

**UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL**

**DANIEL ALVES DE ANDRADE**

**ANÁLISE ESTÁTICA DE PLACAS E CASCAS DE REVOLUÇÃO  
COMPOSTAS POR LAMINADOS SUJEITAS A CARREGAMENTOS  
AXISSIMÉTRICOS**

**CAXIAS DO SUL**

**2017**

**DANIEL ALVES DE ANDRADE**

**ANÁLISE ESTÁTICA DE PLACAS E CASCAS DE REVOLUÇÃO  
COMPOSTAS POR LAMINADOS SUJEITAS A CARREGAMENTOS  
AXISSIMÉTRICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade de Caxias do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Fassini  
Michels  
Coorientador: Prof. Dr. Oscar Alfredo  
Garcia

**CAXIAS DO SUL**

**2017**

A553a Andrade, Daniel Alves de

Análise estática de placas e cascas de revolução compostas por laminados sujeitas a carregamentos axissimétricos / Daniel Alves de Andrade. – 2017.

127 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de Caxias do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2017.

Orientação: Alexandre Fassini Michels.

Coorientação: Oscar Alfredo Garcia.

1. Métodos de elementos finitos. 2. FSDT. 3. TSDT. 4. TCL. 5. Compósitos laminados. I. Michels, Alexandre Fassini, orient. II. Garcia, Oscar Alfredo, coorient. III. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UCS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

**DANIEL ALVES DE ANDRADE**

**ANÁLISE ESTÁTICA DE PLACAS E CASCAS DE REVOLUÇÃO  
CONSTITUÍDAS POR LAMINADOS**

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade de Caxias do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Projeto

Caxias do Sul, agosto de 2017.

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Alexandre Fassini Michels  
(Orientador) Universidade de Caxias do Sul

---

Prof. Dr. Oscar Alfredo Garcia  
(Coorientador) Universidade de Caxias do Sul

---

Prof. Dr. Leandro Luis Corso  
Universidade de Caxias do Sul

---

Prof. Dr. João Morais da Silva Neto  
Universidade Federal do Paraná

Dedico esse trabalho a comunidade acadêmica, aos meus familiares que me apoiaram durante toda a caminhada, em especial minha mãe, a Sra. Marilene Rodrigues Alves que me trouxe ao início, meio e fim desse projeto e minha esposa Marlene Guevara dos Santos que com muito amor me orientou e me deu suporte para essa realização.

## RESUMO

Com desenvolvimento significativo da indústria aeronáutica, naval e automotiva a partir de 1960, houve a necessidade de diminuir peso, juntamente com a melhora de propriedades como resistência mecânica, controle de vibrações, aumento de resistência a agentes químicos, etc. É neste contexto que surgem os materiais compostos por laminados modernos, utilizados como uma primeira tentativa para projetar novos materiais a partir da combinação em escala macroscópica de duas ou mais matérias simples. Juntamente com o desenvolvimento de materiais de alto desempenho, obtidos por empilhamento de compostos laminados, tornou-se necessário o desenvolvimento de novas teorias capazes de modelar adequadamente as tensões cisalhantes responsáveis pelos acoplamentos interlaminares. Neste sentido as novas teorias aplicadas a modelos macro mecânicos, como, a FSDT (*First shear deformation theory*) e as teorias cinemáticas cúbicas TSDT (*Third shear deformation theory*), são as mais adequadas para prescrever o comportamento anisotrópico severo e falhas por delaminação do que a teoria clássica da laminação (TCL) inicialmente desenvolvida para abordar este tipo de problemas. A utilização destas teorias chamadas de alta ordem remonta dos anos oitenta e há inúmeros trabalhos publicados em problemas de placas retangulares e cascas sem restrições cinemáticas ao deslocamento. A partir do exposto este trabalho traz estudos de problemas estáticos de placas circulares e cascas de revolução ortotrópicas obtidas por material composto por laminados. Os modelos numéricos são obtidos utilizando o método de elementos finitos (MEF) com elementos lagrangeanos de alta ordem do tipo ( $C^0$ ) juntamente com as teorias cinemáticas de primeira ordem FSDT (Reissner-Mindlin) e teorias de cinemática cúbica TSDT propostas por Reddy (1984) e Kant et al. (1982). Os estudos apresentados neste trabalho trazem o desempenho das teorias supracitadas na abordagem de problemas como: travamento de cisalhamento e membrana; fenômenos de camada limite e capacidade de aproximar soluções em deslocamento de modelos numéricos tridimensionais. Dentro deste contexto será utilizado para uma das análises um problema motivador que consiste de um reservatório cilíndrico submetido a pressões elevadas. Os resultados apresentados concordam com os exemplos *benchmarking* trazidos no desenvolvimento do trabalho, representando suas características.

**Palavras chave:** Método de elementos finitos, FSDT, TSDT, TCL, Compósitos laminados

## ABSTRACT

With significant development of the aeronautical, naval and automotive industry from 1960, there was a need to reduce weight, along with the improvement of properties such as mechanical resistance, vibration control, increased resistance to chemical agents, etc. It is in this context that the materials composed of modern laminates appear, used as a first attempt to design new materials from the combination on a macroscopic scale of two or more simple materials. Along with the development of high performance materials obtained by stacking laminated compounds, it became necessary to develop new theories capable of adequately modeling the shear stresses responsible for interlaminar couplings. In this sense, the new theories applied to macro mechanical models, such as the First Shear Deformation Theory (FSDT) and the TSDT (Third Shear Deformation Theory) cubic kinetic theories, are the most appropriate to prescribe severe anisotropic behavior and delamination failures. The classical lamination theory (TCL) initially developed to address this type of problem. The use of these so-called high-order theories dates back to the 1980s and there are numerous published works on problems of rectangular plates and shells without kinematic restrictions on displacement. From the above, this work presents studies of static problems of circular plates and orthotropic shells obtained by material composed of laminates. Numerical models are obtained using the Finite Element Method (MEF) with high-order lagrangean elements of type ( $C^0$ ) along with the first-order kinematic theories FSDT (Reissner-Mindlin) and TSDT cubic kinematics theories proposed by Reddy (1984) and Kant et al. (1982). The studies presented in this work bring the performance of the aforementioned theories in the approach of problems such as: shear locking and membrane; Boundary layer phenomena and the ability to approximate solutions in displacement of three-dimensional numerical models. Within this context, a motivating problem consisting of a cylindrical reservoir subjected to high pressures will be used for one of the analyzes. The presented results agree with the benchmarking examples brought in the development of the work, representing its characteristics

**Keywords:** Finite element method, FSDT, TST, TCL, Laminated composites

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1-Estrutura dos laminados.....	20
Figura 2-Base global e base local do ponto X.....	32
Figura 3-Domínio intrínseco e vetor posição .....	33
Figura 4-Base covariante e base ortonormal no ponto .....	35
Figura 5-Elemento diferencial de linha dx .....	37
Figura 6-Elemento diferencial de linha dx .....	39
Figura 7-Eschema cinemático para o modelo de 1ª ordem .....	40
Figura 8-Tensor tri-axial de tensões .....	43
Figura 9-Deslocamentos perpendiculares ao plano .....	45
Figura 10-Subdomínio e função global .....	48
Figura 11-Campo deslocamento.....	54
Figura 12-Tensão nula.....	54
Figura 13-Deslocamento no Sistema Global de Coordenadas .....	56
Figura 14-Funções lineares de mapeamento e coordenadas extremas da variável z na aresta.....	57
Figura 15-Direções principais no laminado coincidindo com a direção da fibra.....	65
Figura 16-a) Sistema global de coordenadas (x,y,z); b) Sistema principal de coordenadas (1,2,3) .....	69
Figura 17-a) elementos máster laminado; b) elemento máster no sistema natural de coordenadas; c) elemento de referência no sistema natural de coordenadas.....	75
Figura 18 Placa circular engastada nas bordas; b) Condições de contorno.....	78
Figura 19-Erro relativo para travamento por cisalhamento para os casos A, B e C de espaço aproximado construído com elementos lagrangeanos unidimensionais quadráticos. ....	80
Figura 20-Erro relativo para travamento por cisalhamento para os casos A, B e C de espaço aproximado construído com elementos lagrangeanos unidimensionais cúbicos.....	81
Figura 21-Erro relativo para travamento por cisalhamento para os casos A, B e C de espaço aproximado construído com elementos lagrangeanos unidimensionais quárticos .....	81
Figura 22-Erro relativo para grid uniforme .....	83
Figura 23-a) Casca cilíndrica engastada nas extremidades; b) Carga circunferencial puncionada; c) condições de contorno .....	84
Figura 24-: Cilindro infinito puncionado com força radial uniforme.....	85

Figura 25-Esquema de refino utilizando informações da solução analítica .....	86
Figura 26-Região de perturbação do regime de membrana por flexão no deslocamento radial .....	87
Figura 27-Erro relativo para grid adaptativo .....	88
Figura 28-a) Cilindro longo; b) seção circular com diâmetro e espessura; c) comprimento e condições de contorno essenciais para os modelos FSDT e TSDT.....	90
Figura 29-Deslocamento radial: a) relação $R/h=100$ ; b) relação $R/h=50$ .....	91
Figura 30-Deslocamento radial: c) relação $R/h=20$ ; d) relação $R/h=10$ .....	91
Figura 31-Deslocamento radial: a) relação $R/h=5$ ; b) relação $R/h=2.5$ .....	92
Figura 32-Valor normalizado da energia de deformação para as estratégias A-D com relação ao modelo sólido de revolução.....	93
Figura 33-Casco cilíndrico curto engastado nas extremidades .....	94
Figura 34-a) Deslocamento radial para esquema de laminação 0; b) Deslocamento radial para o esquema de laminação 0/90.....	96
Figura 35-a) Placa circular engastada nas bordas; b) Condições de contorno .....	98
Figura 36-a) Tensões normais; b) Tensões cisalhantes. $0^\circ$ .....	100
Figura 37-a) Tensões normais; b) Tensões cisalhantes [0/90] <sub>s</sub> . $^\circ$ .....	101
Figura 38-a) Tensões normais; b) Tensões cisalhantes. [90/0] <sub>s</sub> .....	102
Figura 39- a) Casca esférica rasa; b) Propriedades geométricas de condições de contorno. .	104
Figura 40-Grid geométrico com 40 elementos lagrangeanos de 7 nós com razão da pg. $r=1,4$ . .....	105
Figura 41- a) Deslocamento $w(r)$ ; b) Momento radial .....	106
Figura 42-a) Deslocamento vertical $w(r)$ ; b) Momento radial $M_r(r)$ . .....	107
Figura 43-a) Comportamento do $w$ para lamina ortótropa; b) Comportamento de $w$ para esquema de empilhamento [0°/90°] <sub>s</sub> .....	109
Figura 44-a) Momento radial $M_r$ para a casca ortótropa; b) Momento radial $M_r$ para o esquema de empilhamento [0°/90°] <sub>s</sub> .....	110
Figura 45-Propriedades geométricas e condições de vinculação para o cilindro engastado ..	111
Figura 46-Comportamento da componente $v$ do deslocamento na direção $z$ para os três modelos utilizados.....	113
Figura 47-(a) Componente $v$ do deslocamento para o modelo C; b) Componente $v$ do deslocamento para o modelo B.....	114

Figura 48-(a) Esforço normal principal $N1(N/mm)$ para o modelo C; b) esforço normal principal $N1(N/mm)$ para o modelo B .....	115
Figura 49-(a) Momento fletor $M1(N.mm/mm)$ para o modelo C; b) Momento fletor $M1(N.mm/mm)$ para o modelo B. ....	116
Figura 50-(a) Esforço cortante $Qr(N/mm)$ para o modelo C; (b) Esforço cortante $Qr(N/mm)$ para o modelo B.....	116
Figura 51-Primeira tensão principal $P1$ nos casos A, B, C. ....	117
Figura 52-Conjunto cilindro para extração supercrítica .....	118
Figura 53-Malha do conjunto cilindro.....	119
Figura 54-1ª tensão principal $P1$ .....	120
Figura 55-Deslocamento total mm .....	121

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
1.1. OBJETIVO GERAL .....	14
1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	14
<b>2. JUSTIFICATIVA .....</b>	<b>16</b>
<b>3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>18</b>
3.1. MATERIAIS COMPOSTOS .....	18
3.2. PROPRIEDADES DAS FIBRAS .....	19
3.3. O USO DA ANÁLISE DE ELEMENTOS FINITOS NO CÁLCULO ESTRUTURAL EM COMPÓSITOS LAMINADOS .....	21
<b>4. METODOLOGIA.....</b>	<b>31</b>
4.1. GEOMETRIA DO ELEMENTO.....	32
4.1.1 Vetores ortonormais associados aos nós do elemento .....	32
4.1.2 Função mapeamento .....	33
4.1.3 Base covariante e ortonormal.....	35
4.1.4 Elemento de arco .....	37
4.1.5 Elemento de área e elemento de volume.....	38
4.1.6 Modelo cinemático de primeira ordem (FSDT).....	40
4.2. TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM COM DEFORMAÇÃO CISALHANTE (FSDT)	40
4.2.1 Relações constitutivas na FSDT .....	43
4.3. FORMULAÇÃO FRACA PARA O PROBLEMA ESTÁTICO DO SÓLIDO ELÁSTICO.....	45
4.4. FORMULAÇÃO DISCRETIZADA COM FUNÇÕES CONTINUAS POR PARTES	48
4.4.1 Vetor de deformações no sistema local de coordenadas .....	49
4.4.2 Teoria cinemática de Reddy .....	53
4.4.3 Modelo Cinemático de Reddy em coordenadas cilíndricas.....	55
4.4.4 Teoria cinemática de Kant.....	60

<b>5. MATERIAIS E MÉTODOS .....</b>	<b>65</b>
5.1. EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS .....	65
5.1.1 Equações constitutivas numa direção $\theta$ .....	68
5.1.2 Equações constitutivas para os modelos FSDT e TSDT (Reddy) .....	71
5.1.3 Equações constitutivas para um $\theta = 0^\circ$ .....	71
5.1.4 Equações constitutivas para um $\theta = 90^\circ$ .....	73
5.1.5 Equações constitutivas para o modelo com normal extensível .....	74
<b>5.2. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO .....</b>	<b>74</b>
<b>6. RESULTADOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>77</b>
6.1. TRAVAMENTO POR CISALHAMENTO EM PLACAS CIRCULARES ENGASTADAS .....	77
6.2. RESULTADOS DE TRAVAMENTO DE MEMBRANA EM CILINDROS LONGOS ....	82
6.3. RESULTADOS PARA O CILINDRO ENGASTADO NAS EXTREMIDADES .....	89
6.4. RESULTADOS DE BENCHMARK PARA O CILÍNDRIO CURTO COMPOSTO POR LAMINADOS .....	94
6.5. RESULTADOS DE FLEXÃO EM PLACAS CIRCULARES ENGASTADAS.....	96
6.5.1 Resultados para o deslocamento transversal .....	98
6.5.2 Resultados da energia de deformação para as estratégias. ....	99
6.5.3 Perfil de distribuição das tensões .....	100
6.6. RESULTADOS PARA CALOTA RASA PUNÇIONADA.....	103
6.7. CASCAS RASAS SOB AÇÃO DE FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA .	107
<b>7. EXEMPLO DE APLICAÇÃO .....</b>	<b>111</b>
7.1. MODELO FÍSICO .....	111
7.2. MODELOS NUMÉRICOS UTILIZADOS .....	112
7.3. RESULTADOS NUMÉRICOS .....	113
7.4. ANÁLISE UTILIZANDO SOFTWARE DE ELEMENTOS FINITOS .....	118
<b>8. CONCLUSÕES.....</b>	<b>122</b>

## 1. INTRODUÇÃO

O estudo de técnicas para o cálculo estrutural de materiais laminados está em constante desenvolvimento em função das crescentes demandas de pesquisa de novos componentes na indústria aeroespacial, como exemplo o estudo de nano compósitos feito por L.W. Zhang et al (2016), como também Sai Sudha Ramesh et al (2009) nos estudos das tensões interlaminares em pratos fabricados de materiais compostos

As demandas por materiais que melhorem os índices de performance com as relações resistência/peso; isolamento térmico e acústico; atenuação de modos associados a frequências elevadas vem sendo objeto constante de pesquisas em centros de referência no segmento aeroespacial.

A resposta a estas demandas vem sendo apresentadas a partir da década de sessenta com o avanço das pesquisas nas propriedades mecânicas das fibras finas e da sua utilização na construção de painéis compostos. Ainda nesta década estes materiais foram utilizados pela empresa General Dynamics (1964) (apud Jones 1970) na construção do bombardeiro estratégico F-111.

Estes painéis constituídos de fibras de alta resistência a tração imersas em matrizes polimérica ou cerâmicas se comportam como materiais anisotrópicos, porém com simetria material do tipo 0/90, ou seja, se comportam como matérias ortótropos.

Na atualidade os materiais compostos por laminados vêm sendo amplamente propostos no projeto de componentes aeronáuticos, constituídos de cascas, como asas e fuselagens de aviões. Nestes casos os componentes estruturais são obtidos por empilhamentos de painéis laminados com intuito de aumentar razão resistência/peso e permitir grandes deflexões com níveis menores de tensões, deformações e controle de vibrações nos sistemas de eletrônica embarcada dos aviões.

Dentro deste contexto os primeiros trabalhos para modelar matematicamente o problema de placas finas constituídas de compostos por laminados foram apresentadas por Pister e Dong (1959) e Reissner e Stavsky (1961) denominada de teoria clássica da laminação (TCL).

A teoria clássica da laminação foi amplamente utilizada até da década de oitenta porem por estar baseada na teoria cinemática de placa fina não leva em consideração a deformação cisalhante e, por conseguinte, as tensões cisalhantes não eram representadas adequadamente.

A limitação desta teoria não permite uma avaliação adequada das tensões cisalhantes interlaminares, de fundamental importância na determinação de falhas por delaminação. A primeira proposta para contornar a limitação apresentada pela (CLT) surge, para materiais compostos por laminados, com a incorporação das teorias de primeira ordem, que levam em consideração a deformação cisalhante denominadas de *First Shear Deformation Theory* (FSDT). Porém avanços em projetos com uso de informações mais detalhadas só foram complementadas com estudos utilizando as teorias cúbicas de terceira ordem (TSDT)

Este trabalho tem como objetivo verificar os desempenhos das teorias FSDT e TSDT na abordagem de problemas placas e cascas moderadamente espessas sujeitas a carregamentos com simetria axial de forças.

As teorias de primeira ordem (FSDT) serão obtidas pelo modelo cinemáticos de Reissner-Mindlin. Para as teorias cúbicas (TSDT) serão utilizados os modelos de Kant (1982), e o modelo de Reddy (1989). O modelo numérico será obtido utilizando o Método de Elementos Finitos (MEF) com elementos Lagrangeanos de alta ordem.

Os modelos de placas e cascas de revolução serão adaptados ao MEF utilizando o elemento sólido degenerado descrito em coordenadas cilíndricas segundo Battoz e Dath (1992).

O escopo deste trabalho está descrito em seis capítulos que sejam:

- a) Primeiro capítulo: Introdução;
- b) Segundo capítulo: Justificativas;
- c) Terceiro capítulo: Revisão bibliográfica atualizada das teorias utilizadas para modelar problemas de placas e cascas com material composto por laminado;
- d) Quarto capítulo: Apresentação da Metodologia
- e) Quinto capítulo: Materiais e Métodos;
- f) Sexto capítulo: Resultados numéricos obtidos por meio dos métodos supracitados;
- g) Sétimo capítulo: Exemplo de aplicação, comparando os métodos estudados com um software comercial de elementos finitos;
- h) Oitavo capítulo: Conclusões sobre o trabalho executado.

No capítulo referente a resultados numéricos os estudos de caso analisados são inicialmente de material homogêneo e os resultados obtidos com a utilização do software Revolution-Axisshel implementado em Matlab. Os resultados numéricos foram analisados através de comportamento de deslocamentos ao longo das curvas meridianas e das tensões normais e cisalhantes, ao longo da espessura do material.

Os resultados supracitados são obtidos para as teorias cinemáticas FSDT de (Reissner-Mindlin) e TSDT de Kant (1982) e comparados com os obtidos com o modelo do sólido de revolução utilizando o MEF.

### 1.1. OBJETIVO GERAL

Análise estática de placas e cascas de revolução constituída de material composto por laminados e sujeitas a carregamentos com simetria axial de forças.

### 1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Dentre os temas fundamentais para atingir o objetivo geral são listados a seguir os seguintes objetivos específicos que foram balizadores dos índices de progresso do desenvolvimento do tema proposto.

- a) A revisão bibliográfica atualizada de materiais compostos por laminados utilizados na abordagem de problemas de placas e cascas e das teorias cinemáticas mais adequadas para modelar o comportamento destes componentes estruturais
- b) A revisão bibliográfica do problema de placas e cascas de revolução com as restrições inerentes a carregamentos axissimétricos modeladas com elementos sólidos degenerados descritos em coordenadas cilíndricas. Nesta etapa foram abordadas as características geométricas do elemento, a descrição do vetor deslocamento segundo o modelo cinemático de primeira ordem de Reissner-Mindlin.
- c) Formulações forte e fraca para o problema estático. A formulação fraca foi obtida através do método aproximado dos resíduos ponderados Galerkin.
- d) Formulação fraca discretizada utilizando funções contínuas por partes para elementos quadráticos unidimensionais e elementos com um número variável de funções de interpolação. Nesta etapa foram obtidas a matriz de rigidez e o vetor de forças consistentes considerado o componente estrutural constituído de material homogêneo isotrópico e em regime elástico linear.
- e) Formulação fraca discretizada para os modelos cinemáticos de ordem superior cúbicos como as teorias Reddy (1989) e Kant (1982). As matrizes de rigidez nesta

etapa foram obtidas para materiais homogêneos e isotrópicos em regime elástico linear.

- f) Formulação para materiais compostos por laminados. Nesta etapa foram consideradas as transformações para laminados com empilhamentos das lâminas em ângulos  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$  com relação ao sistema local de coordenadas de cada ponto de integração.
- g) Implementação computacional para os modelos cúbicos TSDT de Kant (1982) e Reddy (1989) na estrutura computacional existente *RevolutionAxisshel*, que é um código livre utilizado em diversos trabalhos na UCS construída em Matlab considerando o material homogêneo e isotrópico e também composto por laminados.
- h) Obtenção de resultados numéricos e análise dos estudos de casos para modelos construídos com as teorias FSDT (Reissner-Mindlin) e TSDT (teorias de Kant e Reddy). Nesta etapa foram analisadas a proximidade do comportamento com os modelos sólidos obtidos por métodos numéricos e as soluções de Pagano (1970) da elasticidade tridimensional para laminados compostos e placas sanduiches.
- i) Redação da dissertação e de artigos para congressos e revistas indexadas desta área.

## 2. JUSTIFICATIVA

A utilização dos materiais compostos laminados modernos na engenharia começa sua trajetória na década de sessenta na aplicação destes materiais na indústria aeronáutica militar Jones (1975), um exemplo disso é sua aplicação no F111 da *General Dynamics* situada em *Fort Worth*, Texas, USA. Na atualidade, observa-se a utilização de materiais compostos por laminados em raquetes de tênis, quadros de bicicletas de competição, cascos de veleiros, automóveis, etc.

Especificamente neste trabalho a fonte inspiradora que levou ao estudo de materiais compostos por laminados é a utilização destes materiais na construção de cilindros de reatores supercríticos. Estes componentes são utilizados para a extração supercrítica de essências de óleos de alta qualidade e estão submetidos a pressões elevadas.

Em nossa região em função da abundância de matéria prima uma escolha viável de extração é o óleo de semente de uva. Segundo Bakkali et al. (2008) é um produto de alto valor agregado utilizado pela indústria alimentícia, farmacêutica e de cosméticos por suas propriedades gustativas, antioxidantes e anti-inflamatórias.

A matéria prima base, sementes de uva, são um resíduo gerado nas indústrias vitivinífera, sendo atualmente descartadas como adubo no solo, podendo representar inclusive um problema de cunho ambiental.

A extração de componentes naturais como óleos essenciais a partir de matrizes vegetais através do processo de extração supercrítica vem sendo largamente estudada desde a década de 70.

Existem diversas dissertações de mestrado e teses de doutorado publicadas no Brasil e centenas de publicações relacionadas sobre este processo, trabalhos estes desenvolvidos nos centros de pesquisa universitários das áreas de engenharia química, alimentos e farmacêutica, que utilizam equipamentos importados em seus laboratórios.

Mesmo com muita pesquisa na área, não é um processo desenvolvido industrialmente no Brasil, existindo ainda um grande potencial para tanto, pois o Brasil é um país visto no mercado como fornecedor de matérias primas commodities para a extração de óleos essenciais, mas é importador dos aromas processados de diversos países da Europa, Estados Unidos, Índia e China, que já dominam a técnica em escala industrial e onde existem indústrias especializadas em fornecer este tipo de equipamento.

O projeto de um equipamento em escala industrial para este processo tem como maior restrição sua resistência mecânica, pois a pressão utilizada no equipamento é acima de 74 bar (pressão crítica do CO<sub>2</sub>) podendo chegar a 500 bar, dependendo do material processado, sendo a temperatura baixa entre 31 e 50 °C.

Dentro deste contexto testou-se diferentes esquemas de empilhamentos para painéis laminados assim como a utilização de painéis sanduiches na verificação estrutural da casca cilíndrica do reator.

Outra motivação é aplicação dos modelos cinemáticos (FSDT) e (TSDT) juntamente MEF, entendendo seus pormenores na aplicação de problemas de placas e cascas de revolução sujeitas a carregamentos com simetria axial de forças.

### 3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica apresentada a seguir consiste de um resumo abrangente do status da tecnologia na simulação numérica em materiais compostos laminados. Neste sentido inicia-se este capítulo fazendo um comentário breve do surgimento de materiais compostos, modelos micro e macromecânicos até as teorias mais recentes baseadas em multi escala e homogeneização.

A partir do exposto a revisão bibliográfica é apresentada de acordo ao seguinte escopo: materiais compostos; modelos macromecânicos e modelos micromecânicos baseados em homogeneização e multi escala.

#### 3.1. MATERIAIS COMPOSTOS

Jones (1975) define a palavra compósito a combinação de dois ou mais materiais numa escala macroscópica para formar um terceiro material com propriedades diferentes de seus componentes. A chave é o exame macroscópico de material em que os componentes podem ser identificados a olho nu.

Por outro lado, materiais diferentes podem ser combinados numa escala microscópica, tais como na liga de metais, mas o material resultante é, para todos os efeitos práticos, macroscopicamente homogêneo, isto é, os componentes não podem ser distinguidos pelo olho nu e, essencialmente, atuam em conjunto. A vantagem de materiais compósitos é que, se bem concebidos, normalmente apresentam as melhores qualidades dos seus componentes.

Na obtenção de materiais compósitos procura-se melhorar aspectos de performance do material úteis em projetos de componentes mecânicos como: tensão de falha, aumento da rigidez, aumento da resistência a corrosão, diminuição de peso, aumento da vida a fadiga, melhora da condutividade térmica, melhora do isolamento térmico, melhora do isolamento acústico e aumento da resistência ao desgaste.

Naturalmente, nem todas estas propriedades são melhoradas, ao mesmo tempo, nem existe qualquer requisito geral para realizar isso. Em muitos casos do material obtido, algumas das propriedades estão em conflito umas com as outras, por exemplo, o isolamento térmico contra condutividade térmica.

O objetivo nestes casos é criar um material que tem apenas as características necessárias para executar uma tarefa específica de projeto. Os materiais compósitos têm uma longa história de uso, suas origens exatas são desconhecidas, mas toda a história contém referências a alguma forma de material compósito. Por exemplo, a palha foi usada pelos israelitas para fortalecer tijolos de barro. Serragem foi usada pelos antigos egípcios quando eles perceberam que a madeira poderia ser reorganizada para atingir força e resistência superior à expansão térmica, bem como a dilatação causado pela absorção de umidade.

Outras aplicações foram constatadas nas espadas medievais e armaduras que foram construídos com camadas de diferentes metais. Para entender o comportamento mecânico dos materiais compósitos serão estudadas separadamente os seus componentes fibra/matriz (ver Figura 1) e posteriormente as teorias micromecânicas utilizadas para determinar as propriedades homogêneas do laminado.

### 3.2. PROPRIEDADES DAS FIBRAS

Jones (1975) indica que uma fibra pode ser caracterizada geometricamente não apenas pela sua alta relação comprimento / diâmetro, mas pelo seu diâmetro quase cristalino. As fibras com estas características quase não apresentam inclusões e vazios o que lhes confere um aumento significativo de sua resistência a tração com relação a componentes robustos. As resistências e rigidez de alguns materiais de fibras selecionados estão dispostos em média crescente  $\sigma$ ,  $\rho$  e E, conforme referenciado na Tabela 1. Os materiais estruturais comuns, alumínio, titânio e aço, estão listados para efeitos de comparação.

Tabela 1-Propriedades das Fibras e Fios

Fibra ou Fio	Peso Específico, $\rho$ (kN/m <sup>3</sup> )	Resistência a Tração, S (GN/m <sup>2</sup> )	Rigidez a tração, E (GN/m <sup>2</sup> )
Aluminio	26,3	0,62	73
Titânio	46,1	1,9	115
Aço	76,6	4,1	207
E-Glass	25,0	3,4	72
S-Glass	24,4	4,8	86
Carbono	13,8	1,7	190
Beryllium	18,2	1,7	300
Boro	25,2	3,4	400
Grafite	13,8	1,7	250

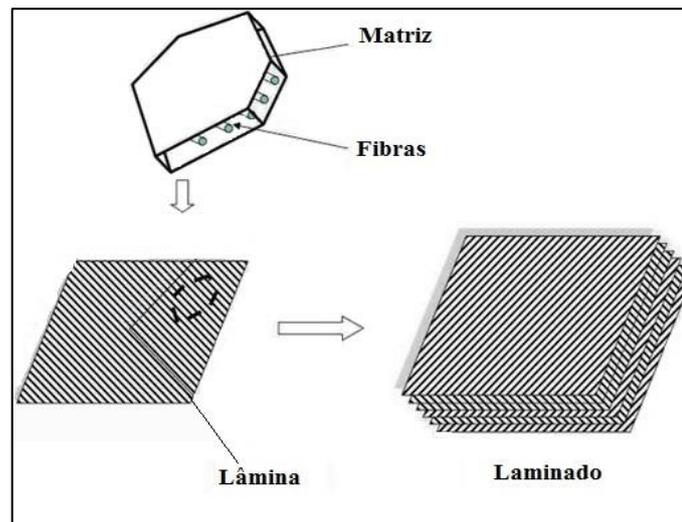
Fonte: Jones (1975).

Mais recentemente, materiais compósitos formados com matriz de resina polimérica reforçada por fibras unidirecionais que têm alta resistência-peso e boas proporções rigidez-peso tornaram-se importantes em aplicações sensíveis ao peso, como aeronaves e veículos espaciais.

Em resumo os compósitos são materiais de engenharia avançados formados por um ou mais materiais constituintes sendo que estes materiais possuem propriedades físicas significativamente diferentes e, quando combinados, resultam em propriedades globais de elevada resistência e rigidez diferentemente de quando isolados.

A figura 1 demonstra um esquema de uma estrutura compósita laminada. Sempre veremos que um material matriz é utilizado como material base e se apresenta de forma homogênea, essa estrutura forma o que podemos chamar de núcleo da camada de material compósito.

Figura 1-Estrutura dos laminados



Fonte: Adaptado de [www.esss.com.br](http://www.esss.com.br) (2016)

Então para completar a estrutura, fibras de reforço são embutidas ou coladas e estas serão responsáveis pela anisotropia da estrutura e tem como propósito adicionar a rigidez direcional. Então como característica, um laminado é uma pilha de lâminas aglomeradas em direções arbitrárias, ou como no caso apresentado neste trabalho serão de forma unidirecional com camadas dispostas em  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , podendo também em outras aplicações possuir orientações diferentes destas

### 3.3. O USO DA ANÁLISE DE ELEMENTOS FINITOS NO CÁLCULO ESTRUTURAL EM COMPÓSITOS LAMINADOS

Entrado em temas que envolve a estrutura e o processo de formação do composto laminado, temos as abordagens macro e micromecânica. Os trabalhos de abordagem micromecânica comentadas neste trabalho modelam os efeitos entre fibra matriz como componentes independentes e com propriedades físicas próprias de cada um.

Por outro lado, os trabalhos que utilizam a abordagem macro mecânica empregam propriedades médias do laminado juntamente com as teorias cinemáticas de placas laminadas. Dentro destas teorias são comentadas inicialmente a teoria clássica da laminação (TCL) e as teorias mais recentes que consideram deformação cisalhante como as teorias de primeira ordem (FSDT) e as teorias cúbicas (TSDT).

Os trabalhos mais recentes envolvendo modelos micro mecânicos trazem de forma explícita os componentes individuais do composto, estes são os mais utilizados, já que, fornecerem informações sobre a falha na interface fibra matriz.

As pesquisas realizadas por Zalamea, Miquel e Oller (1988) propõem uma abordagem micromecânica trazendo o conceito de homogeneização utilizando uma montagem de formulação em duas partes. Primeiro eles determinam um modelo global formado pela equação de equilíbrio para a microestrutura e a macroestrutura do composto, com isso o composto é dividido em volumes menores capazes de guardar os seus dados completos, partindo para uma distribuição periódica destas estruturas.

Quando isso não ocorre, ou seja, quando existe uma distribuição estatisticamente homogênea, é analisado apenas um volume representativo para determinar as interações entre a fibra e a matriz.

Segundo Pandya e Kant (1987), no início dos estudos, a teoria clássica da laminação baseava-se na hipótese de Kirchhoff que foi adotado para análise de placas compostas laminadas. O autor comenta que esta teoria, negligenciava as deformações por cisalhamento e as deformações transversais sendo assim inadequada para a análise de placas compósitas laminadas.

Os fenômenos de falhas por delaminação e a simulação de anisotropia geométrica forte dependem de uma representação adequadas das deformações e tensões cisalhantes. Além disso, as tensões interlaminares modificam-se de acordo com o processo de empilhamento das laminas

nas estruturas laminadas, esta constatação foi o ponto de partida no desenvolvimento da primeira placa deformável pela teoria de cisalhamento.

O crédito para este desenvolvimento foi para Reissner e Mindlin, que foram pioneiros nas teorias de deformação de cisalhamento de primeira ordem com base nos campos de deslocamento. Contudo, a teoria de Reissner-Mindlin em primeira prescrevia um campo de deslocamento linear na espessura o que resultava em deformações cisalhantes constantes através da espessura da placa.

Para corrigir esta limitação foram introduzidos fatores de correção de cisalhamento um baseado nas equações de equilíbrio o outro baseado em energia de deformação. Posteriormente, essas discrepâncias foram corrigidas pelo aumento da ordem das funções que descrevem a cinemática do campo de deslocamento introduzindo os modelos de ordem superior para placas moderadamente espessas e espessas.

No trabalho de Pandya e Kant (1987) é apresentado uma formulação de elementos finitos de deslocamento contínuo  $C^0$  sob uma teoria de ordem superior para a flexão de placas compostas laminadas arbitrárias e moderadamente espessas, sob cargas transversais.

Neste trabalho os autores propõem um modelo cúbico da variável  $z$  da espessura para os deslocamentos membranais e constante para o deslocamento transversal da placa. Com a utilização desse modelo se eliminou o uso de coeficientes de correção de cisalhamento já que as deformações cisalhantes obtidas, a partir desta teoria cinemática, tem distribuição quadrática como esperado.

O elemento discreto escolhido é um quadrilátero com nove nós e com nove graus de liberdade por nó. Os resultados obtidos em deslocamentos e tensões foram comparados com os da teoria da elasticidade e as soluções de elementos finitos com outros modelos de deslocamentos de ordem superior utilizados em trabalhos anteriores pelos autores. Eles também desenvolveram um programa de computador que simula o comportamento contínuo de tensões cisalhantes interlaminares integrando as equações de equilíbrio de tensões.

No fim deste estudo trouxeram comparações utilizando resultados numéricos de dois campos de deslocamento diferentes, mostram que o uso da lei de Hooke generalizada completa, que inclui os efeitos da tensão / tensão transversal normal, minimiza os erros.

Concluíram que o uso de ambas as soluções de elementos finitos é excelente para placas compostas laminadas sanduíche, quando comparadas com soluções de elasticidade 3D / forma fechada. Porém ainda com este modelo de deslocamento, não era possível satisfazer as

condições de esforço de cisalhamento transversal nulo no plano de delimitação da placa, ainda as condições de continuidade nas interfaces para as tensões interlaminares também não se encontram no domínio de qualquer teoria de placas bidimensionais para laminados.

Por estas razões, o programa de computador desenvolvido fez uso de equações de equilíbrio tridimensional para prever as tensões interlaminares de forma mais real. As tensões da lâmina no plano são avaliadas como de costume, ou seja, por meio das relações constitutivas da placa.

A diferença nos resultados das tensões transversais de cisalhamento obtidas usando equações de equilíbrio e relações constitutivas da placa, é encontrada como sendo um máximo para a placa sanduíche em vez das placas laminadas.

Kuppusamy e Reddy (1984) em seu artigo, explica que os materiais compósitos exibem maiores proporções de rigidez/peso e maior resistência à corrosão quando comparados a materiais isotrópicos.

Comentam também sobre as propriedades dos materiais anisotrópicos dos compósitos em camadas podem ser alteradas variando a orientação da fibra e a sequência de empilhamento. Porém indicam um certo grau de cuidado, já que, esta característica pode até dar ao projetista um grau adicional de flexibilidade, como também, um desnivelamento rígido entre essas camadas ortotrópicas ligadas em conjunto com diferentes orientações de fibras conduzindo as tensões interlaminares na vizinhança de bordas livres.

Para certas sequências de empilhamento, carga e condições de contorno, as tensões interlaminares podem ser tão grandes que determinam a forma da estrutura.

Os autores Kuppusamy e Reddy (1984) referenciam que a teoria da placa laminada parte do princípio que o laminado está em um estado de tensão plana, sendo isso uma condição trazida da teoria clássica da placa clássica, e as integrais através da espessura de um laminado são iguais à soma de integrais através da espessura de lâminas individuais.

Essas premissas levam a uma previsão imprecisa das tensões interlaminares nos bordos livres, embora a solução seja razoavelmente precisa quando nos afastamos desses bordos livres. Em resumo indicaram que a teoria da placa laminada não é precisa numa região de camada limite que se prolonga para dentro a partir da borda até uma distância aproximadamente igual à espessura do laminado.

Em seu artigo. Kuppusamy e Reddy (1984) trazem os resultados desta análise tridimensional, geometricamente não-linear, de elementos finitos da flexão de placas compostas

anisotrópicas laminadas. Para isso as lâminas individuais são consideradas homogêneas, ortotrópicas e linearmente elásticas. Para esse contexto os autores utilizam para modelar a placa laminada, um modelo finito linear isoparamétrico totalmente tridimensional com oito nós e 24 graus de liberdade (composto por três componentes de deslocamento por nó).

Os resultados destes elementos finitos da análise linear estão de acordo com as soluções exatas de chapas retangulares laminadas cruzadas sob carga sinusoidal. Os resultados dos elementos finitos da análise tridimensional, geometricamente não-linear, são comparados com os obtidos usando uma teoria de placas deformável, geometricamente não-linear.

No estudo de Kuppusamy e Reddy (1984) descobriu-se que as deflexões previstas pela teoria da placa deformável por cisalhamento estão em concordância com as previstas pela teoria da elasticidade tridimensional; porém, verificou-se que as tensões não estavam em comum acordo.

Uma outra informação encontrada no artigo é de que as tensões previstas pela teoria das placas possuem um erro maior do que as deflexões quando comparadas com as previstas pela teoria da elasticidade tridimensional. A técnica de integração reduzida é recomendada para placas finas ( $a/h > 10$ ) e a integração total para placas grossas ( $a/h \leq 10$ ), especialmente quando as não linearidades geométricas estão incluídas.

No artigo de Ramesh et al. (2009), apresenta um elemento de placa triangular de ordem superior que se baseia na teoria de deformação por cisalhamento de terceira ordem e uma teoria de placas em camadas de Reddy para a análise de flexão de placas compósitas laminadas.

Este traz soluções para o problema da utilização de elementos finitos de ordem inferior, que são utilizados para resolver uma vasta gama de problemas práticos envolvendo placas compostas laminadas, foi visto que esses elementos são incapazes de fornecer distribuições precisas de resultantes da tensão em estruturas com bordas livres e singularidades de tensão.

Busca-se um elemento capaz de prever com precisão as forças de cisalhamento e os momentos de torção, bem como as tensões transversais de cisalhamento na espessura de uma placa compósita laminada de encontro ao critério usual de deflexão utilizado para estabelecer o desempenho de convergência da maioria dos elementos finitos.

Conseguiram desenvolver elementos de placas triangulares de ordem superior baseados na teoria de deformação por cisalhamento de terceira ordem e uma outra teoria que utiliza camada pré-determinadas realizando interpolações variáveis através da espessura do laminado, com isso determinaram as tensões nas placas laminadas.

O grau polinomial das funções de forma do elemento foi aumentado uniformemente sobre toda a malha de elementos finitos, melhorando a precisão da solução em vez da abordagem tradicional de refinamento de malha usando elementos finitos de ordem inferior. Foi levado em conta, por meio do desenvolvimento de elementos finitos de ordem superior, as tensões transversais de cisalhamento através da espessura da placa composta laminada, aumentando a credibilidade da previsão.

O trabalho de Ramesh et al. (2009), revelou a importância de empregar funções de forma polinomial (para deslocamentos no plano, bem como transversais através da espessura da lâmina) na predição de tensões interlaminares em placas compostas laminadas oblíquas com vários ângulos de inclinação.

No final o trabalho apresenta uma detalhada análise de tensões e visualização de tensões calculadas em placas compostas laminadas com recortes, visando estabelecer a precisão e eficiência computacional de elementos triangulares de ordem superior.

Os atuais elementos finitos triangulares de ordem superior, segundo os resultados, mostraram possuir excelentes capacidades computacionais (quase 20 vezes mais eficientes em termos de graus de liberdade necessários para atingir uma precisão arbitrada) em comparação com elementos finitos convencionais de ordem inferior. Além disso, a presença de funções de forma de ordem superior acomoda uma ampla gama de deformações e evita o uso de ajustes nos equacionamentos para lidar com problemas de gradiente de tensão elevados e condições de borda livre.

No estudo realizado por Roque, Ferreira e Reddy (2013) aborda uma teoria para carga aplicada no conjunto intitulado como (pares) modificado, e um método sem malha é usado para estudar o encurvamento das placas micro isotrópicas simplesmente apoiadas conhecida como a teoria placa Mindlin.

Os autores indicam que a teoria dos pares modificados envolve apenas um parâmetro de escala de comprimento e assim remonta a uma simplificação da teoria, afirmando que experimentalmente é mais fácil de retirar resultados por meio desta forma. As equações que governam a flexão da teoria da deformação de cisalhamento de primeira ordem são implementadas usando um método sem malha baseadas em funções de base radial.

O método numérico, segundo o autor, é de fácil implementação, e fornece resultados precisos que estão em acordo com as soluções analíticas. Os resultados alcançados neste trabalho, concordam com os resultados anteriores obtidos para microplacas e micro vigas,

utilizando diferentes teorias de feixes e placas, como a teoria de placas de Kirchhoff e a teoria de feixes de Timoshenko.

Os autores informam que os resultados numéricos estão de acordo com as soluções de placas Navier. Foi utilizado um fator de escala, e este produziu um efeito de acordo com o tamanho da placa, o efeito torna-se menor à medida que o tamanho da placa aumenta, como esperado.

O artigo dos autores Lim, Zhang e Reddy (2015) traz uma abordagem interessante voltada a compósitos utilizando na sua construção a nano tecnologia, algo ainda considerado recente como materiais alternativos de aplicação em engenharia. Eles trazem um histórico desses trabalhos e comentam os efeitos das escalas de comprimento de material no estudo da mecânica de sólidos em micro e/ou nano escala, entre elas, comentam que um conjunto de artigos lida com o modelo não-local diferencial de Eringen e outro lida com as teorias do gradiente de deformação.

A teoria de tensão do par modificada, que também é responsável por uma escala de comprimento material, indicam que isso é uma forma de uma teoria do gradiente de tensão. Abordam que grande parte da teoria sobre esse assunto encontrado na literatura que surgiu nos últimos anos criou uma confusão significativa entre os pesquisadores sobre as escalas de comprimento mais especificamente sobre o conteúdo encontrado nestes estudos.

Em resumo o trabalho de Lim, Zhang e Reddy (2015) tem como objetivo estabelecer o fato de que as escalas de comprimento presentes na elasticidade não local e na teoria do gradiente de tensão descrevem duas características físicas inteiramente diferentes de materiais e estruturas em nano escala. Afirmam que para isso devem ser utilizadas duas funções de núcleo principais, o artigo apresenta ainda uma teoria com exemplos de aplicação que relaciona a elasticidade não-local clássica e a teoria do gradiente de tensão e resulta numa teoria de gradiente de tensão não local de ordem superior.

A teoria é distintiva porque a teoria de tensão não-local clássica não inclui a não-local de tensões de ordem superior enquanto a teoria de gradiente de tensão comum apenas considera gradientes de tensão de ordem superior local sem efeitos não-locais num sentido global. Estabelecendo isso os autores trazem a relação constitutiva dentro da estrutura termodinâmica, as equações de equilíbrio e todas as condições de contorno são derivadas através da abordagem variacional.

Apresentam dois tipos adicionais de parâmetros, os parâmetros não-locais de ordem superior e os coeficientes de comprimento de gradiente não-local, que são introduzidos para considerar as características dependentes de tamanho de materiais de gradiente não-local a nano-escala.

Os resultados numéricos baseados na nova teoria do gradiente de deformação não-local revelam alguns novos achados no que diz respeito à dinâmica da rede e ao experimento de propagação de ondas que anteriormente não poderiam ser combinados tanto utilizando o modelo clássico de tensão não-local como utilizando a teoria contemporânea do gradiente de tensão. Então, este modelo de gradiente de tensão não-local de ordem superior nos remete a uma explicação para algumas observações nas teorias de tensão clássico e não-local, bem como a teoria do gradiente de tensão quando estamos levando em consideração esses aspectos mais influentes. Os autores utilizaram novas equações de governança para o equilíbrio dinâmico e as condições geométricas e de limite de tensão correspondentes estabelecendo que estas também são derivadas do princípio variacional. Demonstraram também que o sistema de equações poderia ser facilmente reduzido à teoria clássica do tensão não-local e à teoria do gradiente de tensão.

Segundo os autores a principal conclusão atingida por essa teoria está na relação da dispersão e a rigidez distintiva e progressivamente variável das nano-vigas que corresponde à observação experimental, mas não poderia ser combinada tendo como base a teoria de tensão não-local de ordem inferior clássica ou pela teoria de gradiente de deformação pura.

Concluiu-se também que existem números de onda críticos e números de onda de corte para propagação de ondas em materiais dependentes de tamanho com base no modelo de gradiente de tensão não local de ordem superior. Ao contrário do modelo de tensão não-local prevalente, este novo modelo prediz efeito muito grande no aumento de rigidez para comprimento de onda com a presença de gradientes de deformação não-local

Zhang, Liew e Reddy (2016), em seu artigo, demonstra o comportamento de materiais após terem sofrido deformações. A pesquisa deles traz o comportamento pós-flambagem de placas de nano-compósitos laminadas submetidas à compressão biaxial e uniaxial.

Na montagem do modelo colocaram cada camada, de nano-tubos de carbono (CNTs), alinhadas axialmente dentro da matriz polimérica, e depois distribuíram uniformemente ou colocaram um padrão funcional graduado na direção da espessura. Utilizaram equações

governantes discretizadas derivadas com base na teoria da deformação de cisalhamento de primeira ordem (FSDT) através do método IMLS-Ritz (Mínimos quadrados móveis).

Neste estudo, os caminhos pós-flambagem são rastreados usando um algoritmo que combina o procedimento iterativo de comprimento de arco com o método de Newton-Raphson modificado. A fim de validar o método, foram realizados estudos comparativos sobre as placas laminadas do material funcionalmente graduado, onde os resultados que utilizaram estão disponíveis na literatura.

Utilizaram no artigo vários problemas incluindo placas de nano-compósito laminadas em camadas transversais e chapas em ângulo. Levaram em consideração também os efeitos do número de camadas, processo de laminação, geometria da placa, razão de fração de volume de CNT, distribuição de CNT e condições de contorno sobre o comportamento pós-flambagem das placas.

Por fim os autores concluíram que o comportamento pós-encolhimento de placas compostas classificadas funcionalmente reforçadas com CNT laminados sujeitas a compressão biaxial e uniaxial e levando em consideração de que a placa laminada é formada de camadas compostas gradualmente funcionais, perfeitamente limitadas, com coeficiente funcional de CNT, o método IMLS-Ritz isento de elementos é estendido com sucesso para as placas laminadas e com capacidade de análise de pós-carregamento.

Rivera e Reddy (2016), informam em seu artigo, que vários problemas não usuais da casca trazem deflexões e tensões, sendo esta última o foco principal deste artigo. Os autores constataram que as tensões calculadas neste estudo concordam apenas em alguns casos com as soluções encontradas em softwares comerciais de elementos finitos, portanto, requerem um estudo adicional para determinar a causa deste desacordo.

Por fim, para concluir, apresentaram uma grande análise de deformações para deslocamentos e tensões em cascas funcionalmente classificadas, com propriedades mecânicas variáveis ao longo da direção da espessura, foram utilizadas as constituições completas tridimensionais, como também, as funções de base de alta ordem espectral foram usadas para evitar o bloqueio de membrana e de cisalhamento.

O estudo dos autores está focado na determinação de campos de tensão. Os esforços de Cauchy foram calculados usando a integração reduzida. O elemento de casca aqui apresentado é considerado confiável e sem bloqueio. Apresentaram vários problemas com grandes deformações atestando o fato de que os resultados obtidos são precisos.

Nos resultados de Rivera e Reddy (2016) os materiais isotrópicos, deslocamentos e tensões apresentam comportamento quase idêntico aos encontrados nos códigos comerciais, porém eles são diferentes em prever as tensões para valores de carga elevadas. Os autores concordaram que estudos adicionais são necessários antes de se chegar a uma conclusão definitiva quanto e por que as diferenças existem.

Os deslocamentos calculados para placas e cascas, com carga funcional mecânica, para vários valores do índice  $n$  estão entre as placas e cascas de cerâmica e de metal. As tensões não mostraram um padrão semelhante, a resposta da tensão para superfícies superior e inferior em uma estrutura mostra um comportamento similar às estruturas cerâmicas e metálicas, respectivamente.

Concluíram também de que os valores máximos de tensões nas estruturas de FGM variam com a carga e encontram-se acima, entre ou abaixo dos valores máximos para as estruturas cerâmicas ou metálicas. Por isso foi necessário calcular as tensões para cada valor de  $n$  usado no projeto.

Em um dos exemplos de aplicação, que estarão contidos neste trabalho em forma de resultado do método, são elementos formados por geometrias cilíndricas utilizando a axissimetria para sua resolução, então Karttunen et al. (2017) demonstram uma solução de elasticidade geral para a flexão axissimétrica de uma placa anular linearmente elástica utilizada para derivar um elemento finito exato para tal placa. Eles trouxeram a formulação de um problema de placa interior empregando o princípio de Saint Venant, de modo que os efeitos de borda não apareçam na placa.

Na sequência do artigo mostram, a solução de elasticidade para o problema interno formulado que é apresentado em termos de variáveis de superfície média, isso segundo os autores faz com que essa superfície média tome uma forma semelhante às utilizadas nas teorias de placas de engenharia convencionais. Usando essas variáveis de superfície média, o elemento finito exato é desenvolvido tanto pela força como pela energia.

A característica central e não padronizada da solução interior e o elemento finito a partir dela, é que as tensões interiores da placa atuam como trações de superfície nos bordos da placa e contribuem para a energia potencial total da placa. Finalmente, são apresentados exemplos analíticos e numéricos utilizando a solução de elasticidade e o elemento finito derivado.

Neste contexto os autores chegaram a resultados utilizando um elemento finito exato para uma placa circular anular linearmente elástica usando uma solução de elasticidade geral. Para o desenvolvimento deste elemento utilizaram uma estrutura de dobra interior sem considerar efeitos de bordo.

Os autores deixaram claro uma explicação de que esses recursos em todas as considerações foram sempre baseados em forma de energia. O elemento de placa desenvolvido proporcionou uma maneira direta de obter soluções de elasticidade interior axissimétrico de forma final para muitos problemas práticos.

Por exemplo, usando dois elementos para uma placa anular, pode ser utilizada uma força de cisalhamento nodal no nó, onde os elementos partilham para descrever uma carga no anel uniforme. Os autores salientaram a importância deste método na engenharia, as soluções podem ser utilizadas para validar teoricamente e computacionalmente elementos finitos, tais como elementos de placas quadrangulares isoparamétricas.

#### 4. METODOLOGIA

Será demonstrado um estudo, sobre a ótica do Método de Elementos Finitos (MEF), dos problemas de cascas de revolução e placas circulares submetidos a forças com simetria radial. Os modelos são construídos com teoria cinemática de Reissner-Mindlin em primeira ordem a teoria cúbica do Reddy (1984) e a teoria cúbica com normal extensível de Pandya e Kant (1987) considerando a hipótese de deslocamento nulo na direção  $\theta$ , caracterizando desta forma, um problema com axissimetria de forças. Os modelos cinemáticos de Reddy, Pandya e Kant serão obtidos para placas e cascas de revolução com restrição no deslocamento tangencial a partir de adaptações feitas sobre a cinemática do elemento sólido degenerado de Ahmad, Irons e Zienkiewicz (1970) com sua geometria descrita em coordenadas cilíndricas.

O tema abordado neste capítulo é apresentado nos seguintes tópicos:

a) Características geométricas do elemento. Neste item são introduzidos conceitos básicos de geometria diferencial e a função de mapeamento para o elemento sólido degenerado descrito para problemas com simetria axial de forças.

b) Construção do modelo cinemático de primeira ordem (FSDT), para o elemento supracitado, descrito em coordenadas cilíndricas.

c) Construção do modelo cinemático de ordem cúbica (TSDT) com normal extensível segundo a teoria de Kant (1987).

d) Construção do modelo cinemático de ordem cúbica (TSDT) conforme teoria de Reddy (1984)

e) Equações constitutivas resultantes das hipóteses de axissimetria para materiais compostos por laminados aplicadas aos modelos lineares com deformação cisalhante (FSDT) e modelos cúbicos (TSDT) de Reddy. e de ordem superior de Pandya e Kant (1987). Neste caso, são considerados, apenas, os materiais homogêneos com comportamento elástico linear e isotrópico.

f) Formulação forte e formulação fraca, esta última obtida por resíduos ponderados de Galerkin, para um problema de elasticidade tridimensional.

g) Problema discretizado e equações de Bunov-Galerkin para as teorias FSDT e TSDT de Kant e Reddy.

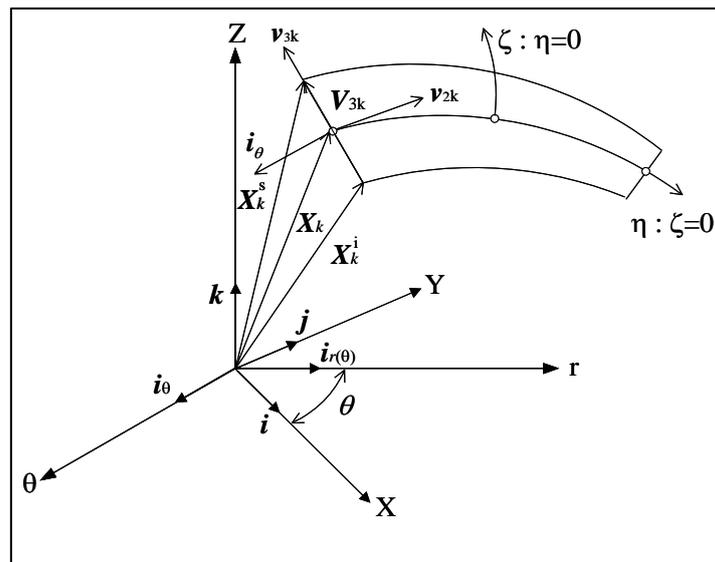
Os itens supracitados constituem uma recopilção do conhecimento necessário para uma abordagem, utilizando elementos finitos, da problemática proposta. Procedimentos semelhantes podem ser vistos em Huges (1987) e Batoz e Dhatt (1992).

#### 4.1. GEOMETRIA DO ELEMENTO

O que é definido neste texto como características geométricas do elemento refere-se à função de mapeamento e as propriedades geométricas a ela associadas como: bases covariantes; bases ortonormais; matriz jacobiana; elemento de arco de área e de volume.

Por tratar-se de cascas de revolução e placas circulares a descrição geométrica é feita, convenientemente, em coordenadas cilíndricas como indicado na Fig. 2.

Figura 2-Base global e base local do ponto X



Fonte: Adaptado Suarez (2005)

##### 4.1.1 Vetores ortonormais associados aos nós do elemento

A base ortonormal associado a um nó  $k$  do elemento é dada pelos vetores  $[v_{2k} : v_{3k} : i_\theta]$  (Fig.2) definidos como segue:

$$V_{3k} = X_k^s - X_k^i \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_{3k} = \frac{\mathbf{V}_{3k}}{|\mathbf{V}_{3k}|} \quad (2)$$

O vetor posição  $\mathbf{X}_k$  indicado na Fig.2, e definido através dos vetores  $\mathbf{X}_k^s$  e  $\mathbf{X}_k^i$ , de forma que:

$$\mathbf{X}_k = \frac{\mathbf{X}_k^s + \mathbf{X}_k^i}{2} \quad (3)$$

O vetor  $\mathbf{V}_{3k}$  tem modulo igual ao comprimento  $t_k$  da aresta na direção  $\mathbf{v}_{3k}$  portanto pode ser definido como:

$$\mathbf{V}_{3k} = t_k \mathbf{v}_{3k} \quad (4)$$

O versor  $\mathbf{v}_{2k}$  é obtida por produto vetorial dado por:

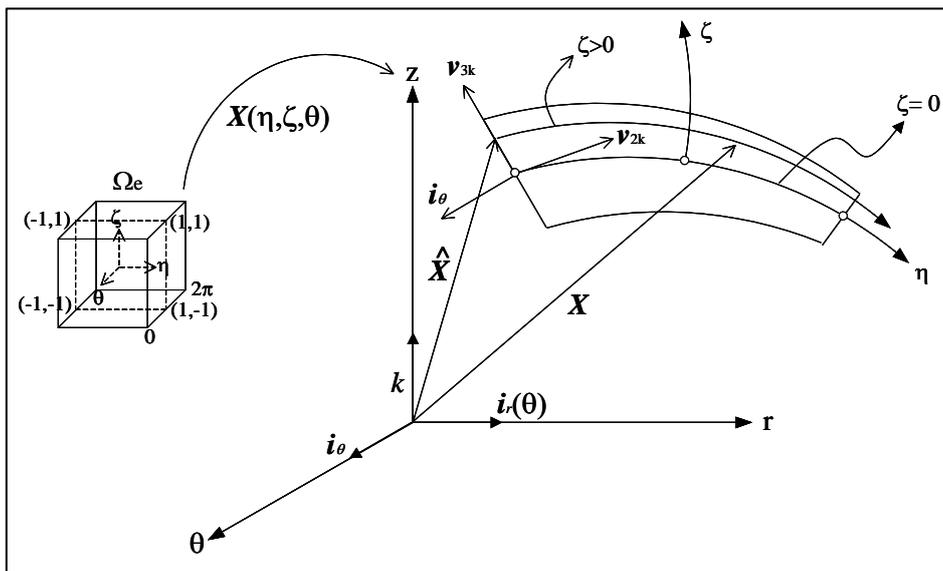
$$\mathbf{v}_{2k} = \mathbf{v}_{3k} \times \mathbf{i}_\theta \quad (5)$$

#### 4.1.2 Função mapeamento

Definidas as bases locais correspondentes a cada nó do elemento é possível estabelecer a função de mapeamento para interpolar pontos no interior do mesmo. Esta função e definida por:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\eta, \zeta, \theta), \mathbf{X} : \Omega_e \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (6)$$

Figura 3-Domínio intrínseco e vetor posição



Fonte: Adaptado Suarez (2005)

Onde  $\Omega_e$  é o domínio paramétrico do elemento, como mostra a Fig.3, formado por todos os pontos que estão contidos no cubo intrínseco:

$$\Omega_e = \{\eta, \zeta, \theta \in \mathbb{R} / -1 \leq \eta \leq 1, -1 \leq \zeta \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

A função mapeamento é obtida por uma interpolação linear na direção das arestas  $\mathbf{v}_{3k}$  e uma interpolação quadrática sobre a curva  $\zeta = cte.$  como indicado a seguir:

Um ponto  $\hat{\mathbf{X}}_k$ , com ordenada  $\zeta$  qualquer, sobre a aresta  $\mathbf{v}_{3k}$  é obtido por interpolação linear como segue:

$$\hat{\mathbf{X}}_k(\zeta, \theta) = \mathbf{X}_k^s(\theta)N_s(\zeta) + \mathbf{X}_k^i(\theta)N_i(\zeta) \quad (7)$$

Onde  $N_s(\zeta) = \frac{1}{2}(1+\zeta)$  e  $N_i(\zeta) = \frac{1}{2}(1-\zeta)$  são as funções lagrangeanas de interpolação linear associadas aos pontos  $\mathbf{X}_k^s(\theta)$  e  $\mathbf{X}_k^i(\theta)$  indicados na Fig.2. A descrição destes pontos em coordenadas cilíndricas toma a forma:

$$\mathbf{X}_k^i(\theta) = r_k^i \mathbf{i}_r(\theta) + Z_k^i \mathbf{k} \quad (8)$$

$$\mathbf{X}_k^s(\theta) = r_k^s \mathbf{i}_r(\theta) + Z_k^s \mathbf{k} \quad (9)$$

A expressão (7) pode ser escrita de forma mais conveniente como indicado a seguir:

$$\hat{\mathbf{X}}_k(\zeta, \theta) = \frac{1}{2}(1-\zeta) \mathbf{X}_k^i(\theta) + \frac{1}{2}(1+\zeta) \mathbf{X}_k^s(\theta) \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_k(\zeta, \theta) = \frac{1}{2}(\mathbf{X}_k^i(\theta) + \mathbf{X}_k^s(\theta)) + \frac{1}{2}(\mathbf{X}_k^i(\theta) - \mathbf{X}_k^s(\theta))\zeta \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_k(\zeta, \theta) = \mathbf{X}_k(\theta) + \mathbf{v}_{3k}(\theta) \frac{t_k}{2} \zeta \quad (12)$$

Um ponto  $\mathbf{X}(\eta, \zeta, \theta)$ , no interior do elemento, é obtido por interpolação dos valores  $\hat{\mathbf{X}}_k(\zeta, \theta)$  correspondentes a cada nó do elemento.

$$\mathbf{X}(\eta, \zeta, \theta) = \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \hat{\mathbf{X}}_k(\zeta, \theta) \quad (13)$$

Na expressão (13)  $n$  corresponde ao número de nós do elemento e  $N_k(\eta)$  as funções quadráticas lagrangeanas associadas aos nós  $k$  do elemento dadas pelas expressões:

$$N_1(\eta) = -\frac{1}{2}\eta(1-\eta) \quad (14)$$

$$N_2(\eta) = 2(1-\eta^2) \quad (15)$$

$$N_3(\eta) = \frac{1}{2}\eta(1+\eta) \quad (16)$$

A descrição de  $\mathbf{X}$  em coordenadas cilíndricas é dada pela expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\eta, \zeta, \theta) = & \left[ \sum_{k=1}^n N_k(\eta) r_k + \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{3k}^r \right] \mathbf{i}_r(\theta) \\ & + \left[ \sum_{k=1}^n N_k(\eta) Z_k + \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{3k}^z \right] \mathbf{k} \end{aligned} \quad (17)$$

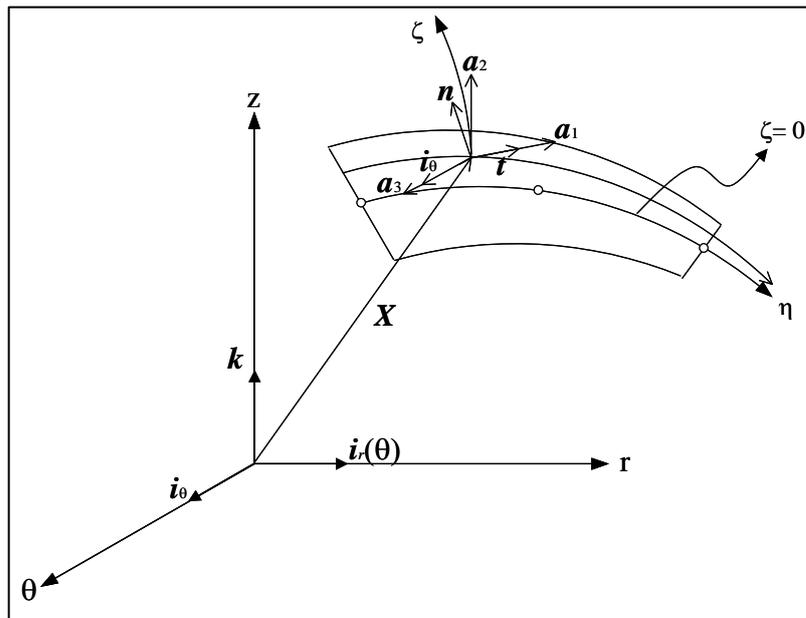
ou ainda em notação compacta:

$$\mathbf{X} = r(\eta, \zeta) \mathbf{i}_r(\theta) + Z(\eta, \zeta) \mathbf{k} \quad (18)$$

Na expressão (18) as componentes  $r(\eta, \zeta)$  e  $Z(\eta, \zeta)$  correspondem as parcelas que multiplicam os vetores  $\mathbf{i}_r(\theta)$  e  $\mathbf{k}$  de (17)

#### 4.1.3 Base covariante e ortonormal

Figura 4-Base covariante e base ortonormal no ponto



Fonte: Adaptado Suarez (2005)

Conhecida a função mapeamento pode-se determinar os vetores tangentes às curvas de Gauss para qualquer ponto no interior do elemento conforme Fig. 4. Estes vetores, que não são necessariamente ortogonais, constituem a base covariante para o ponto, definida por:

$$[F_\zeta] = [a_1 : a_2 : a_3] \quad (19)$$

onde,

$$a_1 = \frac{\partial X}{\partial \eta} = r(\eta, \zeta)_{,\eta} i_r(\theta) + Z_k(\eta, \zeta)_{,\eta} k \quad (20)$$

$$a_2 = \frac{\partial X}{\partial \zeta} = r(\eta, \zeta)_{,\zeta} i_r(\theta) + Z(\eta, \zeta)_{,\zeta} k \quad (21)$$

$$a_3 = \frac{\partial X}{\partial \theta} = r i_\theta \quad (22)$$

Abrindo as expressões correspondentes a (20), (21) e (22) se obtém:

$$a_1 = \left[ \sum_{k=1}^n N_k(\eta)_{,\eta} r_k + \sum_{k=1}^n N_k(\eta)_{,\eta} \frac{t_k}{2} \zeta v_{3k}^r \right] i_r(\theta) + \left[ \sum_{k=1}^n N(\eta, \zeta)_{,\eta} Z_k + \sum_{k=1}^n N(\eta, \zeta)_{,\eta} \frac{t_k}{2} \zeta v_{3k}^z \right] k \quad (23)$$

$$a_2 = \left[ \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \frac{t_k}{2} v_{3k}^r \right] i_r(\theta) + \left[ \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \frac{t_k}{2} v_{3k}^z \right] k \quad (24)$$

$$a_3 = \left[ \sum_{k=1}^n N_k(\eta) r_k + \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta v_{3k}^r \right] i_\theta \quad (25)$$

A base ortonormal  $Q_X = [t : n : i_\theta]$  no ponto  $X$  é obtida a partir dos vetores da base covariante como segue:

$$t = \frac{a_1}{|a_1|} \quad (26)$$

$$n = i_\theta \times t \quad (27)$$

A matriz jacobiana da transformação é por definição  $J = F_\zeta^T$  onde abrindo (19) se tem:

$$F_{\zeta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r(\eta, \zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial r(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} & 0 \\ \frac{\partial Z(\eta, \zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial Z(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} & 0 \\ 0 & 0 & r(\eta, \zeta) \end{bmatrix} \quad (28)$$

Portanto

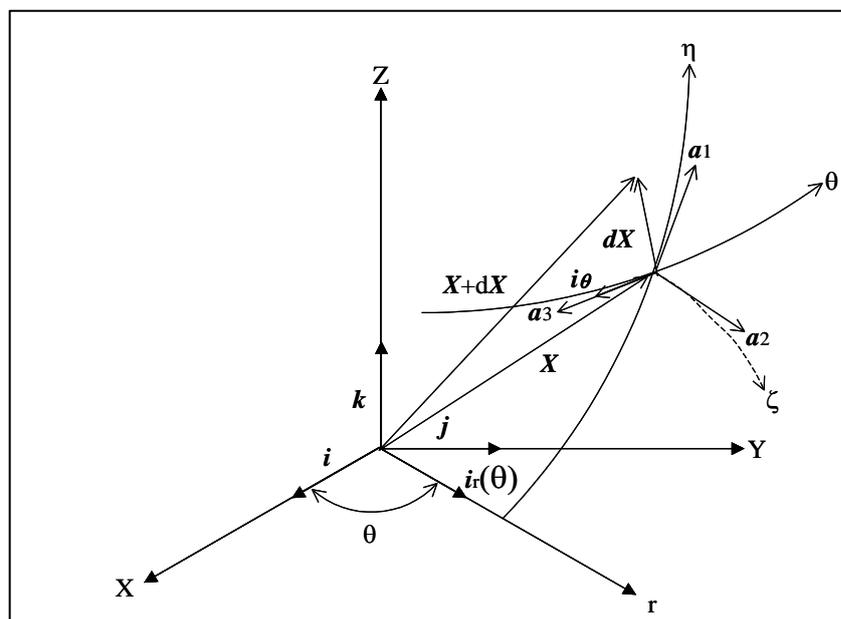
$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial r(\eta, \zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial Z(\eta, \zeta)}{\partial \eta} & 0 \\ \frac{\partial r(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} & \frac{\partial Z(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} & 0 \\ 0 & 0 & r(\eta, \zeta) \end{bmatrix} \quad (29)$$

#### 4.1.4 Elemento de arco

Os elementos de arco podem ser obtidos através de particularizações da primeira forma fundamental da superfície. O elemento de arco correspondente a uma fibra  $d\mathbf{X}$  (Fig. 5) da superfície é definido como:

$$ds = (d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X})^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

Figura 5-Elemento diferencial de linha  $dx$



Fonte: Adaptado Suarez (2005)

$$d\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} d\theta \quad (31)$$

A expressão (31) ainda pode ser escrita em função da base covariante como:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{a}_1 d\eta + \mathbf{a}_2 d\zeta + \mathbf{a}_3 d\theta \quad (32)$$

Por definição a primeira forma fundamental da superfície corresponde ao produto interno:

$$ds^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (33)$$

Abrindo a expressão (33) se obtém:

$$ds^2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 d\eta^2 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 d\zeta^2 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 d\theta^2 + 2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 d\eta d\zeta + 2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 d\eta d\theta + 2\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 d\zeta d\theta. \quad (34)$$

Simplificando a expressão (34) já que  $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_3$  e  $\mathbf{a}_2 \perp \mathbf{a}_3$  chega-se a:

$$ds^2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 d\eta^2 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 d\zeta^2 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 d\theta^2 + 2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 d\eta d\zeta. \quad (35)$$

Para um elemento de arco sobre a curva  $\zeta = cte$  e  $\theta = cte$ . se tem:

$$ds_\eta = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1)^{\frac{1}{2}} d\eta. \quad (36)$$

Para percorrer a curva  $\eta = cte$ . e  $\theta = cte$ . o elemento de arco corresponde a  $ds_\zeta$  é definido por:

$$ds_\zeta = (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2)^{\frac{1}{2}} d\zeta. \quad (37)$$

De forma análoga pode-se obter elementos com componentes em duas ou nas três direções da base covariante.

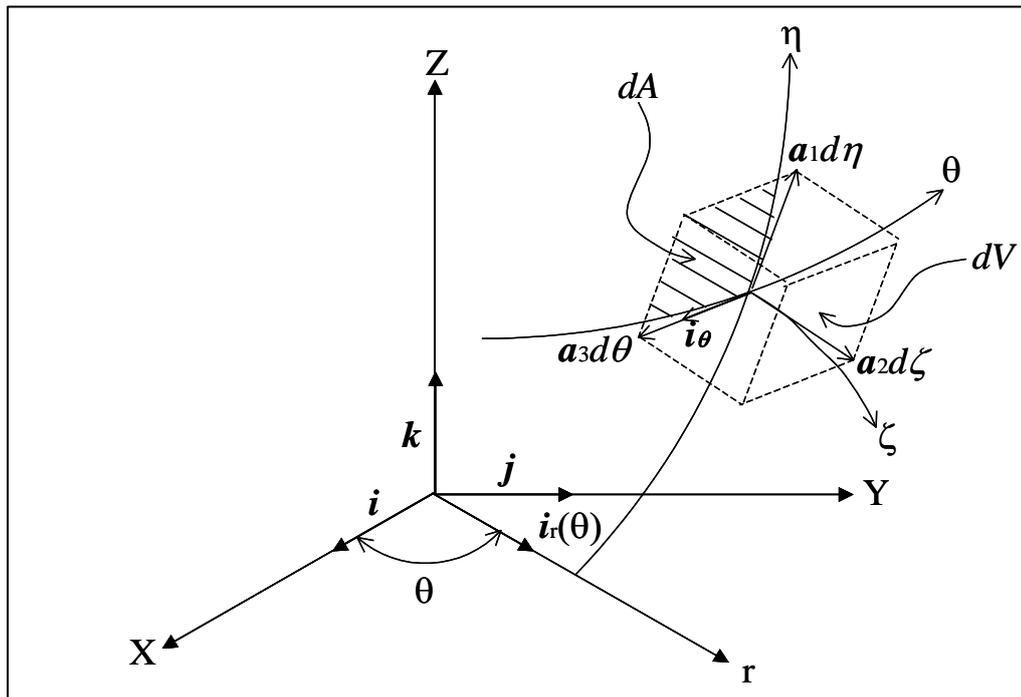
#### 4.1.5 Elemento de área e elemento de volume

Por definição os elementos diferenciais de área e de volume são dados pelos módulos dos produtos vetoriais e produto misto dos vetores  $\mathbf{a}_1 d\eta$ ,  $\mathbf{a}_2 d\zeta$  e  $\mathbf{a}_3 d\theta$ , indicados na Fig. 6.

Por exemplo, o módulo do elemento de área indicado na Fig. 6, e definido por:

$$dA = |\mathbf{a}_1 d\eta \times \mathbf{a}_3 d\theta| = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3| d\eta d\theta \quad (38)$$

Figura 6-Elemento diferencial de linha dx



Fonte: Adaptado Suarez (2005)

Abrindo a expressão (38) obtém-se:

$$dA = \sqrt{\left(\frac{\partial r(\eta, \zeta)}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z(\eta, \zeta)}{\partial \eta}\right)^2} r(\eta, \zeta) d\eta d\theta; \quad (39)$$

Como pode se observar na expressão (39),  $dA$  independe da variável  $\theta$ , portanto, o elemento diferencial de área passa a ser definido como:

$$dA = \sqrt{\left(\frac{\partial r(\eta, \zeta)}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z(\eta, \zeta)}{\partial \eta}\right)^2} r(\eta, \zeta) d\eta \quad (40)$$

O elemento de volume indicado na Fig.6 é obtido por:

$$dV = (\mathbf{a}_1 d\eta \times \mathbf{a}_2 d\zeta) \cdot \mathbf{a}_3 d\theta = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3 d\eta d\zeta d\theta \quad (41)$$

Abrindo (41) se obtém:

$$dV = \left( \frac{\partial r(\eta, \zeta)}{\partial \eta} \frac{\partial Z(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial r(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial Z(\eta, \zeta)}{\partial \eta} \right) d\eta d\zeta \mathbf{i}_\theta \cdot r(\eta, \zeta) d\theta \mathbf{i}_\theta \quad (42)$$

Ou ainda

$$dV = \left( \frac{\partial r(\eta, \zeta)}{\partial \eta} \frac{\partial Z(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial r(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial Z(\eta, \zeta)}{\partial \eta} \right) r(\eta, \zeta) d\eta d\zeta d\theta \quad (43)$$

Novamente nesta expressão observa-se que  $dV$  não varia com  $d\theta$  desta forma, pode-se reescrever a expressão de  $dV$  como:

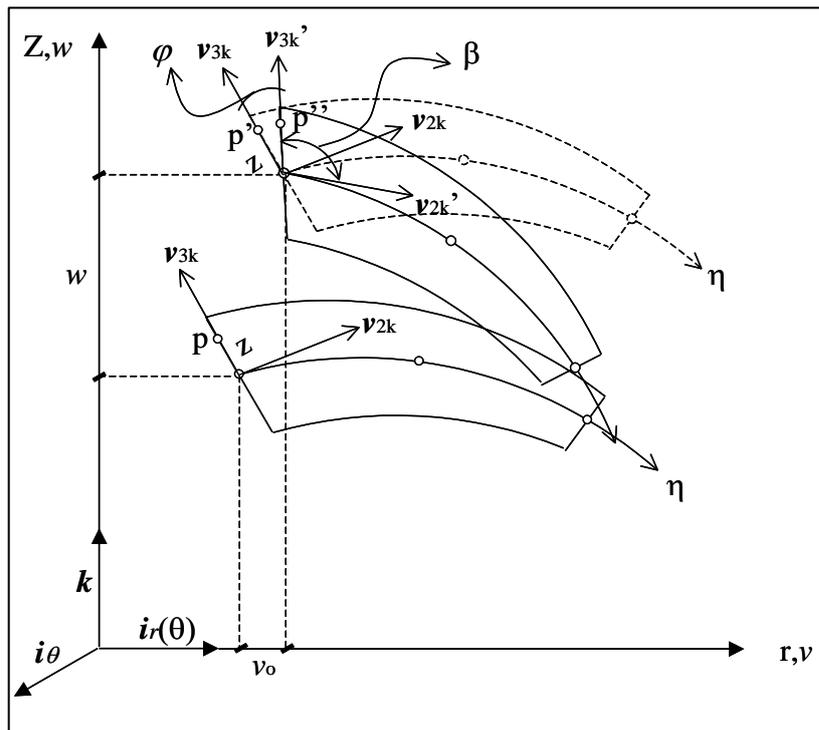
$$dV = \left( \frac{\partial r(\eta, \zeta)}{\partial \eta} \frac{\partial Z(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial r(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial Z(\eta, \zeta)}{\partial \eta} \right) r(\eta, \zeta) d\eta d\zeta \quad (44)$$

Os aspectos da geometria abordados são referentes a qualquer sólido de revolução independentemente do problema, ser ou não, axissimétrico.

#### 4.1.6 Modelo cinemático de primeira ordem (FSDT)

A Fig. 7 traz o esquema cinemático indicado para o modelo de primeira ordem, em suma apresenta de forma gráfica o deslocamento indicando a deformação cisalhante

Figura 7-Esquema cinemático para o modelo de 1ª ordem



Fonte: Adaptado Suarez (2005)

#### 4.2. TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM COM DEFORMAÇÃO CISALHANTE (FSDT)

A descrição do deslocamento segundo a FSDT parte da equação vetorial em coordenadas cilíndricas descrita no plano de simetria radial na Eq. (45).

$$\mathbf{u}(\eta, \zeta) = v(\eta, \zeta)\mathbf{i}_r + w(\eta, \zeta)\mathbf{k} \quad (45)$$

Por outro lado, as componentes do vetor deslocamento são descritas pela Eq. (45)

$$v(\eta, \zeta) = v_o(\eta) + z(\zeta)\varphi(\eta) \quad (46)$$

$$w = w(\eta, \zeta) \quad (47)$$

$$u(\theta) = 0, \quad \forall \theta \text{ tal que } 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (48)$$

No modelo cinemático de primeira ordem com deformação cisalhante (FSDT) o ângulo  $\beta$  entre os vetores  $\mathbf{v}_{3k}$  e  $\mathbf{v}_{2k}$  da (Fig.7), não é reto, portanto, as fibras perpendiculares à curva de referência não permanecem perpendiculares após a deformação e deve ser considerada a parcela de rotação correspondente à deformação cisalhante.

As equações de (46) a (48) descrevem o comportamento geral do modelo, o passo seguinte será particularizar estas equações para os problemas de placas e cascas de revolução, modelados com o elemento sólido degenerado conforme Ahmad, Irons e Zienkiewicz (1970)

Uma particularidade dos modelos construídos, com este elemento, está relacionada com os sistemas de coordenadas envolvidos para representar o deslocamento tangencial a uma curva com coordenada  $\zeta \neq 0$ . A primeira parcela da equação (46), correspondente ao deslocamento da projeção do ponto sobre a curva  $\zeta = 0$ , está referenciada ao sistema global de coordenadas (Fig. 7). A segunda parcela, proveniente da rotação, ocorre na direção estabelecida pelo sistema local de coordenadas associadas ao nó do elemento conforme Fig. 7. A construção do modelo cinemático para este elemento origina-se de um procedimento similar aquele utilizado para obter as equações de mapeamento da geometria como será mostrado a seguir.

A ideia é determinar os deslocamentos nas arestas do elemento para uma coordenada  $\zeta = cte.$  e interpolar seu valor para um ponto no interior do elemento com coordenadas  $(\eta, \zeta)$ . O deslocamento de um ponto sobre uma aresta  $k$  correspondente a uma coordenada  $\zeta = cte$  é obtido por uma expressão análoga à (12), de forma que:

$$\hat{\mathbf{u}}_k(\zeta) = \hat{\mathbf{u}}_{ok} + \frac{t_k}{2} \zeta \varphi_k \mathbf{v}_{2kL} \quad (49)$$

Onde

$$\mathbf{v}_{2kG} = [\mathbf{Q}_k] \mathbf{v}_{2kL} \quad (50)$$

$$v_{2kL} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (51)$$

$$[Q_k] = \begin{bmatrix} v_{2k}^r & v_{3k}^r \\ v_{2k}^z & v_{3k}^z \end{bmatrix} \quad (52)$$

Substituindo a Eq. (50) na Eq. (49) se obtém a equação cinemática em coordenadas globais cilíndricas  $(r, z)$ .

$$\hat{\mathbf{u}}_k(\zeta) = \hat{\mathbf{u}}_{ok} + \frac{t_k}{2} \zeta \varphi_k [Q_k] v_{2kL} \quad (53)$$

Descrevendo a Eq. (53) em componentes cilíndricas se tem:

$$\hat{\mathbf{u}}_k(\zeta) = \left( v_{ok} + \frac{t_k}{2} \zeta \varphi_k v_{2k}^r \right) \mathbf{i}_r + \left( w_k + \frac{t_k}{2} \zeta \varphi_k v_{2k}^z \right) \mathbf{k} \quad (54)$$

O deslocamento para um ponto, no interior do elemento, de coordenadas naturais  $(\eta, \zeta)$  é obtido por interpolação dos valores  $\hat{\mathbf{u}}_k(\zeta, \theta)$  correspondentes a cada aresta do elemento.

Com base no exposto temos a seguinte equação cinemática para o modelo.

$$\mathbf{u}(\eta, \zeta) = \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \hat{\mathbf{u}}_k(\zeta) \quad (55)$$

Descrevendo explicitamente a Eq. (55) se obtém:

$$\mathbf{u}(\eta, \zeta) = \left[ \sum_{k=1}^n N_k(\eta) v_{ok} + \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta \varphi_k v_{2k}^r \right] \mathbf{i}_r + \left[ \sum_{k=1}^n N_k(\eta) w_k + \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \frac{t_k}{2} \zeta \varphi_k v_{2k}^z \right] \mathbf{k} \quad (56)$$

A Eq. (56) descreve as relações cinemáticas, em coordenadas cilíndricas, utilizadas pelo modelo de primeira ordem que considera a deformação cisalhante, também conhecida na literatura técnico científico da área com FSDT (*First shear deformation theory*). Esta teoria embora seja mais adequada para modelar problemas de placas e cascas com relações dentro do intervalo  $100 \geq L/t \geq 10$  considera as deformações e tensões cisalhantes ao longo da espessura constantes.

#### 4.2.1 Relações constitutivas na FSDT

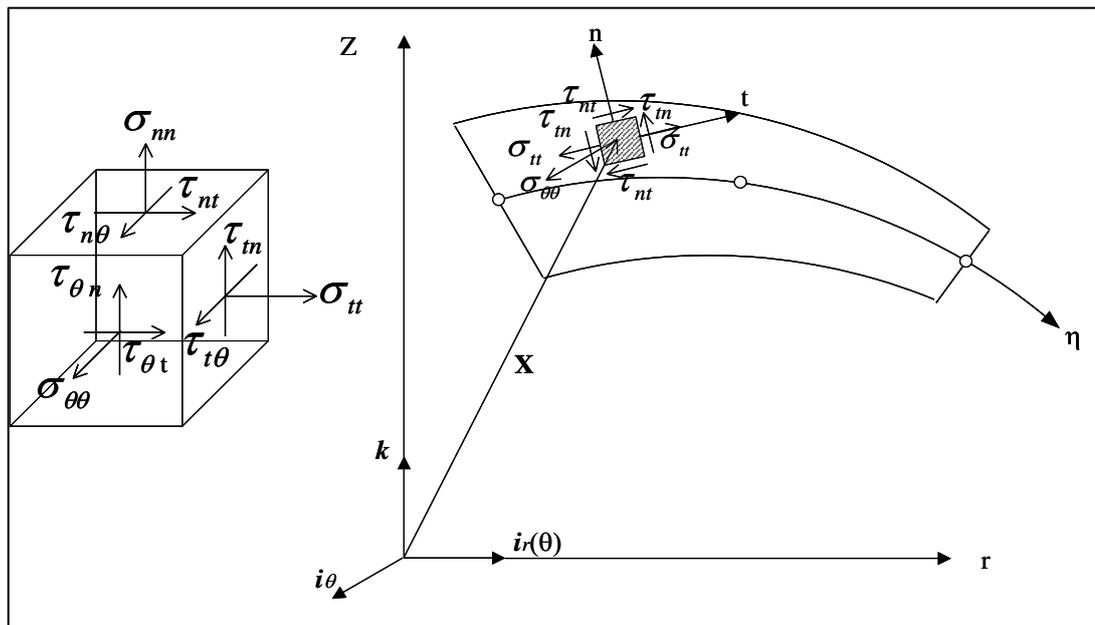
As equações constitutivas estabelecidas nesta seção referem-se a materiais homogêneos, elásticos lineares e isotrópicos.

Na determinação das relações constitutivas para este tipo de problema são introduzidas as hipóteses do modelo FSDT e as restrições de axissimetria.

Com relação as hipóteses do modelo não são consideradas deformações das fibras normais à superfície de referência, portanto  $\sigma_{nn} = 0$  (Fig.8). A restrição de deslocamento nulo na direção  $\mathbf{i}_\theta$  juntamente com as propriedades de isotropia do material tornam as tensões cisalhantes sobre a face perpendicular a  $\mathbf{i}_\theta$  também nulas. Portanto, para o problema de axissimetria, tem-se as seguintes restrições no tensor de tensões indicado na Fig.8:

$$\sigma_{nn} = \tau_{\theta n} = \tau_{\theta t} = 0.0 \quad (4.57)$$

Figura 8-Tensor tri-axial de tensões



Fonte: Adaptado Suarez (2005)

A matriz constitutiva para o problema com axissimetria é obtida a partir das restrições supracitadas na Eq. (57) sobre a matriz correspondente ao estado tridimensional de tensões como segue:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nn} \\ \tau_{nt} \\ \tau_{n\theta} \\ \tau_{\theta t} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{tt} \\ \varepsilon_{nn} \\ \gamma_{nt} \\ \gamma_{n\theta} \\ \gamma_{\theta t} \end{Bmatrix} \quad (58)$$

Aplicando as restrições da Eq. (57) sobre a Eq. (58) se obtém:

$$\sigma_{\theta\theta} = (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{tt} + \nu\varepsilon_{nn} \quad (59)$$

$$\sigma_{tt} = \nu\varepsilon_{\theta\theta} + (1-\nu)\varepsilon_{tt} + \nu\varepsilon_{nn} \quad (60)$$

$$\sigma_{nn} = 0 = \nu\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{tt} + (1-\nu)\varepsilon_{nn} \quad (61)$$

$$\tau_{nt} = \frac{(1-2\nu)}{2} \gamma_{nt} \quad (62)$$

$$\tau_{n\theta} = \frac{(1-2\nu)}{2} \gamma_{\theta n} = 0 \Rightarrow \gamma_{\theta n} = 0.0 \quad (63)$$

$$\tau_{\theta t} = \frac{(1-2\nu)}{2} \gamma_{\theta t} = 0 \Rightarrow \gamma_{\theta t} = 0.0 \quad (64)$$

Das equações (59), (60) e (61) se obtém:

$$\varepsilon_{nn} = -\frac{\nu(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{tt})}{(1-\nu)} \quad (65)$$

$$\varepsilon_{nn} = -\frac{\nu(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{tt})}{(1-\nu)} \quad (66)$$

Substituindo as equações (65) e (66) em (59) e (60) chega-se a:

$$\sigma_{tt} = \frac{\varepsilon_{tt}(1-2\nu) + \nu\varepsilon_{\theta\theta}(1-2\nu)}{(1-\nu)} \quad (67)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\varepsilon_{\theta\theta}(1-2\nu) + \nu\varepsilon_{tt}(1-2\nu)}{(1-\nu)} \quad (68)$$

Escrevendo as equações (67), (60) e (68) na forma matricial se obtém:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{tt} \\ \tau_{tn} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} & 0 & \frac{\nu(1-2\nu)}{(1-\nu)} \\ 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ \frac{\nu(1-2\nu)}{(1-\nu)} & 0 & \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{tt} \\ \gamma_{tn} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \end{Bmatrix} \quad (69)$$

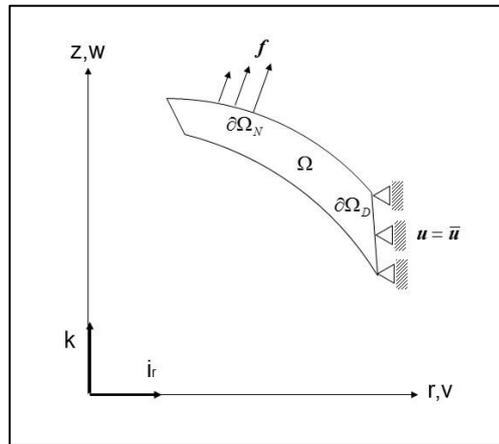
ou ainda:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{tt} \\ \tau_{tn} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu \\ \kappa(1-\nu) & 0 & 0 \\ \text{sym} & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{tt} \\ \gamma_{tn} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \end{Bmatrix} \quad (70)$$

Na equação (70),  $\kappa = \frac{5}{6}$  é o coeficiente de correção de cisalhamento de Reissner.

#### 4.3. FORMULAÇÃO FRACA PARA O PROBLEMA ESTÁTICO DO SÓLIDO ELÁSTICO

Figura 9-Deslocamentos perpendiculares ao plano



Fonte: Adaptado Suarez (2005)

O problema a ser modelado é de elasticidade tridimensional com restrições nos deslocamentos na direção perpendicular ao plano de simetria radial como indicado na Figura 9, ou seja, os deslocamentos não nulos são os que ocorrem nos planos de simetria radial  $(v, w)$ . O enunciado da formulação forte fica definido, para o problema estático, pelas equações de equilíbrio de (71) a (73).

$$\text{div} \sigma = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (71)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_N \quad (72)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_D \quad (73)$$

A solução que satisfazem as equações supracitadas é tal que  $\mathbf{u} \in \mathbf{Kin}$  e  $\mathbf{Kin} = \{\mathbf{u} \in C^2(\bar{\Omega}) / \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{x} \in \partial\Omega_D\}$ . Este conjunto, que contém a solução, é chamado cinematicamente admissível.

Aplicando o método de aproximação dos resíduos ponderados de Galerkin, o problema pode ser enunciado como:

Determinar  $\mathbf{u}_h \in T$  sendo que  $\dim(T) < \infty$  tal que,

$$\int_{\Omega} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v}_h = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \text{Var}_h \quad (74a)$$

$$T = \{\mathbf{u}_h \in H_1(\Omega) / \mathbf{u}_h = \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{x} \in \partial\Omega_D\} \quad (74b)$$

$$\text{Var}_h = \{\mathbf{v}_h \in H_1(\Omega) / \mathbf{v}_h = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \partial\Omega_D\} \quad (74c)$$

Nas equações (74b) e (74c),  $T$  é conhecido como conjunto das funções tentativas e  $\text{Var}_h$  tal que  $\dim(\text{Var}_h) < \infty$  é o conjunto das funções testes ou funções peso.

Como o operador da Eq. (71) não é simétrico com relação a  $T$ , já que o conjunto  $T$  não constitui um espaço vetorial, o problema posto desta forma não garante a unicidade da solução HUGES, T.J.R. [32]. Para contornar esta limitação os elementos  $\mathbf{u}_h \in T$  devem ser escritos como:

$$\mathbf{u}_h = \hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b} \quad (75)$$

Na equação (75) se tem  $\hat{\mathbf{u}}_h \in \text{Var}_h$  e  $\mathbf{b} \in T$  e  $\mathbf{b} = \bar{\mathbf{u}}$  em  $\partial\Omega_D$ . Desta forma, como o  $\mathbf{b}$  é conhecida, o problema enunciado pela Eq. (74a) pode ser redefinido, como determinar  $\hat{\mathbf{u}}_h \in \text{Var}_h$  que satisfaz (74a).

Introduzindo (75) e (74b) em (74a) se obtém:

$$\int_{\Omega} \text{div}\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}_h d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \text{Var} \quad (76)$$

Aplicando as propriedades de derivação de funções tensoriais, o integrando de (76) pode ser escrito de forma adequada para poder realizar uma integração por partes. De forma que:

$$\operatorname{div}(\sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}_h) = \operatorname{div}\sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}_h + \sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \nabla \mathbf{v}_h \quad (77)$$

$$\operatorname{div}(\sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}_h) - \sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \nabla \mathbf{v}_h = \operatorname{div}\sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}_h \quad (78)$$

Substituindo a expressão (78) na equação do resíduo (76) chega-se a:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}_h) d\Omega - \int_{\Omega} \sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \nabla \mathbf{v}_h d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \operatorname{Var}_h \quad (79)$$

Aplicando o teorema da divergência de Gauss ao primeiro integrando de (79) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega_N} (\sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_h d\Omega - \int_{\partial\Omega_D} (\sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_h d\Omega - \\ & \int_{\Omega} \sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \nabla \mathbf{v}_h d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \operatorname{Var}_h \end{aligned} \quad (80)$$

Como  $\mathbf{v}_h = 0$  em  $\partial\Omega_D$  conclui-se que a segunda integral é nula. Ainda como  $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}$  em  $\partial\Omega_N$  a expressão (80) toma a forma:

$$\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\partial\Omega - \int_{\Omega} \sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \nabla \mathbf{v}_h d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \operatorname{Var}_h \quad (81)$$

Na decomposição aditiva do gradiente de deslocamentos  $\nabla \mathbf{v}_h$  se obtém uma parcela simétrica,  $\nabla^s \mathbf{v}_h$ , correspondente ao tensor de Green Saint-Venant para pequenos deslocamentos e uma parcela antissimétrica,  $\nabla^a \mathbf{v}_h$ , correspondente as rotações de corpo rígido de forma que:

$$\nabla \mathbf{v}_h = \nabla^s \mathbf{v}_h + \nabla^a \mathbf{v}_h \quad (82)$$

Como  $\sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \nabla \mathbf{v}_h = \sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot (\nabla^s \mathbf{v}_h + \nabla^a \mathbf{v}_h)$  e ainda  $\sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \nabla^a \mathbf{v}_h = 0$  a expressão (81) pode ser reescrita como:

$$\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h d\partial\Omega - \int_{\Omega} \sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \nabla^s \mathbf{v}_h d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \operatorname{Var} \quad (83)$$

onde

$$\nabla^s \mathbf{v}_h = \frac{1}{2} (\nabla^T \mathbf{v}_h + \nabla \mathbf{v}_h) \quad (84)$$

Lembrando que  $\sigma(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{b})$  e  $\nabla^s \hat{\mathbf{v}}$  são simétricos e neste caso, para os produtos internos em (83), pode-se adotar os vetores de componentes simétricas  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}_h)$  e  $\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b})$  no funcional, de forma que:

$$\int_{\Omega} \sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \nabla^s \mathbf{v}_h d\Omega = \int_{\Omega} \sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) d\Omega \quad (85)$$

Introduzindo (85) em (83) se obtém:

$$\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\partial\Omega - \int_{\Omega} \sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in Var \quad (86)$$

Utilizando as relações constitutivas, para os materiais isotrópicos, estabelecidas na Eq. (70) se obtém:

$$\sigma(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) = \mathbf{D}\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_h + \mathbf{b}) = \mathbf{D}\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_h) + \mathbf{D}\varepsilon(\mathbf{b}) \quad (87)$$

Substituindo a equação (87) em (86) o funcional pode ser escrito como:

$$\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h d\partial\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{D}(\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_h) + \varepsilon(\mathbf{b})) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}_h) d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in Var_h \quad (88)$$

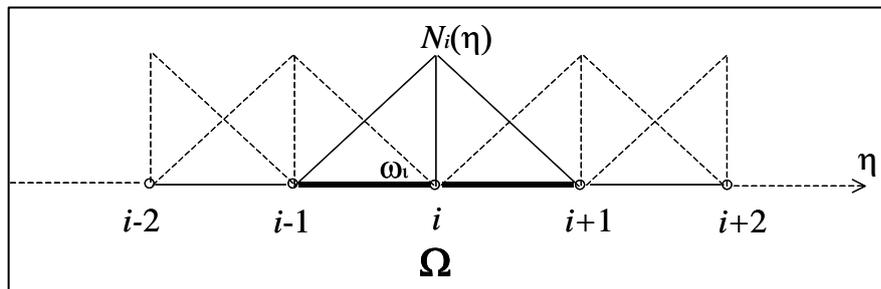
ou

$$\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h d\partial\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon^T(\mathbf{v}_h) \mathbf{C} \varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_h) d\Omega - \int_{\partial\Omega_D} \varepsilon^T(\mathbf{v}_h) \mathbf{D} \varepsilon(\mathbf{b}) d\partial\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in Var_h \quad (89)$$

A expressão (89) constitui a formulação fraca do problema considerando  $T$  e  $Var_h$  como uma variedade linear e um espaço vetorial, respectivamente, ambos de dimensão infinita. O passo seguinte, apresentado na próxima seção, é a construção das equações de Bunov-Galerkin para o problema discretizado com funções contínuas por partes.

#### 4.4. FORMULAÇÃO DISCRETIZADA COM FUNÇÕES CONTÍNUAS POR PARTES

Figura 10-Subdomínio e função global



Fonte: Adaptado Suarez (2005)

O problema discretizado consiste em obter uma solução aproximada, no sentido da média (com erro medido em norma  $L_2(\Omega)$ ), a partir de um espaço de aproximação de dimensão

finita. A base deste espaço é formada pelo conjunto de funções de forma contínuas por partes ou *piecewise* com domínios locais associados aos subdomínios obtidos a partir de uma malha de elementos finitos como mostrado na Fig.10. Neste caso a função  $N_i(\eta)$  está definida sobre o subdomínio  $\omega_i \subset \Omega$ . As expressões resultantes da projeção do campo de deslocamento  $\mathbf{u}$  neste espaço constituem as equações de Bunov-Galerkin do problema. Considerando que  $Var_h$  é de dimensão finita e  $dimVar_h = N_{no}$ , o problema de aproximação pode ser descrito como:

$$\mathbf{u} \cong \mathbf{u}_h(\eta, \zeta) \quad (90)$$

Onde

$$\mathbf{u}_h(\eta, \zeta) = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & N_i(\eta) & 0 & N_i(\eta) \frac{t_i}{2} \zeta v_{2i}^r & \cdots \\ \cdots & 0 & N_i(\eta) & N_i(\eta) \frac{t_i}{2} \zeta v_{2i}^z & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_i \\ \vdots \end{Bmatrix},$$

$$i = 1, \dots, N_{no}$$

(91)

Ou em forma compacta

$$\mathbf{u}_h(\eta, \zeta) = \mathbf{N}\mathbf{U} \quad (92)$$

onde

$$\mathbf{U}^T = \{\cdots v_i \quad w_i \quad \varphi_i \quad \cdots\} \quad (93)$$

#### 4.4.1 Vetor de deformações no sistema local de coordenadas

Para o problema de pequenos deslocamentos o tensor de deformações no sistema local de coordenadas é obtido por operações de transformação do gradiente de deslocamento no domínio paramétrico do elemento. Partindo da expressão (45), e considerando nula a componente de deslocamento  $u_\theta$ , o gradiente de deslocamento em coordenadas paramétricas é dado por:

$$\nabla_{\xi} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (94)$$

O tensor da Eq. (94) pode ser escrito, em forma vetorial, como a ação de um operador de diferenciação  $\partial_{\xi}(\cdot)$  atuando sobre o vetor campo de deslocamento, de forma que:

$$\tilde{\nabla}_{\xi} \mathbf{u} = \partial_{\xi} \mathbf{u} \quad (95)$$

Na Eq. (4.95),  $\mathbf{u}^T = \{v \quad w\}$  e  $\nabla_{\xi} \mathbf{u}^T = \left\{ \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right\}$ .

Na expressão (95)  $\partial_{\xi}(\cdot)$  tem a forma:

$$\partial_{\xi}(\cdot)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial \zeta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (96)$$

O vetor das componentes do gradiente  $\tilde{\nabla}_{\xi} \mathbf{u}$  na forma discretizada é obtido por:

$$\tilde{\nabla}_{\xi} \mathbf{u} = \partial_{\xi} \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (97)$$

Descrevendo explicitamente a Eq. (97) se obtém a seguinte expressão matricial para o vetor  $\tilde{\nabla}_{\xi} \mathbf{u}$ :

$$\nabla_{\xi} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cdots & N_{i,\eta}(\eta) & 0 & N_{i,\eta}(\eta) \frac{t_i}{2} \zeta v_{2r}^i & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & N_i(\eta) \frac{t_i}{2} v_{2r}^i & \cdots \\ \cdots & 0 & N_{i,\eta}(\eta) & N_{i,\eta}(\eta) \frac{t_i}{2} \zeta v_{2z}^i & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & N_i(\eta) \frac{t_i}{2} v_{2z}^i & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_i \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N_{no} \quad (98)$$

O vetor do gradiente de deslocamento  $\nabla_r \mathbf{u}$  com relação as coordenadas globais  $(r, Z)$  é obtido por:

$$\nabla_r \mathbf{u} = \mathbf{J} \tilde{\nabla}_{\xi} \mathbf{u} \quad (99)$$

Na Eq. (99)  $\mathbf{J}$  é o operador jacobiano definido por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{J}^{-1} \end{bmatrix} \quad (100)$$

onde  $\mathbf{J}$  e a matriz jacobiana definida na Eq. (101).

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (101)$$

Em forma discretizada pode-se escrever (99) como sendo:

$$\nabla_r \mathbf{u} = \mathbf{J} \partial_\xi \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (102)$$

Para diminuir o número de operadores envolvidas na Eq. (102) define-se  $\mathbf{G}_\xi = \partial_\xi \mathbf{N}$

portanto:

$$\nabla_r \mathbf{u} = \mathbf{J} \mathbf{G}_\xi \mathbf{U} \quad (103)$$

Como a equação constitutiva (70) está relacionada ao sistema local de coordenadas é necessário rotar o gradiente  $\nabla_r \mathbf{u}$  para o sistema local de coordenadas  $[\mathbf{t} \ : \ \mathbf{n} \ : \ \mathbf{i}_\theta]$  de cada ponto de integração. Sendo assim fica definido o vetor de componentes do gradiente de deslocamento no sistema local como:

$$\nabla_l \mathbf{u} = \mathbf{R} \mathbf{J} \mathbf{G}_\xi \mathbf{U} \quad (104)$$

Na Eq. (104)  $\mathbf{R}$  é um operador de rotação obtido a partir da matriz de rotação  $\mathbf{Q}_X$ , relativa ao ponto de integração definido pelo vetor posição  $\mathbf{X}$ .

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_r \mathbf{Q}_X^T & \mathbf{t}_z \mathbf{Q}_X^T \\ \mathbf{n}_r \mathbf{Q}_X^T & \mathbf{n}_z \mathbf{Q}_X^T \end{bmatrix} \quad (105)$$

Com o gradiente de deslocamento no sistema local de coordenadas, relativas ao ponto de integração  $\mathbf{X}$ , pode-se definir o vetor de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}_l$  como segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l = \mathbf{H} (\mathbf{H}_r \mathbf{R} \mathbf{J} \mathbf{G}_\xi + \mathbf{N}_r) \mathbf{U} \quad (106)$$

Na Eq. (106) a matriz  $\mathbf{N}_r$  e os operadores booleanos  $\mathbf{H}_r$  e  $\mathbf{H}$  são descritos nas Eqs. (107) a (109).

$$\mathbf{N}_r = \frac{1}{r_X} \begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & N_i(\eta) & 0 & N_i(\eta) \frac{h_i}{2} \zeta v_{2i}^r & \dots \end{bmatrix} \quad (107)$$

$$\mathbf{H}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (108)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (109)$$

A expressão (106) pode ser expressa em função da matriz de deformações  $\mathbf{B}_t$  como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{B}_t \mathbf{U} \quad (108)$$

Onde,

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{H} \left( \mathbf{H}_r \mathbf{R} \mathbf{J} \mathbf{G}_\xi + \mathbf{N}_r \right) \quad (109)$$

A formulação fraca, discretizada, do problema é obtida substituindo-se as expressões (108) e (92) em (89). A equação resultante tem a seguinte forma:

$$-\int_{\Omega} \mathbf{B}_t^T \mathbf{C} \mathbf{B}_t d\Omega \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{U}} - \int_{\Omega} \mathbf{B}_t^T \mathbf{C} \mathbf{B}_t d\Omega \bar{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{U}} + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\partial\Omega \hat{\mathbf{U}} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{3N_{no}} \quad (110)$$

Ou ainda

$$\left( -\int_{\Omega} \mathbf{B}_t^T \mathbf{C} \mathbf{B}_t d\Omega \mathbf{U} - \int_{\Omega} \mathbf{B}_t^T \mathbf{C} \mathbf{B}_t d\Omega \bar{\mathbf{U}} + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\partial\Omega \right) \cdot \hat{\mathbf{U}} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{3N_{no}} \quad (111)$$

Da expressão (111) obtém-se a equação, conhecida nas formulações de MEF clássico, com a forma:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}_t^T \mathbf{C} \mathbf{B}_t d\Omega \mathbf{U} = \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\partial\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}_t^T \mathbf{C} \mathbf{B}_t d\Omega \bar{\mathbf{U}} \quad (112)$$

A equação (112) pode ser colocada na forma compacta usual como:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (113)$$

Onde

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{C} \mathbf{B}_i d\Omega \quad (114)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\partial\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{C} \mathbf{B}_i d\Omega \bar{\mathbf{U}} \quad (115)$$

Na equação (115)  $\bar{\mathbf{U}}$  é o vetor de parâmetros de deslocamento conhecidos sobre a fronteira de Dirichlet. Este vetor de dimensão  $3N_{no}$  está associado à função  $\mathbf{b}$  da Eq. (89) e tem todos seus valores nulos com exceção dos prescritos sobre a fronteira de *Dirichlet*.

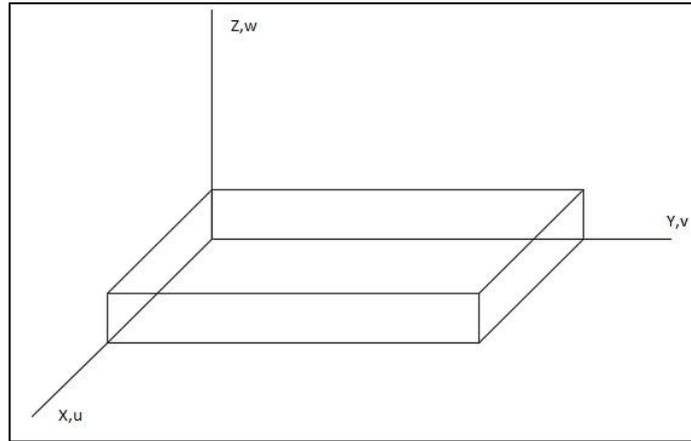
A teoria cinemática descrita nesta seção corresponde ao primeiro modelo a considerar a deformação cisalhante e a inércia rotacional denominada no jargão da área como *first shear deformation theory* (FSDT). As teorias de primeira ordem que consideram deformação cisalhante constituíram um grande avanço com relação à *teoria clássica da laminação* (TCL). Neste sentido as FSDT permitem determinar as tensões cisalhantes interlaminares de forma mais precisa do que o TCL e prever fenômenos de falhas por delaminação.

Embora estas teorias tenham mostrado resultados mais satisfatórios do que TCL as mesmas apresentam uma distribuição inadequada da deformação cisalhante que neste caso é constante ao longo da espessura e apresenta valores não nulos nas superfícies livres da placa. O fato de se ter tensões na superfície livres da placa constitui uma inconsistência física do modelo. Para contornar esta dificuldade surgem as teorias cinemáticas cúbicas denominadas de *Third shear deformation theory* (TSDT). Dentre elas serão comentadas neste documento as teorias de Kant, Owen e Zienkiewicz (1982) e Reddy (1984)

#### 4.4.2 Teoria cinemática de Reddy

Nesta seção a teoria de Reddy será abordada sob dois focos: o primeiro consiste na abordagem original para uma placa retangular em coordenadas cartesianas, a segunda abordagem será feita em coordenadas cilíndricas para ser adaptada aos modelos de placas e cascas de revolução.

Figura 11-Campo deslocamento



Fonte: Autor (2017)

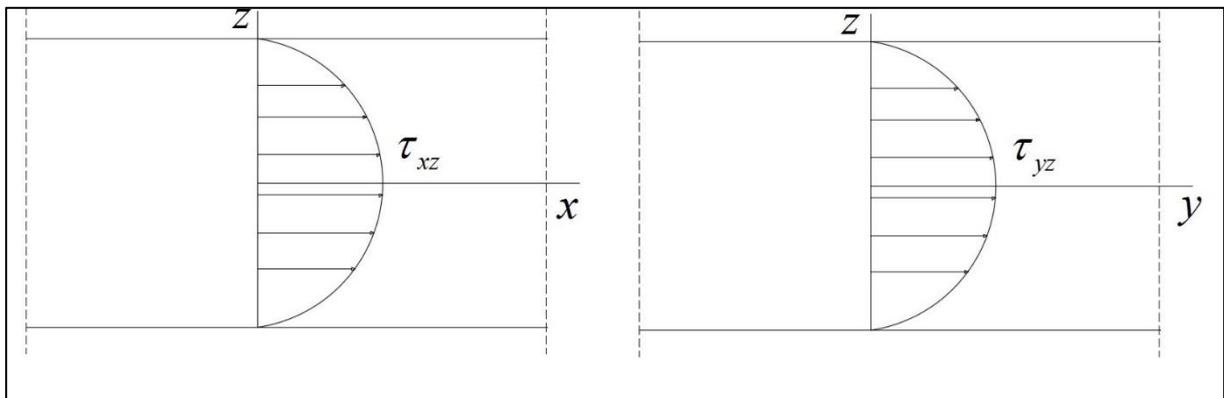
Em coordenadas cartesianas a teoria cinemática proposta por Reddy (1984) será abordada para a placa retangular de material homogêneo e isotrópico indicada na Fig. 11.

Esta teoria propõe um campo cúbico com relação a variável “z” da espessura para as componentes membranais do campo de deslocamento conforme indicado na equação (117)

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) + z^2\alpha_x(x, y) + z^3\beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) + z^2\alpha_y(x, y) + z^3\beta_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (117)$$

O modelo cinemático de Reddy é obtido a partir da Eq. (117) e da consideração das condições de tensão cisalhante nula nas superfícies livres da placa obtendo-se uma distribuição parabólica para as tensões cisalhantes com pode ser visto na Fig. 12.

Figura 12-Tensão nula



Fonte: Autor (2017)

Aplicando as condições de tensão cisalhante nula nas superfícies livres  $\tau_{xz}(x, y, \pm h/2) = 0$  e  $\tau_{yz}(x, y, \pm h/2) = 0$ , ainda considerando o material homogêneo e isotrópico se tem:

$$\begin{aligned}\tau_{xz}(x, y, \pm h/2) &= G\gamma_{xz}(x, y, \pm h/2) = 0 \\ \tau_{yz}(x, y, \pm h/2) &= G\gamma_{yz}(x, y, \pm h/2) = 0\end{aligned}\tag{118}$$

A partir da Eq. (118) como  $G$  é diferente de zero se tem que as deformações  $\gamma_{xz}(x, y, \pm h/2) = 0$  e  $\gamma_{yz}(x, y, \pm h/2) = 0$ .

Substituindo a Eq. (118) na Eq. (119) e na Eq. (120), aplicando as condições de contorno de deformação cisalhante nula nas superfícies livres da placa e considerando  $\theta_x = \theta_y = 0$ , após manipulação algébrica chega-se as Eqs. (121) a (123).

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\tag{119}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\tag{120}$$

$$u(x, y, z) = u_0 + z\varphi_x - \frac{4}{3h^2} \left( \frac{\delta w_0}{\delta x} + \varphi_x \right) z^3\tag{121}$$

$$v(x, y, z) = v_0 + z\varphi_y - \frac{4}{3h^2} \left( \frac{\delta w_0}{\delta y} + \varphi_y \right) z^3\tag{122}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)\tag{123}$$

Na próxima subseção será descrito o modelo cinemático de Reddy em coordenadas cilíndricas e adaptado para abordagem de problemas de placas e cascas de revolução.

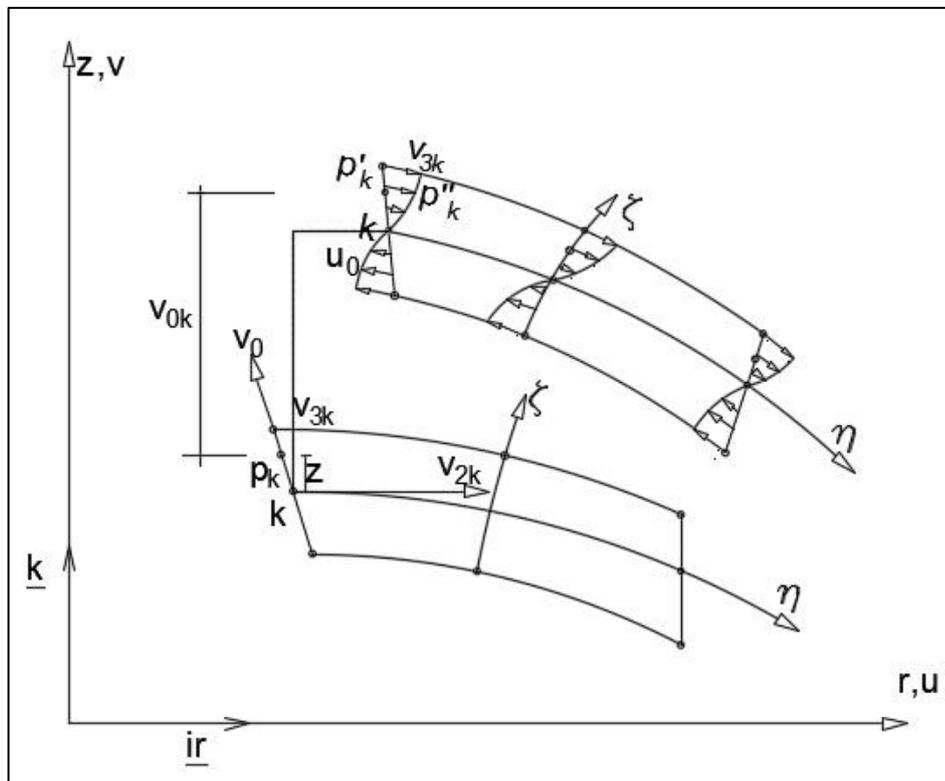
#### 4.4.3 Modelo Cinemático de Reddy em coordenadas cilíndricas

Para descrição da teoria cinemática em coordenadas cilíndricas não será imposta a restrição de tensão cisalhante nula na superfície livre com coordenadas locais  $z = \pm \frac{h_k}{2}$ . A teoria adaptada para coordenadas cilíndricas nesta subseção será obtida a partir da Eqs. (117). Neste caso a restrição de tensão cisalhante nula é obtida de forma indireta em nível de pós processamento.

A teoria será adaptada para o elemento sólido degenerado proposto por Ahmad, Irons e Zienkiewicz (1970), descrito em coordenadas cilíndricas conforme Batoz e Dhatt (1992)

De forma similar ao modelo proposto por Ahmad, Irons e Zienkiewicz (1970), os deslocamentos no interior do elemento sobre uma superfície com coordenada Gaussiana  $\zeta = cte.$  é obtido por interpolação dos deslocamentos de pontos sobre as arestas do elemento com a mesma coordenada natural  $\zeta$ . A posição final do ponto  $p_k$  (ver Fig.13) após o deslocamento é descrita pela Eq. (124).

Figura 13-Deslocamento no Sistema Global de Coordenadas



Fonte: Autor (2017)

$$\hat{\mathbf{u}}_k(z) = \begin{Bmatrix} v_{ok} \\ w_{ok} \end{Bmatrix} + z\varphi_k \mathbf{v}_{2k} + z^2 \alpha_k \mathbf{v}_{2k} + z^3 \beta_k \mathbf{v}_{2k} \quad k=1, \dots, 3 \quad (124)$$

Na Eq. (124)  $z$  é a coordenada local indicada na Fig.12 e  $\mathbf{v}_{2k}$  está descrito no sistema local de coordenadas por  $\mathbf{v}_{2k}^T = \{1, 0\}$ . Como é conveniente descrever o deslocamento no

sistema global de coordenadas é a coordenada local  $z$  em função da coordenada natural  $\zeta$  a Eq. (124) passa a ser descrita por,

$$\hat{\mathbf{u}}_k(z) = \begin{Bmatrix} v_{ok} \\ w_{ok} \end{Bmatrix} + \frac{h}{2} \zeta \varphi_k \mathbf{Q} \mathbf{v}_{2k} + \frac{h^2}{4} \zeta^2 \mathbf{Q} \alpha_k \mathbf{v}_{2k} + \frac{h^3}{8} \zeta^3 \beta_k \mathbf{Q} \mathbf{v}_{2k} \quad (125)$$

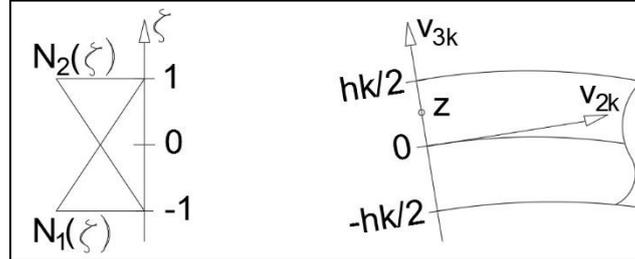
Na Eq. (125)  $\mathbf{Q}$  é a matriz de rotação descrita na Eq. (126) por,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} v_{2k}^r & v_{3k}^r \\ v_{2k}^z & v_{3k}^z \end{bmatrix} \quad (126)$$

Por outro lado, a variável local  $z$  medida na direção da espessura é obtida através de uma função de mapeamento linear descrita na Eq. (127). Nesta função de mapeamento são utilizadas as funções Lagrangeanas lineares e as coordenadas extremas na direção  $z$  na aresta definidas por  $z = \pm \frac{h_k}{2}$  como indicado na Fig.14.

$$z(\zeta) = -\frac{h_k}{2} N_1(\zeta) + \frac{h_k}{2} N_2(\zeta) \quad (127)$$

Figura 14-Funções lineares de mapeamento e coordenadas extremas da variável  $z$  na aresta



Fonte: Autor (2017)

As funções  $N_1(\zeta)$  e  $N_2(\zeta)$  são as funções lineares de interpolação definidas pelas Eq. (128a) e (128b) como segue,

$$N_1(\zeta) = \frac{1}{2}(1-\zeta) \quad (128a)$$

$$N_2(\zeta) = \frac{1}{2}(1+\zeta) \quad (128b)$$

Substituindo as Eqs. (128a) e (128b) na Eq. (127) se tem,

$$z(\zeta) = \frac{h_k}{2} \zeta \quad (129)$$

Por outro lado, substituindo as Eqs. (4.127), (4.128a) e (4.128b) na Eq. (4.126) se obtém:

$$\hat{\mathbf{u}}_k(\zeta) = \begin{Bmatrix} v_{ok} \\ w_{ok} \end{Bmatrix} + \frac{h}{2} \zeta \varphi_k \begin{Bmatrix} v_{2k}^r \\ v_{2k}^z \end{Bmatrix} + \frac{h^2}{4} \zeta^2 \alpha_k \begin{Bmatrix} v_{2k}^r \\ v_{2k}^z \end{Bmatrix} + \frac{h^3}{8} \zeta^3 \beta_k \begin{Bmatrix} v_{2k}^r \\ v_{2k}^z \end{Bmatrix} \quad (130)$$

A Eq. (130) representa o deslocamento de um ponto sobre uma aresta  $k$  numa posição definida pela coordenada natural  $\zeta$ . As componentes do vetor deslocamento para um ponto  $X$  no interior do elemento são obtidas por interpolação quadrática descrita na Eq. (131) como segue.

$$\mathbf{u}_X(\eta, \zeta) = \sum_{k=1}^n N_k(\eta) \hat{\mathbf{u}}_k(\zeta) \quad n = 1, 2, 3 \quad (131)$$

Descrevendo a Eq. (4.131) de forma explicita se obtém,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_X(\eta, \zeta) = & \sum_k N_k(\eta) \begin{Bmatrix} v_{ok} \\ w_{ok} \end{Bmatrix} + N_k(\eta) \frac{h}{2} \zeta \varphi_k \begin{Bmatrix} v_{2k}^r \\ v_{2k}^z \end{Bmatrix} + \\ & N_k(\eta) \frac{h^2}{4} \zeta^2 \alpha_k \begin{Bmatrix} v_{2k}^r \\ v_{2k}^z \end{Bmatrix} + N_k(\eta) \frac{h^3}{8} \zeta^3 \beta_k \begin{Bmatrix} v_{2k}^r \\ v_{2k}^z \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (132)$$

Na Eq. (132),  $N_k(\eta)$  são as funções de forma lagrangeanas quadráticas definidas em domínios unidimensionais para  $-1 \leq \eta \leq 1$ .

Uma forma alternativa e mais conveniente de descrever a Eq. (132) e na forma matricial como indicado na Eq. (133),

$$\mathbf{u}_X(\eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \dots & N_k & 0 & N_k \frac{h_k}{2} \zeta v_{2k}^r & N_k \frac{h_k^2}{4} \zeta^2 v_{2k}^r & N_k \frac{h_k^3}{8} \zeta^3 v_{2k}^r & \dots \\ \dots & 0 & N_k & N_k \frac{h_k}{2} \zeta v_{2k}^z & N_k \frac{h_k^2}{4} \zeta^2 v_{2k}^z & N_k \frac{h_k^3}{8} \zeta^3 v_{2k}^z & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_k \\ w_k \\ \varphi_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (133)$$

De forma compacta a Eq. (133) pode ser descrita como o produto da matriz de funções de forma pelo vetor de parâmetros de deslocamento conforme Eq. (134).

$$\mathbf{u}_X(\eta, \zeta) = \mathbf{N}(\eta, \zeta) \mathbf{U} \quad (134)$$

Na Eq. (4.134) se tem a matriz de funções de forma descrita pela Eq. (135) e o vetor de parâmetros de deslocamento descrito pela Eq. (136).

$$\mathbf{N}(\eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \cdots & N_k & 0 & N_k \frac{h_k}{2} \zeta v_{2k}^r & N_k \frac{h_k^2}{4} \zeta^2 v_{2k}^r & N_k \frac{h_k^3}{8} \zeta^3 v_{2k}^r & \cdots \\ \cdots & 0 & N_k & N_k \frac{h_k}{2} \zeta v_{2k}^z & N_k \frac{h_k^2}{4} \zeta^2 v_{2k}^z & N_k \frac{h_k^3}{8} \zeta^3 v_{2k}^z & \cdots \end{bmatrix} \quad (135)$$

$$\mathbf{U}^T = \{\cdots \ v_k \ w_k \ \varphi_k \ \alpha_k \ \beta_k \ \cdots\}, \quad k=1, \dots, 3 \quad (136)$$

A partir do modelo cinemático descrito na forma matricial que descreve o deslocamento de pontos no interior de um elemento é determinado o gradiente de deslocamento com as funções  $(\eta, \zeta)$  e no sistema global de coordenadas descrito pela Eq. (137).

$$\nabla_{\zeta} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cdots & N_{k,\eta} & 0 & N_{k,\eta} \frac{h_k}{2} \zeta v_{2k}^r & N_{k,\eta} \frac{h_k^2}{4} \zeta^2 v_{2k}^r & N_{k,\eta} \frac{h_k^3}{8} \zeta^3 v_{2k}^r & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & N_k \frac{h_k}{2} v_{2k}^r & N_k \frac{h_k^2}{2} \zeta v_{2k}^r & 3N_k \frac{h_k^3}{8} \zeta^2 v_{2k}^r & \cdots \\ \cdots & 0 & N_{k,\eta} & N_{k,\eta} \frac{h_k}{2} \zeta v_{2k}^z & N_{k,\eta} \frac{h_k^2}{4} \zeta^2 v_{2k}^z & N_{k,\eta} \frac{h_k^3}{8} \zeta^3 v_{2k}^z & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & N_k \frac{h_k}{2} v_{2k}^z & N_k \frac{h_k^2}{2} \zeta v_{2k}^z & 3N_k \frac{h_k^3}{8} \zeta^2 v_{2k}^z & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ v_k \\ w_k \\ \varphi_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (137)$$

$$k = 1, \dots, 3.$$

A equação (137) é obtida através do mesmo operador diferencial que o descrito na equação (95), podendo ser descrita em forma matricial pela Eq. (138).

$$\nabla_{\zeta} \mathbf{u} = \partial_{\zeta} \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (138)$$

Na Eq. (138) para o modelo de Reddy se tem,

$$\mathbf{G}_{\zeta} = \begin{bmatrix} \cdots & N_{k,\eta} & 0 & N_{k,\eta} \frac{h_k}{2} \zeta v_{2k}^r & N_{k,\eta} \frac{h_k^2}{4} \zeta^2 v_{2k}^r & N_{k,\eta} \frac{h_k^3}{8} \zeta^3 v_{2k}^r & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & N_k \frac{h_k}{2} v_{2k}^r & N_k \frac{h_k^2}{2} \zeta v_{2k}^r & 3N_k \frac{h_k^3}{8} \zeta^2 v_{2k}^r & \cdots \\ \cdots & 0 & N_{k,\eta} & N_{k,\eta} \frac{h_k}{2} \zeta v_{2k}^z & N_{k,\eta} \frac{h_k^2}{4} \zeta^2 v_{2k}^z & N_{k,\eta} \frac{h_k^3}{8} \zeta^3 v_{2k}^z & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & N_k \frac{h_k}{2} v_{2k}^z & N_k \frac{h_k^2}{2} \zeta v_{2k}^z & 3N_k \frac{h_k^3}{8} \zeta^2 v_{2k}^z & \cdots \end{bmatrix} \quad (139a)$$

$$\mathbf{U}^T = \{\cdots \ v_k \ w_k \ \varphi_k \ \alpha_k \ \beta_k \ \cdots\} \quad (139b)$$

O vetor gradiente no sistema global e local de coordenadas  $\nabla_r \mathbf{u}$  e  $\nabla_l \mathbf{u}$  são obtidos a partir da equação (138) da forma descrita nas equações (100) e (105).

Devido a que o vetor de deformações tem os mesmos componentes para o modelo FSDT do que para o modelo TSDT de Reddy o vetor de deformações no sistema local de coordenadas é descrito pela Eq. (106) sendo que neste caso as alterações necessárias estão definidas: no gradiente descrito na Eq. (139a), no vetor de parâmetros de deslocamento descrito na Eq. (139b) e na matriz  $N_r$  é definida pela Eq. (140).

$$N_r = \frac{1}{r_x} \begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & N_k & 0 & N_k \frac{h_k}{2} \zeta v_{2k}^r & N_k \frac{h_k^2}{4} \zeta^2 v_{2k}^r & N_k \frac{h_k^3}{8} \zeta^3 v_{2k}^r & \dots \end{bmatrix} \quad (140)$$

Para materiais homogêneos e isotrópicos em regime elástico linear as equações constitutivas da teoria cinemática de Reddy é idêntica à do modelo FSDT, portanto são definidas pela equação matricial (70).

A formulação fraca discretizada para esta teoria, da mesma forma que para a FSDT, é descrita pelas equações (112) a (115).

O modelo apresentado nesta seção faz parte das teorias que não levam em conta a deformação na direção normal à superfície de referência da casca. O intuito principal destas teorias é representar de forma mais adequada a deformação cisalhante e com isto as tensões cisalhantes Inter laminares que ocorrem em materiais compostos por laminados. A teoria que será abordada na próxima seção constitui o modelo cinemático cúbico de Kant (1982) que leva em consideração a deformação normal à superfície média.

#### 4.4.4 Teoria cinemática de Kant

A teoria cinemática de Kant (1982) propõe uma função polinomial cúbica incompleta para descrever os deslocamentos de membrana e uma função polinomial quadrática para descrever os deslocamentos transversais ao plano médio, ambas as funções descritas a partir da variável  $z$  na direção da espessura. Em coordenadas cartesianas a teoria de Kant com também chamada de teoria cúbica com normal extensível é descrita pelas equações (141a) a (141c).

$$u(x, y, z) = u_o(x, y) + z\varphi_x(x, y) + z^3\beta_x(x, y) \quad (141a)$$

$$v(x, y, z) = v_o(x, y) + z\varphi_y(x, y) + z^3\beta_y(x, y) \quad (141b)$$

$$w(x, y, z) = w_o(x, y) + z^2w^*(x, y) \quad (141c)$$

As componentes de deslocamentos  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  e  $w(x, y, z)$  estão relacionadas aos eixos cartesianos  $(x, y, z)$  como indicado na Fig.11. As componentes do deslocamento nas direções dos eixos coordenados para pontos sobre a superfície de referência da placa são definidas por  $u_o(x, y)$ ,  $v_o(x, y)$  e  $w_o(x, y)$ . Nas equações (4.141a) a (4.141c)  $\varphi_x(x, y)$  e  $\varphi_y(x, y)$  são os parâmetros associados à rotação de fibras da placa perpendiculares à superfície média (ou superfície de referência);  $\beta_x(x, y)$  e  $\beta_y(x, y)$  são os parâmetros responsáveis pela variação da rotação com a variável  $z$  e finalmente o termo  $w^*(x, y)$  é o parâmetro responsável pela variação quadrática do deslocamento transversal com a variável  $z$ .

O propósito desta seção é utilizar o modelo cinemático de Kant na abordagem de problemas de placas e cascas de revolução sujeitas a carregamentos com simetria axial de forças. Dentro deste contexto o modelo cinemático será descrito em coordenadas cilíndricas com restrições da componente nas direções perpendiculares aos planos de simetria radial, ou seja, considerando a componente  $u_\theta = 0$ .

De forma similar à seção anterior o modelo será adaptado ao elemento sólido degenerado de ordem quadrática. O deslocamento para um ponto  $\mathbf{X}$  no interior do elemento sobre uma superfície com coordenada paramétrica  $\zeta = cte.$  é obtida por interpolação dos deslocamentos nas arestas do elemento para pontos com a mesma coordenada natural.

Para o ponto  $p_k$  sobre uma aresta  $k$  descrito na Fig. 12, o deslocamento em função da coordenada natural  $\zeta$  é descrito pela Eq. (142).

$$\hat{\mathbf{u}}_k(z) = \left\{ \begin{matrix} v_{ok} \\ w_{ok} \end{matrix} \right\} + z\varphi_k \mathbf{v}_{2kL} + z^2 w_k^* \mathbf{v}_{3kL} + z^3 \beta_k \mathbf{v}_{2kL} \quad k=1, \dots, 3 \quad (142)$$

Na Eq. (142) descrevendo  $z = z(\zeta)$  e  $\mathbf{v}_{2kL}$  e  $\mathbf{v}_{3kL}$  no sistema global de coordenadas se obtém a Eq. (143) para as componentes de deslocamento do ponto  $p_k$ .

$$\hat{\mathbf{u}}_k(\boldsymbol{\zeta}) = \begin{Bmatrix} v_{ok} \\ w_{ok} \end{Bmatrix} + \varphi_k \frac{h_k}{2} \boldsymbol{\zeta} \begin{Bmatrix} v_{2k}^r \\ v_{2k}^z \end{Bmatrix} + w_k^* \frac{h_k^2}{4} \boldsymbol{\zeta}^2 \begin{Bmatrix} v_{3k}^r \\ v_{3k}^z \end{Bmatrix} + \beta_k \frac{h_k^3}{8} \boldsymbol{\zeta}^3 \begin{Bmatrix} v_{2k}^r \\ v_{2k}^z \end{Bmatrix} \quad k=1,\dots,3 \quad (143)$$

O vetor deslocamento num ponto  $\mathbf{X}$  no interior do elemento sobre uma superfície com coordenada natural  $\boldsymbol{\zeta}$  é obtido por interpolação  $\hat{\mathbf{u}}_k(\boldsymbol{\zeta})$  como descrito na Eq. (144).

$$\mathbf{u}_X(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \sum_{k=1}^3 N_k(\boldsymbol{\eta}) \begin{Bmatrix} v_{ok} \\ w_{ok} \end{Bmatrix} + \varphi_k N_k(\boldsymbol{\eta}) \frac{h_k}{2} \boldsymbol{\zeta} \begin{Bmatrix} v_{2k}^r \\ v_{2k}^z \end{Bmatrix} + w_k^* N_k(\boldsymbol{\eta}) \frac{h_k^2}{4} \boldsymbol{\zeta}^2 \begin{Bmatrix} v_{3k}^r \\ v_{3k}^z \end{Bmatrix} + \beta_k N_k(\boldsymbol{\eta}) \frac{h_k^3}{8} \boldsymbol{\zeta}^3 \begin{Bmatrix} v_{2k}^r \\ v_{2k}^z \end{Bmatrix} \quad k=1,\dots,3 \quad (144)$$

A Eq. (144) pode ser escrita de forma compacta utilizando notação matricial como indicado na Eq. (134) onde:

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \begin{bmatrix} \cdots & N_k & 0 & N_k \frac{h_k}{2} \boldsymbol{\zeta} v_{2k}^r & N_k \frac{h_k^2}{4} \boldsymbol{\zeta} v_{3k}^r & N_k \frac{h_k^3}{8} \boldsymbol{\zeta} v_{2k}^r & \cdots \\ \cdots & 0 & N_k & N_k \frac{h_k}{2} \boldsymbol{\zeta} v_{2k}^z & N_k \frac{h_k^2}{4} \boldsymbol{\zeta} v_{3k}^z & N_k \frac{h_k^3}{8} \boldsymbol{\zeta} v_{2k}^z & \cdots \end{bmatrix} \quad (145)$$

$$\mathbf{U}^T = \{\cdots \quad v_k \quad w_k \quad \varphi_k \quad w_k^* \quad \beta_k \quad \cdots\} \quad k=1,\dots,3 \quad (146)$$

A partir da Eq. (145) se obtém vetor de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  no sistema local de coordenadas definido pela Eq. (106). Deve-se ressaltar aqui que ao contrário que na teoria cúbica de Reddy onde a deformação  $\varepsilon_z = 0$  esta consideração não é feita na teoria de Kant (1982) já que se tem normal extensível e, portanto  $\varepsilon_z \neq 0$  e conseqüentemente  $\sigma_z \neq 0$ . Estas considerações trazem conseqüências diretas na relação constitutiva definida na Eq. (76) e no vetor de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  que terão uma componente a mais.

O vetor de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}_t^T = \{\varepsilon_r \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{rz} \quad \varepsilon_\theta\}$  no sistema local de coordenadas correspondentes ao ponto  $\mathbf{X}$  definido pelos vetores  $\{\mathbf{t} \quad \mathbf{n}\}$  é obtido a partir da Eq. (106) com alterações nas matrizes  $\mathbf{G}_\zeta$ ,  $\mathbf{N}_r$  e o operador booleano  $\mathbf{H}$  conforme descrito pelas equações (147) a (149).

$$\mathbf{G}_\xi = \begin{bmatrix} \cdots & N_{k,\eta} & 0 & N_{k,\eta} \frac{h_k}{2} \zeta v_{2k}^r & N_{k,\eta} \frac{h_k^2}{4} \zeta^2 v_{3k}^r & N_{k,\eta} \frac{h_k^3}{8} \zeta^3 v_{2k}^r & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & N_k \frac{h_k}{2} v_{2k}^r & N_k \frac{h_k^2}{2} \zeta v_{3k}^r & 3N_k \frac{h_k^3}{8} \zeta^2 v_{2k}^r & \cdots \\ \cdots & 0 & N_{k,\eta} & N_{k,\eta} \frac{h_k}{2} \zeta v_{2k}^z & N_{k,\eta} \frac{h_k^2}{4} \zeta^2 v_{3k}^z & N_{k,\eta} \frac{h_k^3}{8} \zeta^3 v_{2k}^z & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & N_k \frac{h_k}{2} v_{2k}^z & N_k \frac{h_k^2}{2} \zeta^2 v_{3k}^z & 3N_k \frac{h_k^3}{8} \zeta^2 v_{2k}^z & \cdots \end{bmatrix} \quad (147)$$

$$\mathbf{N}_r = \frac{1}{r_X} \begin{bmatrix} \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & N_k & 0 & N_k \frac{h_k}{2} \zeta v_{2k}^r & N_k \frac{h_k^2}{4} \zeta^2 v_{3k}^r & N_k \frac{h_k^3}{8} \zeta^3 v_{2k}^r & \cdots \end{bmatrix} \quad (148)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (149)$$

A partir destas alterações correspondente as Eqs. (147) a (149) o vetor de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  definido em forma discreta pela Eq. (107) e a matriz de deformações pela Eq. (108).

Uma outra alteração do modelo cinemático de Kant (1982) com relação aos modelos cinemáticos de Reddy e Mindlin diz respeito a matriz constitutiva, já que neste modelo se tem  $\varepsilon_z \neq 0 \mathbf{e}$

$\sigma_z \neq 0$ . Para o modelo de Kant (1982) as relações constitutivas são estabelecidas a partir da Eq. (4.58) sobre a qual se faz a restrição de deformações cisalhantes  $\gamma_{t\theta} = \gamma_{n\theta} = 0$ , resultando a Eq. (150).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_n \\ \gamma_{nt} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 & \nu \\ & (1-\nu) & 0 & \nu \\ \text{sim} & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ & & & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_n \\ \gamma_{nt} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (150)$$

Definida a relação constitutiva por meio da Eq. (150) considerando um material homogêneo e isotrópico com resposta elástico linear a formulação fraca discretizada, em nível do elemento, para o problema estático em é obtida pela Eq. (112) e como consequência a matriz de rigidez e o vetor de forças consistentes são definidos pelas equações (113) e (114).

As formulações descritas nas seções supracitadas referem-se a materiais homogêneos e isotrópicos o passo seguinte a ser abordado na próxima seção trata de materiais compostos por laminados. Neste contexto será abordada a integração em camadas da Eq. (112) considerando cada camada constituída por uma lâmina de material ortótropo.

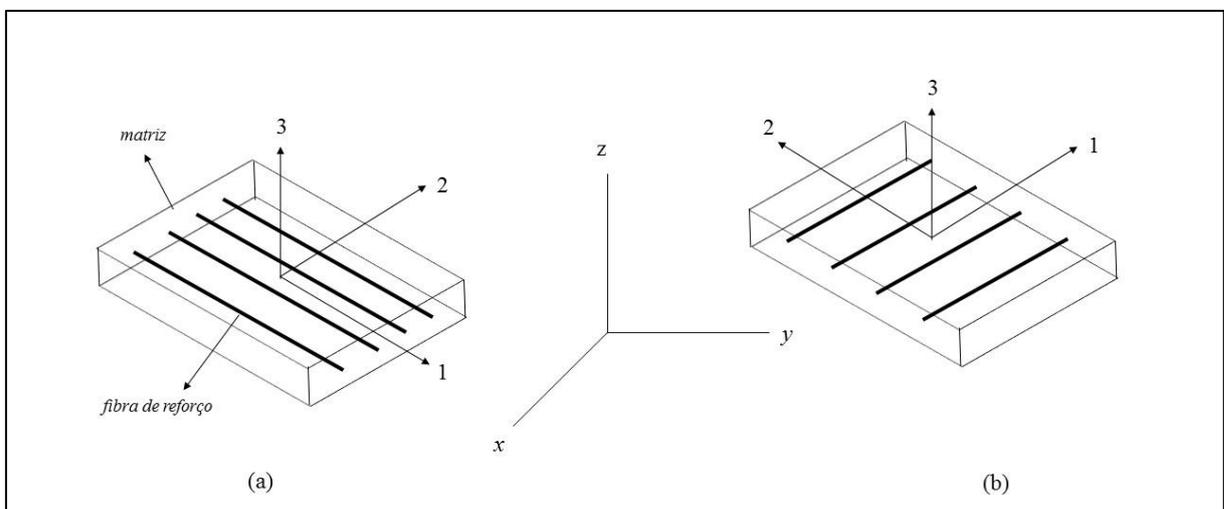
## 5. MATERIAIS E MÉTODOS

Dentro do contexto dos materiais compostos por laminados o qual constitui um tema muito amplo, este capítulo se limitara à abordagem sucinta de compostos por laminados constituídos por empilhamento de lâminas com orientações  $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ, \dots, 0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$  com relação ao sistema principal de coordenadas definido pela direção da fibra em cada lâmina. A análise nas orientações supracitadas se deve ao fato de que os empilhamentos não devem produzir empenamentos de forma a que  $\gamma_{\theta_i} \neq 0$  e  $\gamma_{\theta_n} \neq 0$ .

Este capítulo se restringira à abordagem macro mecânica, ou seja, cada lâmina se comporta com um material ortótropo com propriedades mecânicas aparentes médias em sua forma macroscópica.

No que se refere ao tipo de laminado composto estudado neste trabalho o mesmo refere-se a placas constituídas de uma matriz polimérica reforçada com fibras unidirecionais como mostrado na Figura 15.

Figura 15-Direções principais no laminado coincidindo com a direção da fibra



Fonte: Autor (2017)

### 5.1. EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

As relações constitutivas abordadas aqui correspondem da lei de Hooke para materiais anisotrópicos e não homogêneos em regime elástico linear. Considerando que os coeficientes

elásticos são constantes nas condições normais de temperatura e pressão a equação constitutiva para um material anisotrópico é definida por uma transformação linear descrita na Eq. (151) a seguir.

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, \dots, 3 \quad (151)$$

Na Eq. (151)  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor de segunda ordem de tensões de Cauchy,  $D_{ijkl}$  são as componentes do tensor constitutivo de quarta ordem e  $\varepsilon_{kl}$  são as componentes do tensor de deformações de Green Saint-Venant para deformações infinitesimais. O tensor  $D_{ijkl}$  é descrito por uma matriz com dimensão  $\dim(\mathbf{D}) = 3^4 = 81$  (tem 81 termos não nulos) entretanto a partir da simetria do tensor e considerando o material Green elástico, ou seja, existe a função densidade de deformação elástica o número de termos não nulos do tensor se reduz para 21. Por outro lado, levando em conta a simetria dos tensores de tensões e deformações a equação constitutiva definida pela Eq. (151) pode ser descrita como uma relação entre vetores de componentes simétricas dos tensores  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  com relação ao sistema principal de coordenadas do material  $(1, 2, 3)$ , pela da Eq. (152).

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ & & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ & & & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ & & & & D_{55} & D_{56} \\ & & & & & D_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{array} \right\} \quad (152)$$

Na Eq. (152) os sub índices estão relacionados com relação ao sistema cartesiano as direções principais do sistema de coordenadas materiais. De forma compacta a Eq. (5.2) é descrita pela Eq. (153) a seguir.

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{D}^1 \boldsymbol{\varepsilon}^1 \quad (153)$$

Na Eq. (153) os supra índices indicam que a equação está descrita com relação ao sistema principal de coordenadas.

Para o caso de grupos de simetria material com relação a planos mutuamente ortogonais a Eq. (153) é descrita por apenas nove componentes não nulas conforme indicado na Eq. (154).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (154)$$

Visto que a Eq. (153) descreve uma transformação biunívoca pode-se descrever a mesma através da matriz de flexibilidade matéria resultando na Eq. (155).

$$\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \mathbf{S}^1 \boldsymbol{\sigma}^1 \quad (155)$$

Para uma plana laminada com relação ao sistema principal de coordenadas descrito na Fig.15 a matriz de flexibilidade material é descrita pela Eq. (156).

$$\mathbf{S}^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \quad (156)$$

Com relação ao sistema de coordenadas locais indicadas na Fig. 15 os módulos de elasticidade  $E_i$ ,  $i=1,\dots,3$  estão associados as direções principais materiais (1,2,3), os coeficientes de Poisson  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{23}$  e os módulos de elasticidade transversal  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  e  $G_{23}$  estão relacionados as deformações acopladas nas direções principais (1,2), (1,3) e (2,3) respectivamente.

A partir das componentes da matriz constitutiva definida na Eq. (157) pode-se determinar os coeficientes da matriz constitutiva descrita na Eq. (157) onde:

$$D_{11} = E_1 \left( 1 - \nu_{23}^2 \frac{E_3}{E_2} \right) / \Delta \quad (157a)$$

$$D_{22} = E_2 \left( 1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} \right) / \Delta \quad (157b)$$

$$D_{33} = E_3 \left( 1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1} \right) / \Delta \quad (157c)$$

$$D_{12} = (\nu_{12} E_2 - \nu_{13} \nu_{23} E_3) / \Delta \quad (157d)$$

$$D_{13} = (\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}) / \Delta \quad (157e)$$

$$D_{23} = E_3 \left( \nu_{23} + \nu_{12} \nu_{13} \frac{E_2}{E_3} \right) / \Delta \quad (157f)$$

$$D_{44} = G_{12}; \quad D_{55} = G_{13}; \quad D_{66} = G_{23} \quad (157g)$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1} - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} - \nu_{23}^2 \frac{E_3}{E_2} - \nu_{12} \nu_{13} \nu_{23} \frac{E_1}{E_3} \quad (157h)$$

As equações (157a) a (157h) foram obtidas de Mendonça (2001). Até o presente momento a abordagem das relações constitutivas descritas na Eq. (153) estão relacionadas ao sistema principal de coordenadas considerando um laminado ortótropo.

Entretanto nas situações onde se quer obter um comportamento de anisotropia geométrica por empilhamento de lâminas com fibras em direções diferentes, para obter a relação constitutiva resultante é necessário descrever os tensores constitutivos com relação a um único sistema de coordenadas, denominado aqui de sistema global de coordenadas.

### 5.1.1 Equações constitutivas numa direção $\theta$

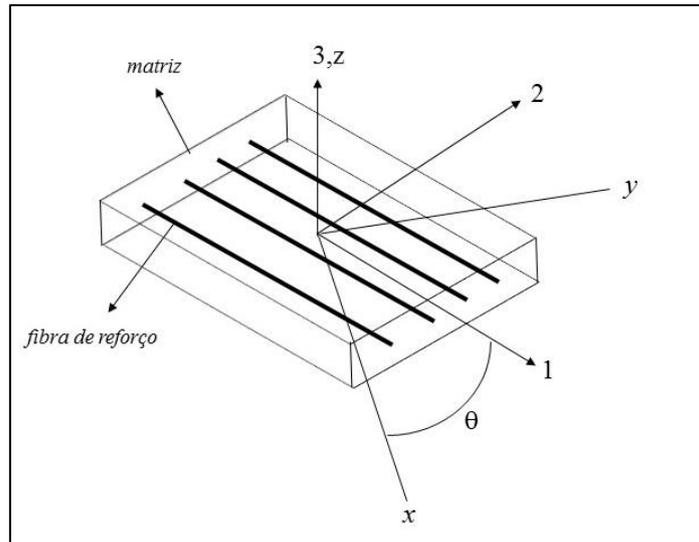
A sistemática utilizada para descrever as transformações de rotação da matriz constitutiva nesta subseção está de acordo com Mendonça (2001).

Seja uma lâmina com direções principais (1,2), como indicado na Fig. 16, obtidas por rotação plana de um ângulo  $\theta$  com relação ao sistema global de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , onde  $z \equiv 3$ .

A Eq. (153) pode ser obtida a partir das componentes simétricas do tensor de deformações através da Eq. (158) a seguir.

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{D}^1 \mathbf{R} \boldsymbol{\varepsilon}^{1/2} \quad (158)$$

Figura 16-a) Sistema global de coordenadas (x,y,z); b) Sistema principal de coordenadas (1,2,3)



Fonte: Autor (2017)

Na Eq. (158)  $\mathbf{R}$  é um operador booleano que transforma as componentes cisalhantes do tensor de deformações  $\{\varepsilon_{12} \ \varepsilon_{13} \ \varepsilon_{23}\}$  nas componentes de deformações cisalhantes propriamente ditas  $\{\gamma_{12} \ \gamma_{13} \ \gamma_{23}\}$  e ainda lembrando que  $\varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2}$ ,  $\varepsilon_{13} = \frac{\gamma_{13}}{2}$ ,  $\varepsilon_{23} = \frac{\gamma_{23}}{2}$  se tem a seguinte expressão para o operador:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 \\ \text{sim} & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (159)$$

A expressão  $\boldsymbol{\varepsilon}^{1/2}$  é o vetor de componentes simétricas do tensor de pequenas deformações descrito na Eq. (160).

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{1/2}\}^T = \left\{ \varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \frac{\gamma_{12}}{2} \ \frac{\gamma_{13}}{2} \ \frac{\gamma_{23}}{2} \right\} \quad (160)$$

Partindo de que o vetor de componentes simétricas das deformações no sistema global de coordenadas é dado pela Eq. (161) o vetor  $\boldsymbol{\varepsilon}^{1/2}$  pode ser descrito através da operação de rotação descrita na Eq. (162).

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{x/2}\}^T = \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad \frac{\gamma_{xz}}{2} \quad \frac{\gamma_{yz}}{2} \right\} \quad (161)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{1/2} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}^{x/2} \quad (162)$$

Na Eq. (162)  $\mathbf{Q}$  é o operador de rotação descrito na Eq. (163).

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \text{sen}^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & 2\text{sen}(\theta)\cos(\theta) \\ \text{sen}^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & -2\text{sen}(\theta)\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\text{sen}(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & \cos^2(\theta) & -\text{sen}^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (163)$$

Substituindo a Eq. (162) na Eq. (158) se obtém:

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{D}^1 \mathbf{R} \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}^{x/2} \quad (164)$$

Ou ainda,

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{D}^1 \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^x \quad (165)$$

Na Eq. (165) se tem que:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^x\}^T = \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \right\} \quad (166)$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2} & 0 \\ \text{sim} & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (167)$$

Por outro lado, descrevendo o vetor  $\boldsymbol{\sigma}^1$  em função de  $\boldsymbol{\sigma}^x$  se tem:

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}^x \quad (167)$$

Substituindo a Eq. (167) na Eq. (165) se tem:

$$\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}^x = \mathbf{D}^1 \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^x \quad (168)$$

Como se quer isolar  $\boldsymbol{\sigma}^x$  a Eq. (168) é pré-multiplicada por  $\mathbf{Q}^{-1}$  resultando em:

$$\boldsymbol{\sigma}^x = \boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{D}^1 \boldsymbol{R} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^x \quad (169)$$

Como na Eq. (5.19) se tem que  $\boldsymbol{Q}^{-T} = \boldsymbol{R} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{R}^{-1}$  substituindo na Eq. (169) se tem:

$$\boldsymbol{\sigma}^x = \boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{D}^1 \boldsymbol{Q}^{-T} \boldsymbol{\varepsilon}^x \quad (170)$$

Na Eq. (170) se tem que:

$$\boldsymbol{\sigma}^x = \boldsymbol{D}^x \boldsymbol{\varepsilon}^x \quad (171)$$

Onde,

$$\boldsymbol{D}^x = \boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{D}^1 \boldsymbol{Q}^{-T} \quad (172)$$

A partir da Eq. (172) é possível agora adaptar a Eq. (171) para descrever o comportamento de materiais compostos por laminados para os modelos lineares da FSDT (Reissner-Mindlin) e os modelos cúbicos TSDT Reddy (1984) e Kant, Owen e Zienkiewicz (1982).

### 5.1.2 Equações constitutivas para os modelos FSDT e TSDT (Reddy)

Nesta subseção serão adaptadas as equações constitutivas genéricas aplicadas a problemas sem restrições de deformações e deslocamentos como indicado na Eq. (171) a modelos com restrições de deformações e tensões normais estabelecidas por  $\gamma_{n\theta} = \gamma_{t\theta} = 0$  e  $\sigma_n \cong 0$ . As relações constitutivas serão descritas para um ângulo  $\theta = 0^\circ$ , corresponde ao sistema local de coordenadas de cada ponto do elemento no plano de simetria radial definido pelos vetores  $(\boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{n} \quad \boldsymbol{i}_\theta)$  e para um ângulo de  $\theta = 90^\circ$ .

### 5.1.3 Equações constitutivas para um $\theta = 0^\circ$

Para o ângulo  $\theta = 0^\circ$  a matriz  $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$  é a matriz constitutiva definida na Eq. (172) é a matriz descrita na Eq. (154). Para este caso a relação constitutiva dada no sistema de coordenadas cilíndricas é descrita pela Eq. (173) como segue:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_\theta \\ \sigma_n \\ \tau_{t\theta} \\ \tau_{nt} \\ \tau_{\theta n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 \\ sim & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_n \\ \gamma_{t\theta} \\ \gamma_{nt} \\ \gamma_{\theta n} \end{Bmatrix} \quad (173)$$

Aplicando a restrição de tensão  $\sigma_n = 0$  se obtém as seguintes conclusões definidas na Eq. (174) como segue:

$$\varepsilon_n = -\frac{1}{D_{33}}(D_{13}\varepsilon_t + D_{23}\varepsilon_\theta) \quad (174)$$

A partir da Eq. (174) se obtém:

$$\sigma_t = \left( D_{11} - \frac{D_{13}^2}{D_{33}} \right) \varepsilon_t + \left( D_{12} - \frac{D_{13} D_{23}}{D_{33}} \right) \varepsilon_\theta \quad (175a)$$

$$\sigma_\theta = \left( D_{12} - \frac{D_{23} D_{13}}{D_{33}} \right) \varepsilon_t + \left( D_{22} - \frac{D_{23}^2}{D_{33}} \right) \varepsilon_\theta \quad (175b)$$

$$\tau_{nt} = D_{55} \gamma_{nt} \quad (175c)$$

A relação constitutiva para o modelo FSDT é descrita pela Eq. (176) e difere da relação constitutiva do modelo TSDT (Reddy) por conta do fator de correção da deformação cisalhante pelo fator  $\kappa_s = 3/4$ .

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \tau_{nt} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( D_{11} - \frac{D_{13}^2}{D_{33}} \right) & 0 & \left( D_{12} - \frac{D_{13} D_{23}}{D_{33}} \right) \\ 0 & \kappa D_{55} & 0 \\ \left( D_{12} - \frac{D_{23} D_{13}}{D_{33}} \right) & 0 & \left( D_{22} - \frac{D_{23}^2}{D_{33}} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (176)$$

Se for utilizada a teoria de J. N. Reddy [14] a relação constitutiva é a mesma com a única diferença que o fator de correção  $\kappa = 1$  já que neste caso a distribuição da tensão cisalhante é parabólica.

### 5.1.4 Equações constitutivas para um $\theta = 90^\circ$

A equação constitutiva para as teorias supracitadas para  $\theta = 90^\circ$  é obtida a partir da Eq. (172) resultando numa equação sem restrições descrita pela Eq. (177).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_\theta \\ \sigma_n \\ \tau_{t\theta} \\ \tau_{nt} \\ \tau_{\theta n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{22} & D_{12} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{11} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{55} & 0 & 0 \\ & & & & D_{44} & 0 \\ \text{sim} & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_n \\ \gamma_{t\theta} \\ \gamma_{nt} \\ \gamma_{\theta n} \end{Bmatrix} \quad (177)$$

Aplicando a restrições de tensão  $\sigma_n = 0, \gamma_{t\theta} = \gamma_{\theta n} = 0$  se obtém as relações constitutivas descritas nas equações Eq. (178) e (179) a seguir:

$$\sigma_t = \left( D_{22} - \frac{D_{23}^2}{D_{33}} \right) \varepsilon_t + \left( D_{12} - \frac{D_{23}}{D_{33}} D_{13} \right) \varepsilon_\theta \quad (178)$$

$$\sigma_\theta = \left( D_{12} - \frac{D_{13}}{D_{33}} D_{23} \right) \varepsilon_t + \left( D_{11} - \frac{D_{13}^2}{D_{33}} \right) \varepsilon_\theta \quad (179)$$

$$\tau_{nt} = D_{44} \gamma_{nt} \quad (180)$$

A forma matricial para a equação constitutiva considerando  $\theta = 90^\circ$  é dada pela Eq. (181).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \tau_{nt} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( D_{22} - \frac{D_{23}^2}{D_{33}} \right) & 0 & \left( D_{12} - \frac{D_{23}}{D_{33}} D_{13} \right) \\ 0 & \kappa D_{55} & 0 \\ \left( D_{12} - \frac{D_{23}}{D_{33}} D_{13} \right) & 0 & \left( D_{11} - \frac{D_{13}^2}{D_{33}} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (181)$$

A Eq. (181) para  $\kappa = 3/4$  corresponde ao modelo FSMT (Reissner-Mindlin) e para  $\kappa = 1$  o modelo TSMT de Reddy (1989).

### 5.1.5 Equações constitutivas para o modelo com normal extensível

As relações constitutivas para o modelo com normal extensível neste caso correspondente à teoria de Kant (1982) diferem dos anteriores por apresentar  $\sigma_n \neq 0$ . De forma similar as restrições decorrentes da axissimetria de carregamento impostas nas teorias de FSDT e Reddy para este modelo serão consideradas  $\gamma_{n\theta} = \gamma_{t\theta} = 0$ , resultado para  $\theta = 0^\circ$  a Eq. (182) a seguir,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_n \\ \sigma_\theta \\ \tau_{nt} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_n \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} \quad (182)$$

Para  $\theta = 90^\circ$  a equação constitutiva é descrita pela Eq. (183).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_n \\ \sigma_\theta \\ \tau_{nt} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} D_{22} & D_{12} & D_{23} & 0 \\ D_{23} & D_{13} & D_{33} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & D_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_n \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} \quad (183)$$

Determinada a matriz constitutiva de cada lâmina um dos aspectos fundamentais a ser abordado consiste na metodologia utilizada para obter a matriz de rigidez de um elemento de casca obtido pelo empilhamento de lâminas.

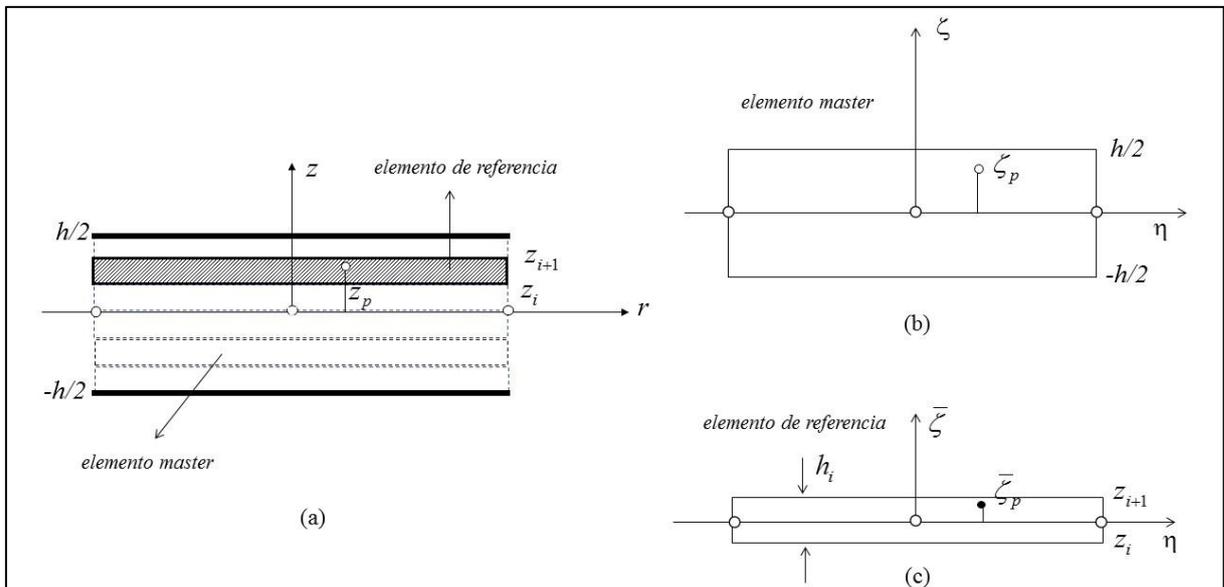
## 5.2. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

A matriz de rigidez do elemento é obtida pela soma da matriz de rigidez de cada lâmina. O procedimento utilizado para este fim será o de utilizar o elemento máster, ou seja, o elemento constituído por todo o laminado (ver Fig.17). A dificuldade inerente a este processo está em que a integração numérica necessária para obter a matriz de rigidez é feita com relação ao elemento máster formado por todo o empilhamento, por outro lado, o ponto de integração está relacionado ao elemento de referência de cada lâmina (ver Fig. 17). Para utilizar esta sistemática se torna necessário determinar uma relação de mapeamento entre a coordenada natural  $\zeta$  do elemento máster e a coordenada natural  $\zeta_i$ ,  $i=1,\dots,nl$ , onde  $nl$  é o número de lâminas do esquema de empilhamento.

A relação entre as coordenadas naturais para um ponto  $p$  do elemento máster  $\zeta_p$  e do elemento de referência  $\bar{\zeta}_p$  são obtidas igualando as equações de mapeamento conforme descrito na Eq. (184)

$$\zeta(\bar{\zeta}) = \frac{2}{h} \left( \frac{z_i + z_{i+1}}{2} + \frac{h_i}{2} \bar{\zeta} \right); \quad 1, \dots, nl \quad (184)$$

Figura 17-a) elementos máster laminado; b) elemento máster no sistema natural de coordenadas; c) elemento de referência no sistema natural de coordenadas



Fonte: Autor (2017)

Como os pontos de integração são referenciados a sistema de coordenadas naturais do elemento de referência da lâmina a relação de mapeamento do elemento de arco entre o sistema local de coordenadas e o sistema natural de coordenadas do elemento de referência e descrito pelas Eq. (185) e (186) como segue

$$\frac{dz}{d\bar{\zeta}} = \frac{dz}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}} = \frac{h_i}{h} \quad (185)$$

$$dz = \frac{h_i}{h} d\bar{\zeta} \quad (186)$$

Na Eq. (5.37),  $\frac{h_i}{h}$  é o fator de correção ou fator de escala.

A matriz de rigidez do elemento do laminado é obtida a partir da Eq. (114) adaptada para um elemento sólido constituído por empilhamento de laminados e descrito em coordenadas cilíndricas pela Eq. (187).

$$K_e = \sum_{i=1}^{nl} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_e^T D_i^x B_e \frac{h_i}{h} d\bar{\zeta} J d\eta r d\theta \quad (187)$$

Na Eq. (187) a integração está sendo realizada no domínio natural do elemento e mapeada para o domínio físico. Nesta equação  $D_i^x$  é matriz constitutiva correspondente à lâmina do empilhamento e  $h_i$  é a espessura da lâmina conforme indicado na Figura 17(c).

## 6. RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo serão analisados o desempenho das teorias cinemáticas supracitadas aplicadas a problemas de placas e cascas de revolução compostas por laminados e sujeitas a forças com simetria axial. O escopo deste capítulo é constituído dos seguintes estudos de caso:

a) Influência das teorias cinemáticas estudadas neste capítulo na abordagem do problema de travamento de cisalhamento em placas circulares de material homogêneo e isotrópico;

b) Análise do desempenho das teorias supracitadas na abordagem do problema de travamento de membrana em cilindros longos puncionados.

c) Análise da proximidade de resultados em deslocamento e na energia de deformação elástica das teorias cinemáticas supracitadas com relação ao modelo sólido de revolução.

d) Análise do desempenho das teorias cinemáticas em estudo com relação à resultados de benchmark para um cilindro curto de material ortótropo e composto por laminados.

e) Análise do desempenho das teorias em estudo na abordagem do problema de flexão de placas circulares laminadas;

f) Abordagem do problema de flexão de cascas esféricas rasas puncionadas de material isotrópico e ortótropo comparando os resultados com exemplos de *benchmark*.

g) Abordagem do problema de flexão de cascas esféricas rasas compostas por laminados sob força vertical uniformemente distribuída;

h) Estudo do desempenho da teoria cúbica proposta por Kant (1982) e da FSDT na análise de deslocamentos e tensões do reservatório cilíndrico de um reator supercrítico.

### 6.1. TRAVAMENTO POR CISALHAMENTO EM PLACAS CIRCULARES ENGASTADAS

Os resultados obtidos neste estudo de caso referem-se a travamento por cisalhamento numa placa circular engastada com propriedades geométricas e propriedades mecânicas descritas na Fig.18. Os resultados serão analisados através do erro relativo indicado na Eq. (188) para o deslocamento no ponto O. Os espaços de aproximação de todas as estratégias serão

obtidos por dez elementos lagrangeanos unidimensionais quadráticos (3 nós), cúbicos (4 nós) e de quarta ordem (5 nós). Os modelos construídos com este espaço de aproximação são discriminados nas estratégias a seguir:

A) Modelo cinemático de Reissner-Mindlin (FSDT);

B) Modelo cinemático de Reddy (1989) (TSDT);

C) Modelo cinemático Kant (1982) (TSDT) com a força externa aplicada na superfície média da placa correspondente a coordenada natural  $\zeta = 0$ .

As condições de contorno essenciais para os modelos A até C são indicadas na Tab. 2.

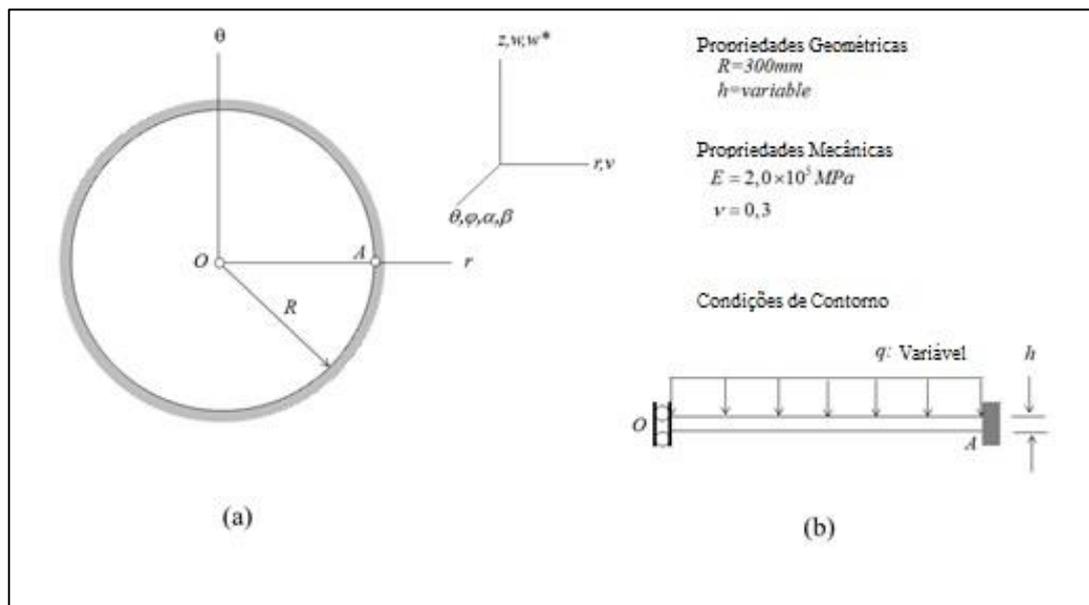
Tabela 2-Condições de contorno essenciais para os pontos O e A da Figura 18.

Nó	O						A					
	$v$	$w$	$w^*$	$\varphi$	$\alpha$	$\beta$	$v$	$w$	$w^*$	$\varphi$	$\alpha$	$\beta$
A	1	0	...	1	...	...	1	1	...	1	...	...
B	1	0	...	1	1	1	1	1	...	1	1	1
C	1	0	1	1	-----	1	1	1	1	1	...	1

Fonte: Autor (2017)

Os resultados desta análise são indicados na Tab.3 e na Fig.19 para as estratégias propostas.

Figura 18 Placa circular engastada nas bordas; b) Condições de contorno



Fonte: Autor (2017)

$$E_r = \frac{|w_h - w_a|}{|w_a|} \quad (188)$$

Na equação Eq. (188),  $w_h$  é o resultado dos modelos numéricos para o deslocamento no ponto O e  $w_a$  é o deslocamento analítico apresentado em Timoshenko e Krieger (1959) descrito na equação Eq. (189),

$$w_a = \frac{qR^4}{64D} \quad (189)$$

Na Eq. (189)  $D$  é a rigidez de flexão da placa definida pela Eq. (190),

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (190)$$

Tabela 3-Erro relativo  $E_r$  para o caso B

R/h	p=2	p=3	p=4
5	0.18093900	0.181081570	0.18108997
10e1	0.04513145	0.045481901	0.04549362
10e2	0.00386070	0.000461970	0.00045648
10e3	0.00504819	1.4950000e-5	4.564664e-6
10e4	0.00506135	9.2220000e-6	1.108376e-6
10e5	0.00501158	0.0001681749	9.139704e-6

Fonte: Autor (2017)

Tabela 4-Erro relativo  $E_r$  para o caso A

R/h	p=2	p=3	p=4
5	0.182832317	0.1828542795	0.18285714
10e1	0.045485090	0.0457115860	0.04571428
10e2	0.003834614	0.0004624260	0.00045714
10e3	0.005047860	1.4960070e-5	4.58395109e-6
10e4	0.005061193	1.1279628e-5	1.45476519e-6
10e5	0.005079239	2.36420420e-5	0.0001937136

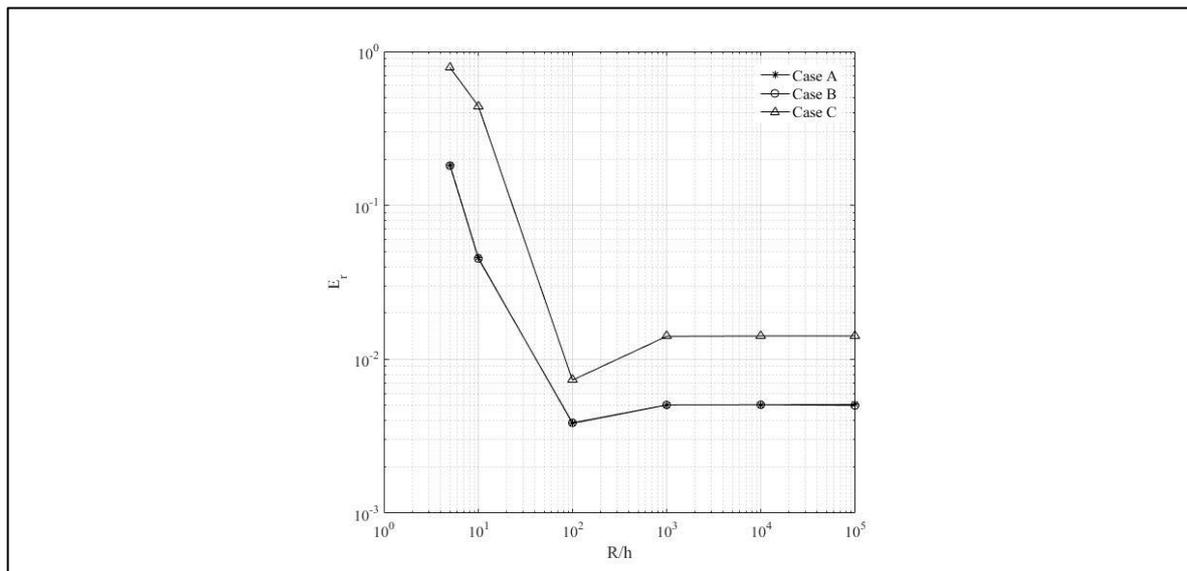
Fonte: Autor (2017)

Tabela 5-Erro relativo  $E_r$  para o caso C

R/h	p=2	p=3	p=4
5	0.7837877	0.81453432	0.830377157
10e1	0.4414696	0.46039106	0.469442330
10e2	0.0073191	0.00110470	0.003594206
10e3	0.0140883	0.00569906	0.003474604
10e4	0.0141559	0.00576720	0.003545140
10e5	0.0141682	0.00562226	0.003634538

Fonte: Autor (2017)

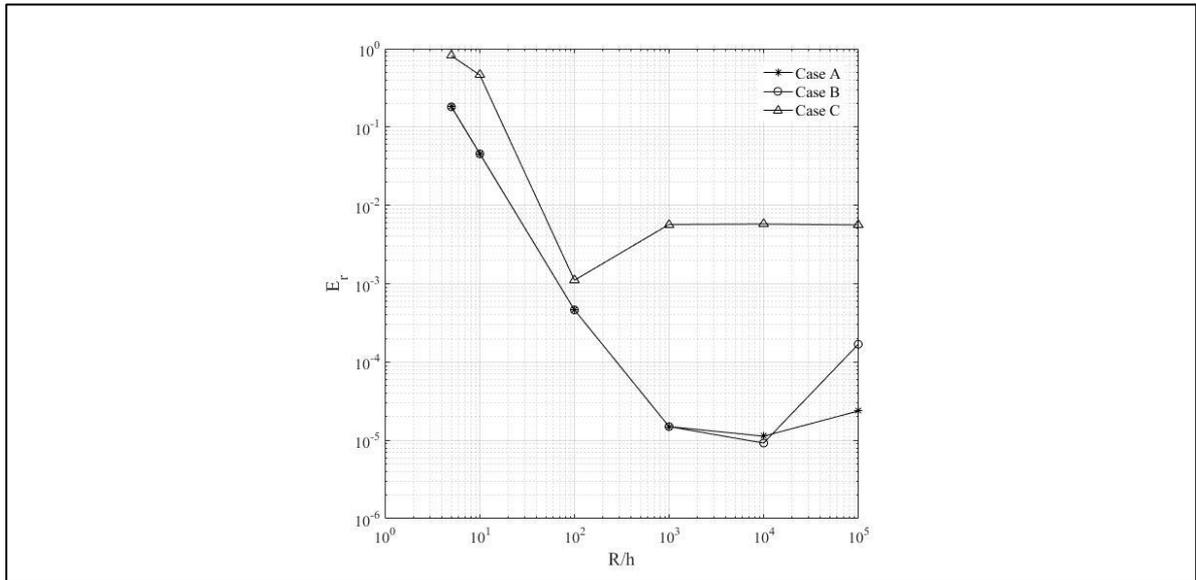
Figura 19-Erro relativo para travamento por cisalhamento para os casos A, B e C de espaço aproximado construído com elementos lagrangeanos unidimensionais



Fonte: Autor (2017)

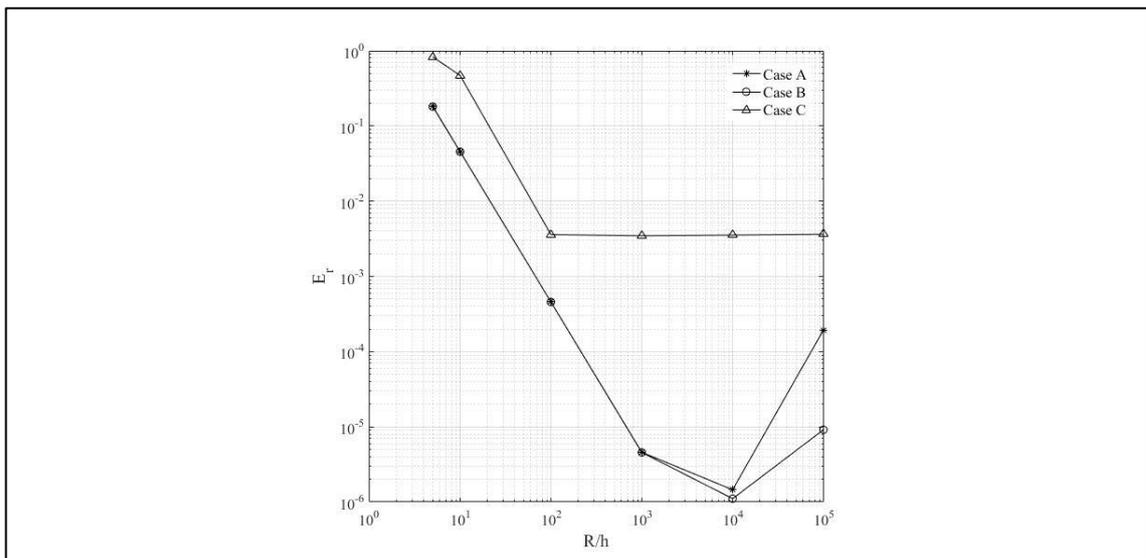
De forma geral como visto nas figuras 19, 20 e 21, pode-se dizer que para os espaços de aproximação propostos não foi verificado travamento por cisalhamento para nenhum dos modelos cinemáticos analisados. Contudo, visto que a solução de referência, é a solução analítica de cascas fina, os resultados com erros menores foram os das estratégias A e B onde os modelos são mais próximos dos modelos de casca fina

Figura 20-Erro relativo para travamento por cisalhamento para os casos A, B e C de espaço aproximado construído com elementos lagrangeanos unidimensionais cúbicos.



Fonte: Autor (2017)

Figura 21-Erro relativo para travamento por cisalhamento para os casos A, B e C de espaço aproximado construído com elementos lagrangeanos unidimensionais quárticos



Fonte: Autor (2017)

Por outro lado, o caso C mesmo com carregamento aplicado, na superfície de referência, aproxima razoavelmente o resultado de placa fina, porém com diferenças maiores do que os modelos A e B. Este fato se deve a que o modelo C que constitui o modelo cinemático

de Kant (1982) apresenta mecanismo de deformação mais complexos e, portanto, mais próximos do comportamento do sólido elástico de revolução como pode ser visto nas equações (141a) a (141c) do capítulo 4.

## 6.2. RESULTADOS DE TRAVAMENTO DE MEMBRANA EM CILINDROS LONGOS

Os resultados obtidos neste estudo de caso referem-se a travamento de membrana num cilindro longo engastado nas extremidades com propriedades geométricas e propriedades mecânicas descritas na Fig.1. O carregamento de punção será aplicado no meio do cilindro na direção radial. Os resultados serão analisados através do erro relativo (ver Eq. (1)) em norma  $L^2(\Sigma)$  do deslocamento radial  $v(x)$  a medida que a razão  $R/h$  é incrementada. Os resultados serão obtidos para dois estudos de casos utilizando os modelos A, B e C indicadas a abaixo.

O primeiro estudo de caso é feito para espaços de aproximação obtidos a partir de um grid uniforme de doze elementos lagrangeanos unidimensionais com rodem polinomial  $p=6$ .

A) Modelo cinemático de Reissner-Mindlin (FSDT) aproximando o problema com 215 graus de liberdade;

B) Modelo cinemático de Reddy (1989) (TSDT) aproximando o problema com 357 graus de liberdade;

C) Modelo cinemático de Kant (1982) (TSDT) considerando  $\zeta = 0$  e aproximando o problema com 357 graus de liberdade.

As condições de contorno essenciais correspondentes a cada modelo estão descritas na Tabela 6.

Tabela 6-Condições de contorno para os pontos B e C.

Nó	B						C					
	$v$	$w$	$w^*$	$\varphi$	$\alpha$	$\beta$	$v$	$w$	$w^*$	$\varphi$	$\alpha$	$\beta$
A	0	1	...	1	...	...	1	1	...	1	...	...
B	0	1	...	1	1	1	1	1	...	1	1	1
C	0	1	1	1	-----	1	1	1	1	1	...	1

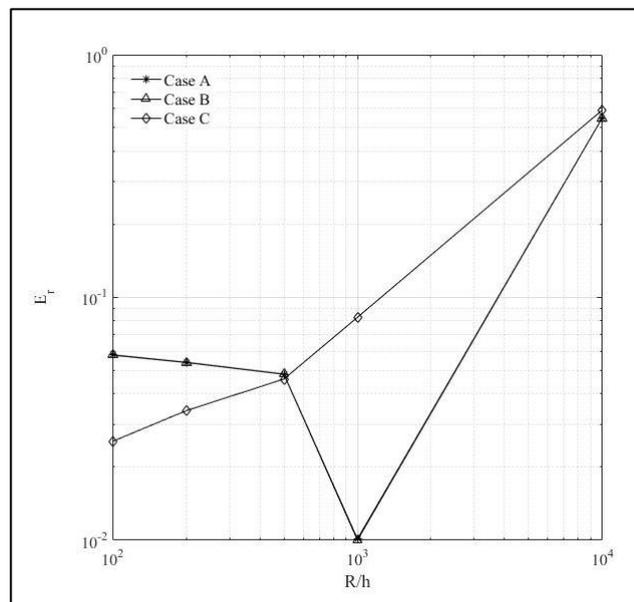
Fonte: Autor (2017)

Os resultados desta análise são mostrados através do erro relativo indicado na Eq. (191) na Tab. 1 e na Fig.2 para cada uma das estratégias.

$$E_r = \frac{\|v_h - v_a\|_{L^2(\Sigma)}}{\|v_a\|_{L^2(\Sigma)}} \quad (191)$$

Na Eq. (191)  $v_a$  da solução analítica de cascas cilíndricas finas sujeitas a forças de punção radial apresentada em Timoshenko e Krieger (1959). Os resultados do primeiro estudo de caso são mostrados na Tab.7 e na Fig. 22 respectivamente.

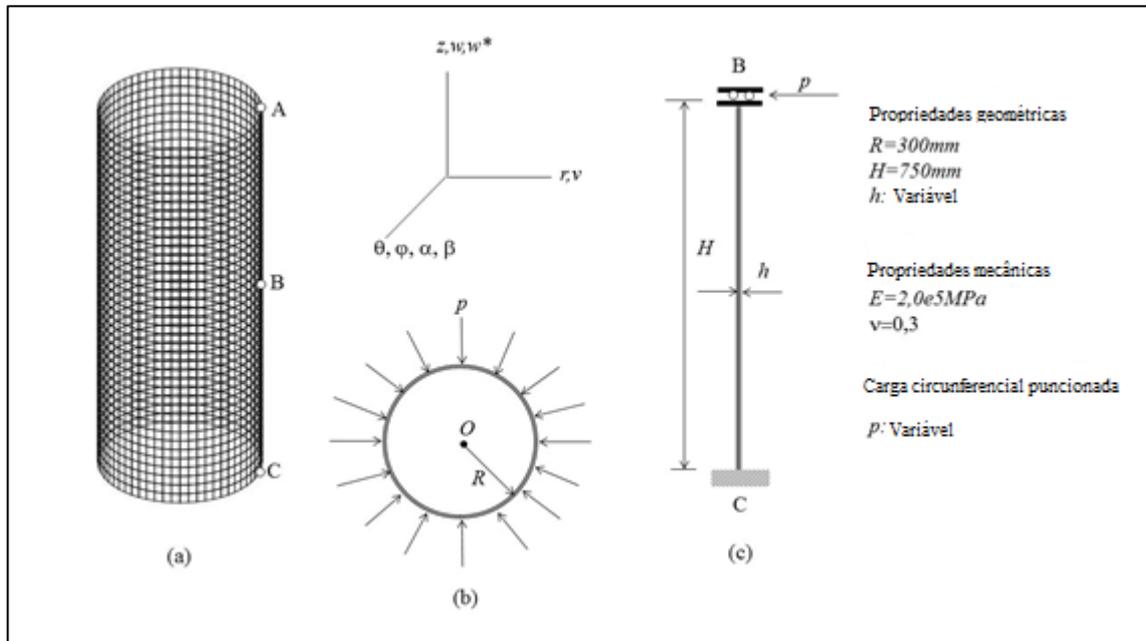
Figura 22-Erro relativo para grid uniforme



Fonte: Autor (2017)

Os resultados para o grid uniforme mostram que para os três modelos cinemáticos estudados ocorre travamento de membrana apesar da ordem polinomial elevada que foi utilizada nas três estratégias propostas. Por outro lado, nota-se que a solução analítica de casca fina não é adequada para comparar o fenômeno de travamento de membrana para o modelo representado na estratégia C por ser esta solução analítica muito simples em termos de energia de deformação.

Figura 23-a) Casca cilíndrica engastada nas extremidades; b) Carga circunferencial puncionada; c) condições de contorno



Fonte: Autor (2017)

Conclui-se que as estratégias A e B que não apresentam normal extensível se aproximam mais do modelo de casca fina utilizado com referência e, portanto, mostram resultados mais próximos até a relação  $\frac{R}{h} = 10^3$  quando começam a sofrer o efeito de travamento de membrana.

Tabela 7-Erro relativo Er

R/h	A	B	C
10e2	0.0517662	0.0517677	0.0387056
20e2	0.0508673	0.0508751	0.0397487
50e2	0.0574674	0.0575165	0.0445646
10e3	0.1226447	0.1227208	0.1031751
10e4	0.6799581	0.6800042	0.6785712

Fonte: Autor (2017)

O segundo estudo de caso é feito utilizando os modelos A, B e C entretanto é proposta uma estratégia de refino em escala baseado na solução analítica de casca fina para o deslocamento radial. Esta estratégia de refino foi utilizada por Suarez e Proença (2005) e Garcia e Rossi (2011). A estratégia de refino supracitada é específica para cascas cilíndricas longas para uma força de punção uniforme na direção radial como mostrado na Fig.24. A escala do refino é obtida a partir da região onde ocorre a perturbação do regime de membrana por flexão produzindo um decaimento exponencial com amortecimento sinusoidal do deslocamento radial como mostrado na Fig.3. Os resultados da região do deslocamento radial mostrado na Fig. 24 referem-se à resposta para  $w(x)$  da solução analítica descrita na Eq. (192), conforme Timoshenko e Krieger, (1959).

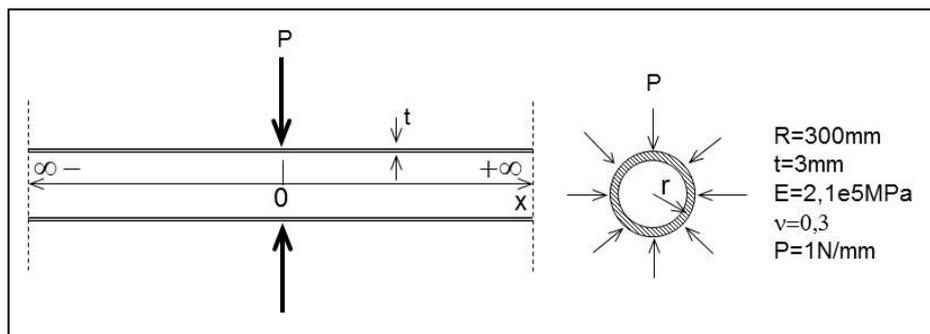
$$w(x) = \frac{Pe^{-\beta x}}{8\beta^3 D} [\text{sen}(\beta x) + \cos(\beta x)] \quad (192)$$

Na Eq. (192)  $P$  é a força radial indicada na Fig.24,  $D$  e  $\beta$  são a rigidez a flexão e o parâmetro de decaimento produzido pela perturbação de flexão ambos descritos nas Eqs. (193)-(194) a seguir:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^3)} \quad (193)$$

$$\beta = \left[ \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 t^2} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (194)$$

Figura 24-: Cilindro infinito punccionado com força radial uniforme.



Fonte: Garcia e Rossi (2011.)

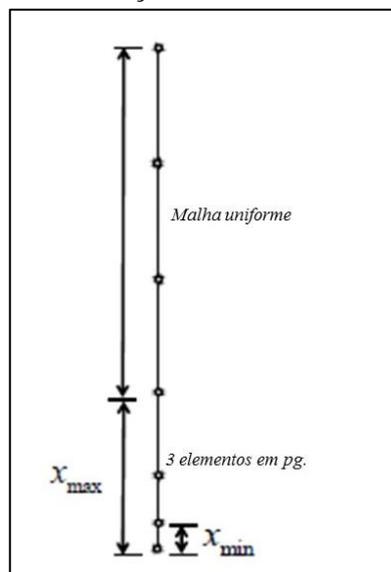
A dimensão do primeiro elemento adjacente ao bordo de aplicação da força chamada de  $x_{\min}(t)$  assim como a dimensão da região refinada  $x_{\max}(t)$  ambos mostrados na Fig. 24 (b) são obtidos obtendo as raízes da equação trigonométrica Eq. (2). A solução da Eq. (192) tem as raízes indicadas nas Eq. (195)-(196) como segue:

$$x_{\min}(t) = \frac{\pi}{4\beta} \quad (195)$$

$$x_{\max}(t) = \frac{9\pi}{4\beta} \quad (196)$$

As Eqs. (195)-(196) descrevem uma escala de refino que dependem da espessura  $t$ . A estratégia de refino proposta em Suarez e Proença (2006) consiste em utilizar três elementos em progressão geométrica para discretizar  $x_{\max}(t)$  sendo a dimensão do primeiro elemento  $x_{\min}(t)$  a taxa da progressão geométrica da dimensão dos elementos é constante de  $r = 2,37$ . A descrição do refino é esquematizada na Fig. 25 e as dimensões utilizadas no refino são indicadas na Tab.8 como segue.

Figura 25-Esquema de refino utilizando informações da solução analítica



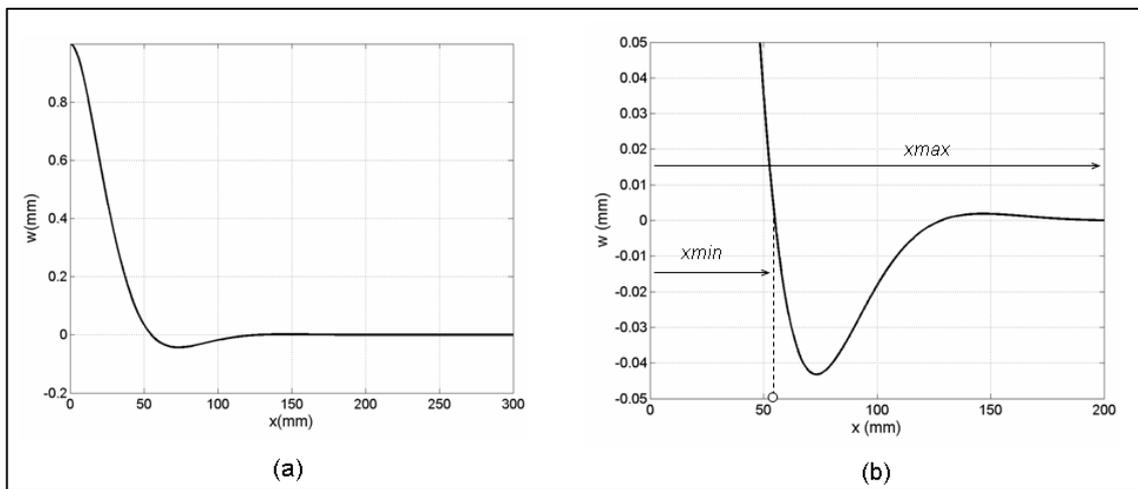
Fonte: Garcia e Rossi (2011.)

Os resultados mostrados na Fig. 27, correspondentes as estratégias A, B e C para o grid com refino adaptativo em escala a partir da espessura do componente, não mostrou travamento de membrana para nenhuma das estratégias propostas. Por outro lado, nota-se um

desempenho melhor com relação à solução de referência da casca fina das estratégias A e B, este fato se deve a proximidade dos modelos do modelo de casca fina.

As respostas mostradas pelo modelo C indicam que o refino proposto evita o travamento de membrana. Por outro lado, por se tratar de um modelo mais complexo e que não aproxima o modelo de casca fina, como a precisão dos modelos A e B, o refino proposto por Garcia e Proença (2007) não mostra a mesma eficácia do que nestes últimos. Por este motivo nota-se resultados desconcertantes mostrados nas Fig. 22 e na Fig. 27, a Tab. 9 traz seus resultados.

Figura 26-Região de perturbação do regime de membrana por flexão no deslocamento radial



Fonte: Garcia e Rossi (2011.)

Tabela 8-Dimensões da região refinada

$R/h$	$x_{min}$ (mm)	$x_{max}$ (mm)	$H_u$ (mm)
10e2	18.33033	164.9730	585.0269
20e2	12.96150	116.6535	633.3464
50e2	8.197576	73.77810	676.2218
10e3	5.796561	52.16905	697.8309
10e4	1.833033	16.49730	733.5026

Fonte: Autor (2017)

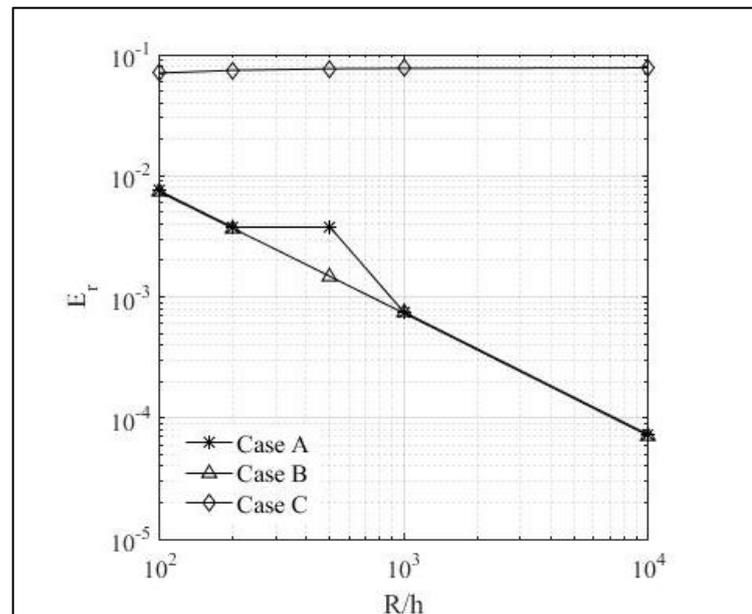
Neste caso nota-se na Fig. 27 que o travamento de membrana é evitado, porem o resultado do erro relativo em norma  $L^2(\Sigma)$  se estabiliza com um erro razoavelmente alto com relação aos resultados de placa fina. A região de perturbação é mostrada na Fig.26 ocasionada pela flexão no deslocamento radial.

Tabela 9-Erro relativo  $E_r$  e  $p=6$

R/h	A	B	C
10e2	0.0039845	0.0039827	0.0809875
20e2	0.0019969	0.0019966	0.0813535
50e2	0.0008084	0.0008084	0.0816010
10e3	0.0004342	0.0004342	0.0816946
10e4	0.0006473	0.0006473	0.0817596

Fonte: Autor (2017)

Figura 27-Erro relativo para grid adaptativo



Fonte: Autor (2017)

### 6.3. RESULTADOS PARA O CILINDRO ENGASTADO NAS EXTREMIDADES

Os resultados analisados neste exemplo referem-se à capacidade dos espaços de aproximação construídos segundo o MEF juntamente com os modelos cinemáticos FSDT (*modelo de Reissner-Mindlin*) e TSDT de Kant (1982) e Reddy (1989) em aproximar o comportamento sólido tridimensional.

Estes resultados serão analisados através do comportamento do deslocamento transversal e da normalização da energia de deformação elástica com relação ao modelo sólido de revolução em regime elástico linear. O exemplo para esta análise constitui-se de um cilindro longo engastado nas extremidades com propriedades geométricas condições de contorno e propriedades mecânicas indicadas na Fig. 28.

A solução de referência para a comparação de resultados é obtida com 2X20 elementos sólidos de revolução lagrangeanos Q25 (elemento de quarta ordem) aproximando o problema com 2133 graus de liberdade. As estratégias utilizadas estão indicadas a seguir.

A) Modelo FSDT com espaço de aproximação obtido por trinta elementos lagrangeanos unidimensionais de quarta ordem aproximando o problema com 358 graus de liberdade.

B) Modelo TSDT de Reddy (1989) com espaço de aproximação obtido por trinta elementos lagrangeanos unidimensionais de quarta ordem, aproximando o problema com 595 graus de liberdade.

C) Modelo TSDT de Kant (1982) com espaço de aproximação obtido por trinta elementos lagrangeanos unidimensionais de quarta ordem. Força aplicada na cota paramétrica  $\zeta = 0$  e aproximação do problema com 595 graus de liberdade.

D) Modelo TSDT de Kant (1982) com espaço de aproximação obtido por trinta elementos lagrangeanos unidimensionais de quarta ordem. Força aplicada na cota paramétrica  $\zeta = -1$  e aproximação do problema com 595 graus de liberdade.

O objeto da análise é verificar a aproximação do comportamento com relação ao modelo do sólido de revolução a medida que se varia a relação  $R/h$ . Os resultados são mostrados para o comportamento do deslocamento radial  $v(mm)$  nas Fig. 28a e a da energia de deformação elástica normalizada com relação ao modelo do sólido de revolução na Fig.29. As

condições de contorno essenciais para os modelos utilizados são apresentadas na tabela 10, e a energia normalizada para cada modelo utilizado é obtida pela equação 197 como segue.

$$E_n = \frac{|E_i - E_r|}{|E_r|}, \quad i = 1, \dots, 4; \quad (197)$$

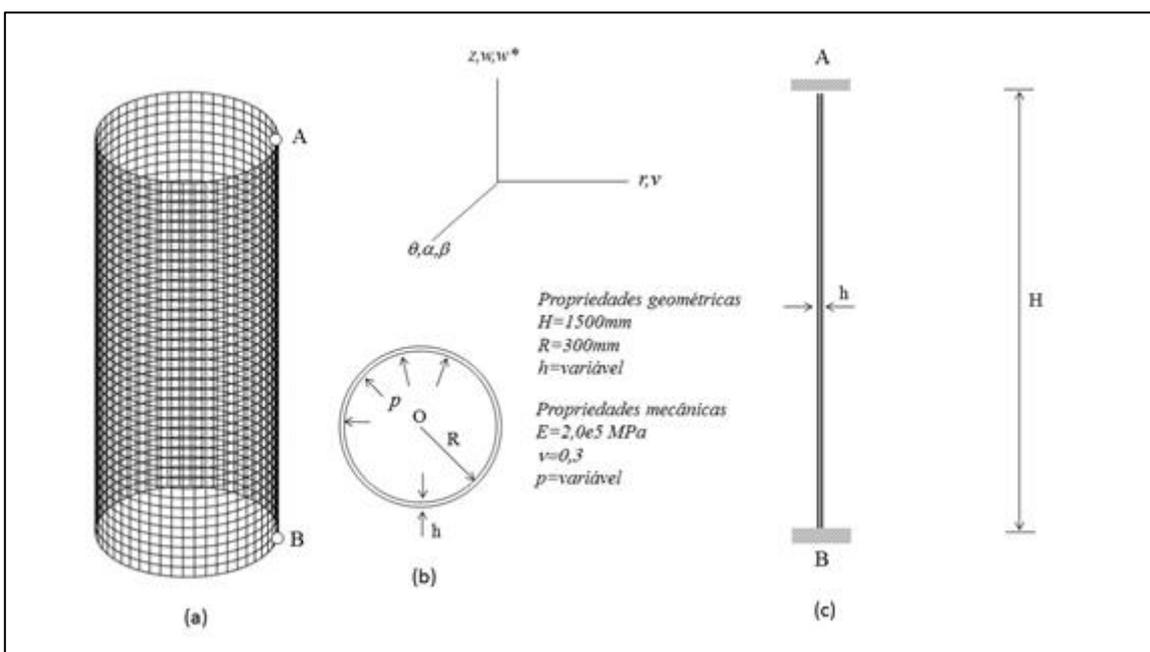
Na equação 197  $E_i$  é a energia total de deformação elástica correspondente ao modelo  $i$  e  $E_r$  é a energia total de deformação correspondente ao modelo do sólido de revolução.

Tabela 10-Condições de contorno essenciais para os modelos cinemáticos de A a D

Nó	A						B					
	$v$	$w$	$w^*$	$\varphi$	$\alpha$	$\beta$	$v$	$w$	$w^*$	$\varphi$	$\alpha$	$\beta$
A	1	1	...	1	...	...	1	1	...	1	...	...
B	1	1	...	1	1	1	1	1	...	1	1	1
C	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	...	1
D	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	...	1

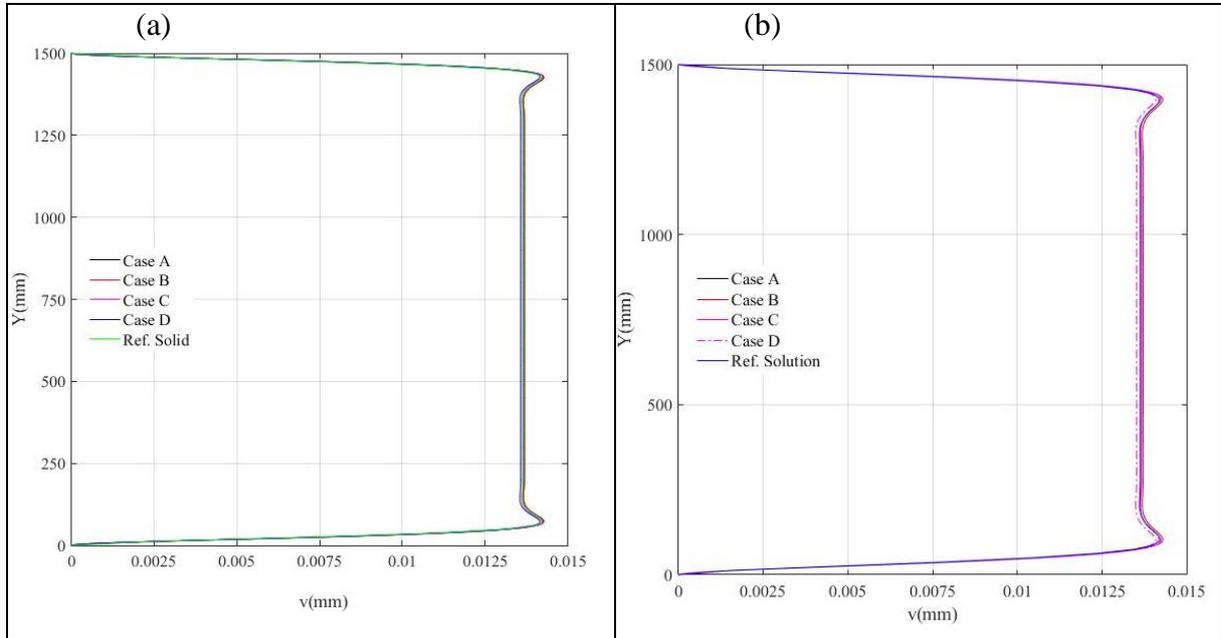
Fonte: Autor (2017.)

Figura 28-a) Cilindro longo; b) seção circular com diâmetro e espessura; c) comprimento e condições de contorno essenciais para os modelos FSDT e TSDT.



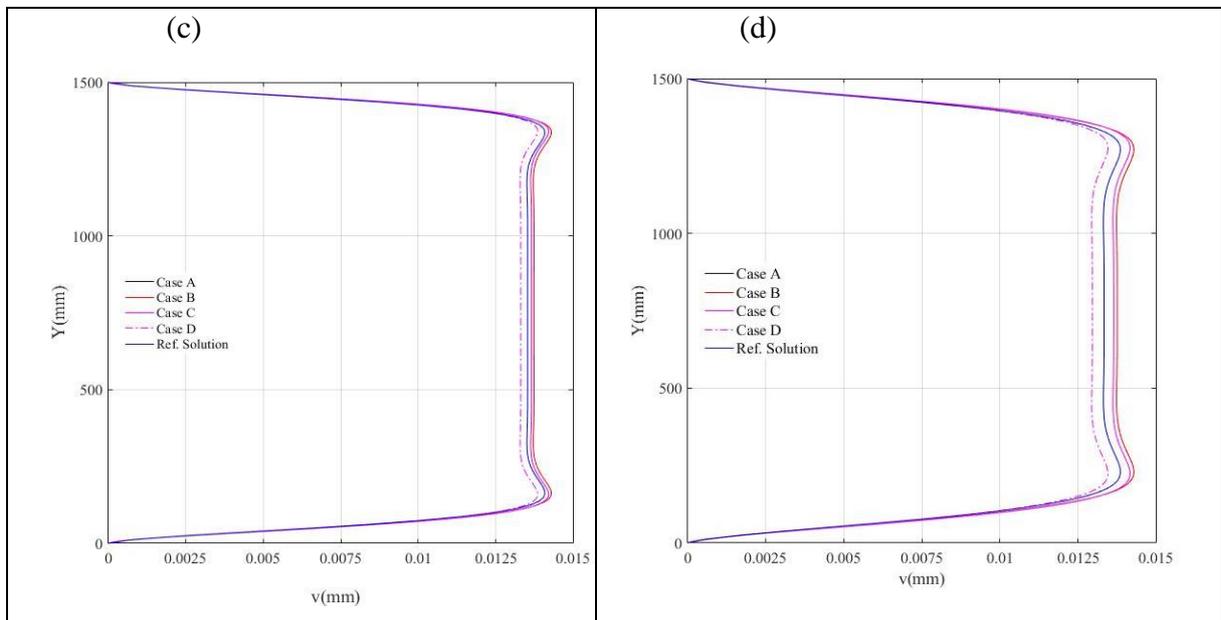
Fonte: Autor (2017.)

Figura 29-Deslocamento radial: a) relação  $R/h=100$ ; b) relação  $R/h=50$ .



Fonte: Autor (2017).

Figura 30-Deslocamento radial: c) relação  $R/h=20$ ; d) relação  $R/h=10$ .



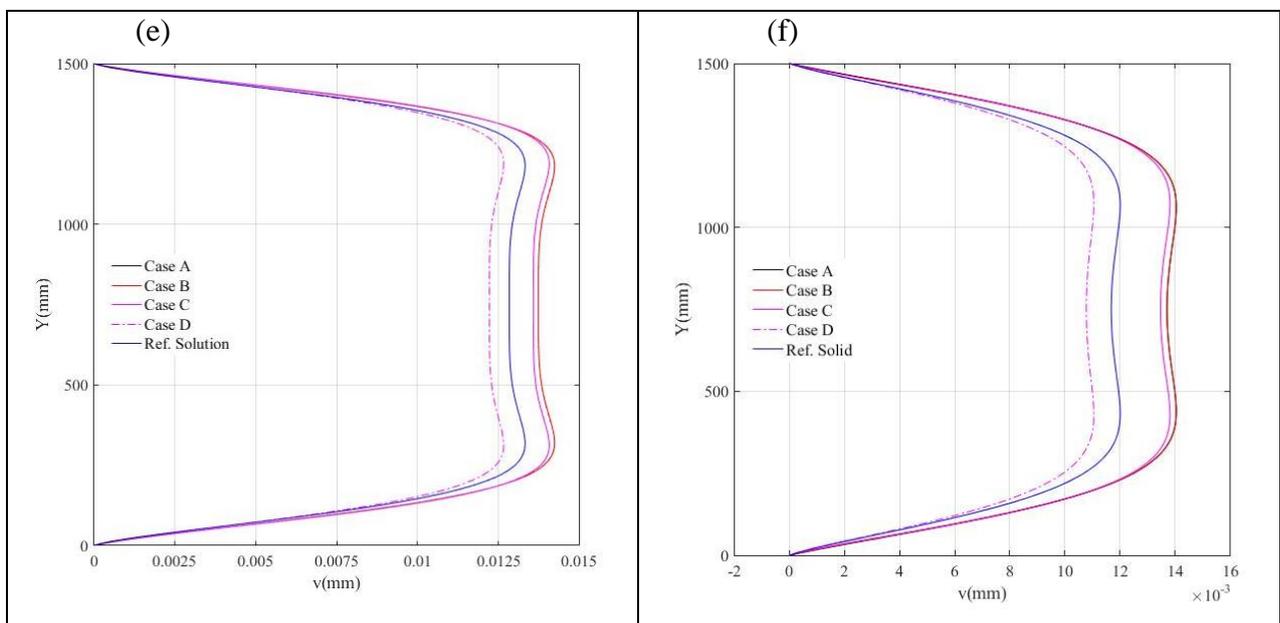
Fonte: Autor (2017).

Os resultados observados do comportamento do deslocamento radial  $v(mm)$  nas Fig. 29 a 31, mostram que a medida que diminui a relação  $R/h$  os resultados das estratégias C e D que consideram a normal extensível (deformação na direção da espessura) se aproximam mais do sólido de revolução do que as estratégias A e B

Este fato já esperado, se deve a utilização de um mecanismo de deformação mais próximo do sólido de revolução inclusive no que diz respeito à equação constitutiva que é a mesma utilizada para ambos os modelos visto que consideram as mesmas componentes de deformação.

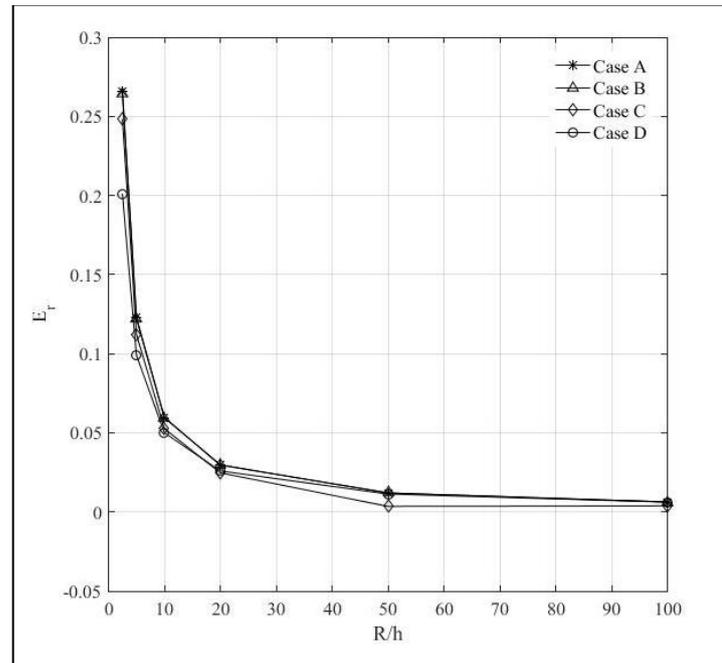
Por outro lado, para as estratégias C e D que permitem aplicar a força externa sobre qualquer superfície na direção radial nota-se na Fig.31, as respostas mais próximas do modelo sólido de revolução são obtidas pela estratégia D. Este fato se deve a que neste caso a força decorrente da pressão interna está sendo aplicada na superfície interna de forma idêntica ao modelo do sólido de revolução. Para as relações de casca fina com as relações  $R/h = 50$  e  $R/h = 100$ , os efeitos da normal extensível não são relevantes e os resultados das teorias propostas são muito próximos aos do modelo do sólido de revolução.

Figura 31-Deslocamento radial: a) relação  $R/h=5$ ; b) relação  $R/h=2.5$ .



Fonte: Autor (2017.)

Figura 32-Valor normalizado da energia de deformação para as estratégias A-D com relação ao modelo sólido de revolução.



Fonte: Autor (2017.)

Os resultados da energia de deformação elástica normalizada mostrados na Fig.32 para as estratégias analisadas corroboram os resultados observados na análise do comportamento do deslocamento radial  $v(mm)$ . Neste estudo de caso os resultados mais próximos para todas as relações  $R/h$  analisadas são das estratégias C e D.

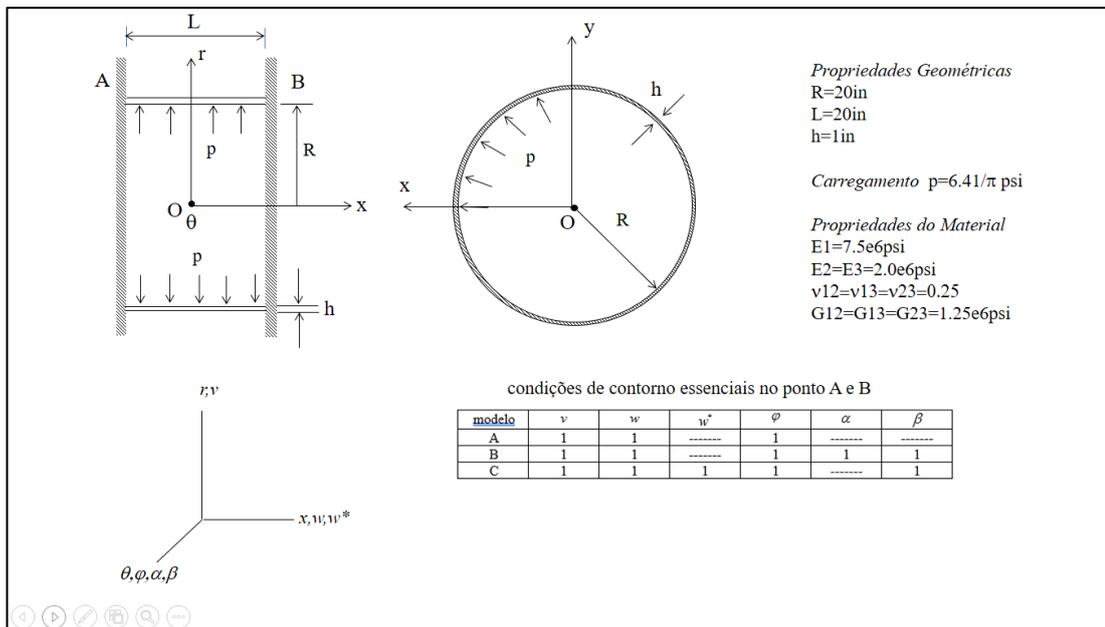
Na análise da estratégia C a diferença acentuada do valor normalizado de energia elástica para a relação  $R/h = 2,5$  deve-se à aplicação da força de pressão na superfície média da casca assim como nos modelos de casca fina não levando em conta a deformação na direção da espessura. Para o caso da estratégia D os resultados para a relação  $R/h = 2,5$  são as mais próximas do modelo sólido de revolução pelo fato de considerar a normal extensível na aplicação da força de pressão.

Deve-se ressaltar aqui que o modelo para a relação  $R/h = 2,5$  constitui um cilindro de parede espessa onde o campo de deslocamento radial não varia de acordo com uma função polinomial na espessura do tubo (ver: Timoshenko e Goodier, 1951). Neste sentido campo de deslocamento na direção normal descrito por funções quadráticas, como é o caso das teorias C e D, se aproximam mais do modelo do sólido de revolução do que o deslocamento na direção normal constante utilizado nas teorias A e B.

6.4. RESULTADOS DE BENCHMARK PARA O CILÍNDRIO CURTO COMPOSTO POR LAMINADOS

O resultado analisado neste estudo de caso tem como objetivo mostrar o desempenho dos modelos cinemáticos de primeira ordem com deformação cisalhante FSDT (Reddy) e os modelos cinemáticos cúbicos TSDT (Reddy, 1989) e o TSDT (Kant, 1982) na análise do deslocamento radial para um cilindro curto compostos por laminados. A propriedades geométricas mecânicas e condições de contorno são indicadas na Fig.33.

Figura 33-Casco cilíndrico curto engastado nas extremidades



Fonte: Autor (2017.)

O campo do deslocamento radial ao longo do comprimento foi obtido para os modelos supracitados segundo as estratégias:

- a) Modelo numérico construído a partir da teórica cinemática FSDT e um espaço de aproximação obtido a partir de 6 elementos unidimensionais de ordem quadrática uniformemente distribuídos aproximando o problema com 34 graus de liberdade.
- b) Modelo numérico construído a partir do modelo cinemático TSDT (Reddy, 1984) e um espaço de aproximação obtido com 6 elementos unidimensionais quadráticos uniformemente distribuídos aproximando o problema com 116 graus de liberdade.

c) Modelo numérico construído a partir do modelo cinemático TSDT (Kant, 1982) e um espaço de aproximação obtido com 6 elementos unidimensionais quadráticos uniformemente distribuídos aproximando o problema com 116 graus de liberdade.

Os resultados numéricos para o deslocamento radial máximo são mostrados nas Tab 11-13 para as estratégias propostas dos esquemas de laminação e juntamente com os resultados obtidos por Reddy, K. P. Rao (1978) e uma solução analítica. Os comportamentos do deslocamento radial para as estratégias propostas para ambos os esquemas de laminação são mostrados na Figura 34(a-b).

Tabela 11-Deslocamento radial máximo para o caso A

Esquema de Laminação	Case A	Reddy 1984		K.P.Rao (1987)	Analítico
		4L	2Q9		
0	0.0003736	0.0003754	0.0003727	0.0003666	0.000367
0/90	0.0001845	0.0001870	0.0001803	-----	-----

Fonte: Autor (2017)

Tabela 12-Deslocamento radial máximo para o caso B

Esquema de Laminação	Case B	Reddy 1984		K.P.Rao (1987)	Analítico
		4L	2Q9		
0	0.0003756	0.0003754	0.0003727	0.0003666	0.000367
0/90	0.0001830	0.0001870	0.0001803	-----	-----

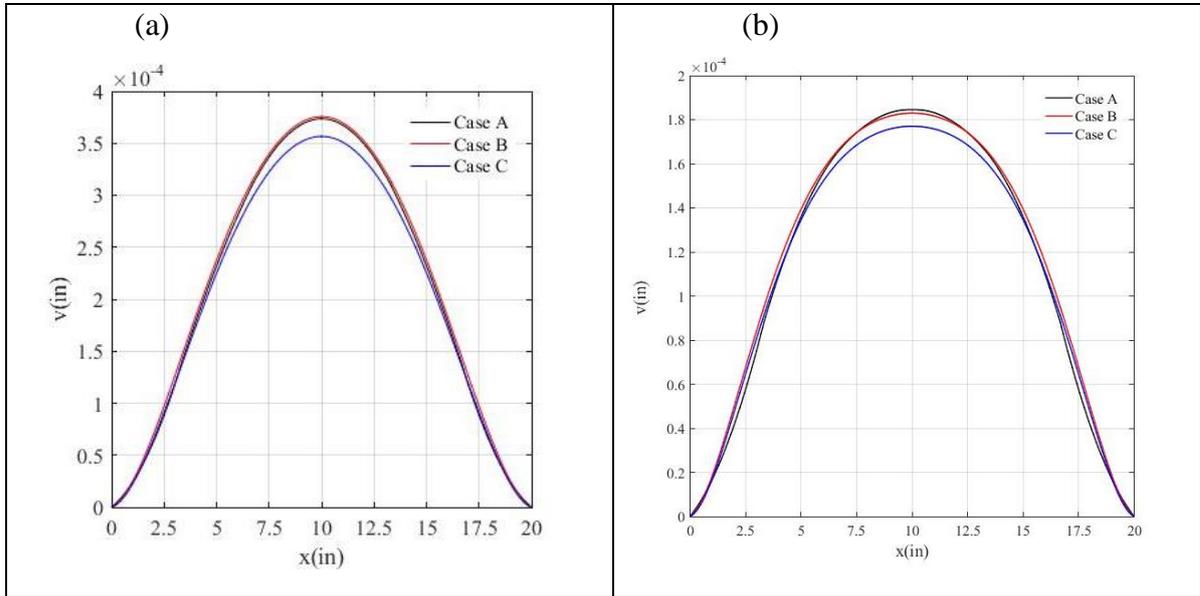
Fonte: Autor (2017)

Tabela 13-Deslocamento radial máximo para o caso C

Esquema de Laminação	Case C	Reddy 1984		K.P.Rao (1987)	Analítico
		4L	2Q9		
0	0.0003566	0.0003754	0.0003727	0.0003666	0.000367
0/90	0.0001770	0.0001870	0.0001803	-----	-----

Fonte: Autor (2017.)

Figura 34-a) Deslocamento radial para esquema de laminação 0; b) Deslocamento radial para o esquema de laminação 0/90



Fonte: Autor (2017)

Os resultados comparativos do deslocamento no ponto C e da energia elástica de deformação para as estratégias A-C considerando os esquemas de laminação e laminado simétrico estão dispostos na Tab.14.

Tabela 14-Deslocamento no ponto C e da energia elástica de deformação

Caso	0/90/0/90		$[0/90]_s$	
	$v(in)$	$E_n(lb.in)$	$v(in)$	$E(lb.in)$
A	0.000182958	0.2903979	0.000179705	0.27839729
B	0.000182771	0.2910701	0.000179633	0.27904066
C	0.000176400	0.2790174	0.000173815	0.26817377

Fonte: Autor (2017.)

## 6.5. RESULTADOS DE FLEXÃO EM PLACAS CIRCULARES ENGASTADAS

Os resultados mostrados neste estudo de caso referem-se a uma placa circular composta por laminados engastada no contorno. Neste exemplo serão analisados para as teorias cinemáticas indicadas nos itens A-D o deslocamento transversal, a energia de deformação

elástica a e as distribuições de tensões normais e cisalhantes ao longo da espessura para uma abcissa radial específica indicada na Fig.35. Os esquemas de laminação para os estudos de caso são obtidos para lâminas fibra de vidro epóxi (GI-Ep (1)). As propriedades geométricas e a força aplicada são indicadas na Fig. 35. As condições de contorno nos vínculos A e B são descritas para cada modelo utilizado nas Tab. 15-16 e as propriedades materiais homogeneizadas para uma lâmina ortótropa são indicadas na Tab.17.

a) Modelo cinemático de Raisner-Mindlin (FSDT);

b) Modelo cinemático de Reddy (1989) (TSDT);

c) Modelo cinemático Kant (TSDT) com a força externa aplicada na superfície média da placa correspondente a coordenada natural  $\zeta = 0$ .

d) Modelo de sólido de revolução construído com 4x10 elementos lagrangeanos de quarta ordem (25 nós) sendo utilizado faixas 1x10 elementos para modelar cada lâmina. O modelo aproxima o problema físico com 1343 graus de liberdade.

O espaço de aproximação utilizado para os modelos de A-D é constituído de dez elementos de quarta ordem com distribuição uniforme do grid. Os estudos de caso para este exemplo são descritos nos itens a-c a seguir para os seguintes esquemas de laminação: uma lamina ortótropa; laminado simétrico  $[0/90]_s$  e laminado assimétrico  $[90/0]_s$ .

a) Resultados, para as teorias A-D, do deslocamento transversal  $w(mm)$  no centro da placa. Estes resultados são mostrados na Tab.15.

b) Resultados, para as teorias A-D, da energia de deformação elástica  $E(N \cdot mm)$ . Estes resultados são apresentados na Tab.16.

c) Perfil de distribuição de tensões  $\sigma_r (MPa)$  e  $\tau_{rz} (MPa)$  para as teorias em análise na abcissa medida na direção radial indicada na Fig.35. Estes resultados são mostrados nas Fig. 36 a 38

Tabela 15-Condições de contorno em O

Modelo	$v$	$w$	$w^*$	$\varphi$	$\alpha$	$\beta$
A	1	0	-----	1	-----	-----
B	1	0	-----	1	1	1
C	1	0	1	1	-----	1
D	1	0	-----	-----	-----	-----

Fonte: Autor (2017)

Tabela 16-Condições de contorno A

Modelo	$\nu$	$w$	$w^*$	$\varphi$	$\alpha$	$\beta$
A	1	1	-----	1	-----	-----
B	1	1	-----	1	1	1
C	1	1	1	1	-----	1
D	1	1	-----	-----	-----	-----

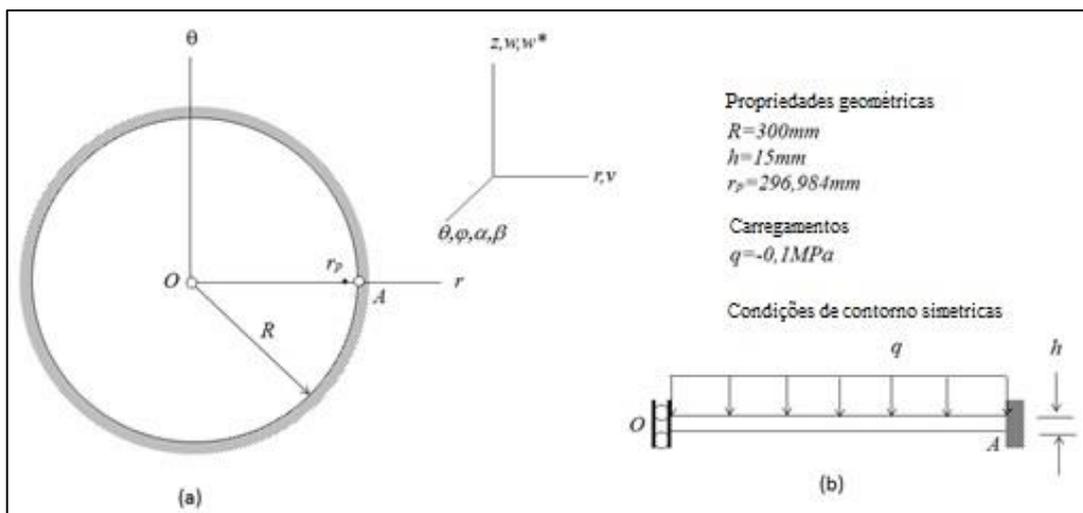
Fonte: Autor (2017)

Tabela 17-Propriedades materiais (MPa)

Prop. Mat.	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$
Lâmina	53779,8 0	17926,38	17926,38	0,25	0,25	0,34	8963,19	8963,19	3447,38

Fonte: Autor (2017.)

Figura 35-a) Placa circular engastada nas bordas; b) Condições de contorno



Fonte: Autor (2017)

### 6.5.1 Resultados para o deslocamento transversal

Os resultados para o deslocamento transversal no centro da placa apresentaram valores próximos para todos os modelos analisados a menos do modelo descrito em C. Pelo fato do modelo descrito no item C ser mais próximo do modelo do sólido elástico de revolução deveria se esperar uma maior proximidade para os resultados do deslocamento transversal com o modelo D. Contudo, deve-se observar que se trata de um resultado local onde o mecanismo de

deformação normal considerada no modelo C começa a ficar significativo para relações  $R/h \leq 100$ . Por outro lado, a vinculação no ponto O não é tão efetiva como modelo sólido apesar do deslocamento transversal ter variação quadrática com a espessura. Os resultados de proximidade com relação ao sólido sólido elástico de revolução, para os modelos cinemáticos analisados, são mais fidedignos na análise da energia de deformação elástica para os esquemas de laminação indicados na Tab.18.

Tabela 18-Deslocamento w (mm)

Esquema de laminação	A	B	C	D
0	-1,17978	-1,18078	-1,31855	-1,19740
$[0/90]_s$	-1,19083	-1,20538	-1,33601	-1,22780
$[90/0]_s$	-1.44200	-1.43780	-1.64210	-1.45480

Fonte: Autor (2017)

### 6.5.2 Resultados da energia de deformação para as estratégias.

A Tab.19 traz os resultados para a energia de deformação mostra valores mais próximos do modelo C com relação ao modelo sólido do que os modelos A e B. Este fato deve-se aos mecanismos de tensão deformação do modelo C ser mais próximo do modelo sólido do que os modelos A e B onde não é levada em conta a parcela de energia decorrente das tensões e deformações normais na direção z.

Tabela 19-Energia de deformação (N.mm)

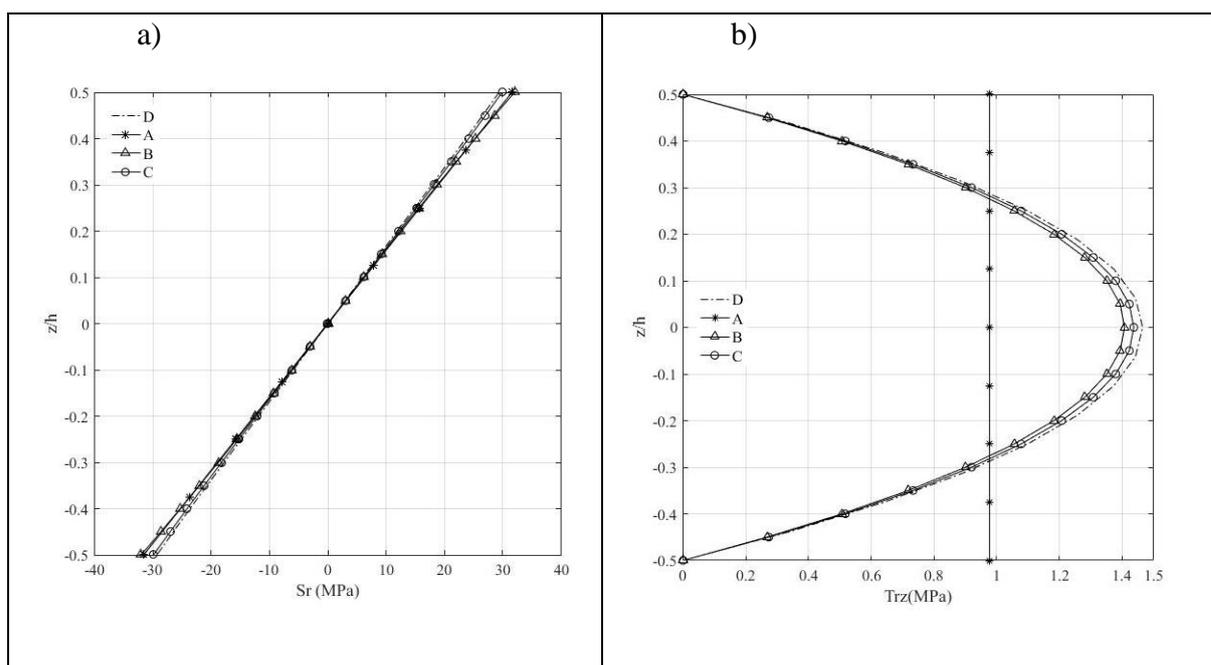
Esquema de laminação	A	B	C	D
0	4966.860	4967.731	5254.595	8699,90
$[0/90]_s$	5196.458	5268.367	5536.447	8027,10
$[90/0]_s$	7581,429	7552,532	8085,731	17356,54

Fonte: Autor (2017.)

### 6.5.3 Perfil de distribuição das tensões

As Fig. 36 a 38 trazem a comparação as deformações normais, como também, as deformações cisalhantes correspondentes as teorias cinemáticas estudadas neste trabalho. Estes resultados foram obtidos através das equações constitutivas e não houve preocupação com o critério de continuidade interlaminar das tensões cisalhantes. No que diz respeito ao tipo de resultado esperado as distribuições tensões normais e cisalhantes ao longo da espessura normaliza seguem um comportamento padrão para os esquemas de laminação estudados que estão em acordo com os observados em Reddy (1984). Os resultados obtidos através da equação constitutiva para a distribuição das tensões cisalhantes dos esquemas de laminação  $[0/90]_s$  e  $[90/0]_s$  estão descritos nas Figuras 37(b) e 38(b).

Figura 36-a) Tensões normais; b) Tensões cisalhantes.  $0^\circ$

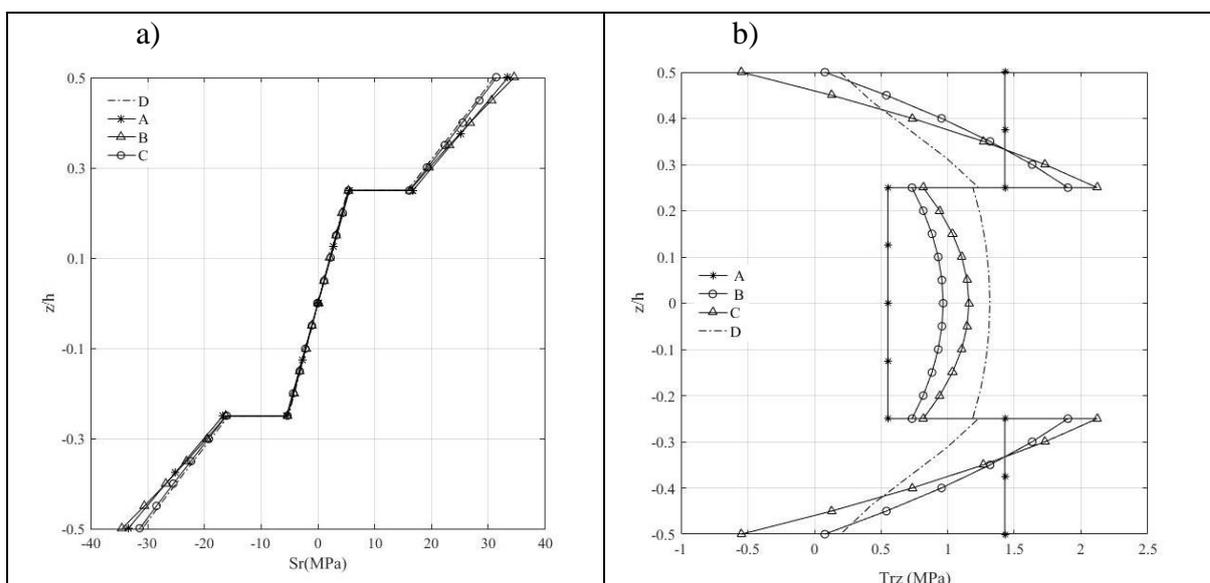


Fonte: Autor (2017)

No que diz respeito aos resultados das tensões normais e cisalhantes da lâmina ortótropa mostradas na Fig.36(a) e 36(b) os resultados obtidos pela modelo C (Kant 1982) ficaram mais próximos do modelo do sólido de revolução do que os obtidos com as teorias correspondentes aos modelos A e B. Este fato se deve ao modelo C apresentar um mecanismo de tensões e deformações mais próximas do sólido de revolução, visto que leva em consideração

as tensões e deformações normais na direção da espessura. Nas Figuras 37(a)-(b) e 38(a)-(b) embora mostrem distribuições descontínuas para as tensões normais e cisalhantes decorrentes dos esquemas de laminação supracitados corroboram os resultados mais próximos do modelo C com o modelo D. Com a distribuição de tensões obtidas pela lei de constitutividade fica claro o comportamento inconsistente para a tensão cisalhante obtida pelo modelo A como pode ser visto nas Figuras 36(b)-38(b). O fato de se considerar um campo de deslocamento linear produz uma deformação constante e por consequência uma tensão cisalhante constante ao longo da espessura e não nula nas superfícies livres da placa.

Figura 37-a) Tensões normais; b) Tensões cisalhantes [0/90]<sub>s</sub>. °

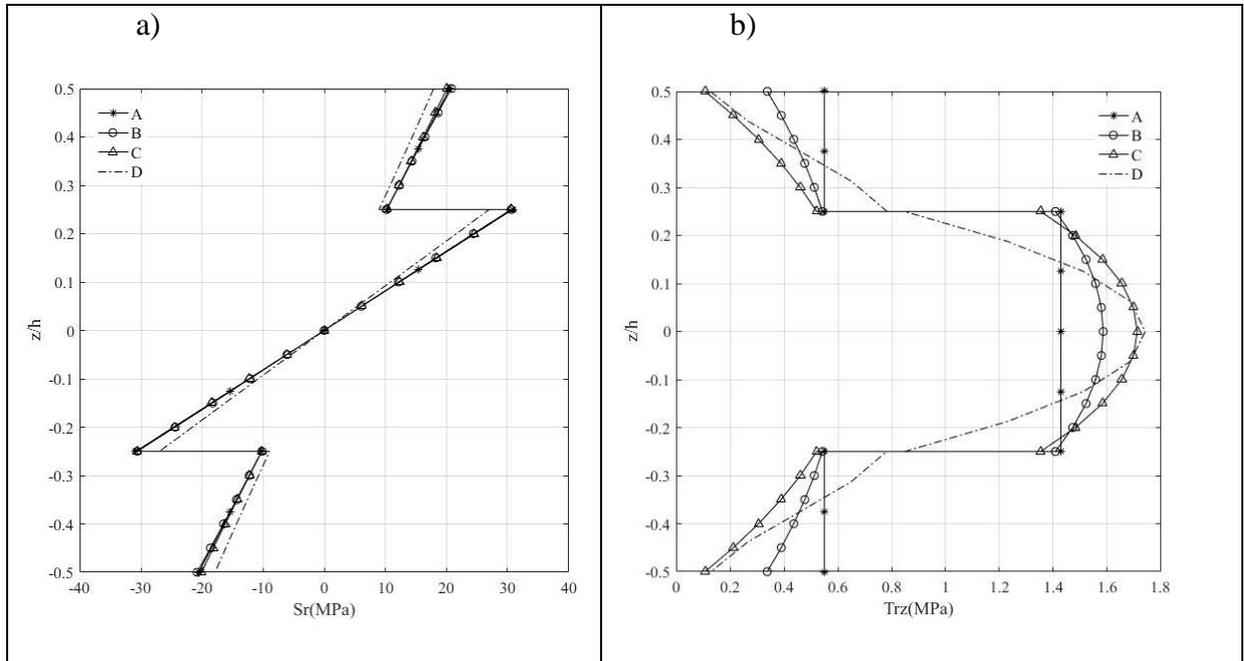


Fonte: Autor (2017)

No que diz respeito ao surgimento de tensões cisalhantes não nulas na superfície livre da placa este fato também é observado nos modelos B, C e D apesar de apresentarem distribuição parabólica para o perfil da tensão na espessura normalizada como pode ser visto nas Figuras 37(b)-38(b). Este fato se deve a utilização da lei constitutiva para obter a distribuição das tensões cisalhantes na espessura. Um dos procedimentos, amplamente, utilizados para contornar este inconveniente consiste em obter as tensões cisalhantes para um determinado perfil pela integração das equações de equilíbrio em tensões. Este procedimento é

válido apenas para o ponto correspondente ao perfil em estudo e as tensões obtidas podem apresentar resultados, embora contínuos, aquém dos resultados medidos experimentalmente.

Figura 38-a) Tensões normais; b) Tensões cisalhantes. [90/0]<sub>s</sub>



Fonte: Autor (2017.)

## 6.6. RESULTADOS PARA CALOTA RASA PUNÇIONADA

Os resultados mostrados neste exemplo referem-se a uma calota rasa com dimensões carregamento e condições de contorno indicadas na Fig.39. Para este exemplo são analisados dois estudos de caso através dos comportamentos do deslocamento transversal e do comportamento singular do momento radial: o primeiro considera o material isotrópico com propriedades indicadas na Tab.22 sendo os valores dos campos analisados obtidos com as teorias cinemáticas indicadas A-C e comparados à solução analítica para FSDT obtida por Reddy (1984). Para o segundo estudo de caso é considerado um material ortótropo com propriedades indicadas na Tab.22. Os resultados obtidos neste estudo de caso são comparados com os obtidos por Reddy (1984) utilizando o MEF.

A) Modelo cinemático de Reissner-Mindlin (FSDT);

B) Modelo cinemático de Reddy (1984) (TSDT);

C) Modelo cinemático Kant (1982) (TSDT) com a força externa aplicada na superfície média da placa correspondente a coordenada natural.

As condições de contorno indicadas na Fig.39, são descritas para os pontos A e B nas Tab. 20-21 a seguir.

Tabela 20-Condições de contorno em A

Modelo	$v$	$w$	$w^*$	$\varphi$	$\alpha$	$\beta$
A	1	0	-----	1	-----	-----
B	1	0	-----	1	1	1
C	1	0	1	1	-----	1

Fonte: Autor (2017)

Tabela 21-Condições de contorno B

Modelo	$v$	$w$	$w^*$	$\varphi$	$\alpha$	$\beta$
A	1	1	-----	1	-----	-----
B	1	1	-----	1	1	1
C	1	1	1	1	-----	1

Fonte: Autor (2017)

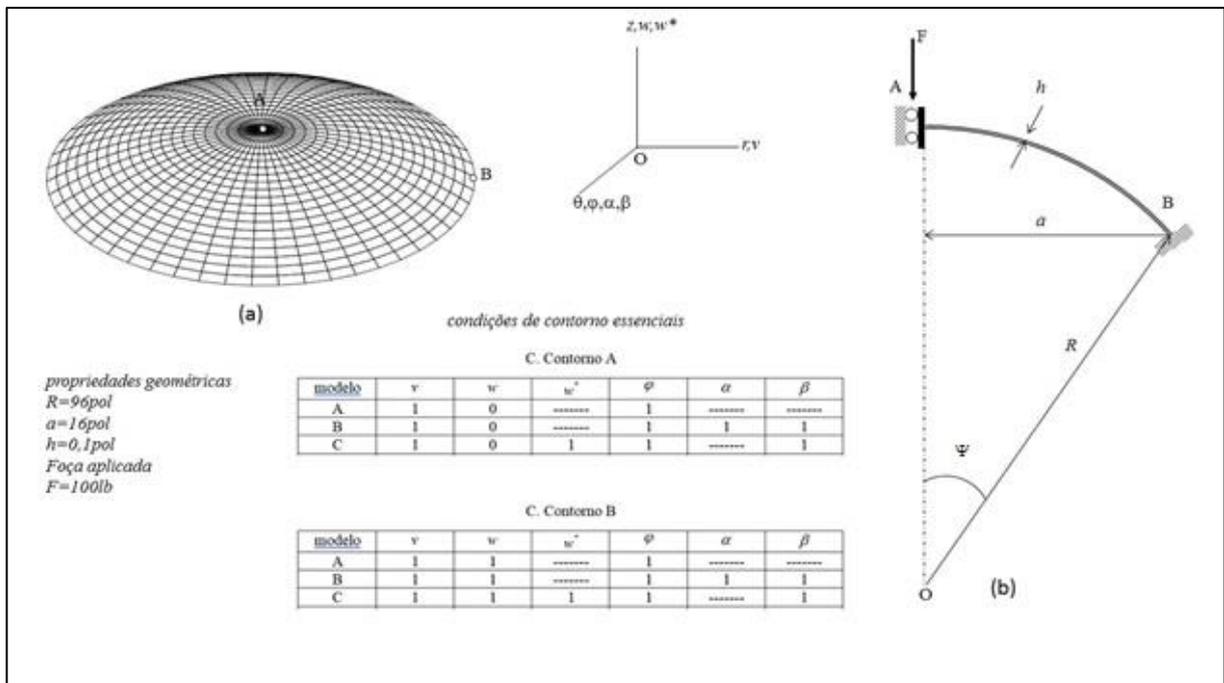
Tabela 22-Propriedades materiais (lb/pol<sup>2</sup>)

Propriedades do material	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$
Isotrópico	$10^7$	$10^7$	$10^7$	0,3	0,3	0,3	$3,846 \times 10^6$	$3,846 \times 10^6$	$3,846 \times 10^6$
Ortótropo	$10^7$	$4 \times 10^5$	$4 \times 10^5$	0,25	0,25	0,25	$2 \times 10^5$	$2 \times 10^5$	$8 \times 10^4$

Fonte: Autor (2017.)

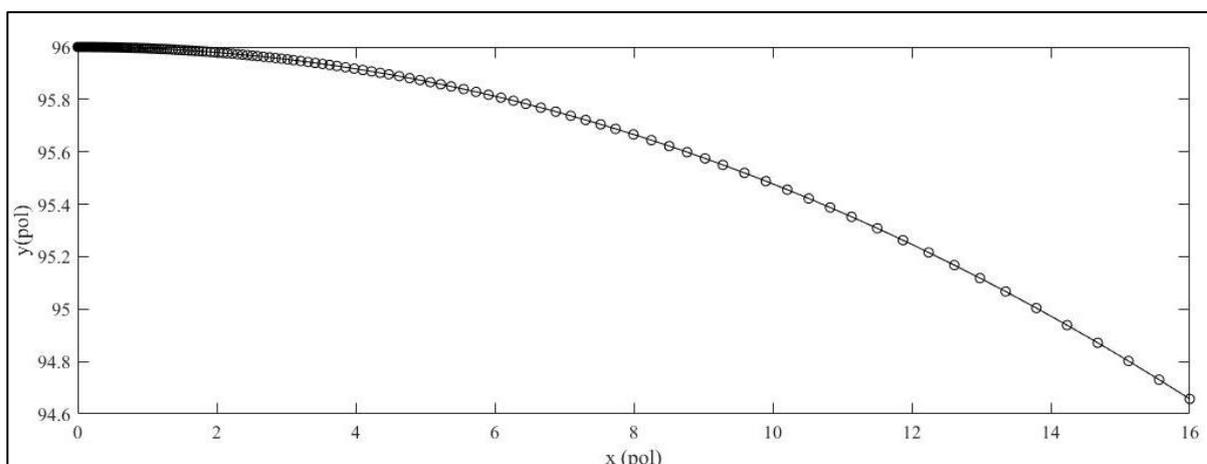
Os espaços de aproximação utilizados para os modelos no primeiro estudo de caso foram obtidos com quarenta elementos unidimensionais de ordem definidos sobre um grid geométrico com razão de progressão como mostrado na Fig.40. O modelo A foi aproximado com 719 graus de liberdade e os modelos B e C com 1196 graus de liberdade. Os resultados obtidos para o deslocamento transversal no ponto A da Fig.39 são mostrados na Tab.23 juntamente com o resultado de referência da solução analítica obtida por Reddy (1984) com 99 termos da solução expandida em série. O comportamento do deslocamento transversal e do momento na direção radial para as teorias supracitadas são mostrados nas Fig.41(a)-(b) respectivamente

Figura 39- a) Casca esférica rasa; b) Propriedades geométricas de condições de contorno.



Fonte: Autor (2017.)

Figura 40-Grid geométrico com 40 elementos lagrangeanos de 7 nós com razão da pg.  $r=1,4$ .



Fonte: Autor (2017.)

Para a consideração do material ortótropo foram utilizados espaços de aproximação diferentes dos utilizados para o material isotrópico já que não há solução analítica neste caso. Neste estudo de caso os resultados obtidos para os modelos A-C foram comparados com os resultados obtidos por Reddy (1984) com 4x4 elementos bi quadráticos lagrangeanos de nove nós. Os espaços de aproximação utilizados para os modelos supracitados são mostrados a seguir:

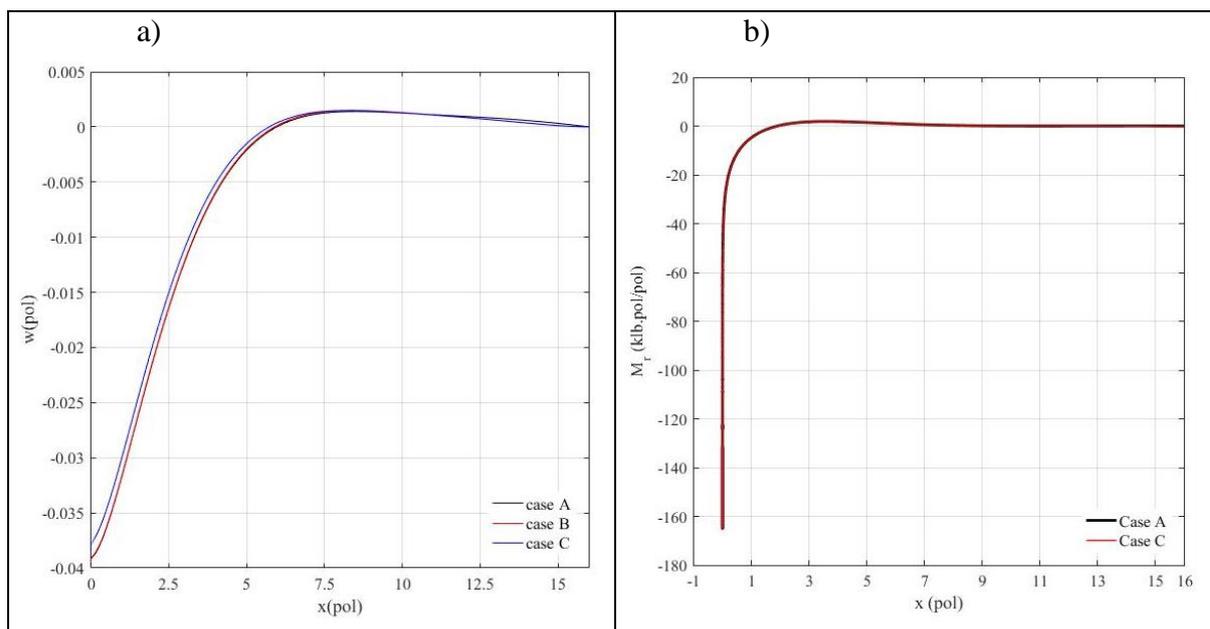
a) Para o modelo A foi construído um espaço de aproximação a partir de 4 elementos unidimensionais de quarta ordem (cinco nós) distribuídos sobre um grid uniforme aproximando o problema com 46 graus de liberdade.

b) Para os modelos B e C foi construído um espaço de aproximação constituídos de 4 elementos unidimensionais de quarta ordem (cinco nós) aproximando o problema com 76 graus de liberdade.

Tabela 23-Deslocamento no ponto A em pol.

Material	Reddy (1984)	A	B	C
Isotrópico	0.03972	0.03973	0.03954	0.03844
Ortótropo	-0.1264	-0.1288	-0.1279	-0.1266

Fonte: Autor (2017.)

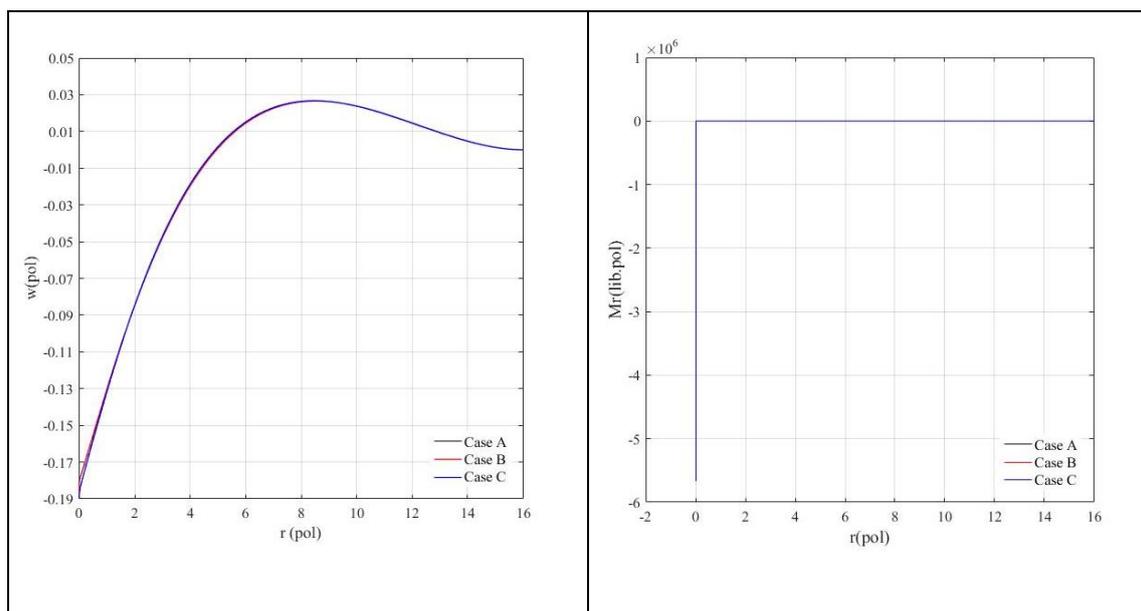
Figura 41- a) Deslocamento  $w(r)$ ; b) Momento radial

Fonte: Autor (2017)

Os resultados deste exemplo mostram um caso típico de singularidade das respostas em tensões no ponto A. Este fato fica evidente nos resultados do comportamento do momento radial para o material isotrópico mostrado nas Fig.41b. Neste caso nota-se uma variação brusca do momento radial numa região adjacente ao ponto A.

Para segundo estudo de caso com o material apresentando anisotropia, os espaços de aproximação foram obtidos para mostrar resultados em deslocamentos próximos dos encontrados por Reddy (1984) utilizando o método de elementos finitos. Neste caso a literatura de referência não se preocupou em analisar a convergência de resultados para o deslocamento transversal no ponto A.

Para este estudo de caso, de forma similar do que foi feito para o caso do material considerando isotrópico, é proposta a mesma estratégia para obter o espaço de aproximação. Os resultados do deslocamento vertical e do momento radial são mostrados nas Fig.42 a-b. Como pode ser notado o deslocamento apresentado por Reddy (1984) mostrado na Tab. 23 é em torno de setenta por cento do deslocamento máximo mostrado na Fig.42a. Por outro lado a Fig.42b mostra a singularidade no momento radial que apresenta um decaimento brusco quase perpendicular, nas proximidades do ponto A.

Figura 42-a) Deslocamento vertical  $w(r)$ ; b) Momento radial  $M_r(r)$ .

Fonte: Autor (2017)

### 6.7. CASCAS RASAS SOB AÇÃO DE FORÇA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

Os resultados mostrados neste estudo de caso referem-se ao deslocamento transversal no ponto A para a casca esférica rasa com propriedades geométricas e condições de contorno mostrada na Fig.39. O material utilizado neste estudo de caso é o laminado de fibra de vidro imerso em matriz epóxi (Glass-Epóxi (1)) com propriedades mecânicas indicadas na Tab.24. Os espaços de aproximação utilizados neste estudo de caso são indicados pelas estratégias A-D para os esquemas de laminação:  $0^\circ$  uma lâmina ortótropa, empilhamento simétrico  $[0/90]_s$ ,  $[90/0]_s$ .

Tabela 24-Propriedades materiais do Glass-Epóxi (MPa)

P. do. material	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$
Ortótropo	53779,13	17296,40	17296,40	0,25	0,25	0,34	8963,19	8963,19	3447,40

Fonte: Autor (2017.)

a) Modelo numérico construído com teoria cinemática de primeira ordem que considera deformação cisalhante (FSDT). O espaço de aproximação é construído com um grid

de vinte elementos unidimensionais de quarta ordem (5 nós) uniformemente distribuídos aproximando o problema com 238 graus de liberdade.

b) Modelo numérico construído com a teoria de cinemática cúbica proposta por Reddy (1989) (TSDT). O espaço de aproximação é construído com um grid de vinte elementos unidimensionais de quarta ordem (5 nós) uniformemente distribuídos aproximando o problema com 396 graus de liberdade.

c) Modelo numérico construído com a teoria de cinemática cúbica proposta por Kant (1982) (TSDT) considerando a deformação normal extensível. O espaço de aproximação é construído com um grid de vinte elementos unidimensionais de quarta ordem (5 nós) uniformemente distribuídos aproximando o problema com 396 graus de liberdade. Modelo numérico construído com 20x4 elementos sólidos axissimétricos de quarta ordem (elementos de 25 nós) aproximando o problema com 2703 graus de liberdade.

Os resultados para este estudo de caso são mostrados através de:

a) Deslocamento transversal no ponto A da Figura 39, indicados na Tab.25, mostrado para os esquemas de empilhamento supracitados.

b) Comportamento do deslocamento transversal na direção radial, mostrados na Fig. 43, para a casca ortótropa e para o esquema de laminação  $[0/90]_s$ .

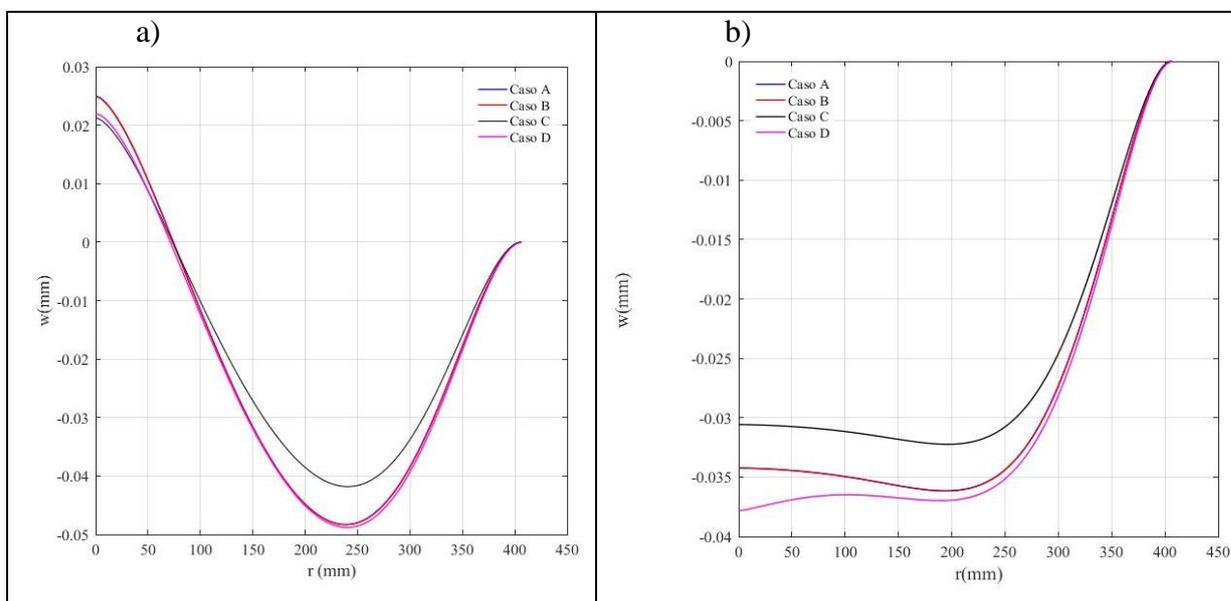
c) Comportamento do momento radial, mostrado na Fig.44, para a casca constituída de uma única lâmina ortótropa, e a casca constituída por um esquema de empilhamento simétrico  $[0/90]_s$ . Estes resultados são obtidos apenas para os modelos A,B e C.

Tabela 25-Deslocamento transversal  $w$  (mm) no ponto A

Modelos	A	B	C	D
$0^\circ$	0,0249	0,0249	0,0212	0,0220
$[0^\circ/90^\circ]_s$	-0,0342	-0,0342	-0,0306	-0,0378
$[90^\circ/0^\circ]_s$	-0,0334	-0,0334	-0,0300	-0,0367

Fonte: Autor (2017.)

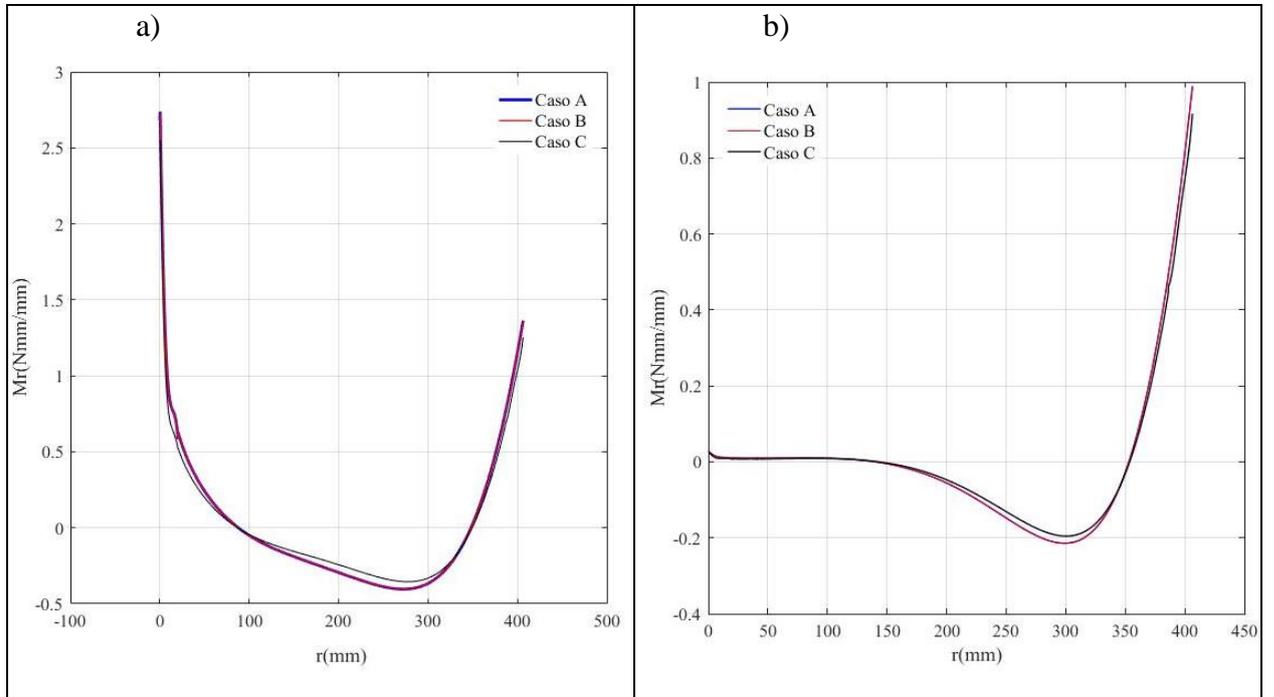
Figura 43-a) Comportamento do  $w$  para lamina ortótropa; b) Comportamento de  $w$  para esquema de empilhamento  $[0^\circ/90^\circ]_s$



Fonte: Autor (2017.)

No que se refere a análise do deslocamento transversais nota-se que os resultados no ponto A não são representativos do comportamento do mesmo na direção radial. Neste estudo de caso o modelo C tem resultados mais próximos do modelo D (modelo de referência) no ponto do que os modelos B e C. Por outro lado, esta proximidade, não se confirma no comportamento do deslocamento na direção radial. Este fato é observado para todos os dois esquemas de empilhamento observados. Uma argumentação possível para o comportamento mais rígido do modelo C (modelo cinemático com normal extensível) pode estar relacionada ao mesmo apresentar um acoplamento mais complexo das tensões e deformações normais produzindo para este estudo de caso componentes de energia de deformação normal significativamente maiores do que as parcelas de energias de membrana produzidas nos modelos A e B. No que diz respeito ao comportamento do momento radial  $M_r$  para ambos os esquemas de laminação notou-se uma resultados semelhantes para os modelos analisados como pode ser observado nas Fig. 44 (a)-(b).

Figura 44-a) Momento radial  $M_r$  para a casca ortótropa; b) Momento radial  $M_r$  para o esquema de empilhamento  $[0^\circ/90^\circ]$ s.



Fonte: Autor (2017)

## 7. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

De forma a utilizar o estudo apresentado no trabalho em uma aplicação prática, foi escolhido o produto cilindro para extração supercrítica, este cilindro tem como característica de utilização no processo, pressões internas elevadas na ordem de 104 MPa (15ksi) quando submetido a testes de estanqueidade, e por se tratar de extração de óleos alimentícios o material do cilindro é construído em inox.

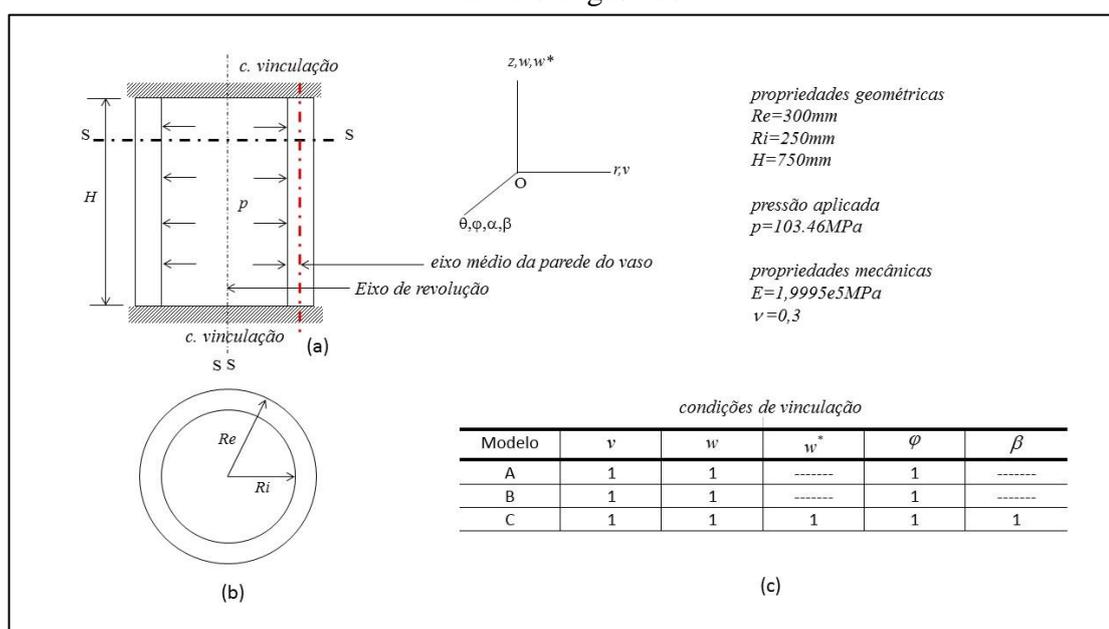
Dentro deste contexto apresenta-se o estudo utilizando o modelo sólido de revolução com elasticidade tridimensional, o modelo cinemático de primeira ordem com deformação cisalhante (FSDT) e o modelo cinemático de terceira ordem com normal extensível (TSDT).

Complementando o estudo, para este exemplo de aplicação, demonstra-se também resultados utilizando um software comercial de elementos finitos, tornando possível uma comparação mais abrangente.

### 7.1. MODELO FÍSICO

O modelo físico é constituído de um tubo cilíndrico fabricado de aço inoxidável S32750 com propriedades geométricas, condições de vinculação e carregamento indicadas na Figura 45 e propriedades mecânicas indicadas na Tab.26.

Figura 45-Propriedades geométricas e condições de vinculação para o cilindro engastado



Fonte: Autor (2017)

Na tabela contida na Fig.25, que apresenta as condições de vinculação, as letras maiúsculas A, B e C referem-se aos modelos que estão sendo estudados. Neste caso A representa o modelo sólido de revolução; B o modelo de primeira ordem ou FSDT e C o modelo cúbico com normal extensível ou TSDT.

Tabela 26-Propriedades mecânicas

Aço inoxidável	E (MPa)	$\nu$	$\sigma_y$ (MPa)
S32750	1,9995e5	0,3	550

Fonte: Autor (2017.)

## 7.2. MODELOS NUMÉRICOS UTILIZADOS

Os modelos numéricos utilizados serão descritos em função da teoria cinemática utilizada do tipo de elemento empregado para discretizar o domínio geométrico, e do número de graus de liberdade utilizados para aproximar o problema. Em função da teoria cinemática os modelos são descritos em:

A) Modelo de elasticidade tridimensional descrito em coordenadas cilíndricas para um problema com simetria axial de forças

B) Modelo cinemático de primeira ordem com deformação cisalhante denominado aqui de *First Shear Deformation Theory* (FSDT). Este modelo é amplamente utilizado pelos softwares comerciais.

C) Modelo cinemático de terceira ordem com normal extensível (TSDT) proposto por Kant (1982).

As descrições dos modelos numéricos em função dos modelos cinemáticos estão dispostas na Tab.27.

Tabela 27-Modelos numéricos utilizados

Teoria cinemática	Tipo elemento	Nº de Elementos	NGL
A	AS-25	200	7191
B	Ash-5	40	477
C	Ash-5	40	795

Fonte: Autor (2017.)

Na Tab.27, AS-25 é o elemento axissimétrico de 25 nós no plano de simetria radial utilizado para modelar sólidos de revolução e Ash-5 é o elemento axissimétrico quártico de cinco nós utilizado para modelar cascas de revolução. O termo NGL na Tab.37 designa o número de graus de liberdade utilizados por cada modelo numérico. Deve-se ressaltar aqui que as nomenclaturas utilizadas para designar os elementos diferem das utilizadas nos softwares comerciais visto que foram implementados em software próprio

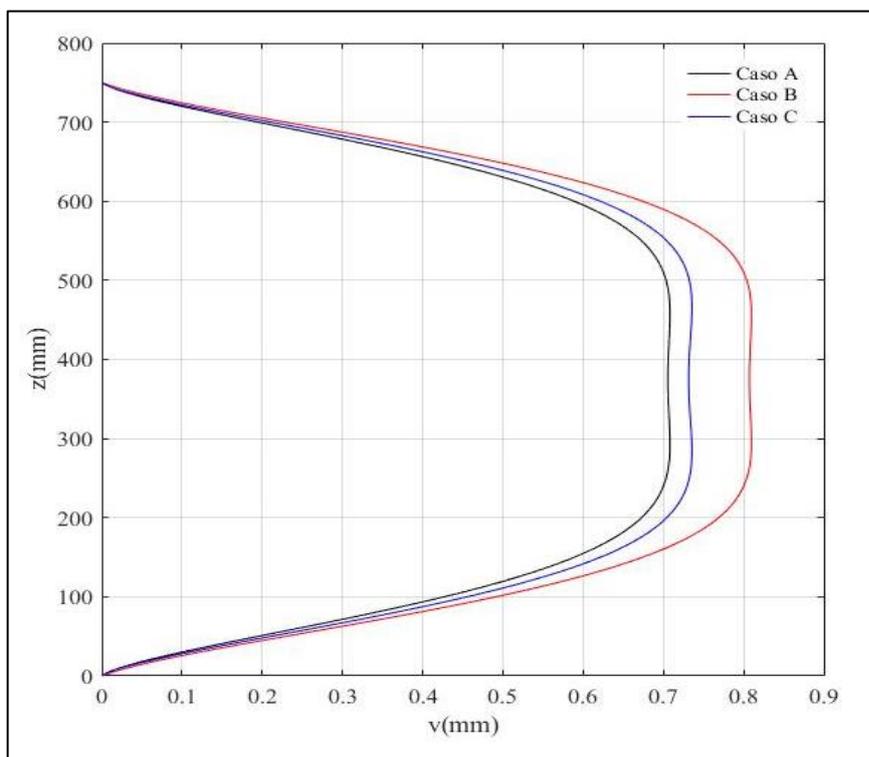
### 7.3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Os resultados numéricos serão descritos através de dois estudos de caso que sejam:

a) Comparar para os modelos numéricos supracitados: o comportamento da componente  $v$  do deslocamento ao longo da altura; o tempo de processamento dispendido por cada modelo e a energia de deformação elástica correspondente a cada modelo. Os resultados deste estudo de caso estão descritos na Fig.46 e na Tab.28.

b) Comparar para os modelos numéricos A e B o comportamento dos esforços normais principais máximos; momentos principais máximos e esforços cortantes. Os resultados destes estudos de caso estão descritos nas Fig.47 a 54.

Figura 46-Comportamento da componente  $v$  do deslocamento na direção  $z$  para os três



Fonte: Autor (2017)

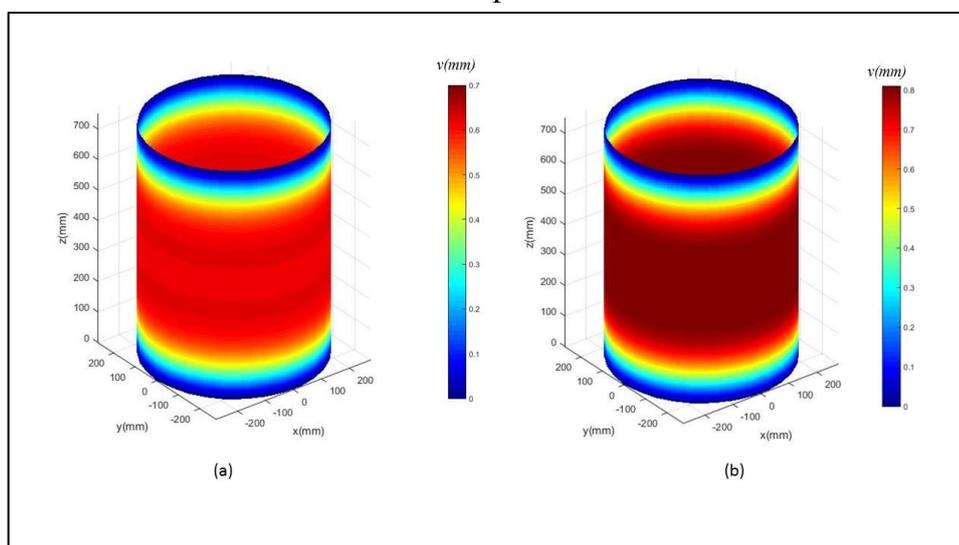
Os resultados mostrados na Fig.46 para o modelo C foram obtidos para pontos sobre o eixo médio da parede do vaso de pressão como indicado na Fig.47a.

Tabela 28-Resultados para tempo de processamento e da energia de deformação elástica

Modelo numérico	T. processamento (s)	Energia deformação (N.mm)
A	177,61	3,4313625e7
B	2,83	4,1062923e7
C	12,5	3,1876491e7

Fonte: Autor (2017.)

Figura 47-(a) Componente v do deslocamento para o modelo C; b) Componente v do deslocamento para o modelo B



Fonte: Autor (2017)

Os resultados do comportamento da componente radial v do deslocamento para o modelo A observados na Fig.46 são mais próximos do modelo C do que do modelo B. Estes resultados são ratificados na energia de deformação elástica onde o modelo C novamente apresenta valores mais próximos do modelo A (modelo sólido de revolução) do que o modelo B. A energia de deformação elástica é uma medida relevante para a comparação de modelos cinemáticos com relação à elasticidade tridimensional pois fornece informações indiretas sobre os estados de tensões e deformações do modelo estudado.

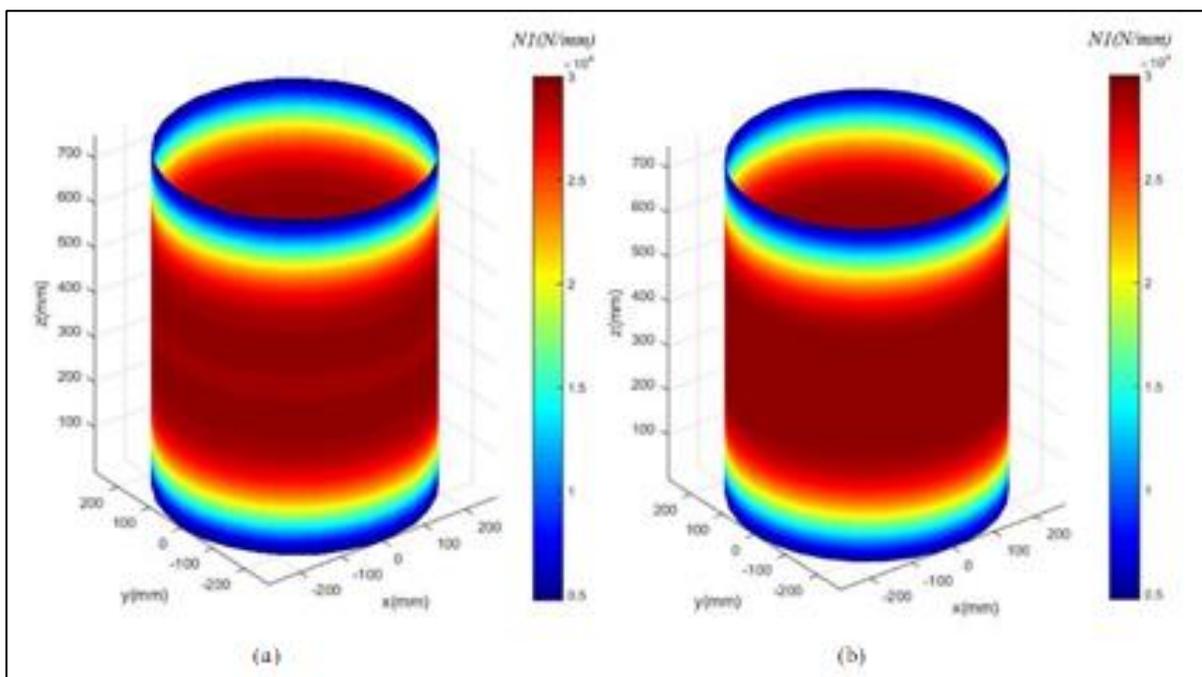
A Fig. 47a-b mostram os comportamentos dos deslocamentos radiais na superfície média da casca cilíndrica mostrando um comportamento mais flexível para o modelo B do que

para o modelo C. Este fato se deve a que o modelo C apresenta mecanismos de acoplamento entre as deformações normais mais complexos do que o modelo B onde a deformação na direção da espessura não é levada em consideração.

Os esforços normais principais N1 mostrados na Fig. 48a-b, mostram resultados quantitativos muito próximos para os dois modelos analisados apresentando uma ligeira diferença na distribuição ao longo do eixo z.

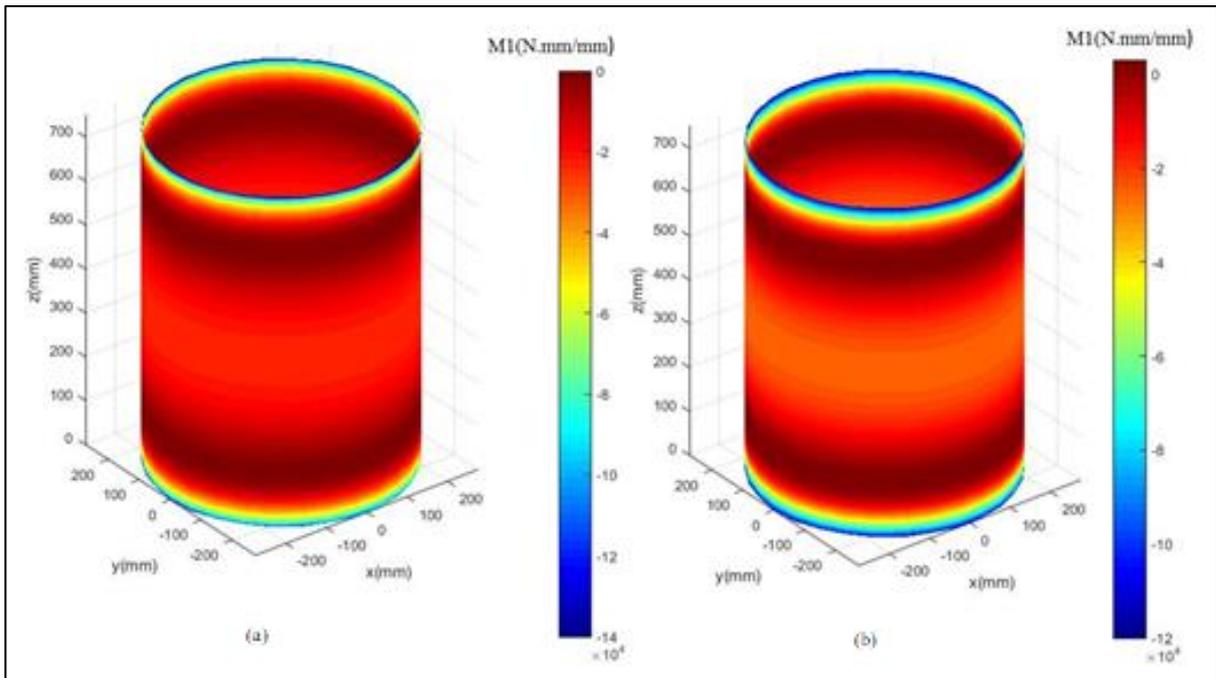
Por outro lado, para os momentos principais M1 mostrados na Fig.49a-b, os efeitos do modelo cinemático cúbico produzem uma diferença significativa deste esforço interno apesar de que as distribuições no eixo z sejam semelhantes.

Figura 48-(a) Esforço normal principal N1(N/mm) para o modelo C; b) esforço normal principal N1(N/mm) para o modelo B



Fonte: Autor (2017)

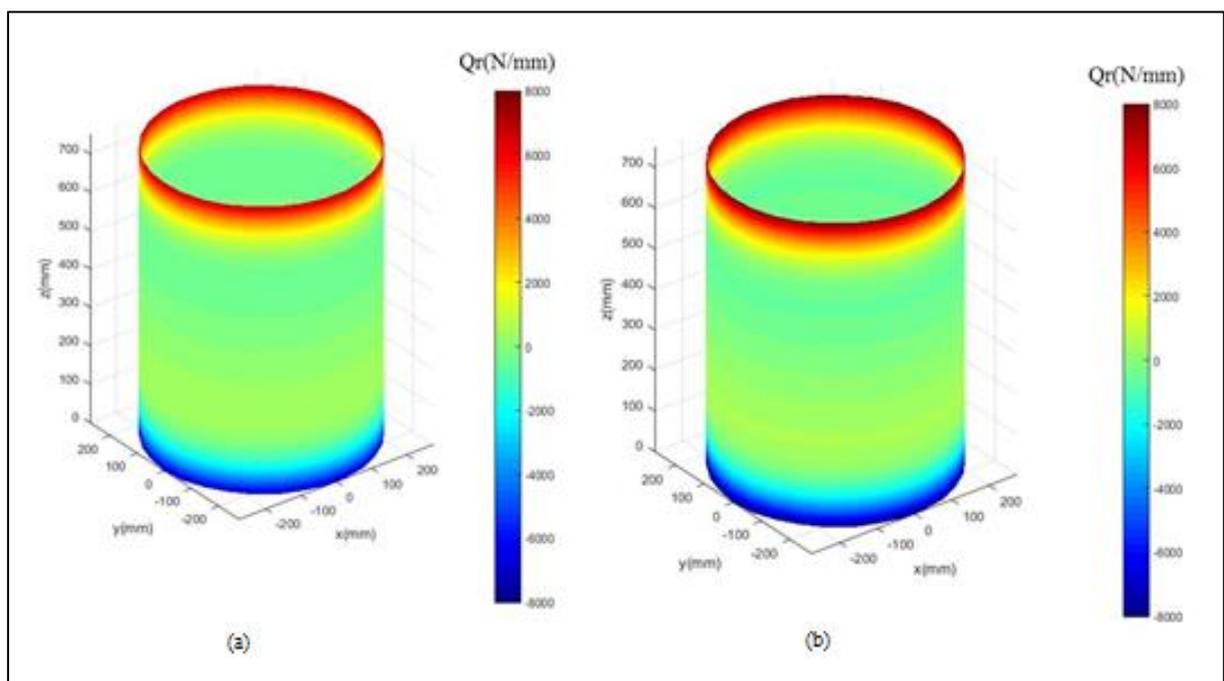
Figura 49-(a) Momento fletor  $M1(N.mm/mm)$  para o modelo C; b) Momento fletor  $M1(N.mm/mm)$  para o modelo B.



Fonte: Autor (2017)

Neste caso o momento fletor mais elevado ocorre nas regiões de vínculo rígido onde o modelo C consegue restrições mais efetivas ao giro do que as modelo B

Figura 50-(a) Esforço cortante  $Qr(N/mm)$  para o modelo C; (b) Esforço cortante  $Qr(N/mm)$  para o modelo B.



Fonte: Autor (2017)

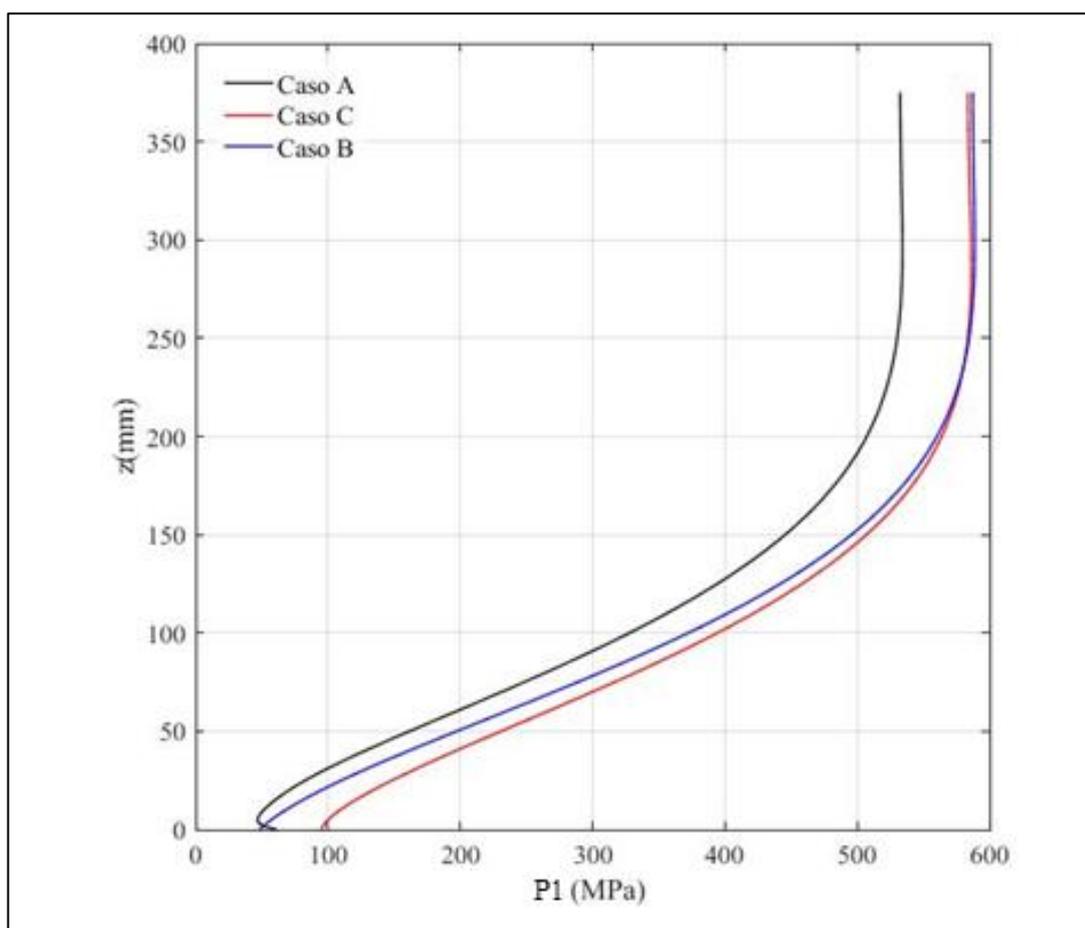
De forma similar ao esforço normal o esforço cortante da Fig.50a-b, não mostra pontos de vista quantitativo e qualitativo, diferenças significativas entre os modelos embora a distribuição de tensões no modelo C seja significativamente diferentes que no modelo B em virtude das teorias cinemáticas utilizadas por cada modelo para descrever o movimento.

A figura 51 traz a 1ª tensão principal P1 para todos os modelos, conforme podemos analisar a máxima tensão está localizada entre 500 e 600 MPa, os resultados estão plotados até a metade já que são axissimétricos, reduzindo o tempo de processamento.

O caso B nesta situação é o que mais se aproxima do sólido ao longo da espessura do cilindro, porém próximo a face externa do cilindro o caso C e o caso B se entrelaçam afastando-se do sólido, neste caso sem grandes problemas se utilizado ambos os métodos como base para o dimensionamento do cilindro, pois seus valores estão dentro de uma faixa aceitável, não havendo grande variação entre os valores obtidos nos três casos.

Os resultados obtidos aqui são comparados ao fim desse trabalho em um mesmo problema utilizando o método dos elementos finitos assistido pelo computador por meio do software CAD e CAE.

Figura 51-Primeira tensão principal P1 nos casos A, B, C.



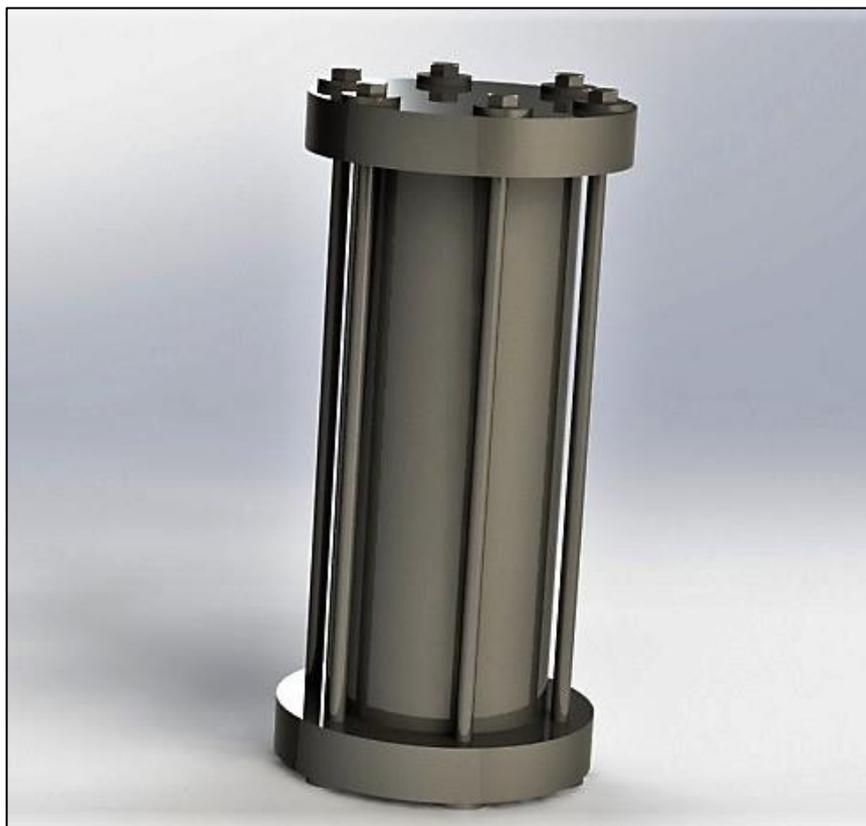
#### 7.4. ANÁLISE UTILIZANDO SOFTWARE DE ELEMENTOS FINITOS

Para uma comparação utilizando um software comercial de elementos finitos demonstra-se os resultados, levando-se em consideração as informações destacadas anteriormente nos métodos supracitados.

Como dado de entrada utiliza-se o modelo 3D do projeto, contendo as mesmas características informadas anteriormente para o exemplo de aplicação. Conforme destaca-se na Fig.52, se faz necessária essa informação para que através do modelo 3D sejam colocadas todas as informações necessárias para que o software CAE possa realizar seus processos.

Indica-se na Fig.52, uma montagem do conjunto completo do cilindro, onde o tubo cilíndrico permanece sem a adição de nenhum furo, com isso eliminam-se as zonas de concentração de tensões provocadas por esse tipo de intervenção, por outro lado os furos estão nos tampos onde a geometria permite essa aplicação, em função da menor complexidade de fabricação para um tampo plano. Os tampos são conectados ao vaso cilíndrico por meios de parafusos tirantes, justificando ao fato de se ter acesso ao seu interior considerado para o processo de extração supercrítica, facilitando a inserção e retirada do produto a ser processado.

Figura 52-Conjunto cilindro para extração supercrítica



Fonte: Autor (2017)

Na sequência de resultados utilizando o software de elementos finitos para a análise, para o conjunto cilindro considera-se as restrições de movimento do modelo por meio de fixação do conjunto sobre as arruelas na parte superior, simulando a ação do parafuso sobre esse elemento, e a mesma condição na parte inferior, porém restringindo o movimento de expansão do fundo do tampo do cilindro. Também simulando uma condição normal de operação na prática, onde o mesmo fica fixado sobre uma base rígida.

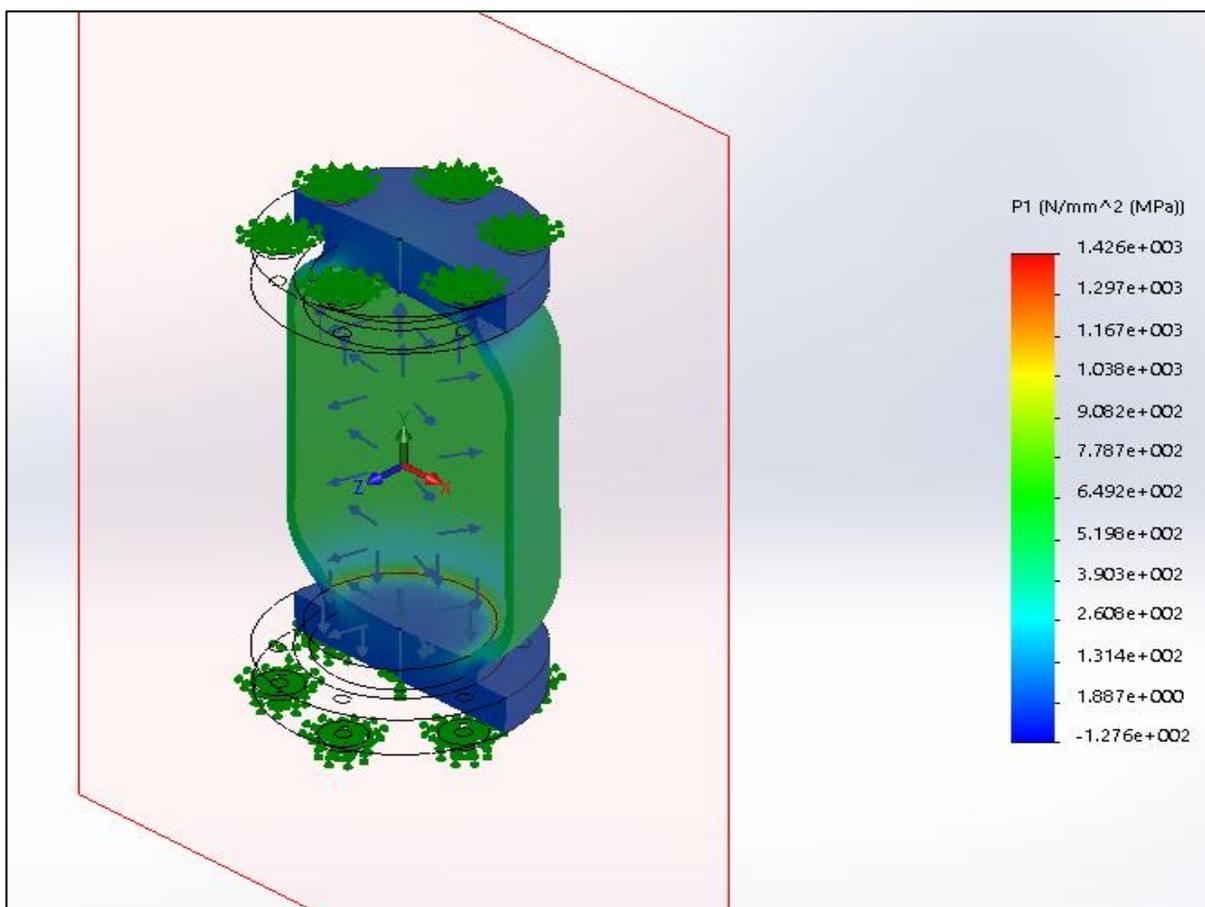
O próximo processo é o de geração da malha, verifica-se na Fig.8, uma malha tipo sólida com base em curvatura, formatada com 4 pontos jacobianos contendo um total de 310919 nós e 213753 elementos não apresentando distorções, de maneira a adequar-se as alterações de geometria, aplica-se um controle de malha.

Figura 53-Malha do conjunto cilindro



Demonstra-se na Fig.54 o resultado da 1ª tensão principal P1, com isto, compara-se com os limites de tensão suportados pelo material para uma carga aplicada de 104 MPa. Como as maiores tensões localizam-se no centro do casco que o objeto da análise, a Fig.54 ainda pode-se visualizar um acúmulo de tensões na região de engaste entre o tampo e o cilindro, porém as condições de contorno nesta região ainda precisam ser trabalhadas para se obter resultados nesta região específica mais precisos, porém não é o foco do estudo em questão.

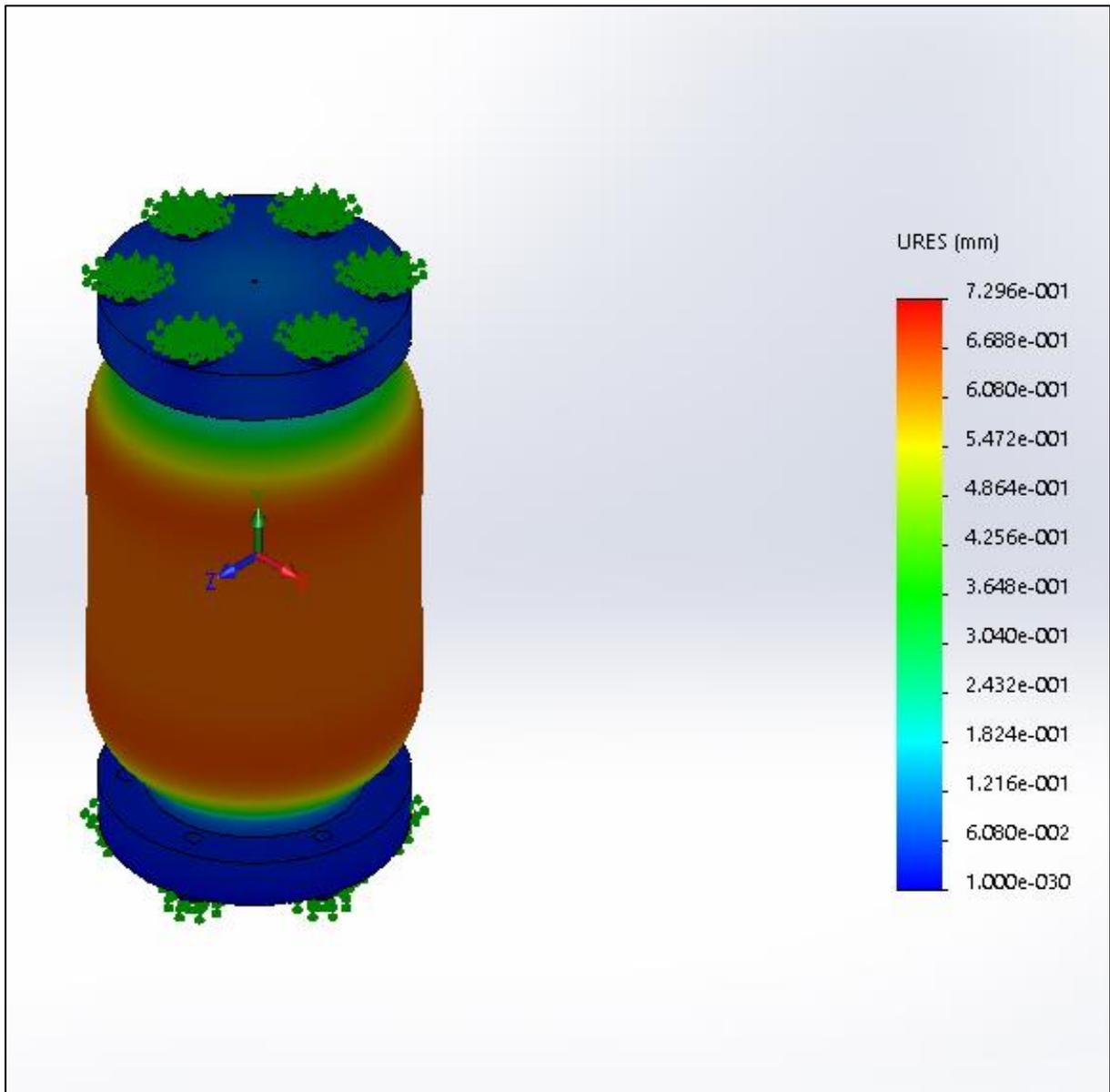
Figura 54-1ª tensão principal P1



Fonte: Autor (2017)

Neste caso, o comportamento da tensão vem ao encontro dos resultados calculados anteriormente, mostrando o resultado esperado, este que pode ser comparado diretamente com os cálculos obtidos anteriormente, como exemplo os deslocamentos resultantes da Fig. 55 e a tensão principal P1 da Fig.54, resultados estes equivalentes com deslocamentos máximos no centro do cilindro entre 0,7 e 0,8mm e tensões principais entre 500 e 600 MPa, tensões essas no centro do casco.

Figura 55-Deslocamento total mm



Fonte: Autor (2017)

## 8. CONCLUSÕES

No desenvolvimento do trabalho, alguns pontos importantes devem ser destacados por apresentarem uma importância significativa nas conclusões contidas neste capítulo, ou por serem fundamentais no contexto teórico dos métodos apresentados nesta dissertação.

O primeiro deles é uma abordagem na utilização dos materiais compósitos utilizados como alternativa em projetos de engenharia. Este trabalho destacou-se pelo fato de aplicar teorias capazes de embasar o cálculo de materiais com anisotropia utilizando os modelos FSDT e TSDT, comparando com os modelos sólidos e demonstrando o sucesso da aplicação.

Os resultados formulados ao longo do trabalho por meio das análises e *benchmark* apresentados no sexto capítulo, remontam vários exemplos, onde pode-se comparar de forma satisfatória os resultados com os métodos como o modelo cinemático de Reissner-Mindlin (FSDT), modelo cinemático de Reddy (1989) (TSDT), modelo cinemático Kant (TSDT) e o modelo de sólido de revolução.

Os resultados obtidos e comparados para o deslocamento, energia de deformação, tensões normais e cisalhantes, mostram uma excelente compatibilidade entre os modelos de Reddy e Kant que utilizam a TSDT, porém os resultados mostram que para o modelo cinemático de Reissner-Mindlin FSDT não possui a mesma performance, como também o modelo de Kant que para estruturas esbeltas apresentou resultados aquém do modelo sólido, sendo mais indicado, como pode-se observar, uma melhor performance em estruturas/cascas espessas axissimétricas, tornando mais vantajoso o fato de apresentar em sua formulação a normal extensível.

Destaca-se o modelo de Reddy, obtendo resultados muitas vezes aproximados com o sólido, tanto em materiais ortótropos quanto em isotrópicos, como observou-se em todas as análises. Em resumo todas essas teorias apresentadas foram capazes de modelar adequadamente as tensões cisalhantes responsáveis pelos acoplamentos interlaminares, sendo isto um dos fatores, para este caso, determinantes na utilização ou não de um método.

Um outro fato importante foi de demonstrar a relevância da utilização do método de elementos finitos por meio da programação, provando que não há a necessidade de se utilizar um software comercial, isto proporciona a estudantes e empresas uma grande flexibilidade. Na análise pode-se observar que os resultados obtidos pelo software comercial foram equivalentes aos programados, onde na prática a programação torna-se uma solução muito mais vantajosa

tanto pela comparação dos custos envolvidos na aquisição de um software, quanto pelo fato da configuração, onde há uma maior liberdade na maneira de como podem ser demonstrados os resultados, diferentemente que ocorre geralmente em softwares comerciais.

Tendo em vista trabalhos futuros, os critérios de falha aplicados em materiais compostos não foram desenvolvidos neste trabalho, porém vale o destaque na importância destes mesmos para uma avaliação futura mais completa. Notoriamente existem uma série de critérios de falha de aplicação direta em projetos envolvendo compósitos laminados, como exemplo o critério polinomial de falha de Hill idealizado no fim da década de 40, baseado no critério de Von Mises, proposto para o início de escoamento em metais isotrópicos. Como também o critério polinomial de Tsai Wu, já na década de 70, trazendo uma variação do critério de Hill, objetivando aumentar o número de termos na equação com isso melhorando e aproximando os dados experimentais obtidos para os vários materiais. Uma outra opção para futuros trabalhos e publicações de artigos é o modelamento e a simulação do cilindro construído com materiais compostos e estruturas sanduiches por meio da utilização de softwares comerciais CAE, podendo ainda comparar com os resultados obtidos neste trabalho e complementando com aplicações de cargas dinâmicas

Por fim pode-se avaliar a aplicação dos métodos a um exemplo de aplicação, com dados funcionais de um cilindro utilizado em um processo de extração supercrítica, onde o processo exige que o material resista a pressões internas elevadas na ordem de 104 MPa, e por se tratar de uma parede espessa, o método TSDT proposto por Kant, obteve resultados muito próximos aos resultados obtidos pelo modelo de elasticidade tridimensional sólido, podendo sim ser utilizado como base para o cálculo dimensional do produto destacado, visto ainda, onde uma das grandes vantagens, é que o método proposto por Kant obteve um tempo de processamento cerca de 14 vezes menor que o modelo sólido, sendo este resultado que torna o método mais competitivo em comparação aos demais, trazendo oportunidades futuras a sua aplicação em novos estudos e processos.

## REFERÊNCIAS

- ACTIS, R.; SZABÓ, B.; SCHWAB. **Hierarchic models for laminated plates and shells.** Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering 172, p. 79-107, 1999.
- AHMAD, S.; IRONS, B.M.; ZIENKIEWICZ, O.C. **Analysis of thick and thin shell structures by curved finite element.** International Journal of Numerical Method in Engineering, vol 2, p. 419-451, 1970
- BATOZ, J. L.; DHATT, G. **Modélisaion des structures par éléments finis.** 3. ed. Paris: Hermés, 1992.
- BAKKALI, F.; AVERBECK, S.; AVERBECK, D.; IDAOMAR, M. **Biological effects of essential oils – A review.** Food and Chemical Toxicology 46, p. 446–475, 2008.
- GARCIA, Oscar A.; ROSSI, R. **GFEM simulation of boundary layers effects in axisymmetric cylindrical shells.** In: XXI Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Natal-RN, XXI Brazilian Congress of Mechanical Engineering, 2011.
- HUGES, T.J.R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.** Prentice-Hall, Inc. A Division of Simon & Schuster Englewood Cliffs, New Jersey 07632, (1987).
- JIM, G. W.; CHUNG, Y. K. **Trefftz method applied to a moderately thick plate,** International Journal of Numerical Methods in Engineering, 44, 1011-1024, 1999.
- JONES, R. M. **Mechanics of Composite Materials.** Washington: Scripta Book Company, 1975
- KANT, T.; KOMMINENI, J. R. **Geometrically nonlinear transient analysis of laminated and sandwich shells with a refined theory and  $C^0$  finite elements,** Computer & Structures, 52(6): 1124-1252, 1994
- KANT, T., OWEN, D. R. J.; ZIENKIEWICZ, O. C. **A refined higher-order  $C^0$  plate bending element,** Computers and Structures, 15, 177-183, 1982
- KARTTUNEN, Anssi T.; HERTZEN, Raimo von; REDDY, J.N.; ROMANOFF, Jani. **Exact elasticity-based finite element for circular plates,** Computers and Structures 182 (2017) 219–226
- KUPPUSAMY, T.; REDDY J. N. **Three-dimensional nonlinear analysis of cross-ply rectangular composite plates,** Computers and Structures Vol. 18, No. 2, pp. 263-272, 1984
- LIM, C.W.; ZHANG, G.; REDDY, J.N. **A higher-order non-local elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation,** Journal of the Mechanics and Physics of Solids 78, 298–313, 2015

LO, K. H.; CRISTENSEN, R. M.; WU, E. M. **A higher theory of plate deformation, Part 2: Laminated Plates**, Journal of Applied Mechanics, 44(5): 669-676, 1977.

MENDONÇA, P. T. Rocha de. **Materiais compostos e estruturas sanduiche, projeto e análise**. Florianópolis: Primeira edição, Imprensa da UFSC, 2001.

MENDONÇA, P. T. Rocha de. **Uma formulação de elemento finito para placas delgadas multi-laminadas**, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica, 1983

MENEZES, F. A.; DEVLOO, P. R. B. **Cálculo de placas multicamadas com possibilidades de rotações distintas em cada camada**, Publicação Interna, Faculdade de Engenharia Civil de Universidade Estadual de Campinas, 2000.

MINDLIN, R.D. **Influence of the rotatory inertial and shear on flexural motions of isotropic elastic plates**, 18(2) Trans ASME. 73, A3, 1951.

PAGANO, N.J. **Interlaminar Response of Composite Materials**, Composite Materials Series, volume 5, 1989

PAGANO, N. J. **Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates**, Journal of Composite Materials, 3, 298-311, 1969.

PANDYA, B. N.; KANT, T. **A refined higher-order generally orthotropic  $C^0$  plate bending element**, Computer & Structures, 28(2): 119-133, 1988

PANDYA, B. N.; KANT, T. **Finite Element Analysis of Laminated Composite Plates using a Higher-Order, Displacement Model** 1987

PECKNOLD D. A.; RAHMAN. **Micromechanics-based structural analysis of thick laminated composites**, Computer & Structures, 51(2): 163-179, (1994).

PHAN, N. D.; REDDY, J. N. **Analysis of composite plates using a higher-order shear deformation theory**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21, 2201-2219, 1985.

PIPES, R. B.; PAGANO, N. J. **Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension**, Journal of Composite Materials, 538-548, 1970.

PISTER, K.S. and DONG, S.B. (1959). **Elastic Bending of Layered Plates**, Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 85, No. EM4, pp. 1-10.

RAMESH, Sai Sudha; WANG, C.M.; REDDY J.N.; ANG, K.K. **A higher-order plate element for accurate prediction of interlaminar stresses in laminated composite plates** Composite Structures 91, 337–357, 2009

REDDY, J. N. **A simple higher-order theory for laminated composite plates**, Journal of Applied Mechanics, 51, 745-752, 1984.

REDDY, J.N.; BERRY, Jessica. **Nonlinear theories of axisymmetric bending of functionally graded circular plates with modified couple stress**, Composite Structures 94 (2012) 3664–3668

REISSNER, E. **The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates**, Journal of Applied Mechanics, 12(2): 69-77, (1945).

REISSNER, E.; STAVSKY, Y. (1961). **Bending and stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic elastic plates**. Journal of Applied Mechanics, v. 28, Series E, n. 3, Sep

RIVERA, Miguel Gutierrez; REDDY, J.N. **Stress analysis of functionally graded shells using a 7-parameter shell element**, Mechanics Research Communications 78 (2016) 60–70

ROQUE, C.M.C.; FERREIRA, A.J.M.; REDDY, J.N. **Analysis of Mindlin micro plates with a modified couple stress theory and a meshless method**, Applied Mathematical Modelling ,37 , 4626–4633, 2013

SHU XIAO-PING. **An improve simple higher-order theory for laminated composite shells**, Computer & Structures, 60(3): 343-350, 1996.

SIVAKUMARAN, K. S.; CHOWDHURY, S. H.; VAJARASATHIRA, K. **Some studies on finite elements for laminated composited plates**, Computer & Structures, 52(4): 729-741, 1994.

SUAREZ, Oscar Alfredo; PROENÇA Sergio Persival. **Método de elementos finitos generalizados (MEFG) na análise de placas circulares e cascas de revolução com simetria radial de forças**. São Carlos-SP Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo 2005

TESSLER, A.; SAETHER, E. **A computationally viable higher-order theory for laminated composite plates**, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 31, 1069- 1086, 1991.

TIMOSHENKO, S.; KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. New York: McGraw-Hill Book Company, 1959

TSAI, S. W.; HAHN, H. T. **Introductions to Composite materials**, Technomic Publishing Company, Lancaster Pennsylvania, 1980

ZALAMEA, F.; MIQUEL J.; OLLER, S. **Treatment of Composite Materials Based on the Homogeneization Method**, Computational Mechanics, Barcelona, Spain, 1998.

ZHANG, L.W.; LIEW, K.M.; REDDY, J.N. **Post buckling analysis of bi-axially compressed laminated nanocomposite plates using the first-order shear deformation theory**, Composite Structures 152 (2016) 418–431