o que é, o que pode ser interpretado, segundo Piaget (1978, p. 175), como “o próprio produto precedente tornou-se objeto de reflexão e formulação consciente”, ou seja, as atividades realizadas tornam possível escrever e solucionar exercícios, de modo a chegar a uma estruturação de pensamento associado à ação, a partir da conceituação.

Em outra situação, observa-se que os alunos conseguem simplificar expressões e resolver equações envolvendo fatorial de modo ordenado, chegando à solução do problema, como é mostrado na Figura 47, desenvolvida pela Equipe + ou -.

Figura 47 – Trilha Combinatória: Equipe + ou -

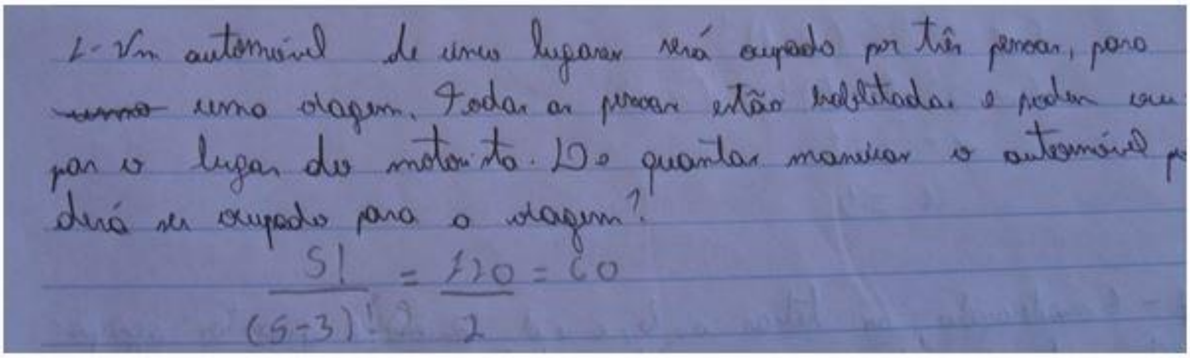


Fonte: Acervo do autor (2016).

Analisando essa questão, muitos poderiam dizer que tem fácil resolução; porém, os alunos não tiveram uma atividade específica com resolução de modelos como o deste exercício. O primeiro contato com esse tipo de problema combinatório aconteceu na Etapa 6 da Dinâmica Combinatória, do estudo orientado, quando a equipe, que estava apresentando o seu trabalho, explicou sobre fatoriais e esclareceu dúvidas apresentadas por questionamentos. O que mais surpreendeu, nesta atividade, é que todas as equipes sortearam questões de simplificação e de equações, acertando as resoluções. Entende-se, assim, que o conceito de fatorial estava muito claro para os alunos. Piaget (1978, p. 175) aponta que “para termos certeza dessa autonomia total da conceituação com seu poder de coordenações inferenciais, devemos proceder por um exame de memória, uma ou duas semanas após o acontecimento”, e a Trilha foi aplicada uma semana e meia depois da apresentação do estudo orientado, dando indicativos de que, de fato, ocorre uma autonomia de conceito, que foi adequada e aplicada pelos alunos na resolução de problemas.

Observou-se, também, maior agilidade de pensamento, o que ficou claro no modo como aplicaram as fórmulas das técnicas de contagem, com cálculos simples e mais diretos, como os da equipe Os Vorazes, mostrados na Figura 48.

Figura 48 – Trilha Combinatória: Equipe Os Vorazes

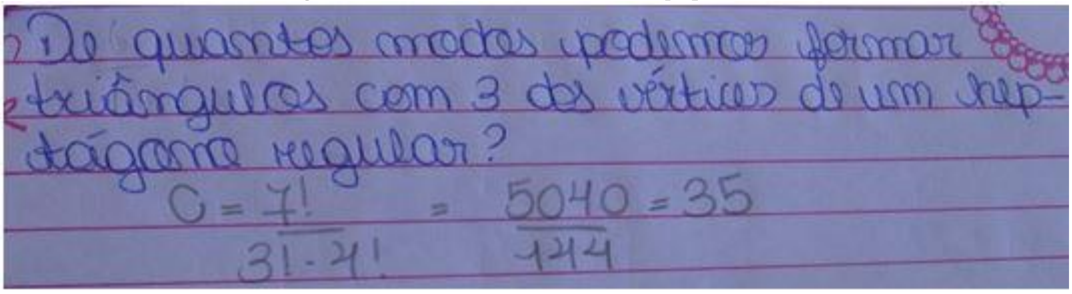

1- Um automóvel de cinco lugares será ocupado por três pessoas, para ~~uma~~ uma viagem. Todas as pessoas estão habilitadas e podem ocupar o lugar do motorista. De quantas maneiras o automóvel poderá ser ocupado para a viagem?

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$$

Fonte: Acervo do autor (2016).

Aqui, a questão envolvia uma aplicação de Arranjo Simples, e os alunos optaram por utilizar uma fórmula, como foi o caso também mostrado na Figura 49, de uma questão de Combinação Simples:

Figura 49 – Trilha Combinatória: Equipe + ou -



Fonte: Acervo do autor (2016).

Para Piaget (1978, p. 177), as resoluções apresentadas “não se sucedem linearmente, mas consistem em um esquema que corresponde a uma teleonomia”, ou seja, os alunos tinham uma necessidade de solucionar os exercícios, e os mesmos conseguiram diferenciar que as situações eram distintas de agrupamento de tipos diferentes, deixando claro que os conceitos de natureza e ordem ficaram claros para eles, pois conseguiram distinguir situações específicas de cada agrupamento e aplicaram corretamente o que concluíram das ações e dos pensamentos sobre as ações realizadas no decorrer da Dinâmica Combinatória.

4.8 A DINÂMICA COMBINATÓRIA NO PARECER DOS ALUNOS

No final da aplicação da Dinâmica Combinatória, entende-se ser importante ter um parecer dos alunos sobre a metodologia aplicada nas aulas de desenvolvimento do conteúdo de Análise Combinatória. Para isso, construiu-se um instrumento de avaliação, que os alunos responderam dando a sua opinião sobre a realização da Dinâmica Combinatória. Tal parecer, nesta pesquisa, cuja análise apresenta-se a seguir, serviu como confirmação de que a sequência didática colaborou para produzir as aprendizagens almejadas, sendo então estruturada para ser o produto desta pesquisa, que se encontra a seguir no presente trabalho.

O instrumento para se ter o parecer dos alunos está apresentado no Quadro 6, com treze aspectos, com os quais se buscou analisar, segundo as impressões dos alunos, as etapas da Dinâmica Combinatória. Todos os 22 alunos, que participaram da aplicação desta sequência didática, responderam esta avaliação.

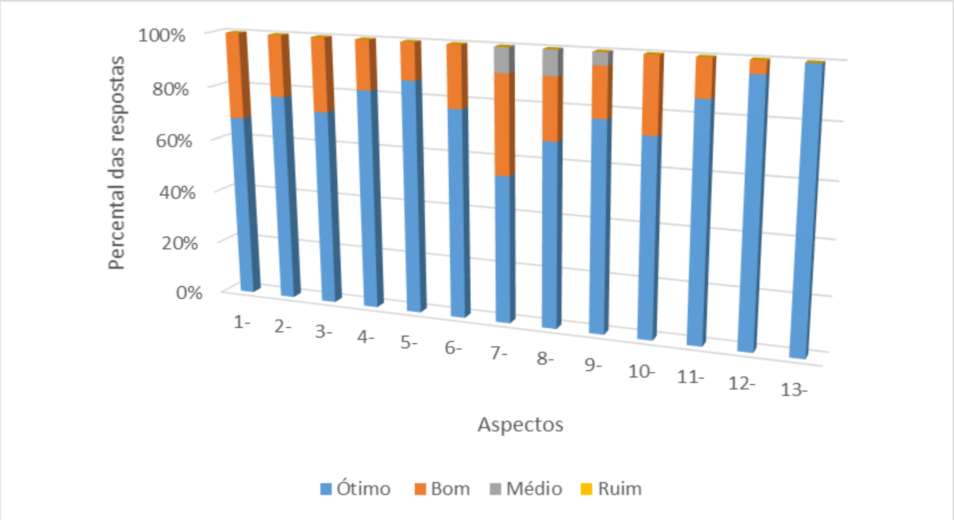
Quadro 6 – Parecer dos estudantes sobre a Dinâmica Combinatória

Analise e avalie cada aspecto considerado abaixo, marcando um **X** na carinha que melhor expressa o seu parecer.	ótimo	bom	médio	ruim
1. Na primeira aula, as atividades da “Etapa 0” ajudaram a despertar a curiosidade sobre o estudo de Análise Combinatória.				
2. Aulas como as da “Etapa 1”, desenvolvidas com jogos de raciocínio lógico, favorecem a criação de estratégias para solucionar exercícios ou problemas de Análise Combinatória.				
3. Os jogos Quadrado, Senha e Bicolorido, realizados nas aulas das “Etapas 2, 3 e 4”, ajudaram a compreender os conceitos básicos de Análise Combinatória.				
4. Os jogos utilizados são adequados para desenvolver o raciocínio.				
5. O raciocínio lógico é muito importante para se aprender Análise Combinatória.				
6. Estratégias de ensino, que introduzem ou desenvolvem os conteúdos utilizando materiais manipuláveis e jogos, ajudam a aprender conteúdos com mais facilidade.				
7. As atividades desenvolvidas em equipe auxiliaram na aprendizagem de conteúdos.				
8. Com a metodologia de ensino, utilizada pelo professor, nesta parte do estudo, eu consegui aprender Análise Combinatória.				
9. Consegui aplicar adequadamente os conhecimentos de Análise Combinatória, nas avaliações e no Jogo Trilha Combinatória.				
10. Eu e meu grupo conseguimos compreender a formalização dos conceitos de Análise Combinatória,				

com o apoio das orientações do “Estudo Orientado”, e nos sentimos capazes de apresentar e explicar a nossa parte aos colegas, em sala de aula.				
11. Eu recomendo que esta metodologia de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória seja usada com outros estudantes.				
12. Eu penso que quando a gente faz, e pensa no que faz, a gente aprende.				
13. Eu penso que, quando a gente compreende, a gente faz melhor.				

Fonte: Produção do autor (2016).

Figura 50 – Pareceres dos alunos sobre a Dinâmica



Fonte: Produção do autor (2016).

Analisando o gráfico com as respostas dos alunos, fica claro que a sequência didática construída foi considerada como de grande proveito. Todos os aspectos avaliados receberam parecer bom ou ótimo de, praticamente, todos os alunos, sendo que o parecer ótimo foi a escolha da maioria, em todos os aspectos da avaliação. Com isso, fica evidente que, na opiniao dos alunos, as atividades propostas auxiliaram-nos a compreenderem e identificarem as características que diferenciam tipos de agrupamentos pela ordem ou natureza dos seus elementos, e que a criação e aplicação dos jogos, selecionados ou construídos, contribuiu para o entendimento do princípio da contagem, de permutações, arranjos e combinações, reconhecendo-se capazes de resolver problemas de Análise Combinatória.

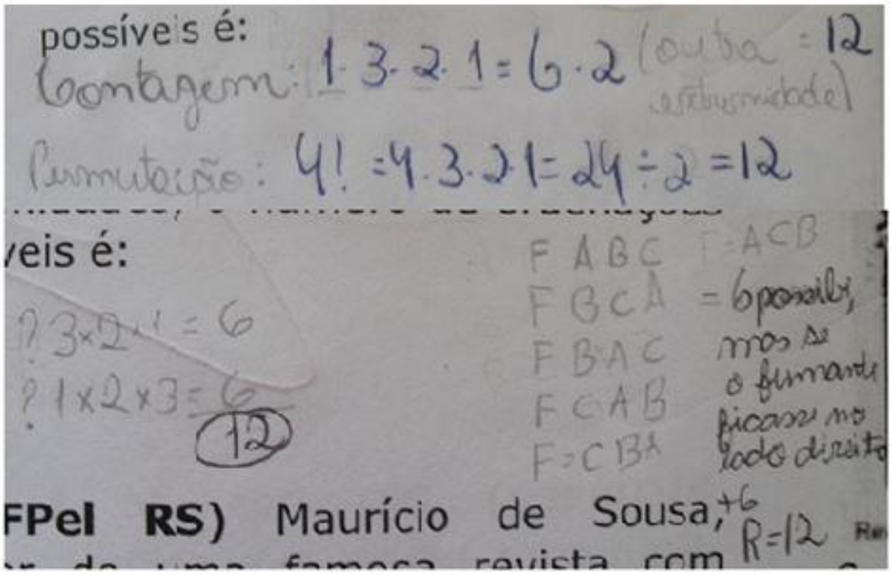
Outro modo de demonstrar o êxito dos alunos é por meio da observação das resoluções de algumas questões da prova, na Escola de Avaliação Cumulativa da Aprendizagem desenvolvida, que foi aplicada em torno de um mês, após a aplicação da Trilha Combinatória. Em duas dessas questões, foi solicitado que os alunos resolvessem de dois modos distintos, aplicando o Princípio Fundamental da Contagem e alguma técnica de contagem, de modo a verificarem a concordância das respostas a que chegariam. Uma dessas questões, a de número três, tem o enunciado que segue e a resolução apresentada por dois alunos está ilustrada na Figura 51.

Questão 3. Observe o quadrinho abaixo.

(O Globo, 03/01/93)

As quatro pessoas que conversavam no banco da praça poderiam estar sentadas em outra ordem. Considerando que o fumante fique sempre sentado numa das extremidades, o número de ordenações possíveis é: ...

Figura 51 – Resoluções da questão 3 da Avaliação Cumulativa

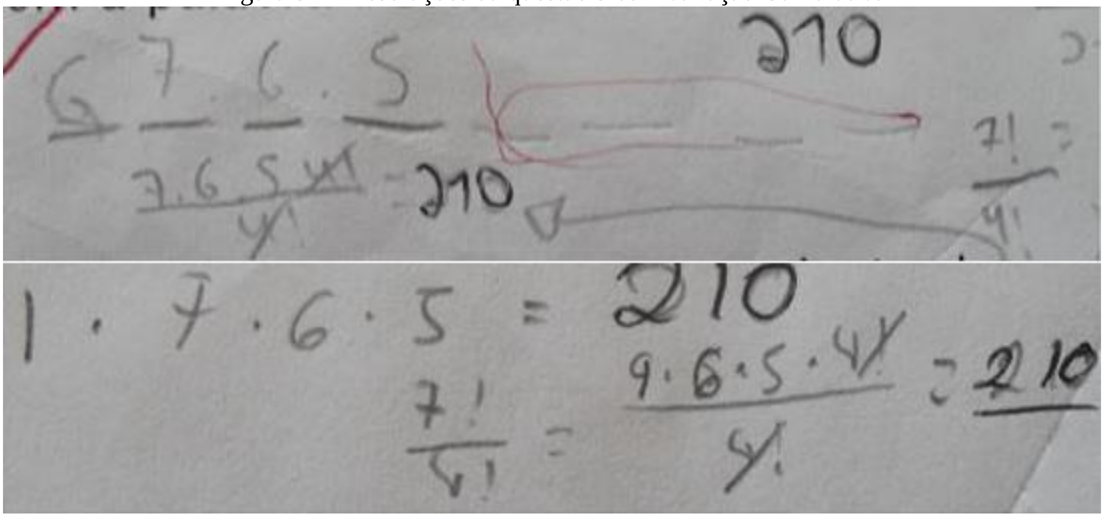


Fonte: Acervo do autor (2016).

Outra questão, essa de número 9, foi apresentada da forma como segue, com resoluções, de dois alunos, apresentadas na Figura 52.

Questão 9. O número de anagramas com quatro letras, que começam com a letra G, que se pode formar com as letras da palavra PORTUGAL é: ...

Figura 52 – Resoluções da questão 9 da Avaliação Cumulativa



Fonte: Acervo do autor (2016).

Analisando as resoluções desses alunos, que representam a de vários outros, percebe-se que houve uma compreensão dos conceitos. As etapas da sequência relacionadas ao fazer possibilitaram compreender e construir os conceitos em pensamento, produzindo o alcance dos objetivos de aprendizagem, como foi mostrado em outras situações de seções anteriores deste capítulo. A representação por formas variadas está associada ao que Piaget (1978) traduz como processos de equilibrações conjuntas, que vai além de um simples finalismo, tornando-se um processo diferenciado em minúcias.

Mas, sabe-se, também, que sempre acontecem falhas, e a sugestão dos alunos é a avaliação mais importante para aprimorar as estratégias de aprendizagem. Portanto, foi solicitado que eles descrevessem algumas sugestões, para que a sequência didática que tinham desenvolvido, no seu ponto de vista, produzisse melhores aprendizagens. Em torno de cinco alunos propuseram mais tempo para a realização das atividades; um deles afirmou ter sido esse tempo “um pouco curto”. Outro aluno sugeriu que alguns desafios da Trilha Combinatória poderiam ser de nível mais avançado; no entanto, dois alunos referiram que a Trilha poderia ser mais simples e ter menos regras. Sobre o tempo para as atividades, esse foi planejado de modo que os alunos se adequassem aos tempos estipulados, ficando atentos, ativos em raciocínio e que não se dispersassem com distrações. Quanto aos desafios do jogo

Trilha Combinatória, na elaboração do produto da dissertação, serão incluídos alguns desafios mais avançados. Mesmo tendo sido apenas um aluno a dar esta sugestão, percebeu-se que, com a realização das atividades anteriores, os alunos “podem ir mais longe”. No entanto, as regras são vistas como uma forma de organizar o jogo, e o que foi dito como ter menos regras talvez se refira à preocupação que se teve em deixá-las claras o suficiente para que, numa leitura, os alunos soubessem o que fazer e não se extraviassem com dificuldades na interpretação. E, ao observá-los na leitura das regras, estas em nada atrapalharam e rapidamente estavam todos prontos para o lançamento dos dados. Entende-se, assim, que as mesmas colaboraram com o propósito de que as discussões fossem sobre Análise Combinatória, alvo de todas as etapas da Dinâmica Combinatória.

No espaço aberto para as sugestões, houve também muitas manifestações positivas, elogios, parabenizando pela iniciativa de se usar jogos nas aulas de Matemática. A maioria dos alunos sugeriu que a Dinâmica Combinatória seja ainda aplicada nas demais turmas do Ensino Médio, que estudarão este conteúdo futuramente. Afirmam, ainda, que o uso de jogos torna a aula mais atrativa e mais fácil a compreensão dos conceitos.

Por fim, com um último questionário, buscou-se a percepção dos alunos sobre o próprio desempenho e a conduta como estudantes, além de fazer um comparativo entre as aulas que normalmente são ministradas pelo professor e a metodologia aplicada na Dinâmica Combinatória. As questões do questionário são as seguintes:

1. Comparando as aulas tradicionais de Matemática, desenvolvidas pelo mesmo professor, com as aulas desenvolvidas para o conteúdo de Análise Combinatória, qual carinha combina mais com a Dinâmica Combinatória?

( ) ( ) ( ) ( )

2. Qual carinha combina mais com o desempenho do professor, ao aplicar a Dinâmica Combinatória?

( ) ( ) ( ) ( )

3. Qual carinha combina mais com o seu compometimento no estudo da Análise Combinatória?

( ) ( ) ( ) ( )

4. Qual carinha combina mais com a sua aprendizagem em Análise Combinatória?

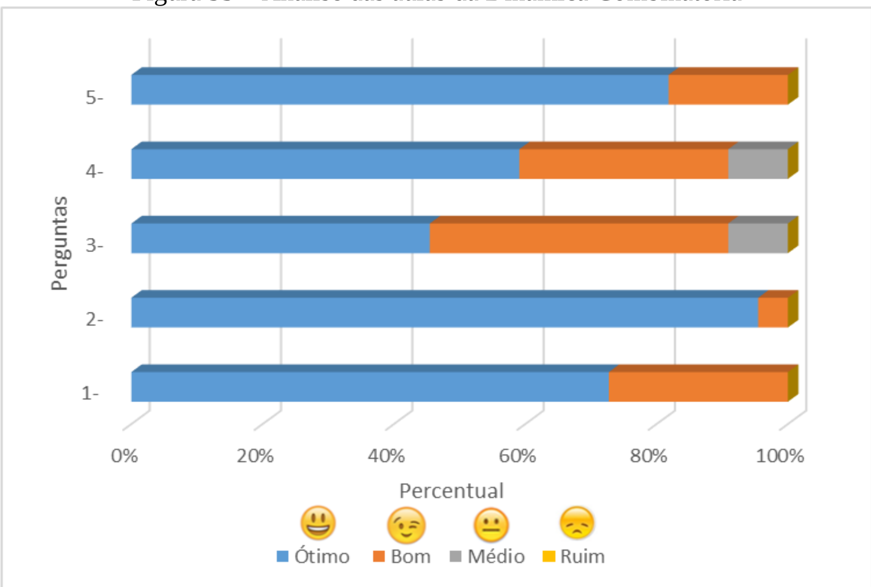
( ) ( ) ( ) ( )

5. Qual carinha combina mais com a relação jogos e raciocínio lógico?

( ) ( ) ( ) ( )

6. Com a tabulação dos dados, produziu-se o a Figura 53.

Figura 53 – Análise das aulas da Dinâmica Combinatória



Fonte: Acervo do autor (2016).

Observando o gráfico, rapidamente percebe-se que os alunos demostraram satisfação com as aulas, o que se remete ao reconhecimento de que houve aprendizagem, envolvimento e satisfação por terem aprendido de forma prazerosa. Aprovaram a sequência didática proposta, sendo considerada, por todos, como ótima ou boa; a maioria considerou-a ótima, mesmo que, em comprometimento, tenham se dividido, meio a meio, entre ótimo e bom; poucos declararam-se médios mas ninguém como ruim. Na aprendizagem, em torno de 60%, literalmente, se consideraram com desempenho ótimo, pouco mais que 30% reconheceram-se bons e em torno de 10% ficaram aí, como médios. Importante, desta vez, é que o desempenho não deixou ninguém achando-se ruim. Agora, a relação jogo e raciocínio, como era a ideia que se tinha, e como foi encontrado em alguns outros trabalhos como os de Carvalho (2009), Gonçalves (2011) e Grando (2000), foi confirmada como ótima por 90% da turma e boa para os demais. E, nessa história, quem se saiu também como ótimo foi o professor. Assim confirmaram, praticamente, todos os alunos, sendo que um ou outro considerou o professor bom, o que já é também muito bom.

Então, para finalizar a apresentação e discussão sobre os resultados que foram descortinados, considera-se ter sido ótimo o trabalho desenvolvido com jogos, que envolveu os alunos, mobilizando-os a fazerem, a desafiarem a si próprios, a superarem obstáculos e, com isso, a construírem sentido e compreensão para o que aprendiam.

4.9 PRODUTO DA DISSERTAÇÃO

Com o intuito de compartilhar os estudos realizados com esta pesquisa, em que se teve como propósito explorar novas metodologias de ensino, este trabalho de dissertação deu origem a um produto educacional, que pode contribuir com o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória. Trata-se de uma proposta metodológica, que está estruturada como uma sequência didática, apoiada nas ideias de Zabala (1998).

O produto da dissertação é, então, a sequência didática apresentada neste trabalho, denominada de Dinâmica Combinatória, composta por sete planos de aula, que integram a história da Análise Combinatória e atividades respaldadas na realização de jogos e de estudos posteriores, que levam ao princípio lógico do Problema Fundamental da Contagem e às técnicas de contagem: Permutações, Arranjos Simples e Combinações Simples.

O material aqui proposto foi construído seguindo as ideias e os princípios do fazer e compreender, de Piaget (1978), que destacam a importância de o aluno buscar a compreensão dos conceitos por meio do fazer, através de atividades que o desafiem e o levem a refletir, a propor e testar hipóteses, a explicar o que pensa, tornando-se agente principal do desenvolvimento do seu conhecimento.

A sequência didática – Dinâmica Combinatória – encontra-se disponibilizada na página do Mestrado, na forma como está apresentada no Apêndice F.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho de pesquisa e dissertação, buscou-se desenvolver uma metodologia diferenciada, estruturada como uma sequência didática, com a principal finalidade de promover a aprendizagem da Análise Combinatória, e com a fundamentação do fazer e compreender. Como princípio, utilizou-se, para a estruturação da metodologia, o de compreender em ação, que está ligado ao fazer do aluno. Retomando alguns dos resultados obtidos, pode-se afirmar que o uso de jogos estimula o envolvimento do aluno com aquilo que lhe é proposto, como verificou também Grando (2000, p. 26): "O interesse pelo material do jogo, pelas regras ou pelo desafio proposto, envolve o aluno, estimulando-o à ação."

A Matemática é uma ciência desafiadora, que se explica em demonstrações da sua exatidão e rigor. D'Ambrósio (1996, p.113) aponta que "a Matemática tem sido conceituada como a ciência dos números e formas, das relações e das medidas, das inferências, e suas características apontam para precisão, rigor, exatidão". Observou-se, no entanto, para o conteúdo de Análise Combinatória, que se pode chegar a várias relações de exatidão, e de modo atrativo, com ações que instigam o aluno a raciocinar e se envolver no processo de descobrir verdades que são expressas por regras e fórmulas.

Portanto, é possível ao professor promover estratégias para que os alunos sintam-se desafiados, curiosos, interessados pela Matemática. A proposta deste trabalho visou exatamente a esta possibilidade, considerando que o aluno pode construir conceitos e boas ideias de definições, como as deste estudo que foi proposto, com os jogos que foram aplicados e, depois, as mesmas estratégias foram aplicadas em problemas associados a resoluções matemáticas. O desempenho e a evolução na criação de estratégias, para solucionar desafios, ficam evidentes quando o aluno busca exercitar a sua mente, através de atividades que explorem a sua capacidade de criação e percepção.

A melhora na percepção e criação do aluno, por meio dos jogos de raciocínio, está diretamente ligada a uma melhora em seu rendimento na Matemática. De acordo com Grando (2000, p. 21), "o jogo pode representar uma simulação matemática na medida em que se caracteriza por uma situação irreal, criada pelo professor ou pelo aluno, para significar um conceito matemático a ser compreendido pelo aluno".

Parece evidente, como afirma Grando, na aplicação do Jogo do Quadrado, que o aluno busca listar possibilidades de jogadas, para analisar e responder perguntas diretamente ligadas ao que realizou no jogo. Com isso, cria estratégias de resolução para outros problemas, em situações próximas daquelas dadas a eles.

Não se pode deixar de destacar que apareceram algumas respostas equivocadas, mas, para Piaget (1978, p. 184), enfrentar incorreções “é um exemplo de construção de caminhos equivalentes, em que o indivíduo preocupa-se somente com seu ponto de chegada”. Percebe-se que, para alguns alunos, o interesse principal no desenvolvimento das atividades era o de ganhar e não o de criar possibilidades, o que pode ser mais estimulante do que ganhar, mesmo que o jogo seja uma forma de competição.

No entanto, outros alunos buscaram analisar o jogo como um todo, pois perceberam que poderiam ter maior domínio da situação. Esta análise também serve para quando se resolvem exercícios de matemática. A leitura atenta, a interpretação e a observação são ações essenciais para compreender e propor boas formas de resolução.

Ao construir soluções para situações apresentadas no jogo, por meio de ilustrações, os alunos construíram também o significado do Princípio Fundamental da Contagem, mesmo não tendo conhecimento da sua formalização, e usaram-no como um instrumento para solucionar exercícios de contagem.

Pode-se destacar que houve uma melhora significativa no entrosamento das equipes de trabalho. No início, buscavam desenvolver as atividades de modo mais individual, mas, no transcorrer das etapas, perceberam que a troca de ideias e a ajuda mútua podem colaborar muito para se chegar a conclusões pertinentes. A interação foi sempre positiva, mesmo nas situações em que se observaram algumas divisões entre as equipes, ao buscarem analisar seus pontos de vista, quando eram discordantes, para tomar decisões.

Tal entrosamento ajudou a ter também uma percepção mais apurada e maior agilidade de raciocínio, e os alunos mostraram que esse processo se intensifica, pois, quando lhes foram apresentados o Jogo Senha e as atividades relacionadas, perceberam as ideias de duas técnicas de contagem: a Permutação e o Arranjo Simples. Nesse jogo, os alunos começam a explorar e a construir técnicas próprias para prever possíveis jogadas do adversário e chegar a uma solução com o menor número possível de jogadas. Ao observar os alunos, percebia-se que se intensificava o uso da imaginação e do raciocínio, no desenvolvimento deste jogo. Para Grando (2000, p. 21) “é no jogo e pelo jogo que a criança é capaz de atribuir aos objetos, através de sua ação lúdica, significados diferentes”, que, neste trabalho estão diretamente ligados aos conceitos que o jogo propicia explorar, por meio de questionários ligados às suas jogadas.

Ao responderem as perguntas pós-jogo, os alunos ampliaram o raciocínio combinatório, explorando jogadas, por meio das atividades que levam a construir o pensamento ligado à ideia de permutações e arranjos simples. Sem perceberem, ou receberem alguma definição, conseguiam executar cálculos pertinentes a estas técnicas de contagem.

No andar das etapas da sequência didática, mais precisamente com o Jogo Bicolorido, os alunos conseguiram aplicar e diferenciar a formação de agrupamentos que se diferenciam pela sua natureza e não pela ordem dos seus elementos. O jogo, em que se exploram agrupamento de arestas e diagonais de polígonos, levou-os a compreender o conceito de Combinações Simples. Aqui, eles não usaram a técnica de contagem por meio de fórmulas, mas sim partiram do Princípio Fundamental da Contagem, para chegar a soluções significativas aos problemas apresentados a eles. Esse modo de solucionar problemas está ligado à compreensão de uma ação executada com sucesso, e que Piaget (1978, p. 179) explica assim: “Compreender consiste em isolar a razão das coisas, enquanto o fazer é somente utilizá-las com sucesso, o que é, certamente, uma condição preliminar da compreensão.”

Mas a sequência não manteve os alunos presos ao fazer, refletir, compreender; por meio de estudos complementares, puderam formalizar tudo aquilo que aplicaram com os jogos, quando tiveram a oportunidade de conhecer as fórmulas que expressam as técnicas de contagem, que haviam explorado através dos jogos. Com esse estudo, os alunos esclareceram dúvidas quanto à utilização das técnicas para resolução de problemas combinatórios, e procuraram compreender o significado da simbologia matemática. Nessa atividade, cada equipe apresentou aos demais colegas de sala de aula o que havia descoberto, compartilhando o conhecimento e complementando com aquilo que os colegas apresentaram.

Como atividade final da sequência didática, o Jogo Trilha Combinatória reorganizou os alunos em equipes diferentes, numa disputa de aplicação dos conhecimentos relacionados aos conceitos de Análise Combinatória. Os alunos mostraram um grande envolvimento, pois as jogadas exigiam que soubessem solucionar problemas de cada rodada, porque, para poder prosseguir na trilha, deveriam solucionar os problemas apresentados a eles, caso contrário seriam penalizados conforme as regras do jogo. O jogo, além de ter sido proposto como um fechamento em que foram consideradas todas as ideias e técnicas da Análise Combinatória, serviu também como instrumento de avaliação, em que foi possível perceber segurança, autonomia e satisfação dos alunos por terem conseguido solucionar os problemas, em sua maioria, não com fórmulas, mas com as estratégias que utilizaram nos jogos.

Após a análise de todas as etapas da sequência didática, tem-se como conclusão que a utilização de jogos, como suporte de aprendizagem em sala de aula, é um modo eficaz e que apresenta resultados significativos para a aprendizagem.

Como explica Gonçalves (2011, p. 42), a utilização dos jogos nas atividades aplicadas foi importante para despertar a motivação, a autoestima, a relação com a matemática.

Confirmou-se, com esta pesquisa, que os desafios ou jogos lógicos contribuem para uma melhor compreensão de questões matemáticas, auxiliando na concentração e na construção de estratégias, levando à abstração, como verificou Grando (2000, p. 23), afirmando que “a capacidade de elaborar estratégias, previsões, exceções e análise de possibilidades acerca da situação de jogo, perfaz um caminho que leva à abstração”.

Com base nos pareceres dos alunos, pode-se concluir que a aplicação da Dinâmica Combinatória teve grande aceitação, envolveu-os nas atividades propostas, propiciando outro tipo de aula, diferente da tradicional, que se dá apenas com quadro e giz. Essa metodologia também proporcionou ao estudante momentos descontraídos e envolventes, ajudando a melhorar a qualidade de ensino, mostrando que a Matemática pode ser, sim, uma disciplina interessante e que pode congregar diversas atividades, como é o caso da utilização de jogos.

Com a aplicação da Dinâmica Combinatória, observou-se que os alunos, através do fazer proposto pelos jogos, puderam compreender conceitos em ação, tais como: árvore das possibilidades, Princípio Fundamental da Contagem, permutações, arranjos e combinações, direcionando-se, assim, para a compreensão das técnicas de contagem que constituem a Análise Combinatória.

Com as atividades planejadas e desenvolvidas na sequência didática, após a análise e a discussão dos resultados, tem-se subsídios para reconhecer que os objetivos propostos puderam ser alcançados. Os resultados desta pesquisa servem de indícios de que as evidências de aprendizagens respaldam, nestas considerações finais, a construção da resposta à pergunta motivadora deste trabalho, apontando os aspectos que expressam a colaboração da sequência didática construída, com atividades em que se utilizaram materiais manipuláveis, recursos digitais e jogos, para a aprendizagem de Análise Combinatória.

Para finalizar, pode ser destacado que o tema de estudo deste trabalho, que anteriormente mostrava-se como um grande desafio, também reconhecido em outras pesquisas apontadas nesta dissertação, configura-se, agora, uma evolução alcançada com a construção da Dinâmica Combinatória para o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória.

Daqui para frente, tem-se como propósito divulgar o produto desta dissertação, disponibilizando a Dinâmica Combinatória na página do Mestrado e auxiliando outros colegas e professores de Matemática a aplicarem e compreenderem essa sequência didática.

Outras produções, na forma de artigos, como relatos menores desta boa experiência vivida ou com propostas de cursos, minicursos ou oficinas, estão sendo pensadas para serem compartilhadas em eventos destinados a discussões sobre fazer e compreender práticas pedagógicas que colaborem para a aprendizagem em Matemática.

Escrevendo agora, na primeira pessoa, posso observar que, antes deste trabalho ser desenvolvido, a Análise Combinatória era, de certa forma, algo não totalmente compreendido. No entanto, percebo que não se pode parar no tempo, embasados apenas no que é conhecido. É importante superar desafios e acreditar que é possível mudar e melhorar aquilo que fazemos. O meu papel hoje é muito mais do que ser um professor, reconheço-me como professor-pesquisador, que se vê com a obrigação e o dever de colaborar para potencializar a aprendizagem, compartilhando, ao máximo, as experiências que foram vivenciadas e concretizadas neste tempo do mestrado.

Por fim, posso afirmar que, neste período de formação, pude abrir meus horizontes em relação ao processo de ensino e aprendizagem, tendo a convicção de que este programa de Pós-Graduação ajudou-me a aprender muito sobre o que é ensino. Para concluir, afirmo que atualmente minha confiança e curiosidade, como professor, estão motivadas, buscando o querer, o construir, o aplicar e o poder compartilhar, pois o que é feito com amor e dedicação conduz ao caminho da perfeição.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, R. M. Jogando VI – PER: Motivando-se e aprendendo. **Revista de Educação Matemática**, SBEM-SP, n. 3, p. 19-26, 1997.

BARRETO FILHO, B.; SILVA, C. X. da. **Matemática aula por aula**. São Paulo: FTD, 2000.

BAVARESCO, D. **Política de formação de professores nos Institutos Federais e a Licenciatura em Matemática do IFRS** – Campus Bento Gonçalves. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, 2014.

BEZERRA, C. A.; ASSIS, C. C. Atividades com o GeoGebra: possibilidades para o ensino e aprendizagem da Geometria no Fundamental. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, **Anais...** Recife, 2011.

BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. **Revista Historia Mathematica**, v. 6, p.109-136, 1979.

BOCASANTA, D. M. **Dispositivo da tecnocientificidade**: a iniciação científica ao alcance de todos. 2014. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, 2014.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para o ensino de matemática. São Paulo: Caem - IME-USP, 1995.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 16 set. 2015.

BRASIL. PCNs. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, bases legais:** 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 9 maio 2015.

______. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias: 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 9 maio 2015.

CAMPOS, Carlos Eduardo. **Análise combinatória e proposta curricular paulista**: um estudo dos problemas de contagem. 2011. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PUC/SP, São Paulo, 2011.

CARVALHO, G. Q. **O uso de jogos na resolução de problemas de contagem:** um estudo de caso em uma turma do 8° ano do Colégio Militar de Porto Alegre. Porto Alegre: UFRGS, 2009.

CHILELA, R. R. O JOGO DE PÔQUER: uma situação real para dar sentido aos conceitos de análise combinatória. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – UFRGS, Porto Alegre, RS, 2013.

D'AMBRÓSIO, B.S. Como ensinar matemática hoje? Temas e debates. **SBEM**, Brasília, ano II, n. 2, p.15-19,1989.

______. **Educação matemática da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.

______. **Etnomatemática**: ele entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

DANTE, L. R. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2008.

FONSECA, J. A. **Análise combinatória na educação de jovens e adultos**: uma proposta de ensino a partir da resolução de problemas. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFRGS, Porto Alegre, RS, 2012.

GARDNER, A. D. A cautionary note. In: KENNEY, M. J.; HIRSCH, C. R. **Discrete mathematics across the curriculum, K-12**: 1991, Yearbook. NCTM, 10-17, 1991.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais. 10. ed. Rio de Janeiro: Record, 2007.

GONDIM, S. M. G.; FISCHER, T. O discurso, a análise de discurso e a metodologia do discurso do sujeito coletivo na gestão intercultural. **Cadernos Gestão Social**, v. 2, n. 1, 2009.

GONÇALVES, R. S. **Os jogos no ensino de matemática:** uma sequência didática para o ensino das operações aritméticas. João Pessoa: UFPB, 2011.

GRANDO, R. C. O **conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** 2000. 224f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2000.

______. **O jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino/ aprendizagem da matemática.** 1995. 175f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1995.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar, combinatória e probabilidade**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

LA TAILLE., Y. Prefácio. In, PIAGET, J. A construção do real na criança. 3. ed. São Paulo: Ática, 2003.

LEANDRO, E. J. **Um panorama de argumentação dos alunos da educação básica**: o caso do fatorial. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) – PUC/SP, São Paulo, 2006.

LOPES, J. M.; REZENDE, J. de C. Um novo jogo para estudo do raciocínio combinatório e do cálculo de probabilidade. **Bolema**, Rio Claro, v. 23, n. 36, p. 657-682, ago. 2010.

LUCKESI, C. C. O que é mesmo o ato de avaliar a aprendizagem? **Pátio On-line**, Porto Alegre, Artmed, ano 3, n. 12, fev./abr. 2000.

MASETTO, M. **Didática**: a aula com centro. 3. ed. São Paulo: FTD, 1996.

MENDONÇA, L. **Trajetória hipotética da aprendizagem**: análise combinatória. 2011. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PUC/SP, São Paulo, 2011.

MOREIRA, M. A. **Teorias da aprendizagem**. São Paulo: @E.P.U, 1999.

______. Negociação de significados e aprendizagem significativa. **Revista Ensino Saúde e Ambiente**, v.1, 2008.

MORGADO, A. C. de O. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

MORGADO. Augusto César, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. SBM. Rio de Janeiro, 2014.

OLIVEIRA, E. G. **Raciocínio combinatório na resolução de problemas nos anos iniciais do Ensino Fundamental**: um estudo com professores. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) – PUC/SP, São Paulo, 2014.

PIAGET, J. **Abstração reflexionante**: relações lógicas, aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

______. **Para onde vai a educação?** Rio de Janeiro: J. Olympio, 1977.

______. **Fazer e compreender**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1978.

PINHEIRO, C. A. M. **Análise Combinatória**: organizações matemáticas e didáticas nos livros escolares brasileiros no período entre 1895 – 2009. 2015. Tese (Doutorado em Matemática) – PUC, São Paulo, 2015.

PINHEIRO, N. A. M. et al. Ciência, tecnologia e sociedade: a relevância do enfoque CTS para o contexto do ensino médio. **Revista Ciência e Educação**, Ponta Grossa, v.13, 2007.

RAMOS, A. **Metodologia da pesquisa científica**: como uma monografia pode abrir o horizonte do conhecimento. São Paulo: Altas, 2009.

REZENDE, J. de C.; LOPES, J. M.; TEODORO, J. V. Um novo jogo para o estudo do raciocínio combinatório e do cálculo de probabilidade. **Anais do CNMAC**, v. 2, 2009. Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxii_cnmac/pdf/372.pdf>. Acesso em: 16 set. 2016.

REZENDE, J. de C.; LOPES, J. M. Um novo jogo para o estudo do raciocínio combinatório e do cálculo de probabilidade. **Bolema**, Rio Claro, v. 23, n. 36, p. 657-682, ago. 2010.

RIBEIRO, E. F. F. **O ensino da matemática por meio de jogos de regras.** 2009. Disponível em: <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/ElcyFernandaFerreiradeSousa.pdf>. Acesso em: 30 ago. 2016.

SABO, R. D. **Saberes docentes**: a análise combinatória no Ensino Médio. 2010. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PUC, São Paulo, 2010.

SANTOS, R. H. **Uma abordagem do ensino da análise combinatória sob a ótica da resolução de problemas**. 2012. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, 2011.

SCHMIDT, A. **Matemática**: por que ensinar? Para que aprender? 2007. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/filjem/menuesp1/c935f3d497d9e3ebc320160a0449bbbb.pdf>. Acesso em: 28 nov. 2016.

SILVA, A. F.; KODAMA H. M. Y. Jogos no ensino da matemática. In: **II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**, UFBa, out. 2004. Disponível em: <http://www.gilmaths.pro.br/resources/ARTIGOS/Jogos%20no%20ensino%20da%20matem%C3%A1tica.pdf >. Acesso em: 28 nov. 2016.

SILVA, C. S. **Estudo de caso sobre o pensamento combinatório de alunos do ensino médio**. (Trabalho de Conclusão de Curso) – UFRGS, Porto Alegre – RS, 2010.

SILVEIRA, D. da S.; LAURINO, D. P. Prática docente e os saberes matemáticos: uma experiência com material concreto. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 2, 2012.

SMOLE, K. et al. **Jogos de matemática:** de 1º e 3º ano. Porto Alegre: Artmed, 2008.

SOUZA, A. L. C. P. **Análise combinatória: uma abordagem no Ensino Médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas**. 2013. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/gterp/?q=node/116>. Acesso em: 16 nov. 2016.

SOUZA, J. R. de. **Novo olhar à matemática**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

SOUZA, S. E. O uso de recursos didáticos no ensino escolar. In: **Encontro de Pesquisa em Educação, IV Jornada de Prática de Ensino, Semana de Pedagogia da UEM: "Infância e Práticas Educativas",** 1,13., Arq Mudi. 2007. Disponível em: <http://www.pec.uem.br/pec_uem/revistas/arqmudi/volume_11/suplemento_02/artigos/019.df >. Acesso em: 29 maio 2015.

STRAPASON, L. P. R.; BISOGNIN, E. Jogos pedagógicos para o ensino de funções no primeiro ano do Ensino Médio. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 579-595, ago. 2013.

TAVARES, C. S.; BRITO, F. R. M. de. Contando a história da contagem. **Revista do Professor de Matemática**, n. 57, p. 33-40, 2005.

VASQUEZ, C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. **Análise combinatória**: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2016.

VAZQUEZ, C. M. R. **O ensino de análise combinatória no Ensino Médio por meio de atividades orientadoras em uma escola estadual no interior paulista**. 2011. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Visando a desenvolver uma pesquisa, que é parte da dissertação de mestrado JOGOS EM UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA, coordenada por mim, Luiz Ambrozi (mestrando orientado pela Profª. Drª. Isolda Gianni de Lima), no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática: Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Caxias do Sul, convido você a participar com os registros das tarefas que foram solicitadas e realizadas e com pareceres que foram descritos na sequência didática desenvolvida por mim. Para tanto, é importante que você assine abaixo desta mensagem, tomando ciência de que as informações serão tratadas somente para fins de pesquisa e que sua identidade, enquanto participante da mesma, será preservada, em todas as publicações oriundas deste estudo. Não serão divulgados nomes ou informações que possam identificar o participante da pesquisa. Os dados obtidos serão utilizados apenas para fins de investigação, e o participante pode desistir a qualquer momento sem prejuízo algum. O participante pode obter informações sobre o andamento da pesquisa, quando achar necessário. Desde já agradeço a sua colaboração e coloco-me à disposição para esclarecimentos pelo telefone (54) 96691886 e *e-mail*: luizambrozi@hotmail.com

Eu, ____, portador(a) do RG __________________________, declaro que estou ciente das informações acima e autorizo a utilização de minhas interações no contexto de aprendizagem para fins de pesquisa.

Bento Gonçalves, ... de .... de 2016.

_________________________________	_________________________________
Assinatura do pesquisador	Assinatura do participante da pesquisa

APÊNDICE B – TERMO DE ANUÊNCIA

A instituição Colégio Scalabriniano Nossa Senhora Medianeira, situada na cidade de Bento Gonçalves, Estado do Rio Grande do Sul, autoriza o professor pesquisador Luiz Ambrozi, mestrando orientado pela Profª. Drª. Isolda Gianni de Lima, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática: Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Caxias do Sul, a desenvolver uma pesquisa, que é parte da dissertação de mestrado JOGOS EM UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA, em suas dependências, tomando ciência de que as informações serão tratadas somente para fins de pesquisa, e tendo por entendimento que os dados obtidos serão utilizados apenas para fins de investigação, sem qualquer risco ou dano à Instituição.

Bento Gonçalves, ... de .... de 2016.

________________________________ ________________________________

Assinatura do pesquisador | Assinatura com carimbo da Instituição

APÊNDICE C – TABELA DE REGISTROS DE JOGADAS

Apresenta-se aqui a tabela para controle de pontuação dos jogos desenvolvidos na Etapa 1.

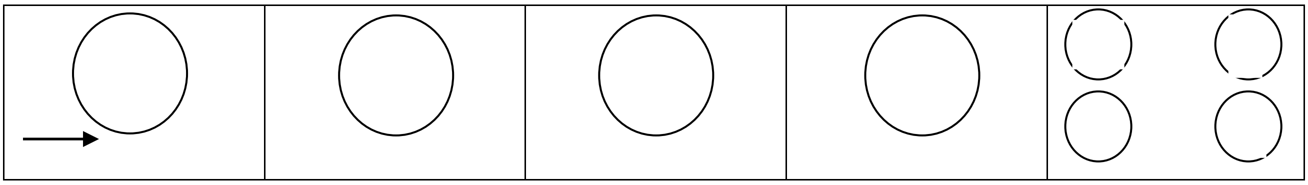
<table>
<tr><th colspan="8">TABELA DE REGISTRO DE JOGADAS</th></tr>
<tr><th colspan="4">Nome da equipe:</th><th colspan="4">Componente da equipe:</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Jogo 1
10 min</td><td colspan="3">(   ) Yellow Out</td><td colspan="2">(   ) Twibik</td><td colspan="2">(   ) Pulo do Sapo</td></tr>
<tr><td>Pontuação</td><td>Nível</td><td>Movimentos</td><td>Pontuação</td><td>Nível</td><td>Tempo
1ª solução</td><td>Número de soluções</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Jogo 2
10 min</td><td colspan="3">(   ) Yellow Out</td><td colspan="2">(   ) Twibik</td><td colspan="2">(   ) Pulo do Sapo</td></tr>
<tr><td>Pontuação</td><td>Nível</td><td>Movimentos</td><td>Pontuação</td><td>Nível</td><td>Tempo
1ª solução</td><td>Número de soluções</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Jogo 3
10 min</td><td colspan="3">(   ) Yellow Out</td><td colspan="2">(   ) Twibik</td><td colspan="2">(   ) Pulo do Sapo</td></tr>
<tr><td>Pontuação</td><td>Nível</td><td>Movimentos</td><td>Pontuação</td><td>Nível</td><td>Tempo
1ª solução</td><td>Número de soluções</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

APÊNDICE D – CARTELA ADAPTADA DO JOGO SENHA

Modelo de cartela adaptada, do desafiante e do desafiado, para o jogo Senha em sala de aula.

Cartela do desafiado

1	2	3	4	



Cartela do desafiante

1	2	3	4

APÊNDICE E – ETAPAS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Segue, neste apêndice, a descrição detalhada de todas as atividades da sequência didática elaborada neste projeto de pesquisa. As etapas descritas a seguir, fazem parte da Dinâmica Combinatória, uma sequência de ensino para o conteúdo de Análise Combinatória, que é o produto resultante deste trabalho, destacado no Apêndice G.

Etapa 0 da Dinâmica Combinatória

Neste primeiro encontro, visa-se a fazer uma introdução de todo o trabalho a ser desenvolvido na Dinâmica Combinatória, que é o nome dado à sequência didática com a qual serão explorados os conceitos fundamentais da Análise Combinatória. Com o contexto histórico deste conteúdo, e com questões desafiadoras, tem-se a intenção de animar e despertar a curiosidade e o interesse dos alunos para participarem de maneira efetiva do trabalho que será desenvolvido. Neste encontro, há um tempo para constituírem as equipes, escolherem nomes e receberem instruções sobre o preenchimento do diário de bordo para registros de cada equipe. A Etapa 0 acontece no tempo de uma aula, com duração prevista de uma hora, tendo o professor o papel de provocador e organizador dos fatos e das ideias abordadas na aula.

0.1 Objetivos:

– conhecer os pilares que fundamentam a Análise Combinatória por meio de fatos históricos, como estratégia para despertar o interesse por este estudo;

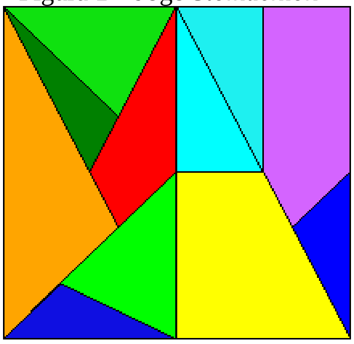
– resolver alguns desafios lógicos contextualizados, para sensibilizar sobre a importância do raciocínio como estratégia de resolução de problemas neste conteúdo.

0.2 Descrição da atividade

0.2.1 História

Vasquez e Noguti (2010)[12] acreditam que a Análise Combinatória tenha sua origem na Antiguidade, antes mesmo dos registros históricos, e foi através do matemático grego Arquimedes, que viveu em Siracusa, na Sicília, no século III a.C., que se passou a ter conhecimento acerca dos problemas de contagem. Ele propôs um problema de combinação de peças em um tabuleiro, que ficou conhecido como *Stomachion* (Figura 1). Embora não se conheça ao certo o significado dessa palavra, sabe-se que tem a mesma origem da palavra estômago. Não há registros seguros, também, de que, realmente, tenha sido Arquimedes quem inventou o jogo, ou se ele apenas explorou o problema proposto em algum manuscrito mais antigo.

Figura 1 – Jogo *Stomachion*[13]



Fonte: Pinterest (2016).

Problema proposto no jogo: ***De quantos modos suas partes menores poderiam formar o mesmo quadrado?***

A resposta, que é 17.152 formas, foi calculada e comprovada em 2004 por ***Reviel Netz***, um estudioso deste jogo que propôs um problema combinatório a um grupo de matemáticos. Netz buscou guiá-los neste estudo e, com o auxílio de alguns computadores, conseguiram comprovar a resposta, envolvendo um tempo de seis semanas de trabalho.[14] Seu trabalho foi publicado no mesmo ano da comprovação da solução do problema com o título *Towards a Reconstruction of Archimedes*. [15]

Outro problema segundo Vasquez e Noguti (2010), que envolvia conceitos de memorização, pode ser encontrado no papiro egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.), conhecido como problema 79, que segue:

---

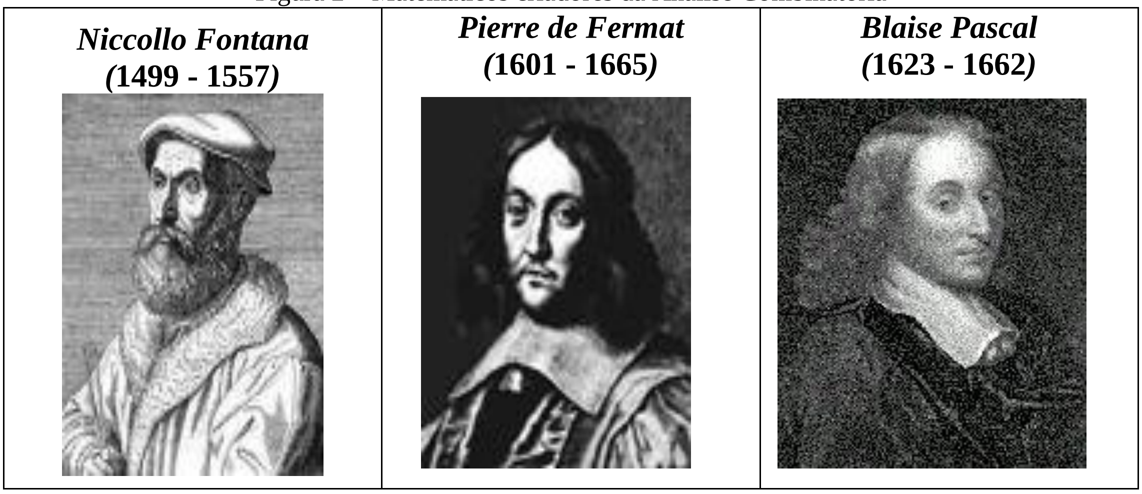
[12] Vasquez, Cristina Maria Roque; Noguti, Fabiane Cristina Hopner. Análise Combinatória: Alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica, Anais do VIII ENEM, Pernambuco, 2004.
[13] Disponível em: <http://4umi.com/play/stomachion/square.php?show=68&m=s>. Acesso em: 31 set. 2016.
[14] Disponível em: <http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT669583-2680,00.html>. Acesso em: 31 out. 2016.
[15] Disponível em: <http://turing.une.edu.au/~ebowen/Stomachion/NAW2004SCIAMVS.pdf>. Acesso em: 31 set. 2016.

“Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete *hekat*[16] de grãos; quantos itens têm ao todo?”

Com a leitura, percebe tratar-se de uma progressão geométrica de razão 7 e, no caso, a resposta é 19.607.

Apesar de problemas de contagem serem encontrados desde o século III a.C., a teoria combinatória só surgiu no final do século XVI, com a necessidade de calcular possibilidades em jogos de azar. A teoria da Análise Combinatória só seria formalmente escrita em meados do século XVII e início do século XVIII, pelos matemáticos Pascal (1654 e 1665), Leibniz (em 1666), Kircher (em 1669), Wallis (em 1673) e Bessy (em 1693). Esse estudo deu origem à Teoria das Probabilidades. Outros pesquisadores matemáticos tiveram grande influência no desenvolvimento e na formalização desta parte da Matemática, conforme está apresentado na Figura 2.

Figura 2 – Matemáticos criadores da Análise Combinatória



Fonte: Elaboração do autor (2016).

0.2.2 Primeiros problemas, para despertar a curiosidade:

1) Se Pedro, ao resolver sair para uma festa, para escolher que roupa vai usar, separa duas calças e três camisas, que considera próprias para a ocasião, de quantas maneiras diferentes ele pode se vestir, escolhendo três camisas e duas calças?

A resposta é 2.3 = 6 maneiras e pode ser calculada com raciocínios variados.

2) Acontece, algumas vezes, de caixas eletrônicos conterem apenas notas de determinados valores. Imagine um saque no valor de R$ 100,00, num caixa eletrônico só com

[16] *Hekat* é uma unidade de medida de grãos utilizada no Egito antigo e que equivale a 4,8 litros.

notas de R$ 5,00 e R$ 10,00. De quantas formas diferentes a máquina pode disponibilizar o dinheiro?

A Tabela 1 mostra a solução do problema.

Tabela 1 – Solução do problema

Casos	R$ 10	R$ 5,00
1°	1	18
2°	2	16
3°	3	14
4°	4	12
5°	5	10
°	°	°
°	°	°
°	°	°
10°	10	Ñ
11°	Ñ	20

Fonte: Elaboração do autor (2016).

3) Haverá um sorteio com dois prêmios, dos tipos mostrados na Figura 2, de um carro, como primeiro prêmio e de uma bicicleta como segundo, a ser realizado com 10 participantes. De quantas maneiras distintas essas pessoas podem ganhar este prêmio, sendo que a pessoa que já ganhou um prêmio não pode concorrer a outro prêmio?

Figura 2 – Prêmios do sorteio

Fonte: Sites Google (2016)

Possível solução: 10x9 = 90 maneiras

4) O setor de emergência de um hospital conta, para plantões noturnos, com 3 pediatras, 4 clínicos gerais e 5 enfermeiros. As equipes de plantão devem ser constituídas por 1 pediatra, 1 clínico geral e 2 enfermeiros.

a) Quantos pares distintos de enfermeiros podem ser formados?

O problema indica uma combinação dos 5 enfermeiros em grupos de 2. Assim, pode-se ter $C_{5,2} = 10$ duplas possíveis de enfermeiros.

b) Quantas equipes de plantão distintas podem ser formadas?

Temos: 3 pediatras, 4 clínicos e 5 enfermeiros.

Cada equipe deve ter: 1 pediatra, 1 clínico e 2 enfermeiros.

Pelo princípio da contagem, cada equipe tem 1 de 3 pediatras, 1 de 4 clínicos e uma de 10 duplas de enfermeiros, resultando em $3 \times 4 \times C_{5,2} = 3 \times 4 \times 10 = 120$ equipes.

5) Segundo a reportagem extraída da revista *Super Abril*:

Qual é a lógica das letras nas placas dos carros?[17]

A ordem das letras e números tem a ver com o lugar em que o veículo é emplacado. Esse esquema começou a ser adotado em fevereiro de 1990, quando as placas amarelas (com duas letras e quatro números) foram substituídas pelas cinza (com três letras). Cada estado tem suas combinações próprias (veja figura abaixo), distribuídas pela frota local em ordem cronológica de licenciamento ou emplacamento. É possível encontrar placas com cidades e combinações “trocadas”. Isso acontece porque, se um veículo é emplacado originariamente em um lugar e o endereço do proprietário muda, troca-se apenas a indicação de cidade e estado. Ou seja, um carro licenciado em Camaçari, Bahia, com a combinação JOL pode perfeitamente estar rodando com a indicação “São Paulo, SP”. Isso porque o primeiro emplacamento ocorreu na Bahia. É possível escolher as letras e os números da chapa do automóvel. Assim, mulheres chamadas Beatriz podem encomendar a combinação BIA e donos de BMW ostentar placas BMW. Mas também não é a festa da uva: em São Paulo, por exemplo, são proibidas combinações que formem palavras consideradas obscenas ou constrangedoras, como CUS, GAY e CKH.

[17] Disponível em: < http://super.abril.com.br/comportamento/qual-e-a-logica-das-letras-nas-placas-dos-carros>. Acesso em: 13 set. 2016.

Figura 3 – Placas de automóveis [18]

Fonte: *Site* de Carrosnors (2016)

Analisando as placas da Figura 3, pode-se perceber que todas são compostas por três letras e quatro algarismos numéricos. Sabendo que nosso alfabeto é composto por 26 letras e nosso sistema de algarismos numéricos é composto pelos números inteiros, que variam de 0 a 9, qual é o número total de placas de automóveis que se pode formar, como são as placas da Figura?

$$26.\ 26.\ 26.\ 10.\ 10.\ 10.\ 10 = 26^3.10^4$$

Através destes problemas, será introduzido o tema de estudo, buscando despertar a curiosidade dos alunos, podendo-se observar as formas sugeridas de solução, visando a pensar com muita atenção, propor e testar hipóteses, que são componentes do raciocínio matemático, imprescindíveis para obter as respostas.

0.3 Formação das equipes e combinações para a Dinâmica Combinatória

– Formar sete equipes e definir nomes (exemplo Equipe Alfa de integrantes Alfa 1, Alfa 2 e Alfa 3).

– Combinar quem será o relator, em cada atividade, e responsável pelos registros no diário da equipe.

[18] Disponível em: <http://www.carrosnors.com.br/inicio-de-placas-de-veiculos-por-estado/>. Acesso em: 13 set. 2016.

– Para finalizar cada etapa, os alunos realizarão uma tarefa extraclasse, como tema de casa, para a resolução de exercícios que constam no “livro integrado”, que é a bibliografia proposta pela escola com forte recomendação de ser utilizado.

– No início da aula que segue a cada tema de casa, serão sorteados um exercício e um componente de cada equipe, que deve entregar o exercício para a verificação da realização da tarefa solicitada.

Etapa 1 da Dinâmica Combinatória

A primeira etapa acontece com a realização de três jogos acessíveis pela internet. Assim, os alunos serão encaminhados ao laboratório de informática da escola, onde explorarão três jogos virtuais que envolvem habilidades lógicas, para se chegar à solução dos desafios propostos. Esta primeira etapa terá duração de uma hora, para a execução dos três jogos e, no final de cada um, para o aluno preencher um questionário, respondendo sobre a forma que utilizou para solucionar os desafios de cada jogo. Nos minutos finais, será proposto um novo desafio, na forma de um problema sobre o princípio da contagem, para o qual o aluno deverá apresentar uma solução, na forma de uma breve descrição do que pensou e realizou. O professor participará, organizando e administrando o tempo da aula.

1.1 Objetivos de aprendizagem:

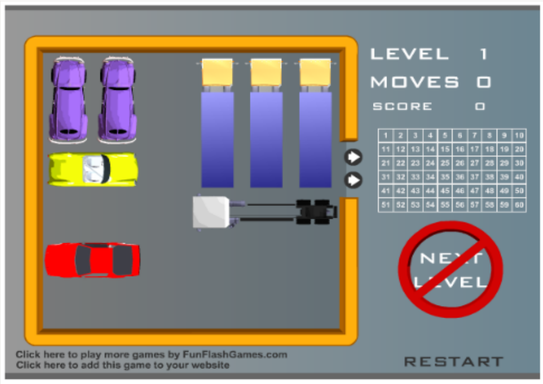
➔ criar estratégias, transformando-as em possibilidades para tomar decisões, buscando solucionar de maneira eficaz situações que envolvam problemas de raciocínio lógico;

➔ identificar e explorar características específicas do jogo, como forma de criar habilidade para solucionar problemas lógicos.

1.2 Descrição do Jogo

Jogo 1 – *Yellow Out*: O jogo do estacionamento, onde há um determinado carro no estacionamento que deve ser retirado, com o menor número possível de movimentos.

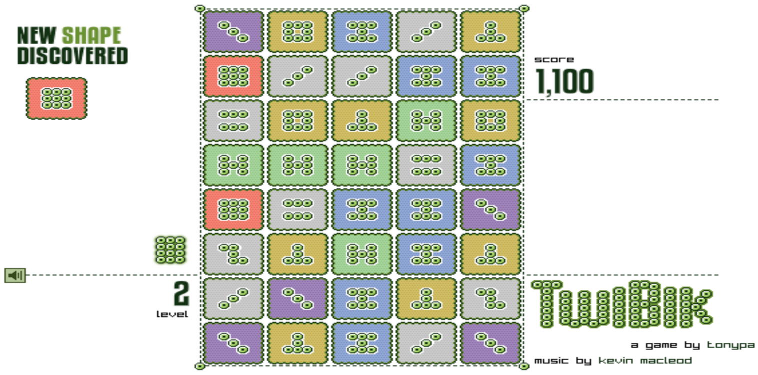
Figura 4 – *Layout* do Jogo *Yellow Out*[19]



Fonte: *Site* do Terra (2016).

Jogo 2 – *Twibik*: Desafio de atenção e raciocínio rápido, no qual deve-se buscar associação entre as peças que vão sendo disponibilizadas em lugar daquelas que são retiradas.

Figura 5 – *Layout* do Jogo *Twibik*[20]

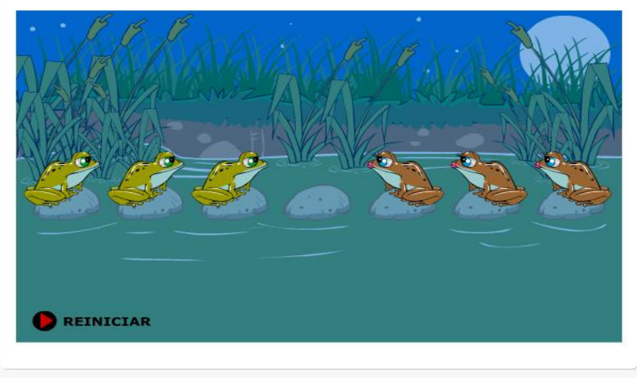


Fonte: *Site* do Terra (2016).

Jogo 3 – Pulo do Sapo: Um jogo de atenção no qual é preciso criar uma estratégia para deslocar um grupo de três sapos para a margem oposta daquela onde se encontram.

[19] Disponível em: <http://www.terra.com.br/webgames/yellowout/yellowout.htm>. Acesso em: ago. 2016.
[20] Disponível em: <http://www.terra.com.br/webgames/yellowout/yellowout.htm>. Acesso em: 15 ago. 2016.

Figura 6 – *Layout* do Jogo Pulo do Sapo[21]



Fonte: *Site* de Jogos (2016).

Os alunos, no decorrer dos jogos, irão preencher uma tabela de registro, que segue em anexo a este documento, na qual buscam analisar pontuações, tempo de resolução dos jogos, nível de desempenho do aluno em relação ao jogo e número de soluções, conforme o jogo disputado. O objetivo de os alunos preencherem a tabela está ligado à verificação do desempenho dos mesmos e servirá como subsídio de análise para a dissertação de Mestrado.

1.3 Objetivos do jogo

Jogo 1: O objetivo do jogo *Yellow Out* é retirar o carro amarelo do estacionamento, efetuando a menor quantidade de movimentos possível. Para isso, é preciso mover outros carros que estão bloqueando o caminho. Estes, algumas vezes, também têm suas passagens bloqueadas por outros carros do estacionamento.

Jogo 2: No *Twibik*, o objetivo é eliminar a maior quantidade de peças. Para isso, deve-se clicar em peças idênticas, que se apresentam numa mesma linha ou coluna. Como dificultador do desafio, podem ocorrer situações em que não há opções, decorrendo, então, duas possibilidades: uma, a de remover uma peça aleatória ou, outra, a de embaralhar as peças até surgirem novas opções.

Jogo 3: No Pulo do Sapo, o propósito é transferir três sapos de uma margem para a oposta de onde se encontram. Neste jogo, é acionado, principalmente, o raciocínio lógico e é importante tramar uma estratégia, como capacidade de solucionar problemas, por meio de atenção, senso de direção, planejamento, organização e coordenação motora.

1.4 Orientações para os jogadores de como jogar

[21] Disponível em: <http://jogos.testeqi.com.br/o-pulo-do-sapo/>. Acesso em: 15 ago. 2016.

1.4.1 Jogo *Yellow Out*

Você pode mover os carros tantas vezes quantas quiser e em qualquer direção.

Como jogar:

1. espere o jogo carregar e clique em “Play”;
2. escolha o nível em que deseja começar o jogo e clique em “Start Game”;
3. clique no carro que deseja mover e arraste-o até a posição escolhida;
4. cada etapa termina quando o carro amarelo parar em cima das setas que indicam a saída.

1.4.2 Jogo *Twibik*

Não existem regras especiais, basta encontrar e clicar em duas peças iguais.

Como jogar:

1. espere o jogo carregar e clique em “Play Game”;
2. clique em “Normal” para jogar tranquilamente, sem se preocupar com o tempo;
3. clique em “Action” para jogar contra o tempo (mais emocionante hehehe);
4. quando o jogo carregar, clique em pares de peças idênticas, que situam-se numa mesma linha ou mesma coluna. Todas as peças entre elas irão ser removidas do jogo.

1.4.3 Jogo Pulo do Sapo

Não existem regras especiais a serem descritas, somente devemos passar os sapos machos para o lado direito e os sapos fêmeas para o lado esquerdo, podendo atravessar somente um de cada vez, pois apenas uma pedra está livre para o pulo. Não podemos voltar a jogada após ser executada, podemos apenas reiniciar um novo jogo, finalizando assim a jogada anterior.

Como jogar:

Utilize o *mouse*, clique no sapo para ele pular.

1.4.4 Atividade pós-jogo

Jeniffer vai participar da promoção de uma loja de roupas que está oferecendo um vale compras de R$ 1.000,00 para o participante que apresentar por primeiro o maior número de combinações distintas, ao menos em uma peça, com o kit de roupas escolhido pela loja. O kit é composto de: seis blusas, quatro saias e dois pares de sapato. Quantas são todas as maneiras distintas com as quais Jeniffer deverá combinar as peças do vestuário para ter chance de concorrer ao prêmio?

Etapa 2 da Dinâmica Combinatória

Esta etapa consiste na realização do Jogo do Quadrado[22] que foi desenvolvido pelos professores e pesquisadores Josiane de Carvalho Rezende, José Marcos Lopes e João Vitor Teodoro, com o intuito de explorar o raciocínio combinatório e o cálculo de probabilidades. A atividade acontece em equipes de três componentes, definidos por sorteio pelo professor, que irá auxiliar o desenvolvimento das atividades, que requerem o tempo de duas horas. O que se espera com estas atividades é o desenvolvimento da ideia do Princípio Fundamental da Contagem, que serve como princípio introdutório, para resolver problemas de Análise Combinatória. Os alunos terão a oportunidade de explorar o jogo e avaliar se o mesmo é ou não de azar, respondendo ao questionário pós-jogo.

2.1 Objetivos de aprendizagem:

– com esta atividade visa-se ao aprimoramento de atitudes de cooperativismo, partilha e respeito, estabelecendo relações de boa convivência com os integrantes da equipe;

– com o jogo, busca-se propiciar que alunos levantem hipóteses e planejem estratégias de jogadas, para construir uma árvore de possibilidades, desenvolvendo, assim, o pensamento multiplicativo;

– almeja-se desenvolver o cálculo mental, como forma de encontrar uma solução rápida para os problemas apresentados na atividade.

1.3 Descrição do jogo

No Jogo do Quadrado, utiliza-se o mesmo tabuleiro do Jogo da Velha, e os movimentos de captura de peças possuem algumas semelhanças com os das peças peão e torre no Jogo de Xadrez.

[22] Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxii_cnmac/pdf/372.pdf>. Acesso: 5 out. 2016.

MATERIAL: Tabuleiro com 3x3 casas e duas peças distintas, uma para cada jogador; usa-se este modelo para marcar a posição de cada jogada.

Figura 7 – Tabuleiro utilizado
no Jogo do Quadrado

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

Fonte: Elaborado pelo autor (2016)

2.3 Objetivos do jogo:

– eliminar a peça ou chegar ao ponto de partida de seu adversário, andando apenas uma casa, na horizontal ou vertical, em cada jogada;

– servir como instrumento pedagógico para auxílio na resolução de problemas combinatórios básicos.

2.4 Orientações para jogar

INÍCIO DO JOGO: O jogo é disputado por dois jogadores, cada qual tem apenas uma peça. O Jogador 1 coloca a sua peça na extremidade esquerda inferior do tabuleiro e o Jogador 2 coloca a sua peça na extremidade direita superior do tabuleiro. O jogo inicia com o Jogador 1, que é definido por sorteio.

REGRAS:

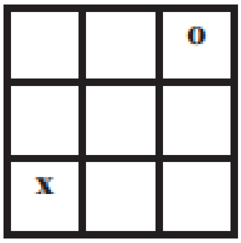
1ª) não se pode voltar ao ponto de partida, mesmo podendo voltar para trás;

2ª) é permitida a eliminação da peça, somente quando estiver em uma diagonal;

3ª) a eliminação da peça adversária, tal como a ocupação do seu ponto de partida, é obrigatória quando surgir a ocasião;

4ª) o número máximo de movimentos permitido para cada peça é de oito. Se, até o final do oitavo movimento, o jogo não finalizar, define-se o empate.

Figura 8 – Posição inicial do
Jogo do Quadrado



Fonte: Elaborado pelo autor (2016)

2.5 Atividade pós-jogo

Após a realização do jogo, segue-se com um conjunto de problemas, com o objetivo de desafiar os estudantes a operarem com as ideias básicas de problemas de contagem e a construírem, para cada situação, a árvore das possibilidades de cada jogada. Assim, serão formulados alguns problemas sobre o Jogo do Quadrado, em que aparecem essas ideias quando ao serem resolvidos. Dessa forma, os problemas serão utilizados para ensinar matemática, o que é diferente de ensinar matemática para depois resolver problemas. Os alunos deverão conjecturar sobre possíveis soluções em linguagem própria. No final, os conceitos matemáticos aprendidos serão sistematizados pelos alunos em linguagem própria da matemática e esses receberão uma lista extra de exercícios e problemas, selecionados do livro integrado, para serem realizados em casa e entregues na aula seguinte a do Jogo do Quadrado.

Questionamentos:

1) Será que o Jogador 1 sempre vence? Por quê?

2) É possível ocorrer empate? Por quê? 3) O jogo é de azar ou de estratégia? Se, ao invés de oito, aumentarmos o número de jogadas para nove, quais os possíveis resultados do jogo?

Problemas:

Um tabuleiro numerado de 1 até 9 pode ser utilizado, com o intuito de facilitar o registro das jogadas, como está exemplificado na Figura 9. Com isso, resolva os seguintes problemas:

Figura 9 – Tabuleiro com numeração

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fonte: Elaborado pelo autor (2016)

Problema 1. Suponha que, após o quarto movimento, a peça do Jogador 1 esteja no quadrado 1, a do Jogador 2 esteja no quadrado 9 e que, neste momento, seja a vez do Jogador 1 efetuar o seu movimento. Para garantir a vitória, esse jogador deve posicionar sua peça em qual quadrado?

Problema 2. Após o segundo movimento, o tabuleiro encontra-se conforme está mostrado na Figura 10.

Figura 10 – Posição das peças após a segunda jogada

	o	
	x	

Fonte: Elaborado pelo autor (2016)

Que número mínimo de movimentos finaliza o jogo? Quem vence o jogador “x”?

Problema 3. Em seu primeiro movimento, o Jogador 1 pode escolher o quadrado 4 ou o quadrado 8. Se esse jogador escolheu o quadrado 4, então o Jogador 2 poderá vencer o jogo? Justifique sua resposta.

Problema 4. Existe uma estratégia vencedora para o Jogador 1? Em caso afirmativo, descreva-a exemplificando.

Problema 5. Quantos e quais são os resultados possíveis do Jogo do Quadrado? Tente representar todas essas jogadas.

Etapa 3 da Dinâmica Combinatória

Na terceira etapa da Dinâmica Combinatória, busca-se explorar um novo jogo, conhecido como Jogo Senha, no qual serão desenvolvidos alguns conceitos que embasam as técnicas de contagem: permutação e arranjo. Essa etapa acontece no decorrer de duas horas, durante as quais os alunos trabalharão em equipes, organizadas pelo professor, que também terá o papel de esclarecer dúvidas e auxiliar os alunos, durante a rotina de sala de aula.

3.1 Objetivos de aprendizagem:

– explorar e associar as atividades do jogo com conceitos de técnicas como as de arranjo e de permutação simples;

– programar estratégias para a resolução dos problemas propostos no jogo;

– tomar decisões adequadas, por meio da análise antecipada de possíveis jogadas;

– chegar a conclusões e a soluções de problemas trabalhando em equipe.

3.2 Descrição do jogo

O Jogo Sena foi desenvolvido em 1970 pelo israelense Mordechai Meirovitz e o objetivo com as jogadas é descobrir a sequência que compõe a senha de quatro cores, repetidas ou não, dentre seis cores distintas.

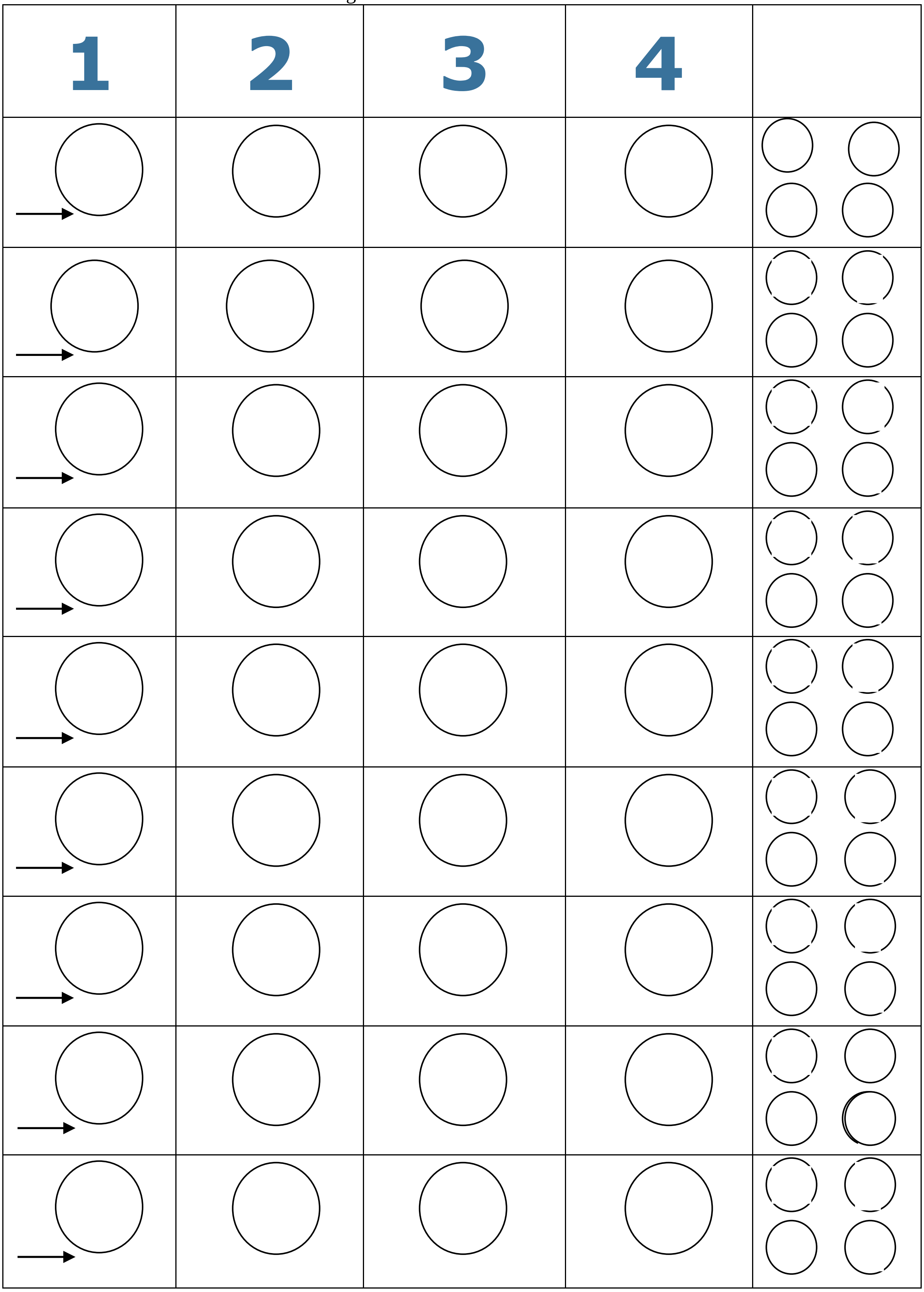
Figura 11 – Tabuleiro original do jogo[23]

Fonte: Wikipédia (2016).

O jogo será adaptado, para a aplicação em sala de aula, com o uso de cartelas (Figuras 12 e 13) e será utilizado lápis de cor no lugar das peças coloridas do jogo.

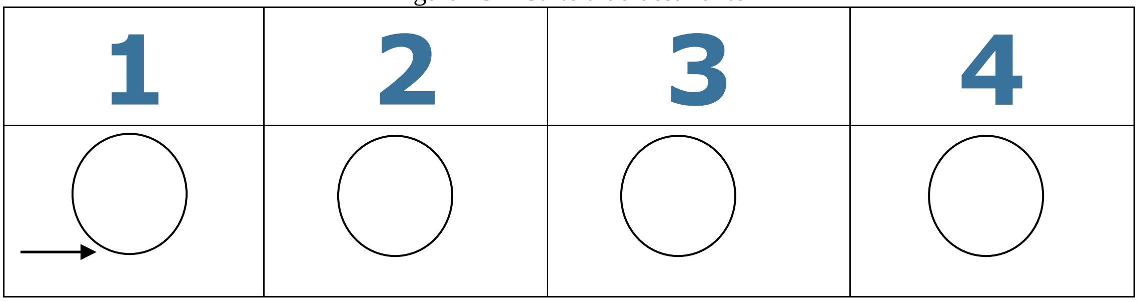
[23] Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Mastermind>. Acesso: 5 out. 2016.

Figura 12 – Cartela do desafiado



Fonte: Elaborado pelo autor (2016)

Figura 13 – Cartela do desafiante



Fonte: Elaborado pelo autor (2016)

3.3 Objetivo do jogo

No jogo, participam dois jogadores, o desafiante e o desafiado, este com o objetivo de descobrir a senha proposta pelo desafiador na sua cartela, que a mantém voltada para baixo. Em cada fileira, uma após outra, compondo jogadas sucessivas, o desafiado propõe uma sequência de quatro cores, repetidas ou não. O desafiante pinta ao lado, na cartela do desafiado, círculos com a cor preta, se estiverem corretas a cor e a posição; deixa círculos em branco se há cores corretas, mas em posições erradas, e marca “x” em tantos círculos quantas cores não correspondem às da senha. O desafiado tem nove oportunidades (até preencher a nona fileira da cartela), para adivinhar a senha, ou, se tal não ocorrer, o desafiador revela a senha, mostrando sua cartela, que mantinha voltada para baixo.

3.4 Orientações para jogar:

– definir desafiante e desafiado;

– o desafiante dispõe de oito cores, exceto branco e preto;

– o desafiante forma uma senha de corres, pintando sua cartela, no sentido da seta;

– o desafiado tenta adivinhar a senha do desafiante, pintando uma sequência de cores na primeira fileira;

– ao lado da fileira de cada jogada, o desafiador pinta um círculo preto, a cada cor e correspondente à posição correta; deixa um círculo em branco a cada cor correta, mas em posição errada, e marca um “x” a cada cor que não pertence à senha. A ordem dos círculos pretos, brancos ou com “x” não necessariamente é a da senha;

– o desafiado tem nove tentativas para descobrir a senha. Caso não acerte a senha, o mesmo contabilizará nove pontos;

– numa segunda rodada, invertem-se os papéis de desafiante e desafiado, vencendo o jogo aquele que acertar a senha com menor número de tentativas (fileiras pintadas).

3.5 Atividade pós-jogo

Ao término do jogo, os alunos, sentados em grupo, responderão a um questionário, com situações ligadas ao jogo, às quais devem associar conceitos relacionados com arranjos simples ou permutações simples. Após responder o Questionário 2, os mesmos irão realizar alguns exercícios extra, que serão selecionados de seu livro integrado.

Questionário 2

1) Utilizando três cores, para preencher três espaços, sem repetição, quantas senhas diferentes podemos formar?

2) Utilizando quatro cores, para preencher quatro espaços de uma senha, sem repetição, quantas senhas diferentes é possível formar?

3) E se pudéssemos escolher entre cinco cores, quantas senhas diferentes são possíveis formar?

4) No caso do jogo, onde formaram senhas escolhendo entre seis cores, qual é o número total de senhas possíveis repetindo as cores? Caso não haja repetição das cores, qual é o número total de senhas que podemos formar?

5) Usando seis cores e, fixando a primeira cor, por exemplo amarela, quantas senhas diferentes podemos formar?

6) Se pudermos escolher entre seis cores para quatro espaços, com repetição, quantas senhas diferentes é possível formar?

7) Dispondo de quatro cores distintas, de quantos modos diferentes podemos formar uma senha, sendo que as cores adjacentes não podem ser iguais?

Etapa 4 da Dinâmica Combinatória

Nesta etapa da Dinâmica Combinatória, serão explorados agrupamentos que se diferenciam pela sua natureza, ou seja, a atividade será desenvolvida visando à introdução ao conceito da técnica de contagem chamada de combinação simples. Para explorar este conceito, será utilizado o Jogo Bicolorido, criado, inicialmente, para explorar conceitos geométricos e que foi readaptado para explorar, também, conceitos combinatórios. A atividade terá a duração média de uma hora e será desenvolvida em equipes. O professor será o mediador das atividades, podendo auxiliar a desenvolver dos jogos e do questionário pós-jogo. No final da atividade, o mesmo poderá abrir um debate sobre os conceitos estudados.

4.1 Objetivos de aprendizagem:

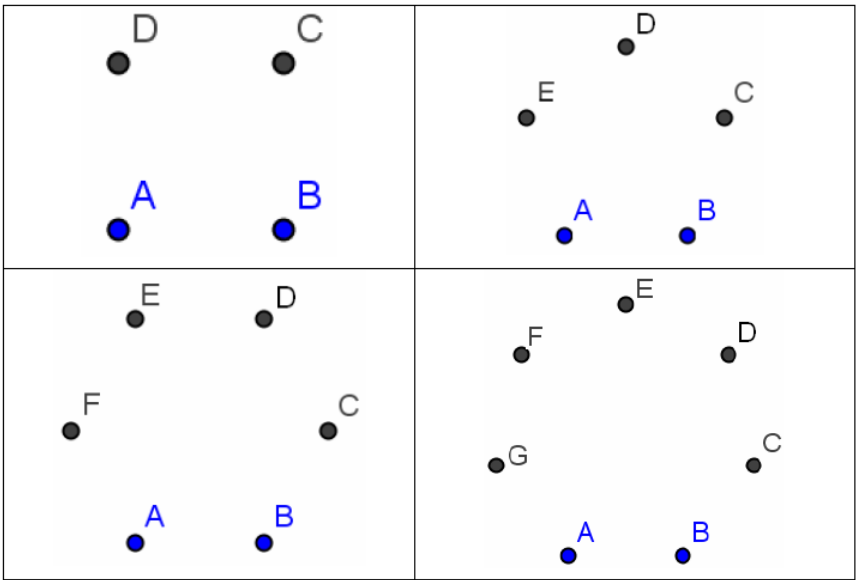
– explorar o conceito de combinações simples associado à construção de segmentos dispostos através dos vértices de um polígono já dado;

– desenvolver métodos de resolução com estratégias que propiciem a construção do pensamento combinatório.

4.2 Descrição do jogo

O Jogo Bicolorido original foi proposto na obra de Gardner (1985) e, posteriormente, Borin (1996) utilizou-o com o intuito de introduzir e desenvolver conceitos de ceviana, concorrência de cevianas e pontos notáveis de um triângulo, que são temas importantes da Geometria Euclidiana para o Ensino Fundamental. Porém, o jogo utilizado para esta atividade advém de uma pesquisa realizada por Carla Soares Silva, em 2010, que o adaptou para explorar conceitos de combinação simples, numa configuração de tabuleiro, como está mostrado na Figura 14, que segue:

Figura 14 – Tabuleiro do Jogo Bicolorido



Fonte: Elaborado pelo autor (2016)

4.3 Objetivo do jogo

No jogo, o objetivo é formar triângulos monocromáticos, quer dizer, com vértices de mesma cor, com os pontos dispostos no tabuleiro da Figura 14. O primeiro que conseguir formar um triângulo vence o jogo.

4.4 Orientações para jogar

4.4.1 *Materiais:* canetas hidrocor ou lápis de colorir (com, no mínimo, duas cores)

4.4.2 *Regras do jogo:*

– define-se quem inicia o jogo de forma amigável, como, por exemplo, num “par” ou “ímpar”;

– todas as duplas iniciam o jogo no tabuleiro de quatro pontos, passando, gradativamente, para outros, com mais número de pontos;

– os jogadores, cada qual com uma caneta hidrocor, ou lápis de colorir, com cores distintas, devem construir, sucessiva e alternadamente, segmentos de reta com extremos nos pontos do tabuleiro. Esses segmentos podem ser lados ou diagonais do polígono representado, no tabuleiro, por seus vértices;

– em cada etapa, será declarado vencedor aquele que fechar, por primeiro, um triângulo monocromático com a cor de sua caneta.

4.5 Atividade pós-jogo

Após o jogo, será entregue aos alunos um conjunto de perguntas, com as quais busca-se explorar conceitos de combinação, associados a possíveis construções geométricas relacionadas ao jogo no tabuleiro. Após responderem as perguntas, os alunos desenvolverão algumas atividades, selecionadas no seu livro integrado.

Perguntas

Responda as perguntas que seguem, considerando os pontos citados como pontos distintos de uma mesma circunferência.

a) Partindo de quatro pontos não colineares, A, B, C e D, quantos segmentos de reta podemos formar?

b) Com cinco pontos não colineares , A, B, C, D e E, quantos segmentos podemos formar?

c) Com seis pontos não colineares, A, B, C, D, E e F, quantos segmentos podemos formar?

d) E, com sete pontos não colineares, A, B, C, D, E, F e G, quantos segmentos podemos formar?

e) Seguindo essa mesma lógica, quantos segmentos podemos formar com oito, nove e com 10 pontos não colineares?

f) E com *n* pontos não colineares, quantos segmentos podemos formar?

g) Dos segmentos formados no item a, quantos são lados e quantos são diagonais do quadrilátero ABCD?

h) Em b, quantos são lados e quantos são diagonais do pentágono ABCDE?

i) Quantos segmentos são lados e quantos são diagonais do hexágono ABCDEF?

j) E os segmentos formados com sete pontos, quantos são lados e quantos são diagonais do heptágono ABCDEFG?

k) E quantos triângulos podemos formar, em cada situação informada nos itens A, B, C, D, E e F?

l) (Desafio) Para um polígono regular de *n* lados, quantos triângulos internos ao polígono conseguimos formar?

Etapa 5 da Dinâmica Combinatória

Nesta etapa, os alunos, organizados em grupos, realizarão a fundamentação das técnicas de contagem, aprofundando seus conhecimentos em fontes de referência, como livros e materiais disponíveis na internet, sobre conceitos que fundamentam as técnicas de contagem que estruturam a Análise Combinatória. Os resultados da pesquisa serão socializados em sala de aula, mediante apresentação de *slides*, com os demais colegas. Esta etapa terá a duração de até 6 horas de aula, para a realização de pesquisas, estudos, organização e apresentações em sala de aula. Nessa aula, o professor tem papel de grande importância, pois deverá auxiliar os alunos com dúvidas referentes aos procedimentos operatórios, indicando quais fontes de pesquisa deste estudo são confiáveis.

5.1 Objetivos de aprendizagem:

– conhecer os conceitos que fundamentam as técnicas de contagem, caracterizando-os, segundo os aspectos que os identificam e os diferenciam;

– desenvolver habilidades relacionadas a uma atividade de pesquisa e ao trabalho em equipe, no decorrer da construção e apresentação de um objeto de estudo, que servirá de base teórica para estudos posteriores;

– reconhecer aplicações dos conceitos pesquisados em diversos contextos ou na resolução de problemas, por meio de ideias e conceitos expressos, ou não, por fórmulas que formalizam as técnicas de contagem;

– construir habilidades de autonomia, visando a desenvolver a aprendizagem por meio da pesquisa.

5.2 Descrição das atividades

No desenvolvimento desta etapa, os alunos aprofundarão conhecimentos relacionados com conceitos da Análise Combinatória.

Os estudantes da classe serão organizados em sete equipes, para pesquisar sobre os seguintes temas:

1. definição do conceito de fatorial;
2. equações envolvendo o uso do fatorial;
3. permutações simples;
4. permutação com repetição;
5. arranjos simples;
6. combinações simples;
7. permutações circulares.

As equipes desenvolverão e apresentarão a pesquisa, orientados pelo professor, em sala de aula, no laboratório de informática e na biblioteca, seguindo um roteiro de pesquisa elaborado pelo professor.

5.3 Roteiro de estudos:

1. estudar os conceitos em, no mínimo, três ou mais fontes;

2. procurar e explorar outros materiais de apoio, como vídeoaulas ou *softwares*, por exemplo, como apoio para compreender e explicar os conceitos;
3. esclarecer, com o professor, todas as dúvidas que o grupo não conseguir resolver;
4. elaborar um texto explicativo dos conceitos, com exemplos e exercícios de aplicação;
5. selecionar e preparar três exercícios de aplicação dos conceitos, para apresentar e resolver com os colegas, em sala de aula;
6. apresentar as referências bibliográficas, adequadamente;
7. elaborar o texto escrito nos moldes do Manual da Família do Colégio;
8. preparar a apresentação do trabalho, aos colegas, com, no máximo, oito *slides*, que servirão de base teórica na apresentação.

5.4 Apresentações dos trabalhos

Os trabalhos serão apresentados, em sala de aula, tendo cada grupo 20 minutos para apresentar as ideias e os conceitos principais, em linguagem dissertativa, representações geométricas, explicações e correspondentes conceitos formalizados em linguagem matemática.

5.5 Avaliação

Os trabalhos serão avaliados segundo os critérios: clareza e criatividade na apresentação dos conceitos, conhecimento do conteúdo, diversidade dos tipos e graus de dificuldade das atividades propostas aos colegas, organização e capricho na elaboração do trabalho escrito, redação em linguagem correta, respeito aos colegas nas apresentações, participação nas atividades que estarão sendo propostas pelos grupos.

Para a definição da nota de desempenho no trabalho, segundo os critérios de avaliação, será considerada a seguinte distribuição de um total de 10 pontos:

– trabalho escrito: 4 pontos
– apresentação: 6 pontos
– falta de respeito ou de participação na apresentação de colegas: menos 2 pontos.

Etapa 6 da Dinâmica Combinatória

Esta é a etapa da finalização do trabalho, e como atividade em sala de aula, os alunos estarão envolvidos numa disputa, com diversão e conhecimento, na realização do Jogo Trilha Combinatória planejado para uma aplicação descontraída dos conhecimentos relacionados ao conteúdo de Análise Combinatória. Tal atividade tem previsão de duração de uma hora e será desenvolvida por meio de desafio para uma disputa entre as equipes que vivenciaram a Dinâmica Combinatória. O professor deve ser o mediador do funcionamento do jogo, auxiliando na interpretação das regras e nas dúvidas quanto à solução das atividades propostas pelo jogo; pode-se dizer que ele será uma espécie de juiz que auxilia em algumas decisões por parte da atividade, dizendo o que é válido ou não, a partir das regras já citadas.

6.1 Objetivos da aprendizagem:

– aprimorar e integrar conhecimentos através das jogadas do percurso da Trilha Combinatória;

– promover a integração dos alunos, incentivando o espírito da competição saudável e respeitosa, sobre conhecimentos relacionados ao conteúdo de Análise Combinatória;

– avaliar, por meio das soluções dos problemas propostos na Trilha, se há indícios de que ocorreu aprendizagem.

6.2 Objetivo do jogo

No jogo, tem-se como objetivo, a aplicação de conhecimentos de Análise Combinatória, resolvendo problemas selecionados, em lançamento de dados.

6.3 Materiais do jogo:

– dois dados não viciados; cartões com desafios na forma de exercícios e problemas que contemplam o conteúdo de Análise Combinatória;

– peões, que podem ser objetos de marcação, como carrinhos de brinquedo, peças de um tabuleiro de damas ou de xadrez, entre outros.

6.4 Regras do jogo:

1ª Os participantes sortearão quem inicia o lançamento dos dados, sendo essa a equipe que sortear o maior número ao lançar um só dado. Os demais seguem jogando conforme a ordem decrescente dos números sorteados;

2ª a movimentação das peças, no percurso da trilha, dar-se-á segundo a combinação simples ($C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$) dos números dos dados lançados, sendo *n* o maior valor e *p* o menor valor, considerados os dois dados lançados;

3ª após a movimentação do peão, tendo ele parado em uma casa azul, vermelha ou amarela, a equipe resolve o desafio de uma carta, da que está acima na pilha de cartas, voltada para baixo, que tem como referência a cor da casa em que o peão parou;

4ª para avançar, e ter direito a jogar os dados na próxima rodada, a equipe deverá acertar a pergunta da carta; caso erre, devolverá a carta e ficará fora da próxima rodada;

5ª no fim da rodada da qual a equipe ficou fora, esta sorteará outra carta de mesma cor e, se acertar, retornará à trilha. Se errar novamente, fica válida novamente a 4ª regra;

6ª se a equipe cair na casa com cor preta, estará impedida de retirar qualquer carta e vai para a cadeia;

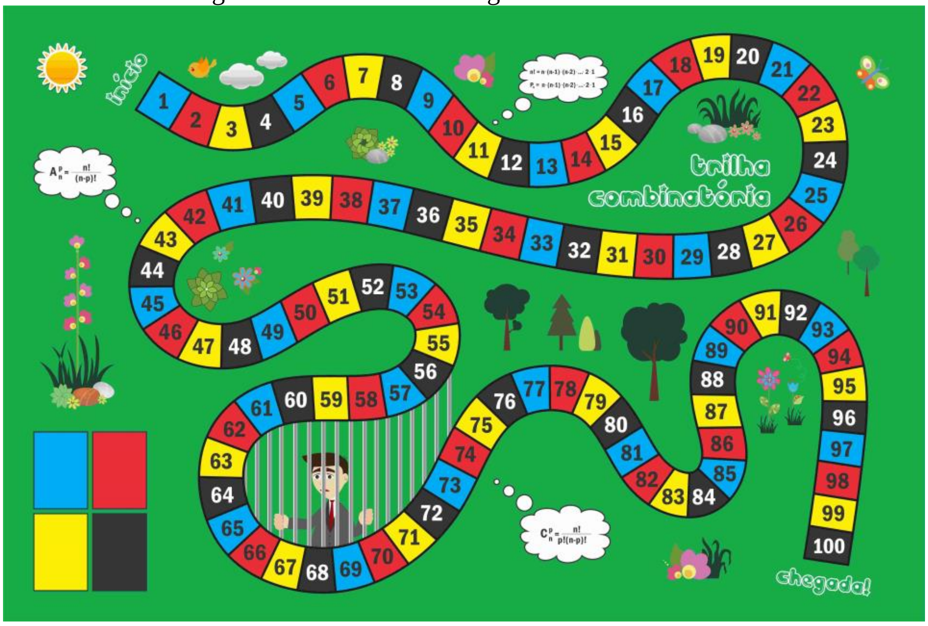
7ª para sair da cadeia, na jogada seguinte, a equipe deverá solucionar o problema da carta de cima do baralho preto;

7.1ª caso a equipe erre o problema da carta do baralho preto, volta para a cadeia e permanece presa por duas rodadas, e assim por diante, até solucionar o problema contido na carta;

8ª todos saem do marco *Início* e vence o jogo aquele que chegar, por primeiro, no marco *Chegada*.

6.5 Tabuleiro do jogo

Figura 15 – Tabuleiro do Jogo Trilha Combinatória



Fonte: Desenvolvido pelo autor (2016).

APÊNDICE F – ARQUIVO DO PRODUTO DA DISSERTAÇÃO

O produto desta dissertação está apresentado a partir da página seguinte, na forma como constará na página do Mestrado.

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTCA

MESTRADO PROFISSIONAL

PRODUTO DA DISSERTAÇÃO

JOGOS EM UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

LUIZ AMBROZI

ORIENTADORA: PROFª. DRª. ISOLDA GIANNI DE LIMA

CAXIAS DO SUL

2017

APRESENTAÇÃO

Caro(a) Professor(a):

O presente trabalho propõe uma sequência didática para o conteúdo de Análise Combinatória, que pode ser aplicada em turmas do Ensino Médio. A sequência didática proposta é o produto da dissertação de mestrado profissional intitulada de JOGOS EM UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA.

A intenção, ao compartilhar esta proposta de ensino, é colaborar com o que vem se caracterizando como uma necessidade na Educação Matemática, em relação ao ensino deste conteúdo, que é comum ter dificuldades para estudantes e, também, para muitos professores.

As atividades que compõem a sequência didática, nomeada de Dinâmica Combinatória, foram aplicadas em uma turma do 2° ano do Ensino Médio, visando à construção do conhecimento, com fundamentação do fazer e compreender (PIAGET, 1978), por interação com jogos de tabuleiro, atividades de raciocínio lógico e estudos orientados.

A estruturação Dinâmica Combinatória contempla o que Zabala (1998) afirma ser o mais favorável para se desenvolver a construção do conhecimento, e contém os itens a seguir:

1. apresentação de uma situação problemática;
2. problemas ou questões;
3. respostas intuitivas ou suposições;
4. fontes de informação;
5. busca de informação;
6. elaboração de conclusões;
7. generalizações;
8. exercícios de memorização;
9. prova ou exame;
10. avaliação.

Com este trabalho, busca-se preencher a necessidade de compreensão dos alunos, por meio do desenvolvimento dos conceitos, numa visão construtivista que, para Zabala (1998), é pessoal de cada ser humano e deve ser incentivado e moderado por alguém que busque o despertar de quem queira aprender. Na construção do conhecimento associada ao fazer e compreender (PIAGET, 1978), quando o aluno interage diretamente com os meios que lhe favorece a construção dos conceitos, estes acabam se tornando, de certo modo, compreendidos de maneira abrangente, concretizando-os em ação e em pensamento e não apenas em memorização.

A Dinâmica Combinatória é composta de sete etapas, com as quais busca-se explorar desde a problemática histórica até a formalização dos conceitos estudados em sala de aula. O desenvolvimento da sequência integra, também, atividades de avaliação, que servem de orientação para o professor analisar se estão sendo alcançados os objetivos de aprendizagem em cada etapa. Espera-se, com esta proposta, contribuir para uma aprendizagem com compreensão do conteúdo de Análise Combinatória, propiciando aos alunos a construção do conhecimento e não simplesmente um estudo pautado em memória e reprodução de modelos de resolução de problemas e de exercícios de práticas rotineiras.

DINÂMICA COMBINATÓRIA

A Dinâmica Combinatória está dividida em sete etapas, que buscam contemplar em sua aplicação desde a origem histórica da Análise Combinatória, com problemas que motivaram este estudo, até a formalização e aplicação das técnicas de contagem. A sequência inicia-se na Etapa 0, que traz o contexto histórico e alguns problemas motivadores para o estudo deste conteúdo, servindo também esta etapa para a organização das outras seis.

A Etapa 1 explora o raciocínio lógico, por meio de jogos pré-selecionados, disponíveis na internet, visando identificar e incentivar os alunos para a utilização de estratégias e para a resolução de problemas inspirados nos jogos.

A Etapa 2 contempla a aplicação do Jogo Quadrado, que possui, como uma de suas principais finalidades, desenvolver o conceito da Árvore de Possibilidades, embasando assim o Princípio Fundamental da Contagem, por meio de questionamentos sobre jogadas, a serem simuladas em pensamento, que poderiam ocorrer no jogo. Após os questionários, é proposto que o professor abra um espaço para discussões de dúvidas, e outras atividades extras para os alunos praticarem a aplicação do Princípio Fundamental da Contagem.

A Etapa 3 é desenvolvida a partir do Jogo Senha, que visa explorar o conceito das Permutações Simples e dos Arranjos Simples, por meio de questões elaboradas, a partir de possíveis situações do jogo. Também aqui é importante que sejam exploradas outras situações para os alunos praticarem as correspondentes técnicas, ou como muitos fazem aplicar o Princípio Fundamental da Contagem.

Na Etapa 4, busca-se propiciar a construção da ideia de agrupamento que se distingue apenas pela natureza dos elementos, ou seja, serão exploradas situações em que a ordem dos elementos não provoca diferença no grupo. O Jogo Bicolorido é utilizado para fazer a diferenciação de segmentos de reta que formam as arestas e as diagonais de um polígono. Os alunos buscam compreender aqui qual é o princípio básico para a aplicação da técnica de Combinação Simples na formação de agrupamentos.

A Etapa 5 é proposta com um estudo orientado, em que os alunos, atuando nas suas equipes, dedicam-se a um estudo da formalização dos conceitos e das técnicas de contagem. Os conceitos selecionados pelo professor são sorteados entre os grupos, para a realização do estudo e organização de material e dos componentes para uma apresentação de trabalhos, aberta a questionamentos, para os colegas da turma. Na preparação da apresentação, os alunos selecionam ou elaboram exercícios, para que os colegas possam resolver e discutir a aplicação de cada técnica de contagem.

A Etapa 6, última da Dinâmica Combinatória, busca, por meio do Jogo Trilha Combinatória, de autoria do pesquisador, desafiar os alunos a aplicarem os conceitos que estudaram, jogando e resolvendo os problemas. Esse Jogo pode servir para o professor como instrumento de avaliação da aprendizagem, pois as jogadas implicam solucionar problemas que envolvem as técnicas ou o princípio da contagem, numa trilha com percurso lúdico de desafios e competitividade.

Etapa 0 da Dinâmica Combinatória

No primeiro momento, visa-se fazer uma introdução ao trabalho a ser desenvolvido na Dinâmica Combinatória, com a qual serão explorados os conceitos fundamentais da Análise Combinatória. Com o contexto histórico e as questões desafiadoras, tem-se a intenção de animar e despertar a curiosidade e o interesse dos alunos para participarem, de maneira efetiva, do trabalho que será desenvolvido com eles. Nesse primeiro encontro, acontecem, também: a organização das equipes, a escolha de nomes e instruções sobre o preenchimento do diário de bordo para registros de cada equipe. A Etapa 0 acontece no tempo de uma aula, com duração prevista de uma hora, tendo o professor o papel de provocador e organizador das ações gerais e iniciais da sequência.

0.1 Objetivos:

– conhecer os pilares que fundamentam a Análise Combinatória por meio de fatos históricos, como estratégia para despertar o interesse pelo estudo;

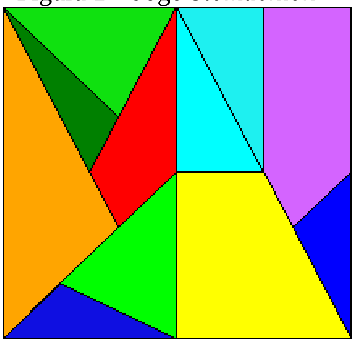
– resolver alguns desafios lógicos contextualizados, elaborados para sensibilizar sobre a importância do raciocínio, como estratégia de resolução de problemas neste conteúdo.

0.2 Descrição da Atividade

0.2.1 História

Vasquez e Noguti (2010)[24] acreditam que a Análise Combinatória tenha sua origem na Antiguidade, antes mesmo dos registros históricos, e foi, através do matemático grego Arquimedes, que viveu em Siracusa, na Sicília, no século III a.C., que se passou a ter conhecimento acerca dos problemas de contagem. Ele propôs um problema de combinação de peças em um tabuleiro, que ficou conhecido como *Stomachion* (Figura 1). Embora não se conheça ao certo o significado dessa palavra, sabe-se que tem a mesma origem da palavra estômago. Não há registros seguros, também, de que, realmente, tenha sido Arquimedes quem inventou o jogo ou se ele apenas explorou o problema proposto, em algum manuscrito mais antigo.

Figura 1 – Jogo *Stomachion* [25]



Fonte: Pinterest (2016).

Problema proposto no jogo: ***Saber de quantas formas suas partes menores poderiam formar o mesmo quadrado.***

A resposta, que é 17.152 formas, foi calculada e comprovada em 2004 por ***Reviel Netz,*** um estudioso deste jogo, que propôs um problema combinatório a um grupo de matemáticos. Netz buscou guiá-los neste estudo e, com auxílio de alguns computadores,

[24]VASQUEZ, Cristina Maria Roque; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner. *Análise combinatória*: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. Anais do VIII ENEM, Pernambuco, 2004.
[25] Disponível em: <http://4umi.com/play/stomachion/square.php?show=68&m=s>. Acesso em: 31 set. 2016.

conseguiram comprovar a resposta, o que envolveu um tempo de seis semanas de trabalho.[26] Seu trabalho foi publicado no mesmo ano da comprovação da solução do problema, com o título *Towards a Reconstruction of Archimedes*. [27]

Outro problema, segundo Vasquez e Noguti (2010), que envolvia um raciocínio apurado e conceitos de memorização, pode ser encontrado no papiro egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.), conhecido como problema 79, que segue:

"Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete *hekat*[28] de grãos; quantos itens têm ao todo?"

Com a leitura, percebe tratar-se de uma progressão geométrica de razão 7 e, no caso, a resposta é 19.607.

Apesar de problemas de contagem serem encontrados desde o século III a.C., a Teoria Combinatória só surgiu no final do século XVI com a necessidade de se calcular possibilidades em jogos de azar. A Análise Combinatória só seria formalmente escrita em meados do século XVII e início do século XVIII, pelos matemáticos Pascal (1654 e 1665), Leibniz (em 1666), Kircher (em 1669), Wallis (em 1673) e Bessy (em 1693). Esse estudo deu origem à Teoria das Probabilidades. Outros pesquisadores matemáticos tiveram grande influência no desenvolvimento e na formalização desta parte da Matemática, conforme está apresentado na Figura 2.

Figura 2 – Matemáticos criadores da Análise Combinatória

Niccollo Fontana	***Pierre de Fermat***	***Blaise Pascal***
		
(1499 - 1557)	**(1601 - 1665*)***	***(*1623 - 1662*)***

Fonte: Elaboração do autor (2016).

[26] Disponível em: <http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT669583-2680,00.html>. Acesso em: 31 out. 2016.

[27] Disponível em: <http://turing.une.edu.au/~ebowen/Stomachion/NAW2004SCIAMVS.pdf>. Acesso em: 31 set. 2016.

[28] *Hekat* é uma unidade de medida de grãos utilizada no Egito antigo que equivale a 4,8 litros.

0.2.2 Primeiros problemas para despertar a curiosidade

1) Se Pedro, ao resolver sair para uma festa, para escolher que roupa vai usar, ele separa duas calças e três camisas, que considera próprias para a ocasião, de quantas maneiras diferentes você pode se vestir, escolhendo três camisas e duas calças?

A resposta é 2.3 = 6 maneiras e pode ser calculada com raciocínios variados.

2) Acontece, algumas vezes, de caixas eletrônicos conterem apenas notas de determinados valores. Imagine um saque no valor de R$ 100,00, num caixa eletrônico só com notas de R$ 5,00 e R$ 10,00. De quantas formas diferentes a máquina pode disponibilizar o dinheiro?

A Tabela 1 mostra a solução do problema.

Tabela 1 – Solução do problema

Casos	R$ 10	R$ 5,00
1°	1	18
2°	2	16
3°	3	14
4°	4	12
5°	5	10
°	°	°
°	°	°
°	°	°
10°	10	Ñ
11°	Ñ	20

Fonte: Elaboração do autor.

3) Haverá um sorteio com dois prêmios, dos tipos mostrados na Figura 3, de um carro, como primeiro prêmio e de uma bicicleta como segundo, a ser realizado com 10 participantes. De quantas maneiras distintas essas pessoas podem ganhar este prêmio, sendo que a pessoa que já ganhou um prêmio não pode concorrer a outro prêmio?

Figura 3 – Prêmios do sorteio

Fonte: Sites Google (2016)

Possível solução: 10x9 = 90 maneiras

4) O setor de emergência de um hospital conta, para plantões noturnos, com três pediatras, quatro clínicos gerais e cinco enfermeiros. As equipes de plantão devem ser constituídas por um pediatra, um clínico geral e dois enfermeiros.

a) Quantos pares distintos de enfermeiros podem ser formados?

O problema indica uma combinação dos cinco enfermeiros em grupos de dois. Assim, pode-se ter $C_{5,2} = 10$ duplas possíveis de enfermeiros.

b) Quantas equipes de plantão distintas podem ser formadas?

Temos: três pediatras, quatro clínicos e cinco enfermeiros.

Cada equipe deve ter: um pediatra, um clínico e dois enfermeiros.

Pelo princípio da contagem, cada equipe tem uma de 3 pediatras, uma de 4 clínicos e uma de 10 duplas de enfermeiros, resultando em $3 \times 4 \times C_{5,2} = 3 \times 4 \times 10 = 120$ equipes.

5) Segundo a reportagem extraída da revista *Super Abril* ano de 2004:

Qual é a lógica das letras nas placas dos carros?[29]

A ordem das letras e dos números tem a ver com o lugar em que o veículo é emplacado. Esse esquema começou a ser adotado em fevereiro de 1990, quando as placas amarelas (com duas letras e quatro números) foram substituídas pelas cinza (com três letras). Cada estado tem suas combinações próprias (veja-se Quadro 1), distribuídas pela frota local em ordem cronológica de licenciamento ou emplacamento. É possível encontrar placas com cidades e combinações "trocadas". Isso acontece porque, se um veículo é emplacado originariamente em um lugar e o endereço do proprietário muda, troca-se apenas a indicação de cidade e estado. Ou seja, um carro licenciado em Camaçari, Bahia, com a combinação JOL

[29] Disponível em: <http://super.abril.com.br/comportamento/qual-e-a-logica-das-letras-nas-placas-dos-carros>. Acesso em: 13 set. 2016.

pode perfeitamente estar rodando com a indicação “São Paulo, SP”. Isso porque o primeiro emplacamento ocorreu na Bahia. É possível escolher as letras e os números da chapa do automóvel. Assim, mulheres chamadas Beatriz podem encomendar a combinação BIA e donos de BMW ostentar placas BMW. Mas também não é a festa da uva: em São Paulo, por exemplo, são proibidas combinações que formem palavras consideradas obscenas ou constrangedoras, como CUS, GAY e CKH.

Quadro 1 – Placas de automóveis [30]

Fonte: *Site* de Carrosnors (2016)

Analisando as placas do Quadro 1, pode-se perceber que todas são compostas por 3 letras e 4 algarismos numéricos. Sabendo que nosso alfabeto é composto por 26 letras e nosso sistema de algarismos numéricos é composto pelos números inteiros, que variam de 0 a 9, qual é o número total de placas de automóveis que se pode formar, como as placas do Quadro?

$26.\ 26.\ 26.\ 10.\ 10.\ 10.\ 10 = 26^3.10^4$

Através destes problemas, será introduzido o tema de estudo, buscando despertar a curiosidade dos alunos; pode-se observar as formas sugeridas de soluções, visando a pensar com muita atenção, propor e testar hipóteses são componentes do raciocínio matemático imprescindíveis para obter as respostas.

[30] Figura retirada em 13/09/2016, no *site*: <http://www.carrosnors.com.br/inicio-de-placas-de-veiculos-por-estado/>.

0.3 Formação das equipes e combinações para a Dinâmica Combinatória

– Formar sete equipes e definir nomes: (exemplo Equipe Alfa de integrantes Alfa 1, Alfa 2 e Alfa 3).

– Combinar quem será o relator, em cada atividade, e responsável pelos registros no diário da equipe.

– Para finalizar cada etapa, os alunos realizarão uma tarefa extraclasse, como tema de casa, para a resolução de exercícios que constam no “livro integrado”, que é a bibliografia proposta pela escola com forte recomendação de ser utilizado.

– No início da aula que segue a cada tema de casa, serão sorteados um exercício e um componente de cada equipe, que deve entregar o exercício para a verificação da realização da tarefa solicitada.

Etapa 1 da Dinâmica Combinatória

A primeira etapa acontece com a realização de três jogos acessíveis pela internet. Assim, os alunos serão encaminhados ao laboratório de informática da escola, onde explorarão três jogos virtuais que envolvem habilidades lógicas, para se chegar à solução dos desafios propostos. Esta primeira etapa terá a duração de uma hora, para a execução dos três jogos e, no final de cada um, para o aluno preencher um questionário, respondendo sobre a forma que utilizou para solucionar os desafios de cada jogo. Nos minutos finais, será proposto um novo desafio; esse na forma de um problema sobre o princípio da contagem, para o qual o aluno deverá apresentar uma solução, na forma de uma breve descrição do que pensou e realizou. O professor participará, organizando e administrando o tempo da aula.

1.1 Objetivos de aprendizagem:

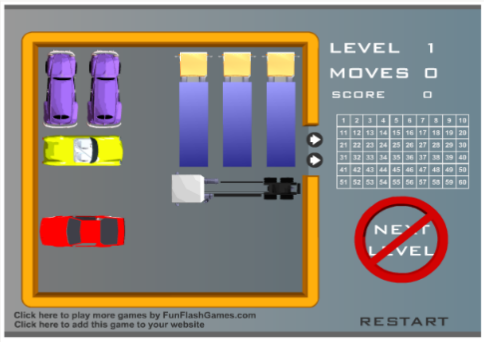
– criar estratégias, transformando-as em possibilidades para tomar decisões, buscando solucionar de maneira eficaz situações que envolvam problemas de raciocínio lógico;

– identificar e explorar características específicas do jogo, como forma de criar habilidade para solucionar problemas lógicos.

1.2 Descrição do jogo

Jogo 1 – *Yellow Out*: O jogo do estacionamento, onde há um determinado carro no estacionamento que deve ser retirado, com o menor número possível de movimentos.

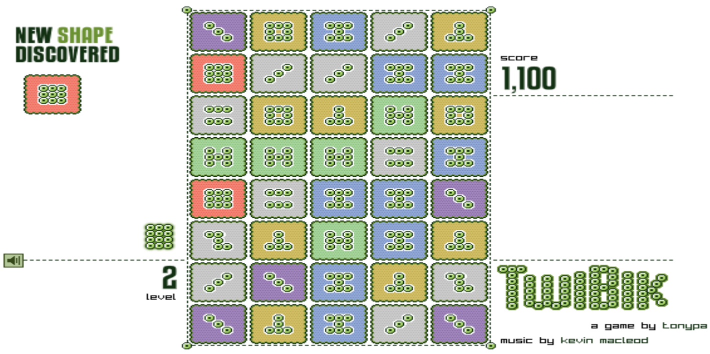
Figura 4 – *Layout* do Jogo *Yellow Out* [31]



Fonte: *Site* do Terra (2016).

Jogo 2 – *Twibik*: Desafio de atenção e raciocínio rápido, no qual deve-se buscar associação entre as peças que vão sendo disponibilizadas em lugar daquelas que são retiradas.

Figura 5 – *Layout* do Jogo *Twibik* [32]



Fonte: *Site* do Terra (2016).

Jogo 3 – Pulo do Sapo: Um jogo de atenção no qual é preciso criar uma estratégia para deslocar um grupo de três sapos para a margem oposta daquela onde se encontram.

---

[31] Disponível em: <http://www.terra.com.br/webgames/yellowout/yellowout.htm>. Acesso em: 15 ago. 2016.

Figura 6 – *Layout* do Jogo Pulo do Sapo [33]

Fonte: *Site* de Jogos (2016).

Os alunos, no decorrer dos jogos, devem preencher uma tabela de registro, que segue em anexo a este documento, na qual buscam analisar pontuações, tempo de resolução dos jogos, nível de desempenho do aluno em relação ao jogo e número de soluções, conforme o jogo disputado. O objetivo dos alunos é preencher a tabela e está ligado à verificação do desempenho dos mesmos e servirá como subsídio de análise para a dissertação de Mestrado.

1.3 Objetivos do jogo

Jogo 1: O objetivo do jogo *Yellow Out* é retirar o carro amarelo do estacionamento, efetuando a menor quantidade de movimentos possível. Para isso, é preciso mover outros carros que estão bloqueando o caminho. Estes, algumas vezes, também têm a passagem bloqueada por outros carros do estacionamento.

Jogo 2: No *Twibik*, o objetivo é eliminar a maior quantidade de peças. Para isso, deve-se clicar nas peças idênticas, que se apresentam numa mesma linha ou coluna. Como dificultador do desafio, podem ocorrer situações em que não há opções, decorrendo, então, duas possibilidades: uma, a de remover uma peça aleatória ou, outra, a de embaralhar as peças até surgirem novas opções.

Jogo 3: No Pulo do Sapo, o propósito é transferir três sapos para a margem oposta de onde se encontram. Neste jogo, é acionado, principalmente, o raciocínio lógico e é importante tramar uma estratégia, como capacidade de solucionar problemas, por meio de atenção, senso de direção, planejamento, organização e coordenação motora.

[32] Disponível em: <http://www.terra.com.br/webgames/yellowout/yellowout.htm>. Acesso em: 15 ago. 2016.
[33] Disponível em: <http://jogos.testeqi.com.br/o-pulo-do-sapo/>. Acesso em: 15 ago. 2016.

1.4 Orientações para os jogadores de como jogar

1.4.1 Jogo *Yellow Out*

Você pode mover os carros tantas vezes quantas quiser e em qualquer direção.

Como jogar:

1. espere o jogo carregar e clique em "Play";
2. escolha o nível em que deseja começar o jogo e clique em "Start Game";
3. clique no carro que deseja mover e arraste-o até a posição escolhida;
4. cada etapa termina quando o carro amarelo parar em cima das setas que indicam a saída.

1.4.2 Jogo *Twibik*

Não existem regras especiais, basta encontrar e clicar em duas peças iguais.

Como jogar:

1. espere o jogo carregar e clique em "Play Game";
2. clique em "Normal" para jogar tranquilamente, sem se preocupar com o tempo;
3. clique em "Action" para jogar contra o tempo (mais emocionante hehehe);
4. quando o jogo carregar, clique em pares de peças idênticas que situam numa mesma linha ou mesma coluna. Todas as peças entre elas irão ser removidas do jogo.

1.4.3 Jogo Pulo do Sapo

Não existem regras especiais a serem descritas, somente devemos passar os sapos machos para o lado direito e os sapos fêmeas para o lado esquerdo, podendo atravessar somente um de cada vez, pois apenas uma pedra está livre para o pulo. Não podemos voltar a jogada após ser executada, podemos apenas reiniciar um novo jogo, finalizando assim a jogada anterior.

Como jogar:

Utilize o *mouse*, clique no sapo para ele pular.

1.4.4 Atividade pós-jogo

Jeniffer vai participar da promoção de uma loja de roupas que está oferecendo um vale-compras de R$ 1.000,00 para o participante que apresentar por primeiro o maior número de combinações distintas, ao menos em uma peça, com o kit de roupas escolhido pela loja. O kit é composto de: seis blusas, quatro saias e dois pares de sapato. Quantas são todas as maneiras distintas com as quais Jeniffer deverá combinar as peças do vestuário, para ter chance de concorrer ao prêmio?

Etapa 2 da Dinâmica Combinatória

Esta etapa consiste na realização do Jogo do Quadrado,[34] que foi desenvolvido pelos professores e pesquisadores Josiane de Carvalho Rezende, José Marcos Lopes e João Vitor Teodoro, com o intuito de explorar o raciocínio combinatório e o cálculo de probabilidades. A atividade acontece em equipes de três componentes, definidos por sorteio pelo professor, que irá auxiliar o desenvolvimento das atividades que requerem duas horas. O que se espera com estas atividades é o desenvolvimento da ideia do Princípio Fundamental da Contagem, que serve como princípio introdutório, para resolver problemas de Análise Combinatória. Os alunos terão a oportunidade de explorar o jogo e avaliar se o mesmo é ou não de azar, respondendo ao questionário pós-jogo.

2.1 Objetivos de aprendizagem:

– com esta atividade visa-se ao aprimoramento de atitudes de cooperativismo, partilha e respeito, estabelecendo relações de boa convivência com os integrantes da equipe;

– com o jogo, busca-se propiciar que alunos levantem hipóteses e planejem estratégias de jogadas, para construírem uma árvore de possibilidades, desenvolvendo, assim, o pensamento multiplicativo;

– almeja-se desenvolver o cálculo mental, como forma de encontrar uma solução rápida para os problemas apresentados na atividade.

2.2 Descrição do jogo

No Jogo do Quadrado, utiliza-se o mesmo tabuleiro do Jogo da Velha, e os movimentos de captura de peças possuem algumas semelhanças com os das peças peão e torre no Jogo de Xadrez.

MATERIAL: Tabuleiro com 3x3 casas e duas peças distintas, uma para cada jogador; usa-se este modelo para marcar a posição de cada jogada.

Figura7 – Tabuleiro utilizado no Jogo do Quadrado

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fonte: Elaboração do autor.

2.3 Objetivos do jogo:

– eliminar a peça ou chegar ao ponto de partida de seu adversário, andando apenas uma casa, na horizontal ou vertical, em cada jogada;
– servir como instrumento pedagógico para auxiliar na resolução de problemas combinatórios básicos.

2.4 Orientações para jogar

INÍCIO DO JOGO: O jogo é disputado por dois jogadores, cada qual tem apenas uma peça. O Jogador 1 coloca a sua peça na extremidade esquerda inferior do tabuleiro, e o Jogador 2 coloca a sua peça na extremidade direita superior do tabuleiro. O jogo inicia com o Jogador 1, que é definido por sorteio.

[34] Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxii_cnmac/pdf/372.pdf>. Acesso: 5 out. 2016.

REGRAS:

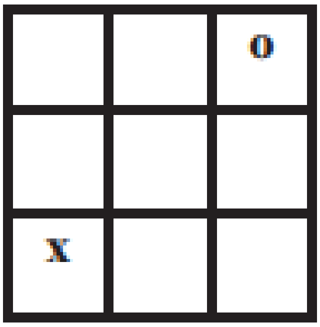
1ª) não se pode voltar ao ponto de partida, mesmo podendo voltar para trás;

2ª) é permitida a eliminação da peça, somente quando esta estiver em uma diagonal;

3ª) a eliminação da peça adversária, tal como a ocupação do seu ponto de partida, é obrigatória quando surgir a ocasião;

4ª) o número máximo de movimentos permitido para cada peça é de oito. Se, até o final do oitavo movimento, o jogo não finalizar, define-se o empate.

Figura 8 – Posição inicial do Jogo do Quadrado



Fonte: Elaboração do autor.

2.5 Atividade pós-jogo

Após a realização do jogo, segue-se com um conjunto de problemas, com o objetivo de desafiar os estudantes a operarem com as ideias básicas de problemas de contagem e a construírem, para cada situação, a árvore das possibilidades de cada jogada. Assim, serão formulados alguns problemas sobre o Jogo do Quadrado, em que aparecem essas idéias, quando ao serem resolvidos. Dessa forma, os problemas serão utilizados para ensinar matemática, o que é diferente de ensinar matemática para, depois, resolver problemas. Os alunos deverão conjecturar sobre possíveis soluções em linguagem própria. No final, os conceitos matemáticos aprendidos serão sistematizados pelos alunos em linguagem própria da matemática, e esses receberão uma lista extra de exercícios e problemas, selecionados do livro integrado, para serem realizados em casa e entregues na aula seguinte a do Jogo do Quadrado.

Questionamentos:

1) Será que o Jogador 1 sempre vence? Por quê?

2) É possível ocorrer empate? Por quê? 3) O jogo é de azar ou de estratégia? Se, ao invés de oito, aumentarmos o número de jogadas para nove, quais os possíveis resultados do jogo?

Problemas:

Um tabuleiro numerado de 1 até 9 pode ser utilizado, com o intuito de facilitar o registro das jogadas, como está exemplificado na Figura 9. Com isso, resolva os seguintes problemas:

Figura 9 – Tabuleiro com numeração

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fonte: Elaboração do autor.

Problema 1. Suponha que, após o quarto movimento, a peça do Jogador 1 esteja no quadrado 1, a do Jogador 2 esteja no quadrado 9 e que, neste momento, seja a vez do Jogador 1 efetuar o seu movimento. Para garantir a vitória, esse jogador deve posicionar sua peça em qual quadrado?

Problema 2. Após o segundo movimento, o tabuleiro encontra-se conforme está mostrado na Figura 10.

Figura 10 – Posição das peças após a segunda jogada

	o	
	x	

Fonte: Elaboração do autor.

Que número mínimo de movimentos finaliza o jogo? Quem vence o jogador “x”?

Problema 3. Em seu primeiro movimento, o Jogador 1 pode escolher o quadrado 4 ou o quadrado 8. Se esse jogador escolheu o quadrado 4, então o Jogador 2 poderá vencer o jogo? Justifique sua resposta.

Problema 4. Existe uma estratégia vencedora para o Jogador 1? Em caso afirmativo, descreva-a exemplificando.

Problema 5. Quantos e quais são os resultados possíveis do Jogo do Quadrado? Tente representar todas essas jogadas.

Etapa 3 da Dinâmica Combinatória

Na terceira etapa da Dinâmica Combinatória, busca-se explorar um novo jogo, conhecido como Jogo Senha, no qual serão desenvolvidos alguns conceitos que embasam as técnicas de contagem: permutação e arranjo. Essa etapa acontece no decorrer de duas horas, durante as quais os alunos trabalharão em equipes, organizadas pelo professor, que também terá o papel de esclarecer dúvidas e auxiliar os alunos, durante a rotina de sala de aula.

3.1 Objetivos de aprendizagem:

– explorar e associar as atividades do jogo com conceitos de técnicas, como as de arranjo e de permutação simples;
– programar estratégias para a resolução dos problemas propostos no jogo;
– tomar decisões adequadas, por meio da análise antecipada de possíveis jogadas;
– chegar a conclusões e a soluções de problemas trabalhando em equipe.

3.2 Descrição do jogo

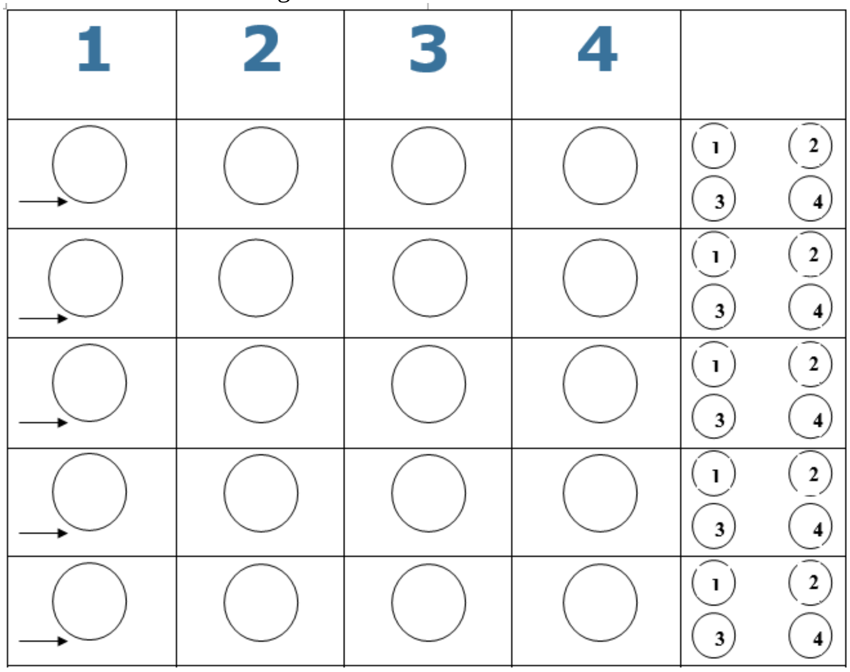
O Jogo Sena foi desenvolvido em 1970 pelo israelense Mordechai Meirovitz e o objetivo com as jogadas é descobrir a sequência que compõe a senha de quatro cores, repetidas ou não, dentre seis cores distintas.

Figura11 – Tabuleiro original do jogo [35]

Fonte: Wikipédia (2016).

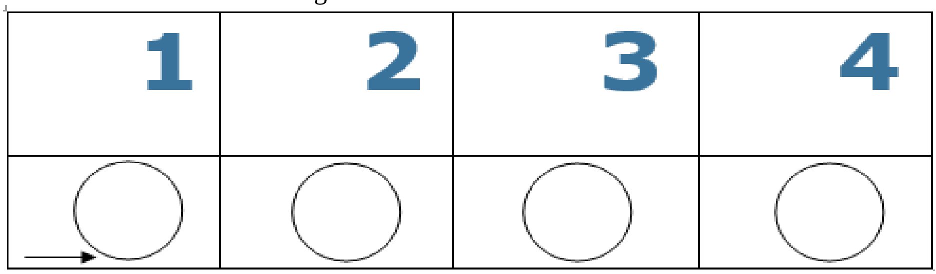
O jogo será adaptado, para a aplicação em sala de aula, com o uso de cartelas (Figuras 12 e 13) e será utilizado lápis de cor no lugar das peças coloridas do jogo.

Figura 12 – Cartela do desafiado



Fonte: Elaboração do autor.

Figura 13 – Cartela do desafiante



Fonte: Elaboração do autor.

[35] Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Mastermind>. Acesso em: 5 out. 2016.

3.3 Objetivo do jogo

No jogo, participam dois jogadores, o desafiante e o desafiado, este com o objetivo de descobrir a senha proposta pelo desafiador na sua cartela, que a mantém voltada para baixo. Em cada fileira, uma após outra, compondo jogadas sucessivas, o desafiado propõe uma sequência de quatro cores, repetidas ou não. O desafiante pinta ao lado, na cartela do desafiado, círculos com a cor preta, se estiverem corretas a cor e a posição; deixa círculos em branco, se há cores corretas, mas em posições erradas, e marca “x” em tantos círculos quantas cores não correspondem às da senha. O desafiado tem nove oportunidades (até preencher a nona fileira da cartela), para adivinhar a senha, ou, se tal não ocorrer, o desafiador revela a senha, mostrando a sua cartela, que mantinha voltada para baixo.

3.4 Orientações para jogar:

– definir desafiante e desafiado;
– o desafiante dispõe de oito cores, exceto branco e preto;
– o desafiante forma uma senha de corres, pintando sua cartela, no sentido da seta;
– o desafiado tenta adivinhar a senha do desafiante, pintando uma sequência de cores na primeira fileira;
– ao lado da fileira de cada jogada, o desafiador pinta um círculo preto, a cada cor e correspondente à posição correta; deixa um círculo em branco a cada cor correta, mas em posição errada, e marca um “x” a cada cor que não pertence à senha. A ordem dos círculos pretos, brancos ou com “x” não necessariamente é a da senha;
– o desafiado tem nove tentativas para descobrir a senha. Caso não acerte a senha, o mesmo contabilizará nove pontos;
– numa segunda rodada, invertem-se os papéis de desafiante e desafiado, vencendo o jogo aquele que acertar a senha com menor número de tentativas (fileiras pintadas).

3.5 Atividade pós-jogo

Ao término do jogo, os alunos, sentados em grupo, responderão a um questionário, com situações ligadas ao jogo, às quais devem associar conceitos relacionados com arranjos simples ou permutações simples. Após responder o Questionário 2, os mesmos irão realizar alguns exercícios extra, que serão selecionados de seu livro integrado.

Questionário 2

1) Utilizando três cores, para preencher três espaços, sem repetição, quantas senhas diferentes podemos formar?

2) Utilizando quatro cores, para preencher quatro espaços de uma senha, sem repetição, quantas senhas diferentes é possível formar?

3) E, se pudéssemos escolher entre cinco cores, quantas senhas diferentes é possível formar?

4) No caso do jogo, onde formaram senhas escolhendo entre seis cores, qual é o número total de senhas possíveis repetindo as cores? Caso não haja repetição das cores, qual é o número total de senhas que podemos formar?

5) Usando seis cores e, fixando a primeira cor, por exemplo amarela, quantas senhas diferentes podemos formar?

6) Se pudermos escolher entre seis cores para quatro espaços, com repetição, quantas senhas diferentes é possível formar?

7) Dispondo de quatro cores distintas, de quantos modos diferentes podemos formar uma senha, sendo que as cores adjacentes não podem ser iguais?

Etapa 4 da Dinâmica Combinatória

Nesta etapa da Dinâmica Combinatória, serão explorados agrupamentos que se diferenciam pela sua natureza, ou seja, a atividade será desenvolvida visando à introdução ao conceito da técnica de contagem chamada de combinação simples. Para explorar este conceito, será utilizado o Jogo Bicolorido, criado, inicialmente, para explorar conceitos geométricos e que foi readaptado para explorar, também, conceitos combinatórios. A atividade terá a duração média de uma hora e será desenvolvida em equipes. O professor será o mediador das atividades, podendo auxiliar o desenvolvimento dos jogos e do questionário pós-jogo. No final da atividade, o mesmo poderá abrir um debate sobre os conceitos estudados.

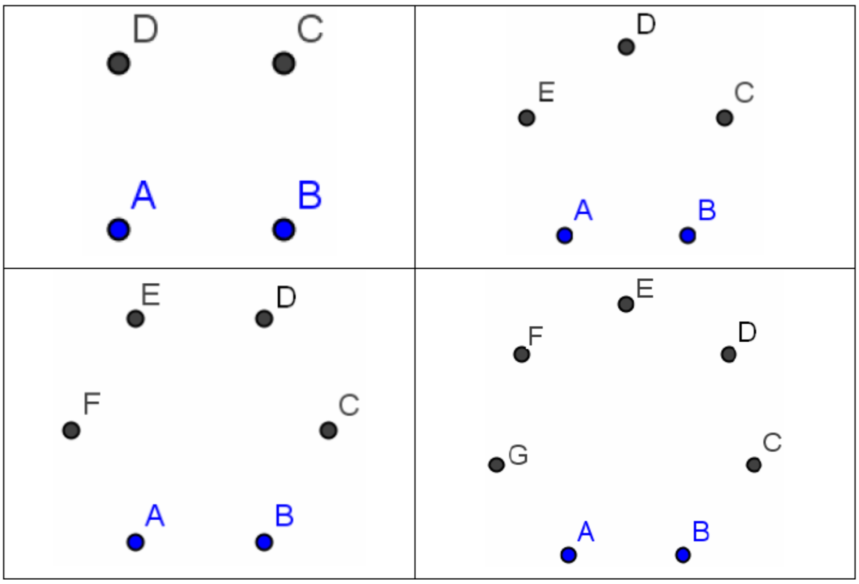
4.1 Objetivos de aprendizagem:

– explorar o conceito de combinações simples associado à construção de segmentos dispostos através dos vértices de um polígono já dado;
– desenvolver métodos de resolução com estratégias que propiciem a construção do pensamento combinatório.

4.2 Descrição do jogo

O Jogo Bicolorido original foi proposto na obra de Gardner (1985) e, posteriormente, Borin (1996) utilizou-o com o intuito de introduzir e desenvolver conceitos de ceviana, concorrência de cevianas e pontos notáveis de um triângulo, que são temas importantes da Geometria Euclidiana para o Ensino Fundamental. Porém, o jogo utilizado para esta atividade advém de uma pesquisa realizada por Carla Soares Silva, em 2010, que o adaptou para explorar conceitos de combinação simples, numa configuração de tabuleiro, como está mostrado na Figura 14, que segue:

Figura 14 – Tabuleiro do Jogo Bicolorido



Fonte: Elaboração do autor.

4.3 Objetivo do jogo

No jogo, o objetivo é formar triângulos monocromáticos, quer dizer, com vértices de mesma cor, com os pontos dispostos no tabuleiro da Figura 14. O primeiro que conseguir formar um triângulo vence o jogo.

4.4 Orientações para jogar

4.4.1 *Materiais:* canetas hidrocor ou lápis de colorir (com, no mínimo, duas cores)

4.4.2 *Regras do jogo:*

– define-se quem inicia o jogo de forma amigável, como, por exemplo, num “par” ou “ímpar”;

– todas as duplas iniciam o jogo no tabuleiro de quatro pontos, passando, gradativamente, para outros, com mais número de pontos;

– os jogadores, cada qual com uma caneta hidrocor, ou lápis de colorir, de cores distintas, devem construir, sucessiva e alternadamente, segmentos de reta com extremos nos pontos do tabuleiro. Esses segmentos podem ser lados ou diagonais do polígono representado, no tabuleiro, por seus vértices;

– em cada etapa, será declarado vencedor aquele que fechar, por primeiro, um triângulo monocromático com a cor de sua caneta.

4.5 Atividade pós-jogo

Após o jogo, será entregue aos alunos um conjunto de perguntas, com as quais busca-se explorar conceitos de combinação, associados a possíveis construções geométricas relacionadas ao jogo no tabuleiro. Após responderem as perguntas, os alunos desenvolverão algumas atividades, selecionadas no seu livro integrado.

Perguntas

Responda as perguntas que seguem, considerando os pontos citados, como pontos distintos de uma mesma circunferência.

a) Partindo de quatro pontos não colineares, A, B, C e D, quantos segmentos de reta podemos formar?

b) Com cinco pontos não colineares, A, B, C, D e E, quantos segmentos podemos formar?

c) Com seis pontos não colineares, A, B, C, D, E e F, quantos segmentos podemos formar?

d) E, com sete pontos não colineares, A, B, C, D, E, F e G, quantos segmentos podemos formar?

e) Seguindo essa mesma lógica, quantos segmentos podemos formar com oito, nove e com 10 pontos não colineares?

f) E com *n* pontos não colineares, quantos segmentos podemos formar?

g) Dos segmentos formados no item a, quantos são lados e quantos são diagonais do quadrilátero ABCD?

h) Em *b*, quantos são lados e quantos são diagonais do pentágono ABCDE?

i) Quantos segmentos são lados e quantos são diagonais do hexágono ABCDEF?

j) E os segmentos formados com sete pontos, quantos são lados e quantos são diagonais do heptágono ABCDEFG?

k) E quantos triângulos podemos formar, em cada situação informada nos itens A, B, C, D, E e F?

l) (Desafio) Para um polígono regular de *n* lados, quantos triângulos internos ao polígono conseguimos formar?

Etapa 5 da Dinâmica Combinatória

Nesta etapa, os alunos, organizados em grupos, realizarão a fundamentação das técnicas de contagem, aprofundando seus conhecimentos em fontes de referência, como livros e materiais disponíveis na internet, sobre conceitos que fundamentam as técnicas de contagem, que estruturam a Análise Combinatória. Os resultados da pesquisa serão socializados, em sala de aula, mediante apresentação de *slides*, com os demais colegas. Esta etapa terá a duração de até 6 horas-aula, para a realização de pesquisas, estudos, organização, apresentações em sala. Nessa aula, o professor tem papel de grande importância, pois deverá auxiliar os alunos com dúvidas referentes aos procedimentos operatórios, indicando quais fontes de pesquisa deste estudo são confiáveis.

5.1 Objetivos de aprendizagem:

– conhecer os conceitos que fundamentam as técnicas de contagem, caracterizando-os, segundo os aspectos que os identificam e os diferenciam;

– desenvolver habilidades relacionadas a uma atividade de pesquisa e ao trabalho em equipe, no decorrer da construção e apresentação de um objeto de estudo, que servirá de base teórica para estudos posteriores;

– reconhecer aplicações dos conceitos pesquisados em diversos contextos ou na resolução de problemas, por meio de ideias e conceitos expressos, ou não, por fórmulas que formalizam as técnicas de contagem;

– construir habilidades de autonomia, visando a desenvolver a aprendizagem por meio da pesquisa.

5.2 Descrição das atividades

No desenvolvimento desta etapa, os alunos aprofundarão conhecimentos relacionados com conceitos da Análise Combinatória.

Os estudantes da classe serão organizados em sete equipes, para pesquisar sobre os seguintes temas:

1. definição do conceito de fatorial;
2. equações envolvendo o uso do fatorial;
3. permutações simples;
4. permutação com repetição;
5. arranjos simples;
6. combinações simples;
7. permutações circulares.

As equipes desenvolverão e apresentarão a pesquisa, orientados pelo professor, em sala de aula, no laboratório de informática e na biblioteca, seguindo um roteiro de pesquisa elaborado pelo professor.

5.3 Roteiro para estudos:

1) estudar os conceitos em, no mínimo, três ou mais fontes;
2) procurar e explorar outros materiais de apoio, como video-aulas ou *softwares*, por exemplo, como apoio para compreender e explicar os conceitos;
3) esclarecer, com o professor, todas as dúvidas que o grupo não conseguir resolver;
4) elaborar um texto explicativo dos conceitos, com exemplos e exercícios de aplicação;
5) selecionar e preparar três exercícios de aplicação dos conceitos, para apresentar e resolver com os colegas, em sala de aula;
6) apresentar as referências bibliográficas, adequadamente;
7) elaborar o texto escrito nos moldes do Manual da Família do Colégio;
8) preparar, para a apresentação do trabalho aos colegas, com, no máximo, oito *slides*, que servirão de base teórica na apresentação.

5.4 Apresentações dos trabalhos

Os trabalhos serão apresentados, em sala de aula, tendo cada grupo 20 minutos para apresentar as ideias e os conceitos principais, em linguagem dissertativa, representações geométricas, explicações e correspondentes conceitos formalizados em linguagem matemática.

5.5 Avaliação

Os trabalhos serão avaliados segundo os critérios: clareza e criatividade na apresentação dos conceitos, conhecimento do conteúdo, diversidade dos tipos e graus de dificuldade das atividades propostas aos colegas, organização e capricho na elaboração do trabalho escrito, redação em linguagem correta, respeito aos colegas nas apresentações, participação nas atividades que estarão sendo propostas pelos grupos.

Para a definição da nota de desempenho no trabalho, segundo os critérios de avaliação, será considerada a seguinte distribuição de um total de 10 pontos:

– Trabalho escrito: 4 pontos

– Apresentação: 6 pontos

– Falta de respeito ou de participação na apresentação de colegas: menos 2 pontos.

Etapa 6 da Dinâmica Combinatória

Esta é a etapa da finalização do trabalho e, como atividade em sala de aula, os alunos estarão envolvidos numa disputa, com diversão e conhecimento, na realização do Jogo Trilha Combinatória [36], planejado para uma aplicação descontraída dos conhecimentos relacionados ao conteúdo de Análise Combinatória. Tal atividade tem previsão de duração de uma hora e será desenvolvida por meio de desafio para uma disputa entre as equipes que vivenciaram a Dinâmica Combinatória. O professor deve ser o mediador do funcionamento do jogo, auxiliando na interpretação das regras e nas dúvidas quanto à solução das atividades propostas pelo jogo; pode-se dizer que ele será uma espécie de juiz que auxiliaria em algumas decisões por parte da atividade, dizendo o que é válido ou não, a partir das regras já citadas.

6.1 Objetivos da aprendizagem:

– aprimorar e integrar conhecimentos, através das jogadas do percurso da Trilha Combinatória;

– promover a integração dos alunos, incentivando o espírito da competição saudável e respeitosa, sobre conhecimentos relacionados ao conteúdo de Análise Combinatória;

– avaliar, por meio das soluções dos problemas propostos na Trilha, se há indícios de que ocorreu aprendizagem.

6.2 Objetivo do jogo

No jogo, tem-se como objetivo a aplicação de conhecimentos de Análise Combinatória, resolvendo problemas selecionados, em lançamento de dados.

6.3 Materiais do jogo

– dois dados não viciados; cartões com desafios na forma de exercícios e problemas que contemplam o conteúdo de Análise Combinatória;
– peões, que podem ser objetos de marcação, como carrinhos de brinquedo, peças de um tabuleiro de damas ou de xadrez, entre outros.

6.4 Regras do jogo:

1° os participantes sortearão quem inicia o lançamento dos dados, sendo essa a equipe que sortear o maior número ao lançar um só dado. Os demais seguem jogando conforme a ordem decrescente dos números sorteados;

2° a movimentação das peças, no percurso da trilha, dar-se-á segundo a combinação simples ($C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$) dos números dos dados lançados, sendo *n* o maior valor e *p* o menor valor, considerados os dois dados lançados;

3°após a movimentação do peão, tendo ele parado em uma casa azul, vermelha ou amarela, a equipe resolve o desafio de uma carta, da que está acima na pilha de cartas, voltada para baixo, que tem como referência a cor da casa em que o peão parou;

4° para avançar, e ter direito a jogar os dados na próxima rodada, a equipe deverá acertar a pergunta da carta; caso erre, devolverá a carta e ficará fora da próxima rodada;

5° no fim da rodada da qual a equipe ficou fora, esta sorteará outra carta de mesma cor e, se acertar, retornará à trilha. Se errar novamente, fica válida novamente a 4ª regra;

6° se a equipe cair na casa com cor preta, estará impedida de retirar qualquer carta e vai para a cadeia;

7º para sair da cadeia, na jogada seguinte, a equipe deverá solucionar o problema da carta de cima do baralho preto;

7.1° caso a equipe erre o problema da carta do baralho preto, volta para a cadeia e permanece presa por duas rodadas, e assim por diante, até solucionar o problema contido na carta;

[36] Jogo elaborado pelo mestrando.

8° todos saem do marco *Início* e vence o jogo aquele que chegar, por primeiro, no marco *Chegada*.

6.5 Tabuleiro do jogo

Figura 15 – Tabuleiro do Jogo Trilha Combinatória

Fonte: Elaboração do autor.

REFERÊNCIAS

PIAGET, J. **Fazer e compreender**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1978.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.