

UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

WENDERSON NICANOR DE OLIVEIRA

**ESTUDO SOBRE O USO DA TÉCNICA DE CAMADA LIMITE EM ALGORITMOS
DE SUPER-RESOLUÇÃO BASEADOS EM NORMA L1**

**Caxias do Sul
2017**

Wenderson Nicanor de Oliveira

**ESTUDO SOBRE O USO DA TÉCNICA DE CAMADA LIMITE EM ALGORITMOS
DE SUPER-RESOLUÇÃO BASEADOS EM NORMA L1**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como parte dos requisitos para a obtenção do
título de Engenheiro de Controle e Automação
da Universidade de Caxias do Sul.

Orientador:
Prof. Dr. Guilherme Holsbach Costa

**Caxias do Sul
2017**

Ficha catalográfica.

OLIVEIRA, Wenderson Nicanor de

Estudo sobre o uso da Técnica de Camada Limite em Algoritmos de Super-Resolução Baseados em Norma 11 / Wenderson Nicanor de Oliveira; orientador: Guilherme Holsbach Costa, Caxias do Sul: UCS, Área do Conhecimento de Ciências Exatas e Engenharia, 2017.

47 folhas, 30 cm.

Trabalho de conclusão do curso de Engenharia de Controle e Automação — Universidade de Caxias do Sul, Área do Conhecimento de Ciências Exatas e Engenharia, 2017

Inclui referências bibliográficas.

1. Super resolução. 2. Processamento de imagens. 3. Reconstrução por Super Resolução. 4. Sequência de Imagens. I. Costa, Guilherme H. II. Universidade de Caxias do Sul. III. Estudo sobre o uso da Técnica de Camada Limite em Algoritmos de Super-Resolução Baseados em Norma 11.

Wenderson Nicanor de Oliveira

**ESTUDO SOBRE O USO DA TÉCNICA DE CAMADA LIMITE EM ALGORITMOS
DE SUPER-RESOLUÇÃO BASEADOS EM NORMA L1**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como parte dos requisitos para a obtenção do
título de Engenheiro de Controle e Automação
da Universidade de Caxias do Sul.

Orientador:
Prof. Dr. Guilherme Holsbach Costa

Aprovado em ____/____/____

Banca Examinadora

Prof. Dr. Guilherme Holsbach Costa (orientador)
Universidade de Caxias do Sul - UCS

Profa. Ph.D. Adriana Miorelli Adami
Universidade de Caxias do Sul - UCS

Prof. Ph.D. André Gustavo Adami
Universidade de Caxias do Sul - UCS

*Este trabalho é dedicado a
minha família e à Daniela.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por tudo.

À minha família, pelo amor e carinho desde sempre, por me apoiar e compreender os momentos distantes em prol de um objetivo maior.

À Daniela, por todo o apoio durante a jornada acadêmica, inclusive durante as infindáveis noites em claro que estudamos juntos. Sem este apoio, nada disso seria possível.

À Universidade de Caxias do Sul e a todos os professores que contribuíram muito mais do que simplesmente na formação de conhecimento acadêmico.

Ao orientador deste trabalho, Prof. Dr. Guilherme Holsbach Costa, pelo incentivo e desafio Jedi proposto.

E em especial ao meu pai José, por dar a uma criança de 11 anos uma maleta de ferramentas como presente de aniversário.

*“Try not. Do or do not.
There is no try.”.*
Master Yoda - 1980

RESUMO

A técnica de reconstrução com super-resolução possibilita combinar diferentes imagens de uma mesma cena a fim de aumentar a resolução dessas imagens. Desde a década de 1970 diversos métodos surgiram para resolver matematicamente o problema da super-resolução, onde geralmente sua solução é obtida por meio da formulação de uma otimização matemática. Dentre esses métodos há em especial uma classe de algoritmos que apresenta maior robustez perante diferentes problemas que podem se fazer presentes no processo de captura das imagens. Essa característica de robustez tem base na sua formulação em norma l_1 . Algoritmos recursivos com norma l_1 comumente utilizam do gradiente da função custo, que resulta em uma função sinal. Algoritmos de restauração de imagens com estrutura similar têm conseguido melhora em desempenho quando a função sinal é substituída por uma função de ativação, de forma similar às empregadas em redes neurais. É de interesse avaliar o impacto do uso de funções de ativação também em algoritmos de super-resolução. Neste trabalho, então, é proposta uma avaliação de desempenho de um dos algoritmos de super-resolução baseado em norma l_1 mais referenciados na literatura quando submetido a uma função de ativação. Simulações indicam que o uso dessas funções pode agregar velocidade de convergência e qualidade perceptual aos resultados da reconstrução. Além disso, essa modificação sugere agregar robustez a *outliers*, o que pode ser observado nas regiões de fronteira das imagens reconstruídas.

Palavras-chave: Super resolução. Processamento de imagens. Reconstrução por Super Resolução. Sequência de Imagens.

ABSTRACT

The reconstruction technique using super-resolution enables to combine different images of the same scene in order to increase the resolution of these images. Since the 1970s several methods have emerged to solve mathematically the problem of super-resolution, where its solution is obtained through the formulation of a mathematical optimization. Among these methods there is specially a class of algorithms which presents greater robustness against different problems that may be present in the image capture process. This characteristic of robustness is based on its formulation in l_1 -norm. Recursive algorithms with l_1 -norm commonly use the cost function gradient, which results in a signal function. Algorithms for reconstructing images with similar structure have achieved improvement in performance when the signal function is replaced by an activation function, similar of functions used in neural networks. It is of interest to study the impact of the use of activation functions also in super-resolution algorithms. In this work, a performance evaluation of one super-resolution algorithm is proposed based on l_1 -norm which has more references in the literature when submitted to an activation function. Simulations have indications that the use of these functions can increase the speed convergence and perceptual quality for reconstruction results. In addition, this modification suggests adding robustness to outliers, what can be observed in border regions of the reconstructed images.

Keywords: Super resolution. Image processing. Super Resolution Reconstruction. Image Sequence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Evidência das altas frequências em imagem digital	14
Figura 2 – Movimentação relativa entre duas imagens (azul e vermelha), onde em (a) há apenas deslocamento em função da movimentação inteira e em (b) há de fato uma movimentação relativa a nível de subpixel.	15
Figura 3 – Efeitos do sistema de aquisição de imagens digitais	16
Figura 4 – Interpolação para preenchimento da grade de HR	20
Figura 5 – Comparação de uma cena em HR e sua estimativa gerada a partir de subamostragem seguida de interpolação.	20
Figura 6 – Comparação de uma imagem original (à esquerda) com a imagem aprimorada através de equalização de histograma (à direita).	21
Figura 7 – Comparação de uma imagem original (à esquerda) com uma imagem aprimorada em diversos aspectos (à direita).	22
Figura 8 – Correlação entre um par de imagens HR e LR.	23
Figura 9 – Correlação entre um par de imagens HR e LR.	23
Figura 10 – Ilustração do PSF de um sensor de captura de imagem	27
Figura 11 – Exemplo de reconstrução com super-resolução via LMS-SRR.	28
Figura 12 – Ilustração do comportamento das funções <i>sign</i> e <i>ssgn</i>	31
Figura 13 – (a) Evolução do MSE. (b) Reconstrução à 60 ^a iteração com a função <i>sign</i> . (c) Reconstrução à 60 ^a iteração com a função <i>ssgn</i> . (d) Em detalhe, o canto esquerdo superior de (b). (e) Em detalhe, o canto esquerdo superior de (c).	37
Figura 14 – (a) Evolução do MSE. (b) Reconstrução à 60 ^a iteração com a função <i>sign</i> e $\beta = 5$. (c) Reconstrução à 60 ^a iteração com a função <i>ssgn</i> . (d) Em detalhe, o canto esquerdo superior de (b). (e) Em detalhe, o canto esquerdo superior de (c).	38
Figura 15 – (a) Evolução do MSE. (b) Reconstrução à 60 ^a iteração com a função <i>sign</i> . (c) Reconstrução à 60 ^a iteração com a função <i>ssgn</i> . (d) Em detalhe, o canto esquerdo superior de (b). (e) Em detalhe, o canto esquerdo superior de (c).	40
Figura 16 – (a) Evolução do MSE. (b) Reconstrução à 60 ^a iteração com a função <i>sign</i> e $\beta = 5$. (c) Reconstrução à 60 ^a iteração com a função <i>ssgn</i> . (d) Em detalhe, o canto esquerdo superior de (b). (e) Em detalhe, o canto esquerdo superior de (c).	41

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparativo entre Métodos de Tratamento de Imagem	24
Tabela 2 – Restauração da degradação gerada por desfoque gaussiano e ruído.	32
Tabela 3 – Restauração da degradação gerada por desfoque de movimento e ruído. . .	32

LISTA DE SIGLAS

IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
HN	<i>Hopfield Network</i>
HR	<i>High resolution</i>
LMS	<i>Least Mean Square</i>
LR	<i>Low resolution</i>
PCG	<i>Preconditioned Conjugate Gradient</i>
PSF	<i>Point Spread Function</i>
SISR	<i>Single Image Super Resolution</i>
SNR	<i>Signal to Noise Ratio</i>
SRR	<i>Super Resolution Reconstruction</i>
SVH	Sistema de Visão Humana
UCS	Universidade de Caxias do Sul

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	OBJETIVOS	17
1.1.1	Objetivo geral	17
1.1.2	Objetivos específicos	17
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	18
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	19
2.1	MÉTODOS DE TRATAMENTO DE IMAGENS	19
2.1.1	Interpolação de imagens (<i>image interpolation</i>)	19
2.1.2	Realce de imagens (<i>image enhancement</i>)	21
2.1.3	Super-resolução por uma única imagem (<i>single image super resolution</i>)	22
2.1.4	Comparativo entre métodos de tratamento de imagem digital	23
2.2	ALGORITMO DE RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS COM SUPER-RESOLUÇÃO	25
2.3	RESTAURAÇÃO DE IMAGENS COM FUNÇÃO DE ATIVAÇÃO APLICADA	28
3	MÉTODO PROPOSTO	33
4	RESULTADOS	35
4.1	SIMULAÇÃO 1	36
4.2	SIMULAÇÃO 2	39
5	CONCLUSÕES	42
	REFERÊNCIAS	43
	GLOSSÁRIO	46
	APÊNDICE A - ALGORITMO EM MATLAB	47

1 INTRODUÇÃO

A necessidade do uso de imagens digitais dá-se de maneira ampla nas mais diversas aplicações disponíveis atualmente. Não só como ferramenta para análise ou obtenção de dados, sua utilização pode ser também a finalidade da aplicação. Em todos os casos, o anseio por imagens de maior qualidade é eminente. Essa qualidade é comumente associada com o tamanho da imagem. Existem aplicações, como fotografias artísticas por exemplo, nas quais não só o tamanho da imagem importa, mas também sua qualidade em relação à degradação causada pelo ruído (*noise*) e borramento (*blurring*), artefatos indesejáveis comumente presentes em imagens digitais. Os processos pelos quais essas imagens são expostas a fim de atenuar estes problemas são chamados de restauração de imagens (PARK et al., 2003). Todavia, os métodos de restauração têm por objetivo melhorar a qualidade da imagem sem alterar seu tamanho.

Aplicações que demandam imagens com tamanho maior que o disponível, seja por preferência ou necessidade, são inúmeras. Isto ocorre, em sua maioria, em casos em que não há alternativas razoáveis que possam ser aplicadas para melhorar a captura da imagem. Em outras palavras, limitações como distância à cena de interesse ou má qualidade do conjunto óptico, por exemplo, são fatores por vezes imutáveis, sendo necessário assim o emprego de uma técnica alternativa para a solução do problema de qualidade.

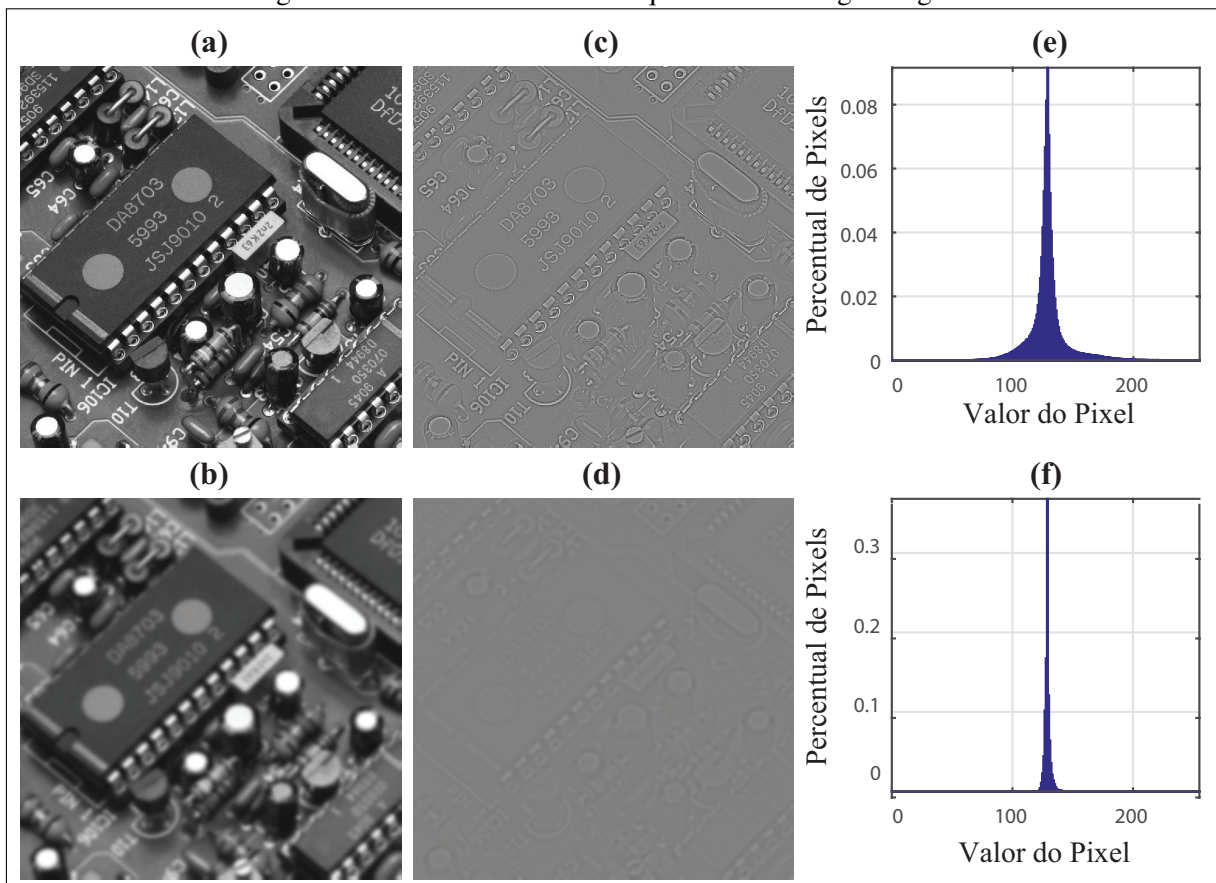
Uma das abordagens para o problema de qualidade trata do aprimoramento dos sensores de captura, que são fonte da construção da imagem digital através da representação elétrica da dispersão de fótons aos quais são expostos. O problema no aprimoramento desta tecnologia está no alto custo agregado, uma vez que os gastos despendidos em sua melhora são expressivos em relação ao benefício que representam (PARK et al., 2003).

A partir desta barreira imposta pelos custos envolvidos em um hardware de maior qualidade, recai-se em alternativas que possibilitem a construção de imagens maiores por meio do mesmo conjunto físico que gera as imagens de tamanho insuficiente. Para isto, é utilizada uma técnica que deriva da restauração de imagens, denominada reconstrução com super-resolução (*super resolution reconstruction* - SRR) (PARK et al., 2003). O termo resolução refere-se ao tamanho das imagens, de forma que uma imagem super-resolvida com alta resolução (*high resolution* - HR) tenha um tamanho maior do que o das imagens originalmente adquiridas com baixa resolução (*low resolution* - LR). De fato, este é o objetivo principal da SRR: reconstruir imagens aumentando o seu tamanho. Este ganho resultante se dá na quantidade de pixels que representam a imagem obtida, sendo o pixel a menor amostra espacial que compõe uma imagem digital.

A lógica empregada nesta técnica consiste na combinação de diversas imagens capturadas de uma mesma cena, de modo a adicionar as informações não redundantes de cada captura em uma organização espacial que objetiva o aumento da resolução do resultado final, se comparado às imagens individuais. Contudo, existem diversas premissas que devem ser satisfeitas para que esta técnica possa ser empregada.

Primeiramente, as imagens capturadas desta cena não podem ser iguais, pois a técnica vale-se da soma de informação presente nas imagens. Esta premissa é facilmente alcançada uma vez que as limitações espaciais do processo de captura impostas pelos sensores reais ocasiona a perda de informações de alta frequência. Isto ocorre pois o modelamento do sistema de aquisição dá-se baseado no efeito de um passa-baixas (PARK et al., 2003). A Figura 1(a) ilustra o que seria uma imagem rica em informações de alta frequência e a Figura 1(b) a perda dessas informações em relação ao sistema de captura, aqui exemplificado pelo efeito de borramento. As Figuras 1(c) e 1(d) apresentam a resposta de um mesmo filtro passa altas quando aplicado às figuras originais. Nas Figuras 1(e) e 1(f) é apresentado o histograma das respectivas respostas, auxiliando na percepção da maior quantidade de informações em alta frequência da imagem de maior nitidez. Nota-se que a nitidez perceptível (por muitas vezes confundida com resolução) é diretamente relacionada com as altas frequências da imagem, que representam bordas e contornos que compõe majoritariamente a sensação de nitidez.

Figura 1 – Evidência das altas frequências em imagem digital

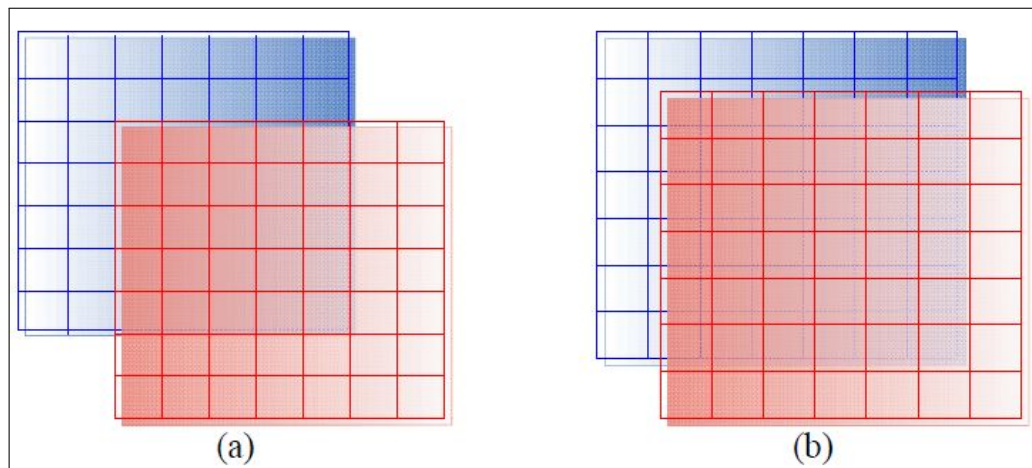


Fonte: Autor (2017).

Outra premissa trata da movimentação entre as amostras capturadas. Parte-se da premissa que as distintas informações presentes nas diversas imagens de baixa resolução que serão fundidas em uma imagem de alta resolução são oriundas de (pequenos) movimentos que ocorram na cena, de uma captura para outra. Na prática, esse também é um requisito de fácil satisfação, uma

vez que qualquer vibração presente no meio, seja na câmera ou na cena, acaba por representar tal movimentação. Essa movimentação só é válida para a SRR quando houver deslocamento relativo nos subpixels (frações de um pixel) da imagem, pois assim haverá diferença entre as informações contidas em cada cena amostrada, e não apenas um deslocamento dessas informações. Caso a movimentação ocorra em múltiplos inteiros de um pixel, as amostras seriam majoritariamente compostas de informações repetidas, sendo impossível a sua combinação na geração da esperada alta resolução (PARK et al., 2003). A Figura 2 ilustra a diferença entre a movimentação relativa em unidades de pixel e entre subpixels. Se esse movimento for conhecido ou estimável com precisão suficiente então é possível aplicar a técnica de SRR (PARK et al., 2003).

Figura 2 – Movimentação relativa entre duas imagens (azul e vermelha), onde em (a) há apenas deslocamento em função da movimentação inteira e em (b) há de fato uma movimentação relativa a nível de subpixel.

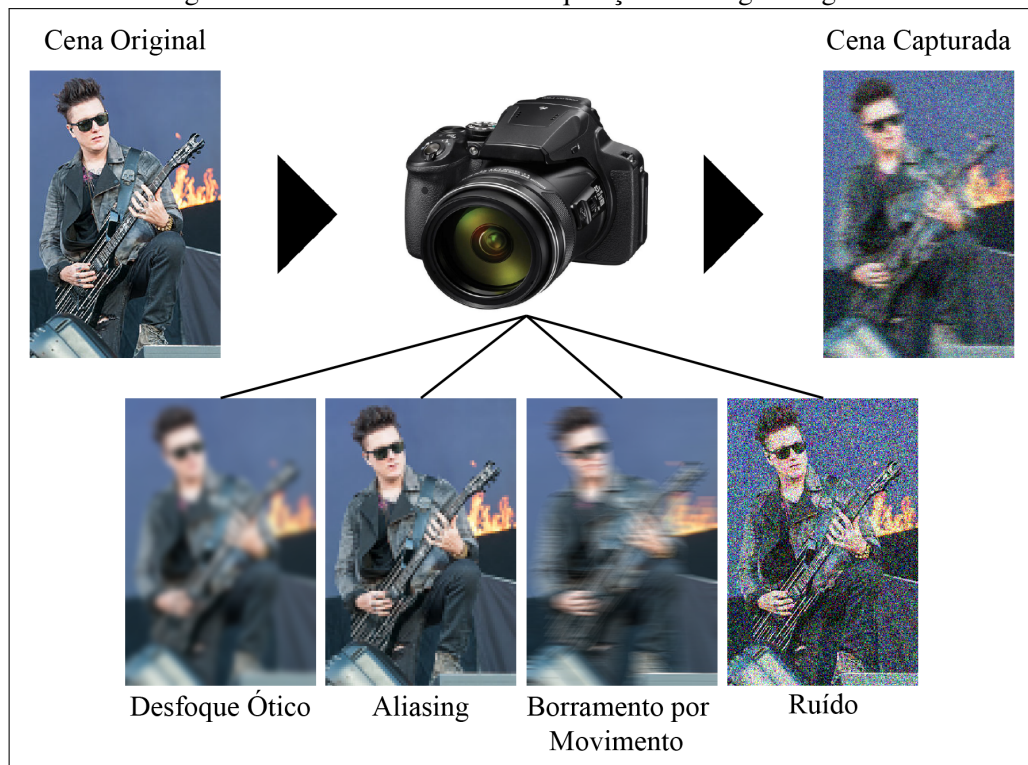


Fonte: Shah e Gupta (2012).

Em aplicações reais o sistema de captura não só contempla ambas premissas, mas também introduz artefatos indesejáveis no resultado final amostrado. Conforme apresentado na Figura 3, as imagens digitais amostradas contam com efeitos de perda causados pelo sistema de aquisição, sendo estes dispostos em forma de desfoques ópticos, borramentos em virtude da movimentação, ruído e redução da banda em frequência. Embora o objetivo da SRR seja apenas reconstruir imagens com alta resolução, ela também abrange técnicas de restauração que produzem imagens de alta qualidade a partir de capturas expostas a estes tipos de degradação (PARK et al., 2003).

Existe também um caso específico do uso de super-resolução, que diverge dos conceitos citados pela qual a SRR foi criada, que trata de reconstruir uma cena a partir de uma única imagem. Este método é denominado super-resolução por apenas uma imagem (*single image super resolution* - SISR) e vem sendo amplamente estudado nos últimos anos (PELEG; ELAD, 2014), como apresentado por Zhou e Wu (2016), Mokari e Ahmadyfard (2015) e Hans et al. (2016).

Figura 3 – Efeitos do sistema de aquisição de imagens digitais



Fonte: Autor (2017).

A diversidade de técnicas de tratamento de imagens existentes (interpolação, restauração, reconstrução, etc.) acaba por muitas vezes gerando errôneas interpretações de seus objetivos (PARK et al. 2003; COSTA; BERMUDEZ 2010). Uma técnica muito utilizada para ampliação de imagens, porém sem reconstrução das informações de alta frequência degradadas, é a interpolação. Embora seu ganho em resolução não represente qualquer reconstrução de fato, em diversos trabalhos essa técnica é empregada e apresentada como Super-Resolução (PARK et al. 2003; NASROLLAHI; MOESLUND 2014; COSTA; BERMUDEZ 2010). No decorrer deste trabalho outras questões que delimitam as diferentes técnicas de tratamento de imagens serão discutidas.

Retornando ao que tange a restauração de imagem, dentre os diversos algoritmos disponíveis, um que mostra-se particularmente interessante é o proposto por Ferreira et al. (2008) com o objetivo de melhorar a qualidade de imagens degradadas por ruído e desfoque. Neste trabalho, Ferreira et al. (2008) utilizam de uma abordagem iterativa para a restauração da imagem, utilizando a técnica do gradiente descendente. Esta técnica se resume em aplicar o gradiente de uma função para encontrar a direção de maior crescimento do erro, indo iterativamente e a um pequeno passo para a direção contrária do mesmo (JOHNSON; SNIDER, 2005). A figura de mérito pela qual a equação do erro é formulada trata-se de uma norma vetorial. Para melhor entendimento deste método é necessário entender a definição de uma norma vetorial, indicada matematicamente por l_p , que pode ser dada conforme (NOBLE; DANIEL, 1987):

$$\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum |\mathbf{x}_n|^p}, \quad (1.1)$$

em que \mathbf{x}_n representa o n -ésimo elemento de um vetor \mathbf{x} , e $p \in \mathbb{R}$.

O uso do método de gradiente descendente de uma norma l_1 , conforme feito por Ferreira et al. (2008), recai posteriormente no cálculo de uma função sinal (*sign*), conforme será apresentado. Devido a essa função ser matematicamente indefinida para uma entrada igual a zero, Ferreira et al. (2008) a trocaram por uma função contínua, melhorando a performance do algoritmo em métricas de qualidade. A abordagem utilizada aponta para o uso de um tipo de função clássica em problemas relacionados a redes neurais, denominada função de ativação.

A formulação matemática de diversas abordagens para SRR também recai no método de gradiente descendente (ZOMET et al. 2001; PARK et al. 2003; FARSIU et al. 2004), onde a avaliação da figura de mérito é feita em relação a uma norma matricial. São comuns as abordagens baseadas em norma l_1 e l_2 (ZOMET et al. 2001; FARSIU et al. 2004; COSTA 2007; NASROLLAHI; MOESLUND 2014), onde as abordagens em norma l_1 apresentam diversas vantagens de robustez e imunidade contra *outliers* (ZOMET et al. 2001; FARSIU et al. 2004). Sabendo disso, é de maior interesse o estudo de melhorias em algoritmos que sejam baseados em norma l_1 . Assim, a técnica proposta por Ferreira et al. (2008) torna-se uma interessante possibilidade a ser estudada, valendo-se de sua lógica para emprego de possíveis melhorias em algoritmos de SRR.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

Avaliar os resultados da inserção de uma função de ativação em um algoritmo de SRR baseado em norma l_1 .

1.1.2 Objetivos específicos

- Identificar a relação entre métodos de restauração de imagem que utilizem uma função de ativação e os algoritmos de super-resolução;
- Contribuir para o avanço do estado da arte aplicando uma função de ativação em um algoritmo de SRR;
- Comparar os resultados práticos da implementação de um algoritmo de super-resolução com e sem a inserção da função de ativação.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Até agora foram apresentados conceitos básicos a cerca de SRR, além de serem introduzidos os conceitos necessários para compreender a motivação do trabalho e o método a ser proposto. No Capítulo 2 são apresentados alguns dos métodos de tratamento de imagens a fim de objetivamente diferenciá-los da técnica de SRR. Após, os conceitos sobre SRR são aprofundados para que então se apresente com um maior grau de detalhamento o método proposto por FERREIRA et al. 2008.

No Capítulo 3 propõe-se o método a ser aplicado neste trabalho. Especificações do modelo de simulação e os parâmetros utilizados são apresentados com o objetivo de permitir a recriação dos resultados alcançados. Tais resultados são apresentados e discutidos no Capítulo 4. Finalmente, no Capítulo 5 são feitas as considerações acerca do trabalho efetuado, além de serem comentados os possíveis trabalhos futuros sobre o assunto.

De forma a facilitar a compreensão das equações apresentadas foi adotado um padrão para evidenciar matrizes e vetores. Durante o trabalho, matrizes são representadas por letras maiúsculas e em negrito, enquanto vetores são representados por letras minúsculas em negrito. Além disso, as equações matriciais apresentam explicitamente em sua descrição o tamanho de cada uma das matrizes envolvidas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 MÉTODOS DE TRATAMENTO DE IMAGENS

Nesta seção serão apresentados e comparados sucintamente alguns dos principais métodos computacionais voltados para tratamento de imagens. Esta breve revisão tem como objetivo cobrir as principais características de cada método e prover informações suficientes para uma comparação objetiva entre eles. Apenas a técnica de Super-Resolução, base para o desenvolvimento deste trabalho, será revisada na seção seguinte com vistas a um aprofundamento um pouco maior que as demais.

2.1.1 Interpolação de imagens (*image interpolation*)

Com a atual difusão do manuseio de imagens digitais, alguns processos como redimensionamento e rotação de imagens são necessários em diversas áreas. Pode-se citar, por exemplo, a compactação (a caráter de redução do número de pixels) de imagens para uso em e-mails ou ainda a ampliação de imagens utilizadas em diagnósticos médicos. Este processo de tratamento de imagem é classificado como interpolação (LEHMANN; GONNER; SPITZER, 1999).

A interpolação trata da estimação de pontos desconhecidos através de pontos conhecidos, desde que o sinal respeite um determinado modelo matemático. A premissa de que o sinal respeita o modelo pelo qual a interpolação é baseada pode fazer com que o resultado seja próximo do real. Na prática, nem todos os sinais respeitam (ou se quer se comportam) como os modelos propostos, resultando em estimativas equivocadas.

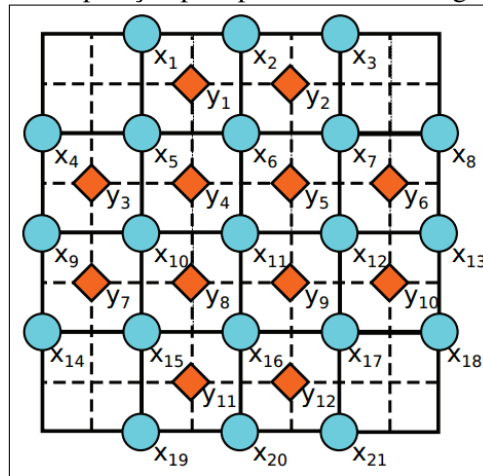
A interpolação de imagens tem um conceito amplo, que pode ser deferido como a reconstrução de um dado contínuo inteiramente através de sua amostra discreta (THEVENAZ et al., 2000). Em suma, os métodos de interpolação tratam da estimação de pixels faltantes em uma grade de alta resolução através do valor conhecido de pixels próximos (no caso de ampliação).

Dentre os métodos mais utilizados destacam-se a interpolação bicúbica e a interpolação bilinear (KEYS, 2008) devido à simplicidade computacional e facilidade de implementação de ambos. Esses métodos tratam imagens como interpolações simples, porém em duas dimensões. Um exemplo de interpolação pode ser ilustrado com o auxílio da Figura 4. Aqui, os pixels x_i são os elementos conhecidos da imagem de LR e os pixels y_i são os elementos a serem estimados, pertencentes à grade de HR. Em uma interpolação bilinear, por exemplo, o valor do pixel desconhecido pode ser calculado a partir de uma média ponderada entre os vizinhos mais próximos (HURTIK; MADRID, 2015). Exemplificando essa ideia aplicada ao pixels y_1 da Figura 4 obtém-se:

$$y_1 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{4}x_6 \quad (2.1)$$

e assim sucessivamente para todos os pixels da grade de HR.

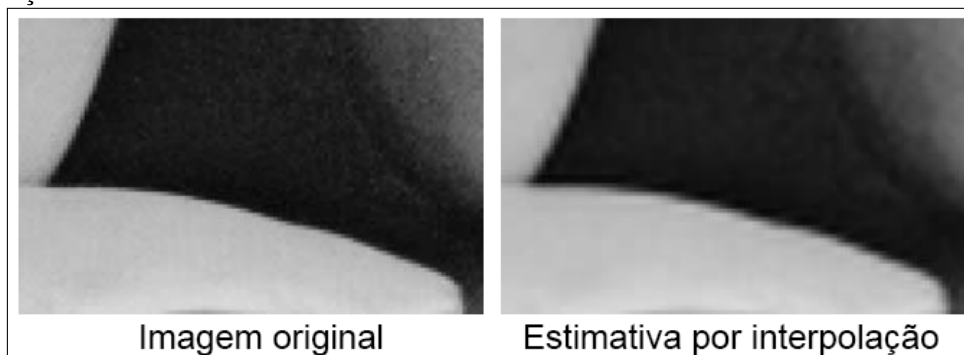
Figura 4 – Interpolação para preenchimento da grade de HR



Fonte: Adaptado de Yamaguchi e Ikehara (2016)

Os modelos matemáticos convencionalmente utilizados em interpolação de imagens descrevem os sinais de imagem através de funções polinomiais (YAMAGUCHI; IKEHARA, 2016). Porém, modelos polinomiais não são bons em estimação de descontinuidades, característica presente na grande maioria dos sinais de imagem. Consequentemente, os modelos convencionais de interpolação apresentam características intrínsecas indesejáveis, que vão desde borramento até serrilhamento da imagem (SIU; HUNG, 2012), como ilustrado na Figura 5. Propostas de contorno desses problemas já são estudadas e exemplos de aplicação podem ser encontrados na literatura, como apresentado por Yamaguchi e Ikehara (2016).

Figura 5 – Comparação de uma cena em HR e sua estimativa gerada a partir de subamostragem seguida de interpolação.



Fonte: Adaptado de Yamaguchi e Ikehara (2016).

A interpolação vem sendo usada na ampliação de imagens com o intuito de aumentar sua resolução. Todavia, conforme apontado no Capítulo 1, a interpolação apenas utiliza dados presentes na imagem para a estimação dos dados faltantes, o que não acrescenta nenhuma informação nova à imagem. Portanto, a interpolação não é capaz de recuperar os componentes de

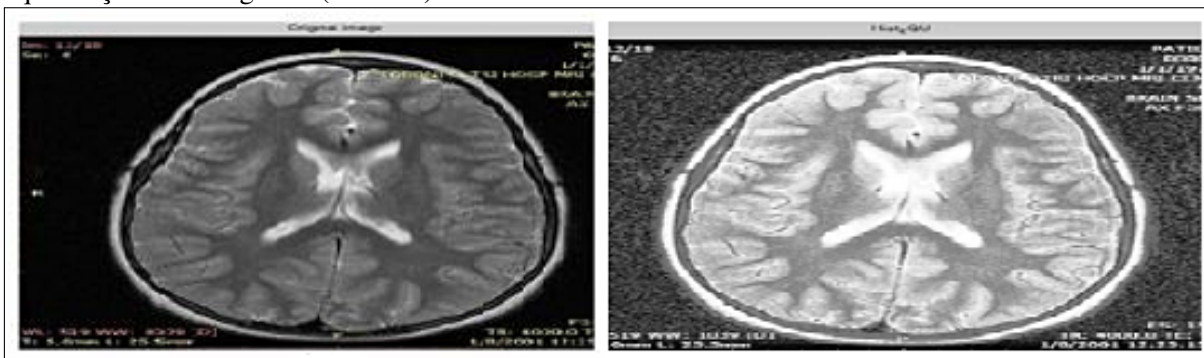
alta frequência perdidos durante o processo de aquisição da imagem (princípio base do funcionamento da super-resolução). Por isto, a interpolação não pode ser considerada um método de super-resolução (PARK et al., 2003).

2.1.2 Realce de imagens (*image enhancement*)

O realce de imagens, mais conhecido como *image enhancement*, trata de manipular imagens digitais de forma a aprimorá-las à percepção humana. Em outras palavras, as características mais significativas ao sistema de visão humana (SVH) são realçadas de forma a gerar uma sensação subjetiva de aprimoramento. Na grande maioria das aplicações, o brilho e o contraste das imagens são as características de maior impacto no SVH (BHATIA; OKADE, 2016).

Os métodos de realce encontrados atualmente diferem-se em sua aplicabilidade e foco de melhoria. Grande parte desses métodos são apresentados para imagens em preto e branco (monocromáticas), como a exemplo das diversas abordagens baseadas em equalização de histograma (KAUR; RANI, 2016), que tem por objetivo a melhora da faixa dinâmica da imagem, melhorando a percepção de detalhes através do aumento de contraste. Esses métodos são frequentemente utilizados em trabalhos na área médica, como imagens de ressonâncias magnéticas, por exemplo. Este tipo de implementação tem como objetivo facilitar a percepção de informações valiosas para diagnósticos, que muitas vezes são manifestadas em regiões escuras e sem contraste suficiente. Resultados de métodos de aprimoramento de imagens são ilustrados nas Figuras 6 e 7 que, respectivamente, apresentam exemplos de aprimoramentos em escala de cinza e a cores.

Figura 6 – Comparação de uma imagem original (à esquerda) com a imagem aprimorada através de equalização de histograma (à direita).



Fonte: Adaptado de Kaur e Rani (2016).

Apesar dos resultados subjetivamente agradáveis oriundos dos métodos de aprimoramento de imagens, o realce de imagens, assim como a interpolação, não acrescenta informações que já não estejam nas imagens. Os dados presentes destas imagens apenas são manipulados de forma que propiciem uma sensação de melhoria de qualidade ao SVH.

Figura 7 – Comparação de uma imagem original (à esquerda) com uma imagem aprimorada em diversos aspectos (à direita).



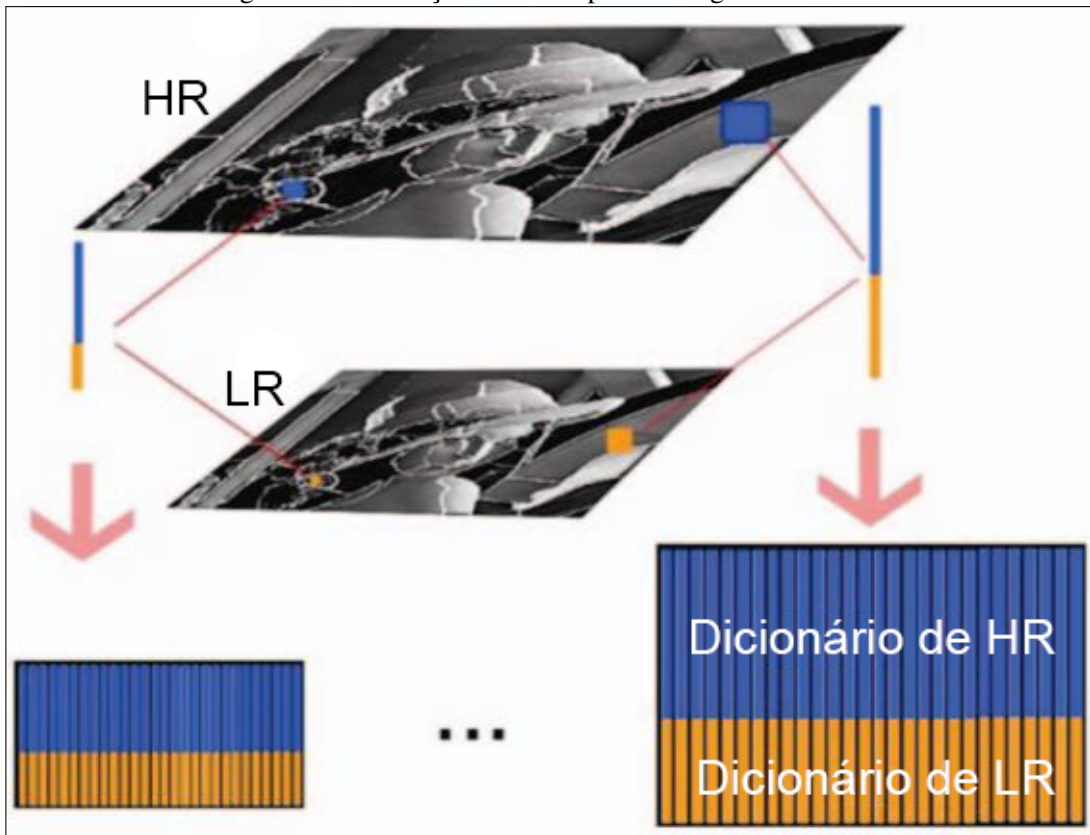
Fonte: Adaptado de Singh et al. (2016).

2.1.3 Super-resolução por uma única imagem (*single image super resolution*)

Estudada como um tipo específico de super-resolução de imagens, a super-resolução por apenas uma imagem (*single image super resolution* – SISR) tem objetivos similares à SRR, porém apresenta uma abordagem ligeiramente distinta. Como o próprio nome sugere, na SISR o processo de super-resolução tem como entrada apenas uma imagem. Porém, para que o algoritmo seja capaz de aumentar a resolução desta imagem, um processo de treinamento deve ser feito *a priori*. A ideia principal desse método é gerar imagens em HR a partir de um treinamento feito com pares de imagens HR e suas respectivas representações em LR (BALURE; KINI, 2014). A ideia deste treinamento é encontrar relações entre imagens em HR e suas representações LR, conforme ilustrado na Figura 8, construindo uma espécie de dicionário que correlaciona essas imagens. Assim, quando uma nova imagem LR é submetida ao método, procura-se por características identificadas nessa imagem, traduzindo pontos conhecidos com sua possível representação em HR.

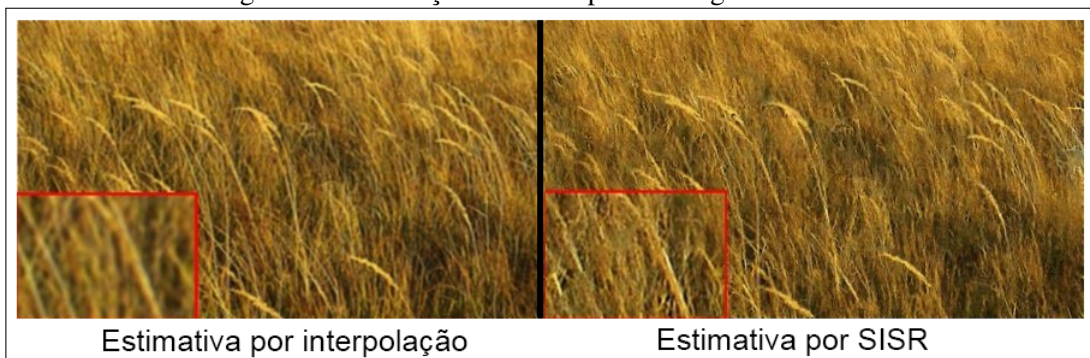
Zhou e Wu (2016) trazem um extenso estudo da influência da escolha correta das imagens durante o treinamento na performance do método. Segundo Zhou e Wu (2016), ainda é comum deparar-se com artefatos indesejáveis (como serrilhamentos e descontinuidades de bordas) nas imagens HR reconstruídas quando utilizados exemplos inapropriados para o treinamento do algoritmo. A abordagem de super-resolução por aprendizado difere-se da clássica SRR por tratar geralmente de aplicações específicas, o que pode trazer bons resultados devido a todo conhecimento necessário *a priori* (ZIWEI et al., 2014), como pode ser evidenciado na Figura 9. Porém, a comprovada necessidade de correta forma de treinamento e, em muitos casos, o extensivo treinamento elevam a complexidade da eficiente implementação deste método.

Figura 8 – Correlação entre um par de imagens HR e LR.



Fonte: Adaptado de Mokari e Ahmadyfard (2015).

Figura 9 – Correlação entre um par de imagens HR e LR.



Fonte: Adaptado de Zhou e Wu (2016).

2.1.4 Comparativo entre métodos de tratamento de imagem digital

Com a intenção de objetivamente apontar as principais características das técnicas de tratamento de imagens citadas foi elaborado um comparativo entre essas técnicas e a SRR. Este comparativo é apresentado a seguir na Tabela 1.

Tabela 1 – Comparativo entre Métodos de Tratamento de Imagem

Método	Interpolação de Imagens	Realce de Imagens	Super-Resolução por Apenas Uma Imagem	Reconstrução de Imagens por Super-Resolução
Objetivo	Ampliar, reduzir, distorcer ou rotacionar imagens.	Melhorar aspectos da imagem com o objetivo de torná-la mais compreensível ou agradável à visão humana.	Aumentar a resolução de imagens.	Aumentar a resolução de imagens.
Aplicações	Cotidianamente em redimensionamentos de imagens, rotações, e diversas outras operações necessárias em praticamente qualquer manipulação digital de imagens.	Melhorias perceptuais desde aprimoramentos automáticos em câmeras até aplicação em equipamentos médicos.	Aplicações onde deseja-se uma resolução maior do que a que o sensor de captura pode oferecer. É aplicável, porém, sob correto treinamento prévio do algoritmo.	Aplicações onde deseja-se uma resolução maior do que a que o sensor de captura pode oferecer. É aplicável desde o mundo móvel até satélites de observação.
Princípio de funcionamento	Estimação do valor de pixels desconhecidos através do valor de pixels conhecidos próximos, de uma mesma imagem.	Os diversos métodos tratam do realce controlado de um ou mais atributos como brilho, contraste e saturação.	Baseado no treinamento com pares de imagens de HR e sua representação LR, visando identificar relações entre estas imagens e, em seguida, reconstruir uma imagem HR a partir de uma nova entrada LR, utilizando tais relações.	Combinação de múltiplas imagens em LR formando uma imagem HR, estimando pixels necessários em função das imagens de entrada e o movimento relativo entre elas.
Imagens necessárias	Apenas a imagem de interesse.	Apenas a imagem de interesse.	A imagem de interesse, além das diversas imagens para o treinamento do algoritmo.	Múltiplas imagens de uma mesma cena capturadas por diferentes sensores e/ou com movimento estimável entre a câmera e a cena de interesse.
Custo computacional	Baixo / moderado (dependendo do método).	Moderado.	Baixo (desconsiderando treinamento prévio)	Elevado.
Adiciona informação às imagens?	Não, apenas utiliza dados existentes.	Não, apenas utiliza dados existentes.	Adiciona informações utilizando as correlações alimentadas a priori.	Adiciona informações em função da estimação, sendo estas em sua maioria informações de alta frequência.

Fonte: Autor (2017).

2.2 ALGORITMO DE RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS COM SUPER-RESOLUÇÃO

Conforme mencionado no Capítulo 1, o objetivo principal da SRR é combinar diversas imagens em LR em um resultado de HR. Isto só é possível se houver movimento entre os subpixels das imagens amostradas, seja este movimento presente na sequência de imagens (seja em função de deslocamentos da câmera ou dos objetos presentes na cena) e que esse movimento seja de dimensões de subpixel. Além disso, o movimento deve ser reconhecido ou passível de ser estimado.

Os algoritmos de SRR são divididos basicamente em duas etapas: a primeira trata do registro das imagens LR e a segunda da combinação dessas imagens para formar o resultado em HR. A etapa de registro é responsável pela estimação do movimento entre as imagens; movimento esse que pode ser gerado das mais diversas formas. A exemplo, pode-se citar a amostragem (captura) de uma cena por meio de sensores diferentes, em outro ângulo ou até em momentos distintos (ZITOVA; FLUSSER, 2003). Essa etapa é de suma importância para o êxito da técnica de SRR, visto que os erros de registro são tratados como os principais empecilhos de implementação da super-resolução. Em casos cujo movimento relativo entre as imagens é erroneamente estimado, os resultados da SRR acabam degradando ainda mais a imagem, ao invés de aprimorá-la (COSTA, 2007).

Não existe um algoritmo abrangente o suficiente para ser aplicável em todos os diferentes processos de amostragem digital e suas respectivas degradações (ZITOVA; FLUSSER, 2003). Toda implementação deve analisar os modelos necessários para o correto registro destas imagens, partindo pelo menos de um modelo específico com a premissa de que todas as imagens capturadas sigam a formulação do modelo. O registro de imagem não é uma etapa trivial, sendo necessário um estudo completo das mais diferentes técnicas implementáveis, conforme apresentado por Zitova e Flusser (2003) em sua pesquisa. Contudo, a etapa de registro não é aprofundada neste trabalho, tendo apenas seus resultados utilizados na formulação do modelo de SRR.

Para entender completamente a etapa de combinação de imagens é preciso ter em mente que a SRR trata-se de um problema inverso, visto que a partir de uma amostra degradada e do seu respectivo modelo de degradação estima-se a imagem original (BORMAN; STEVENSON, 1998). Sendo assim, a correta estimação deste modelo reflete diretamente na qualidade da reconstrução realizada.

De forma a compreender a formatação do modelo, é necessário definir ordenação lexicográfica, em que uma imagem definida pela matriz \mathbf{X} é representada na forma vetorial \mathbf{x} , sendo reordenada de acordo com $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]^T$, onde cada vetor \mathbf{x}_n representa a n -ésima linha da matriz \mathbf{X} . Esta reordenação torna-se necessária devido às operações matriciais realizadas pela grande maioria dos modelos propostos. Na área de processamento de imagens esse modelo é mais conhecido como modelo de observação (ZOMET et al. 2001, FARSIU et al. 2004 e PARK

et al. 2003), sendo descrito por:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{D}\mathbf{B}_k\mathbf{M}_k\mathbf{x} + \mathbf{n}_k, \quad (2.2)$$

onde:

- $\mathbf{y}_k^{NN \times 1}$ representa o vetor resultante da ordenação lexicográfica da k -ésima imagem amostrada, de tamanho $N \times N$;
- $\mathbf{D}^{NN \times PP}$ representa a matriz de dizimação;
- $\mathbf{B}_k^{PP \times PP}$ representa a k -ésima matriz de *blurring*;
- $\mathbf{M}_k^{PP \times PP}$ representa a matriz de *warping* que relaciona a k -ésima observação com a imagem \mathbf{x} ;
- $\mathbf{x}^{PP \times 1}$ representa o vetor resultante da ordenação lexicográfica da imagem original, de tamanho $P \times P$;
- $\mathbf{n}_k^{NN \times 1}$ representa o k -ésimo vetor resultante da ordenação lexicográfica do ruído de amostragem;
- k é o índice referente à k -ésima captura;
- $P > N$, sendo P/N a taxa de magnificação da reconstrução \mathbf{x} .

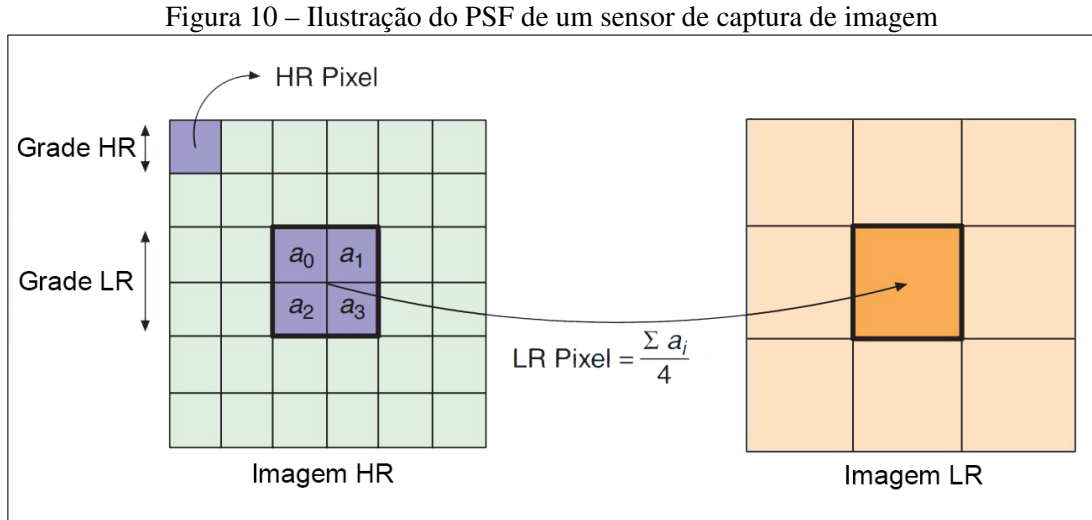
A representação deste modelo implica em algumas premissas a serem consideradas. Primeiramente, assume-se que \mathbf{x} seja uma imagem sem degradação e amostrada contemplando o critério de Nyquist¹, representando portanto uma cena com banda limitada de frequência. O índice k representa o momento de captura da imagem \mathbf{y} , sendo válido de 1 até a última amostra capturada, de índice Q . Assim, considera-se também que \mathbf{x} permaneça intacta de 1 a Q , apresentando apenas movimentação e degradações representáveis pelo modelo da Equação (2.2) (PARK et al. 2003; COSTA 2011).

As movimentações decorrentes da captura em momentos distintos da cena \mathbf{x} que são apresentados em \mathbf{y} são modelados pela matriz \mathbf{M}_k . Essa matriz pode conter movimentos translacionais, rotacionais, entre outros, podendo ser apresentados de forma local (em uma região da imagem) ou de forma global (apresentado de forma uniforme em toda a amostra) (PARK et al., 2003). A estimativa desse movimento, geralmente desconhecido, dá-se a partir do processo de registro.

A matriz \mathbf{B}_k representa os efeitos de *blurring* relativos ao processo de captura da imagem. A origem deste *blurring* pode tratar do sistema óptico (desfoque, má qualidade do sistema), movimentação relativa (devido ao tempo de aquisição da imagem) e ao PSF (*point spread function*) do sensor LR. Os efeitos do PSF são geralmente modelados como uma função de média

¹Para contemplar o critério de Nyquist a frequência de amostragem deve ser maior do que o dobro da maior frequência do sinal amostrado.

espacial, conforme ilustrado na Figura 10. Seu significado trata do comportamento de sensores físicos e sua capacidade finita de resolução, fazendo com que a amostragem de uma cena tenha seus pixels resultantes de uma função espacial da cena original (PARK et al., 2003).



Fonte: adaptado de Park et al. (2003).

A matriz de dizimação \mathbf{D} é responsável pela geração da amostra LR a partir da imagem com os efeitos de *blurring* e *warping*. Diferentes modelagens desta matriz geram subamostragens LR com tamanhos distintos, que na prática indicam o fator de magnificação da reconstrução.

Uma generalização do modelo proposto na Equação (2.2) pode ser assumida, de forma a facilitar a interpretação das diversas implementações existentes. Esta generalização pode ser apresentada como:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{W}_k \mathbf{x} + \mathbf{n}_k \quad (2.3)$$

em que \mathbf{y} , \mathbf{x} , \mathbf{n} e k são análogos ao modelo proposto na Equação (2.2) e \mathbf{W} refere-se aos efeitos de *warping*, *blurring* e dizimação, explicitando a relação entre a amostragem LR e a estimativa HR. A Equação (2.3) pode ainda ser reescrita de forma a evidenciar a lógica envolvida na resolução do problema, sendo apresentada da seguinte forma:

$$\mathbf{W}_k \mathbf{x} + \mathbf{n}_k - \mathbf{y}_k = \mathbf{z} \quad (2.4)$$

onde \mathbf{z} é uma matriz nula de dimensões $NN \times 1$.

Assim, quando a estimativa em HR (\mathbf{x}) interagir com o modelo de observação e em seguida for subtraída pela k -ésima amostragem LR (\mathbf{y}_k), de forma a resultar em um vetor nulo, tem-se uma resposta ideal. A forma com que a equação é avaliada em função da busca pela solução se dá, em praticamente todos os algoritmos, pela norma do vetor resultante, sendo apresentada como:

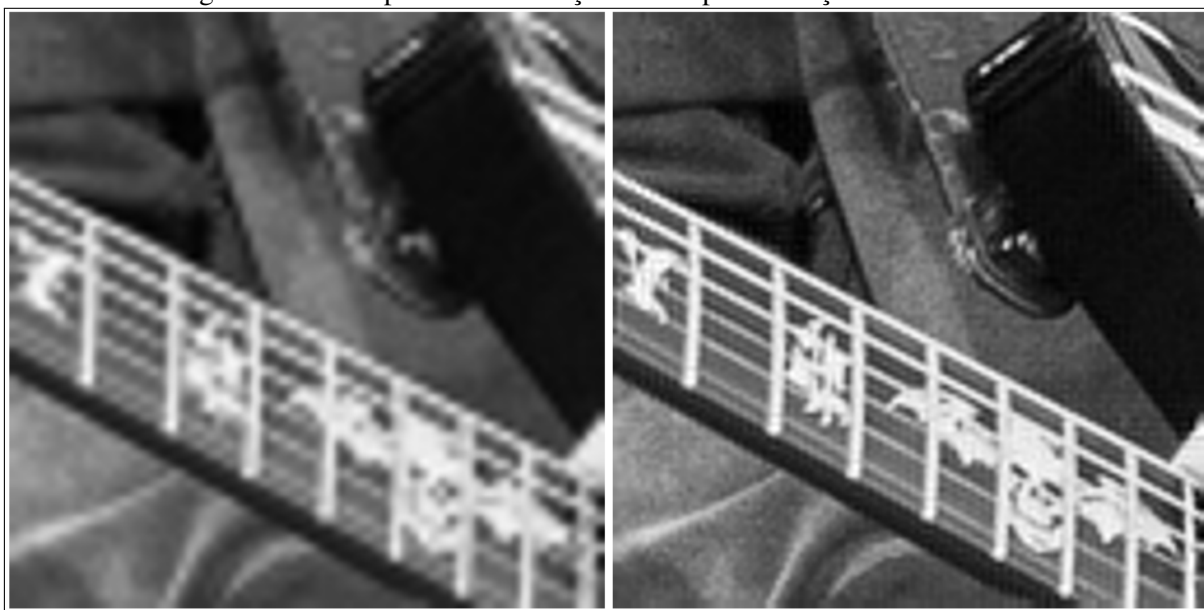
$$\|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{W}_k \mathbf{x} + \mathbf{n}_k - \mathbf{y}_k\| \quad (2.5)$$

em que \mathbf{e} refere-se ao resíduo resultante da solução HR em função da amostra LR. Com isto,

o resíduo da norma presente em \mathbf{e} refere-se à minimização do problema proposto na Equação (2.4), sendo então o objetivo principal dos algoritmos de SRR. Essa equação denomina-se função custo, conhecida também como figura de mérito. A partir do modelo obtido na Equação (2.5) pode-se analisar separadamente cada implementação de SRR. Existem as abordagens determinísticas, que trabalham em relação a uma sequência de amostras, e também abordagens estocásticas, que transformam o domínio de trabalho sequencial para o domínio do tempo, estimando a estatística do sinal de entrada. Implementações destas abordagens podem ser vistas em Park et al. (2003), Costa (2007), Zibetti (2003) e Zomet et al. (2001).

Um exemplo de implementação da técnica de SRR pode ser visto na Figura 11, onde uma das capturas degradadas é ampliada por interpolação bicúbica e comparada à reconstrução via SRR, ambas a uma magnificação de 2 vezes. O algoritmo utilizado para a geração destas imagens é apresentado por Costa (2007), e trata da abordagem estocástica do problema de SRR, sendo aplicado em uma sequência de observações LR emuladas.

Figura 11 – Exemplo de reconstrução com super-resolução via LMS-SRR.



Fonte: Autor (2017).

2.3 RESTAURAÇÃO DE IMAGENS COM FUNÇÃO DE ATIVAÇÃO APLICADA

O método apresentado por Ferreira et al. (2008) objetiva aprimorar o processo de reconstrução de imagens através da manipulação da solução em norma l_1 do problema de otimização envolvido no processo de degradação de imagens. A correta estimação do modelo de degradação, assim como para a SRR, é muito importante no processo de reconstrução, visto que a reconstrução também trata-se de um problema calculado a partir deste modelo. O limite de aplicação desse algoritmo dá-se geralmente em degradações de amostragem lineares e invariantes no espaço. Para estas limitações o modelo de degradação pode ser simplificado como um

sistema linear do tipo:

$$\mathbf{g} = \mathbf{B}\mathbf{x} \quad (2.6)$$

onde:

- $\mathbf{g}^{NN \times 1}$ representa o vetor resultante da ordenação lexicográfica da imagem degradada, de tamanho $N \times N$;
- $\mathbf{B}^{NN \times PP}$ é a matriz que modela a degradação;
- $\mathbf{x}^{PP \times 1}$ representa o vetor resultante da ordenação lexicográfica da imagem original, de tamanho $P \times P$;
- Para fins didáticos, sem perda de generalidade, é assumido que $N = P$.

O objetivo da restauração é encontrar uma estimativa de \mathbf{x} que satisfaça a Equação (2.6), correspondendo à imagem original sem os efeitos da degradação impostos pela matriz \mathbf{B} . Para que seja possível obter um \mathbf{x} estimado é necessário que a matriz \mathbf{B} possua inversa; premissa essa que não pode ser garantida em todas as aplicações. Para contornar este problema, assim como no caso da SRR, comumente utiliza-se uma abordagem via métodos iterativos. A fim de facilitar o uso dessa abordagem pode-se reorganizar a Equação (2.6) na seguinte forma:

$$\mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{g} = \mathbf{z}. \quad (2.7)$$

onde \mathbf{z} é uma matriz nula de dimensões $NN \times 1$. Com isso, uma maneira de estimar \mathbf{x} é através da minimização da norma do lado esquerdo da Equação (2.7) de forma que esse se aproxime do lado direito da igualdade, i.e., de uma matriz nula. As estimativas realizadas a cada iteração precisam ser avaliadas, verificando se seu resultado está se aproximando ou até mesmo se alcançou a resposta desejada. Nota-se que a definição da norma utilizada influenciará na eficiência da abordagem iterativa. De acordo com as vantagens conhecidas da norma l_1 e sua robustez contra *outliers*, essa foi utilizada para a regularização do modelo proposto por Ferreira et al. (2008). Assim, a resolução do problema pode ser apresentada na seguinte forma:

$$E(\mathbf{x}) = \|\mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{g}\|_1 \quad (2.8)$$

Em virtude da completa determinação do sistema pode-se aplicar o método do gradiente descendente para resolução da abordagem iterativa (FERREIRA et al., 2008). A abordagem iterativa via gradiente gera a cada iteração uma avaliação da direção de crescimento do erro de reconstrução. Sabendo a direção de maior crescimento do erro, pode-se então ir à direção contrária, melhorando assim a qualidade da imagem. Para que não ocorram oscilações na reconstrução, e também de forma a garantir a convergência, utiliza-se um fator atenuador, mais conhecido como passo, para ir ao encontro do decréscimo do erro. Assim, a cada iteração, o gradiente multiplicado pelo passo é subtraído da reconstrução corrente, convergindo para

uma melhora da imagem ao fim das iterações. Desta forma, o gradiente da função utilizado na minimização da Equação (2.8) pode ser expresso por:

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{M}\nabla E(\mathbf{x}) = -\mathbf{M}\mathbf{B}^T \text{sign}(\mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{g}) \quad (2.9)$$

onde:

- $\mathbf{M} = \text{diag}(u_1, \dots, u_{NN})$ é uma matriz diagonal positiva onde cada elemento u_n corresponde ao passo de atualização da n -ésima posição do vetor resultante de $E(\mathbf{x})$;
- A implementação prática da função sign retorna um vetor cujos elementos são calculados de acordo com a seguinte definição:

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} -1, & \text{se } a < 0 \\ 0, & \text{se } a = 0 \\ 1, & \text{se } a > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

apesar de, tradicionalmente, a função não ser definida para valores de a iguais a zero.

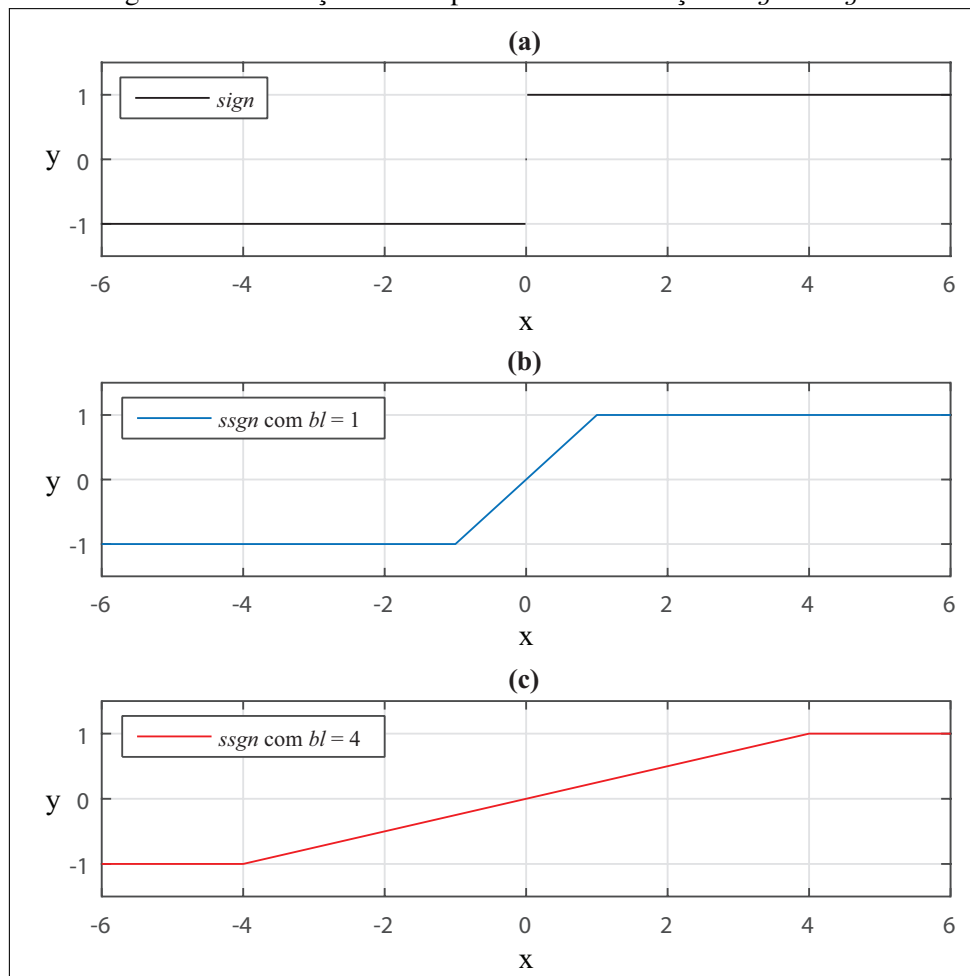
O sistema de gradiente apresentado na Equação (2.9) pode ser relacionado com uma rede neural com uma função de ativação descontínua, característica da função sign . Essa função se faz presente em normas ímpares, visto que a potência a qual cada posição do vetor é elevada não elimina o sinal de valores negativos, que posteriormente são suprimidos pela operação de módulo envolvida na normalização. A principal vantagem deste sistema é o tempo finito de convergência à solução do sistema de equações lineares apresentado na Equação (2.6) (FERREIRA et al., 2008), uma vez que a cada iteração do sistema fica-se mais próximo à solução ideal (de resíduo zero).

Um ponto negativo do uso desta solução é apontado por Ferreira et al. (2008) no decorrer de sua implementação numérica e é chamado de *chattering*. Este problema é evidenciado no emprego do esquema de discretização utilizado para a derivação da Equação (2.7), que resulta em oscilações de alta frequência. Esta indesejável reação pode ser atenuada com o uso da técnica de camada limite, mais conhecida pela correspondência em inglês *boundary layer*, que consiste em aproximar uma descontinuidade e uma pequena parte da região próxima a ela através de uma função contínua (FERREIRA et al., 2008). Aplicando essa técnica, de forma a alterar a função sign , é possível amenizar a descontinuidade através da seguinte função proposta por Ferreira et al. (2008):

$$\text{ssgn}(a) = \begin{cases} \frac{a}{bl}, & \text{se } a \in [-bl, bl] \\ \text{sign}(a), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.11)$$

em que $bl > 0$ é a largura da *boundary layer*.

Pode-se ilustrar visualmente a relação entre as funções sign e ssgn , bem como de diferentes bl , através da Figura 12.

Figura 12 – Ilustração do comportamento das funções *sign* e *ssgn*.

Fonte: Autor (2017).

Os resultados obtidos pela reconstrução através da regularização em norma l_1 e utilizando *boundary layer* são satisfatórios se comparados a outros métodos usuais, como apresentado por Ferreira et al. (2008) através de suas implementações. No trabalho proposto por Ferreira et al. (2008) são realizados ensaios com imagens degradadas de duas formas: ruído combinado a desfoque gaussiano e ruído combinado a desfoque por movimento. Em ambos os casos as reconstruções mostraram-se de maior qualidade do que as imagens degradadas, utilizando como critério a análise da relação sinal ruído (*Signal to Noise Ratio* - SNR). As Tabelas 2 e 3 comparam o método proposto (*gradient based*) por Ferreira et al. (2008) e outros métodos usuais. É válido ressaltar que, segundo os critérios adotados por Ferreira et al. (2008), o valor Δ SNR apresentado nas tabelas é diretamente proporcional à qualidade da imagem restaurada, avaliando a atenuação da degradação presente na reconstrução em função da imagem original.

Não há, porém, uma análise matemática da eficácia da utilização de uma função de ativação no lugar da função sinal, nem mesmo uma comparação sob a mesma métrica de avaliação entre os métodos que utilizem ou não essa função. Percebe-se também uma deficiência na descrição da característica de modelagem da função *ssgn*, visto que nenhum critério é descrito para a

determinação da camada limite.

Tabela 2 – Restauração da degradação gerada por desfoque gaussiano e ruído.

Método	SNR	Δ SNR	Número de Iterações
Método Gradiente Proposto	19.98db	2.01db	14
PCG	19.11db	1.14db	38
Algoritmo baseado em HN	19.46db	1.49db	868

Fonte: Adaptado de Ferreira et al. (2008).

Tabela 3 – Restauração da degradação gerada por desfoque de movimento e ruído.

Método	SNR	Δ SNR	Número de Iterações
Método Gradiente Proposto	19.36db	0.84db	13
PCG	19.02db	0.50db	12
Algoritmo baseado em HN	19.00db	0.48db	872

Fonte: Adaptado de Ferreira et al. (2008).

3 MÉTODO PROPOSTO

Considerando os resultados obtidos por Ferreira et al. (2008), neste capítulo é proposta a inclusão de uma função de ativação em um algoritmo de SRR baseado em norma l_1 . Durante o presente trabalho, serão descritos os testes e implementações realizados sob uma metodologia definida a seguir, que tem como objetivo comparar a função custo com gradiente contínuo e com gradiente descontínuo. Não está prevista dentro do escopo do trabalho nenhuma análise matemática que descreva o comportamento da função de ativação dentro da implementação de super-resolução. O escopo se restringe, portanto, à comparação por meio da implementação prática dos algoritmos.

Uma busca na base de dados da IEEE (IEEEExplore) pelos termos Super resolution (acesso em 19/11/2017) a base de dados retorna o trabalho de Farsiu et al. (2004), intitulado *Fast and Robust Multiframe Super-Resolution*, como sendo o segundo artigo mais referenciado, com 868 citações em artigos científicos e 117 citações em patentes. O método proposto por Farsiu et al. (2004) é, convenientemente, baseado em norma L_1 e, em face do número de citações, neste trabalho é proposto que seja utilizado como base para a avaliação dos efeitos da inclusão da função de ativação.

A robustez desse algoritmo é avaliada em função do ponto de quebra (*breakdown point*) que é determinado pelo percentual de *outliers* que influenciam no resultado final da reconstrução. A utilização de um operador de média espacial, com as imagens devidamente registradas, ao longo das amostragens representa um ponto de quebra de zero. Isto é, um único *frame* que contenha qualquer tipo de *outliers* influenciará no resultado final. De forma análoga, pode-se analisar o resultado de um operador de mediana, resultando num ponto de quebra de 0,5. Isso significa que o resultado final de cada pixel só é influenciado por *outliers* se esses estiverem presentes em 50% ou mais dos *frames* observados. Tal característica torna-se possível devido ao uso da norma l_1 . A reconstrução em termos da norma l_2 , segundo esta formulação, resultaria em uma média espacial; conseqüentemente, com mínimo ponto de quebra (FARSIU et al., 2004).

Na seção II-E do trabalho de Farsiu et al. (2004) é apresentada uma formulação computacionalmente otimizada para o algoritmo. As premissas desse algoritmo restringe à aplicação de movimentos puramente translacionais e um mesmo modelo de degradação em todos os *frames*; o que é seguramente mais adequado quando todas as imagens são adquiridas por um mesmo equipamento. Levando em consideração os resultados obtidos nessa formulação rápida em comparação com a formulação genérica proposta em Farsiu et al. (2004) II-D, observa-se uma grande similaridade na qualidade de reconstrução. Assim, neste trabalho adota-se a implementação otimizada como base para a implementação das alterações propostas.

Tanto o algoritmo de caso geral quanto o otimizado apresentam uma formulação para a regularização do resultado da SRR. Essa regularização tem como objetivo suavizar o resultado da reconstrução (COSTA, 2011), o que sugere também uma melhora visual em relação à presença de ruído. A parcela de regularização e suas características não influenciam no método

aquí proposto. Ainda assim, para o leitor mais interessado, um estudo completo da formulação da regularização utilizada nesse algoritmo é devidamente apresentada por Farsiu et al. (2004). Assim, considerando o caso computacionalmente otimizado do algoritmo somado à sua parcela de regularização, pode-se simplificar sua equação recursiva de acordo com:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n - \beta[\mathbf{H}^T \mathbf{A}^T \text{sign}(\mathbf{A}\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}})] + \lambda \mathbf{r} \quad (3.1)$$

onde:

- $\hat{\mathbf{z}}^{PP \times 1}$ é o resultado da mediana das imagens em LR devidamente registradas no grid HR;
- $\mathbf{A}^{PP \times PP}$ é a matriz que representa a quantidade de *frames* que contribuíram para cada pixel do grid HR;
- $\hat{\mathbf{x}}_n^{PP \times 1}$ é a n -ésima reconstrução em HR da sequência observada;
- $\mathbf{H}^{PP \times PP}$ é a matriz de *blurring* que representa o efeito do PSF;
- β é o passo de convergência do algoritmo;
- λ é o peso da parcela de regularização;
- $\mathbf{r}^{PP \times 1}$, para fins de simplificação, representa a parcela de regularização;
- $n > 0$ representa o índice de cada iteração.

Assim, a troca da função sinal pela função de ativação pode ser representada reescrevendo a Equação (3.1):

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n - \beta[\mathbf{H}^T \mathbf{A}^T \text{ssgn}(\mathbf{A}\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}})] + \lambda \mathbf{r} \quad (3.2)$$

Nem todos os pixels em $\hat{\mathbf{z}}$ têm correspondência em algum dos *frames* em LR, cabendo alguma forma de interpolação para preenchimento destes pixels não determinados. A matriz \mathbf{A} é uma matriz diagonal em que cada elemento não nulo representa a raiz quadrada da quantidade de pixels (*frames* LR) que contribuíram para a formação de cada pixel do grid de HR. Dessa forma, pixels que não foram determinados não contribuem para o resultado final, assim como pixels com grande número de contribuições têm maior impacto no resultado.

A grande vantagem em complexidade em relação aos algoritmos ordinários de reconstrução com super-resolução está na não iteratividade *frame a frame*, fazendo um único laço iterativo a partir da estimação da mediana no sentido dos pixels. Além disto, não há mais a presença do operador de dizimação, uma vez que o desenvolvimento do método é dado no grid de HR.

4 RESULTADOS

Nesta seção, definem-se os detalhes acerca das simulações de desempenho realizadas. São discutidos também os parâmetros escolhidos para a realização dos testes, bem como suas justificativas.

A implementação do algoritmo *Fast and Robust Multiframe Super-Resolution* utilizada neste trabalho foi disponibilizada online por Hanson (2007). Essa implementação preenche os pixels não determinados em $\hat{\mathbf{z}}$ com um filtro de mediana, com dimensão espacial igual ao tamanho do fator de magnificação. O algoritmo utilizado para estimação do registro é uma implementação baseada no tradicional método de Lukas-Kanade: Pyramidal Optical Flow, introduzido em Lukas e Kanade (1981).

Nas simulações, fez-se uso da matriz de PSF modelada como uma gaussiana de variância 1 e dimensões 3×3 . O pequeno tamanho da matriz dá-se devido à sua implementação prática, que utiliza operações convolucionais para otimização de complexidade espacial. O movimento entre as observações simuladas foi modelado como puramente translacional e de direções aleatórias. Nessas observações não foram gerados borramentos, o equivalente a uma máscara de *blurring* unitária de tamanho 1×1 , uma vez que sua implementação também se dá de forma convolucional. A fim de promover condições não ideais de observação, foi adicionado um ruído aleatório uniformemente distribuído com média de 0,5. A regularização via filtragem bilateral utilizada nos testes que seguem é citada e explicada em detalhes no trabalho de Farsiu et al. (2004).

Nas comparações a serem apresentadas, os cálculos do erro quadrático médio (do Inglês *Mean Square Error* – MSE) quantificam a fidelidade da reconstrução, onde um menor erro corresponde a uma maior fidelidade. Conforme citado, a implementação usada no presente trabalho utiliza do caso especial de maior otimização do algoritmo apresentado por Farsiu et al. (2004), comparando portanto sua performance ao longo das iterações e não dos *frames*.

Neste trabalho, toma-se como base os parâmetros descritos por Farsiu et al. (2004) para a imagem do gráfico de Eia. Isto é feito em virtude da facilidade de reprodução das condições de teste, uma vez em que as demais cenas apresentadas não encontram-se disponíveis em meio eletrônico. Os parâmetros de simulação referentes à etapa de registro são mantidos iguais aos propostos, com $\lambda = 0.08$. O passo de convergência é um parâmetro a ser modificado no decorrer das simulações. Contudo, a comparação do resultado das modificações realizadas leva em consideração $\beta = 1$ proposto em Farsiu et al. (2004).

A seguir são apresentadas duas simulações. Na primeira utiliza-se da mesma cena de teste proposta por Farsiu et al. (2004), com o objetivo de avaliar os resultados alcançados em seu trabalho em comparação aos resultados obtidos a partir do método proposto neste trabalho. A fim de avaliar uma cena com características distintas uma segunda simulação é feita. Nesta, a cena escolhida foi a imagem Lena, também utilizada como figura de avaliação por Farsiu et al. (2004). Como seus parâmetros para a simulação considerando o caso otimizado do algoritmo

não são evidenciados por Farsiu et al. (2004) utilizam-se aqui os mesmos parâmetros definidos para o gráfico de Eia.

4.1 SIMULAÇÃO 1

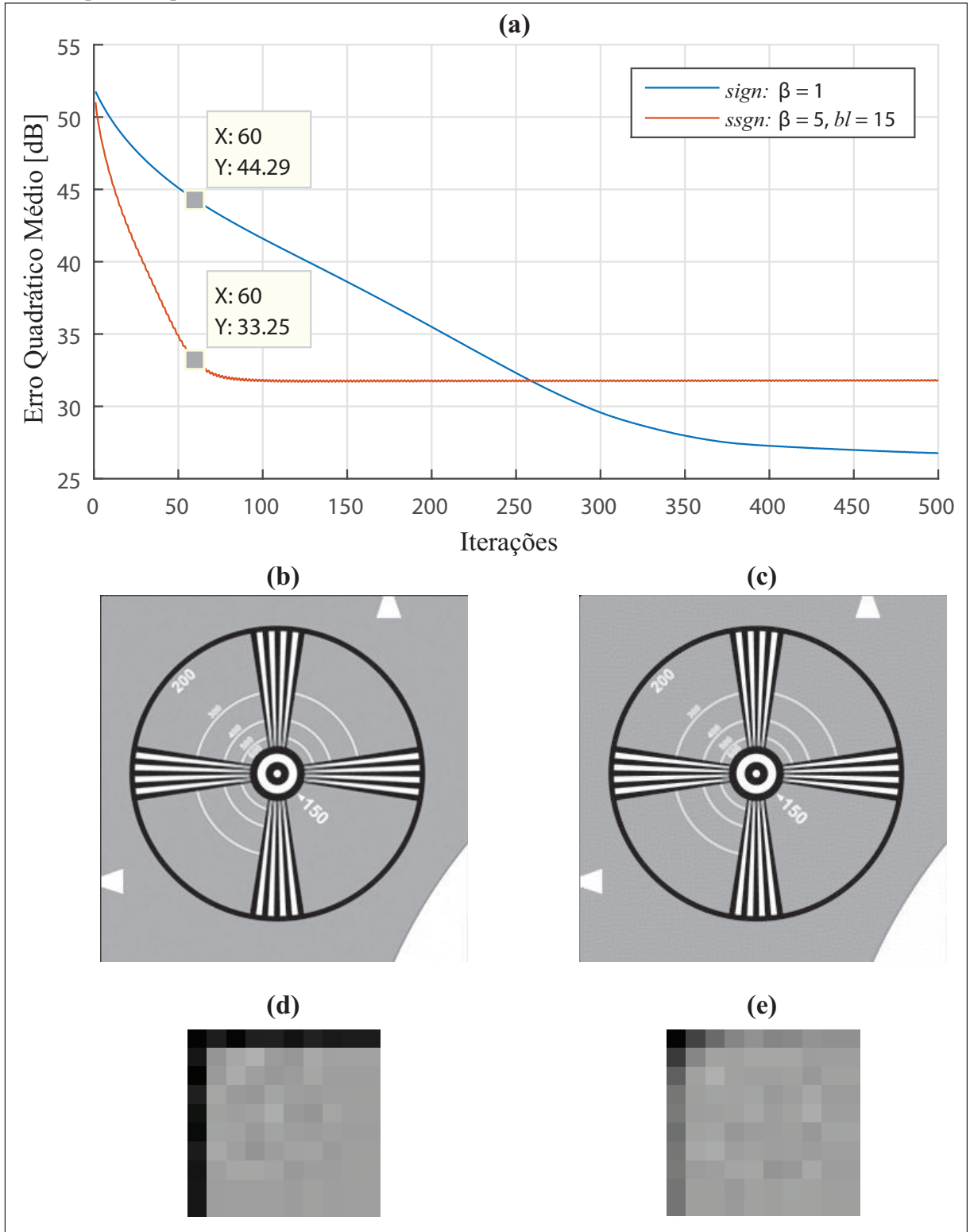
Inicialmente o algoritmo sem modificações foi executado com o mesmo β utilizado no trabalho de Farsiu et al. (2004), a fim de comparar qualquer modificação com o resultado apresentado nesse artigo. Os demais parâmetros pertinentes à regularização permanecem iguais aos propostos por Farsiu et al. (2004) e intactos durante todos os testes a seguir. Para o algoritmo modificado fez-se diversos testes variando os valores de β e bl de forma exaustiva.

O resultado considerado de maior contribuição é visto na Figura 13, onde o algoritmo modificado sugere um ganho em aplicações de tempo real (menor número de iterações). Apesar de apresentar um pior erro em regime, a convergência para o menor erro é deveras mais rápida que o algoritmo original. Em destaque, a 60 iterações, tem-se um ganho de aproximadamente 11 dB, o que é alto se comparado à excursão do erro durante as iterações. Parte deste ganho deve-se à rápida convergência das regiões de borda, pois onde na Figura 13(d) ainda há uma notável borda escura nos cantos superior e esquerdo, na Figura 13(e) esses artefatos estão consideravelmente atenuados.

A fim de avaliar a velocidade de convergência do algoritmo sem o uso da função de ativação fez-se um teste com o mesmo passo de convergência do resultado anterior, $\beta = 5$. Os resultados visíveis na figura 14 demonstram que um β maior efetivamente aumenta a velocidade do algoritmo original se comparado à sua resposta com $\beta = 1$. Porém, a velocidade de convergência ainda é menor se comparada à alcançada com o algoritmo modificado.

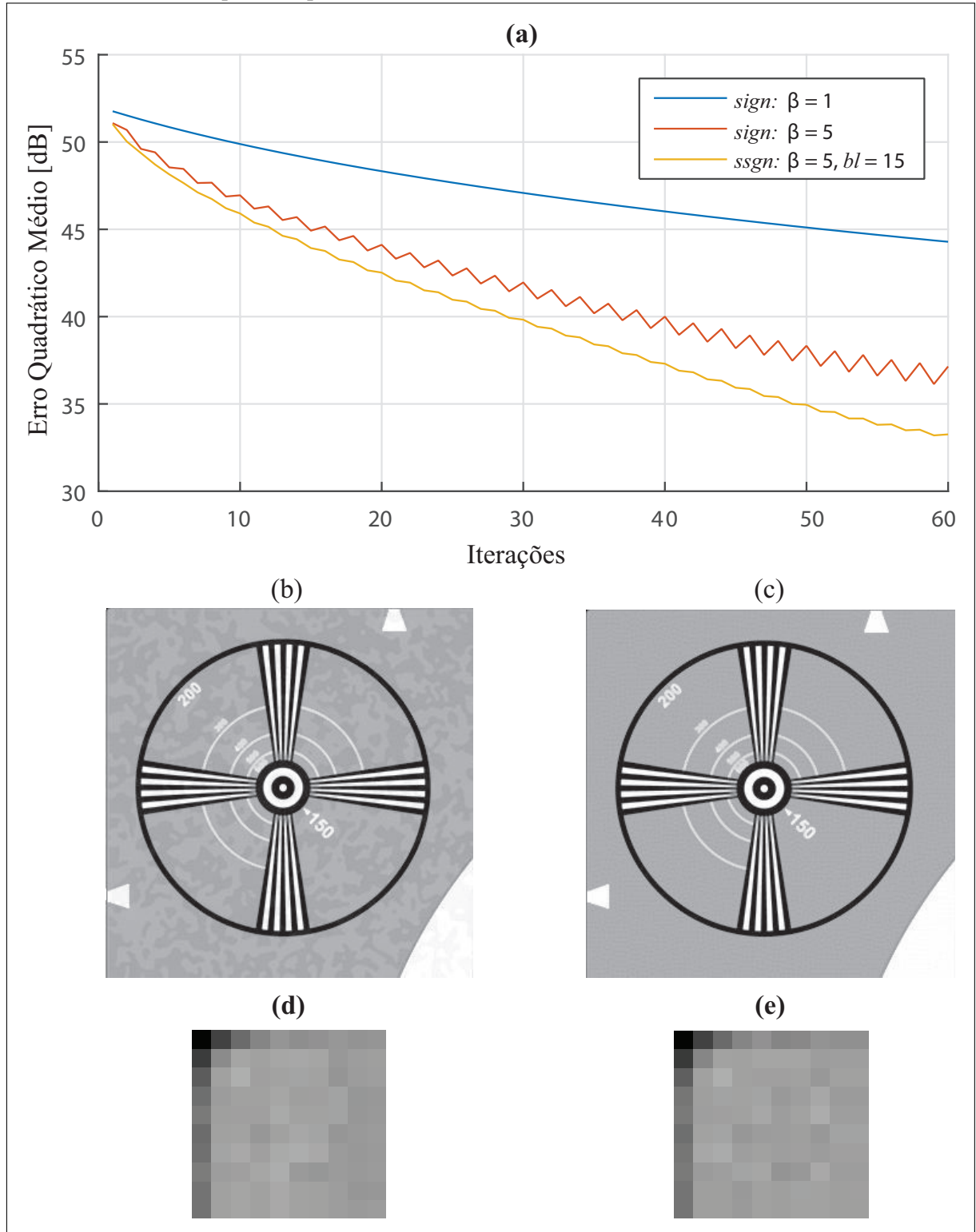
Ainda tomando como base o caso empírico de 60 iterações o MSE do resultado com $\beta = 5$ sem função de ativação é melhor do que o resultado com $\beta = 1$. Apesar da melhora teórica, visualmente esta resposta é muito pior, pois acaba inserindo artefatos indesejáveis que não estavam presentes nos resultados anteriores. Comparando os resultados de ambos algoritmos configurados com um $\beta = 5$, nota-se que a inserção da função de ativação não só aumenta a velocidade de convergência do erro avaliado via MSE, mas também preserva a característica de qualidade visual.

Figura 13 – (a) Evolução do MSE. (b) Reconstrução à 60ª iteração com a função *sign*. (c) Reconstrução à 60ª iteração com a função *ssgn*. (d) Em detalhe, o canto esquerdo superior de (b). (e) Em detalhe, o canto esquerdo superior de (c).



Fonte: Autor (2017).

Figura 14 – (a) Evolução do MSE. (b) Reconstrução à 60ª iteração com a função *sign* e $\beta = 5$. (c) Reconstrução à 60ª iteração com a função *ssgn*. (d) Em detalhe, o canto esquerdo superior de (b). (e) Em detalhe, o canto esquerdo superior de (c).



Fonte: Autor (2017).

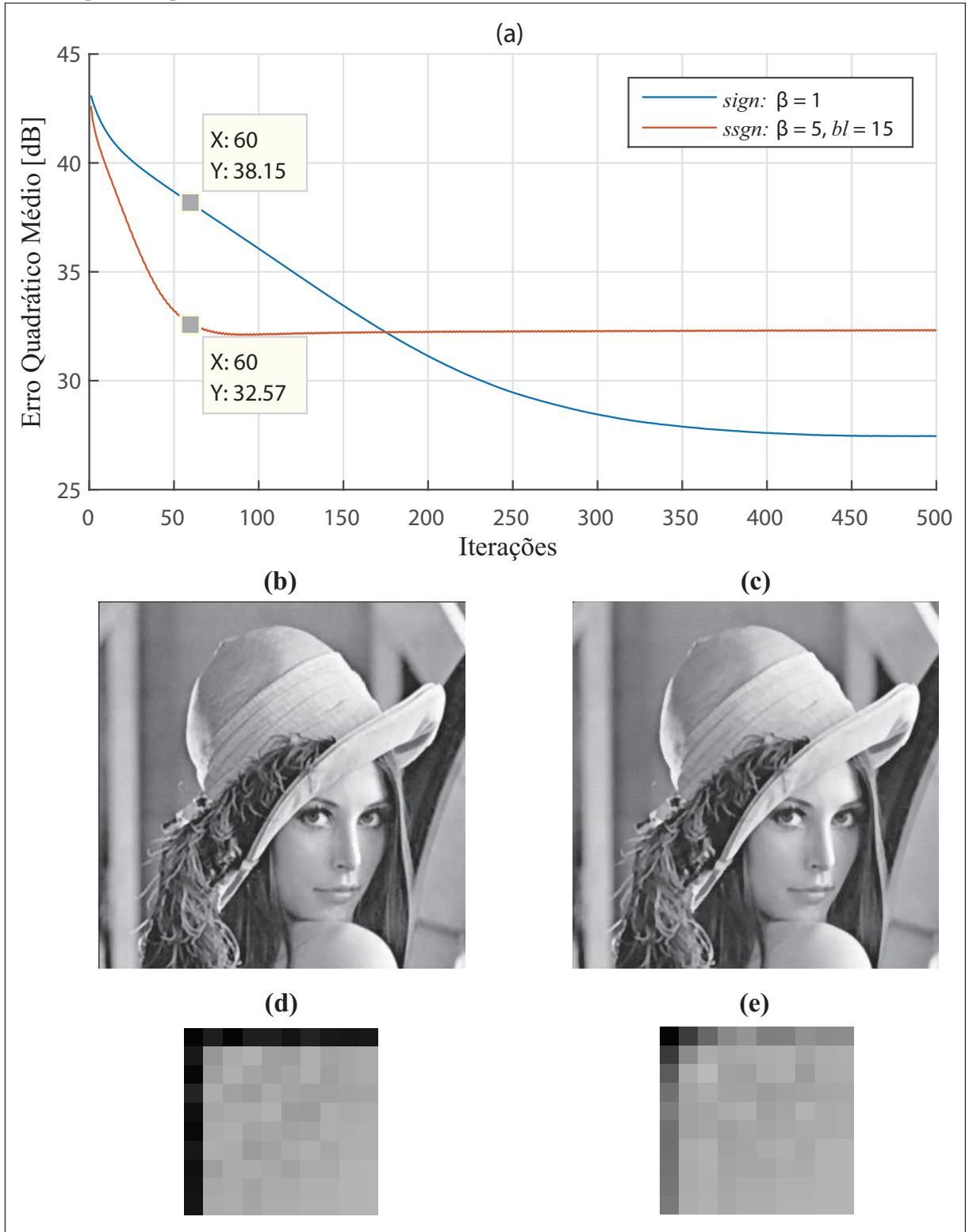
4.2 SIMULAÇÃO 2

Diferentemente do gráfico de Eia, Farsiu et al. (2004) não apresentam os parâmetros para simulação desta cena. Contudo, acredita-se que uma justa avaliação do método se dará mantendo os parâmetros utilizados anteriormente.

A simulação inicial compara o resultado do $\beta = 1$ para o algoritmo original contra o resultado do $\beta = 5$ para o algoritmo modificado. Na Figura 15 tem-se uma resposta similar à apresentada na Figura 13, inclusive em relação ao número de iterações necessárias para a convergência do MSE. Neste caso à 60 iterações tem-se um ganho de 5,58 dB, o que também é considerável em relação à excursão do erro durante as iterações. Os aspectos de convergência das regiões de borda apresentados na simulação anterior mantêm-se presentes.

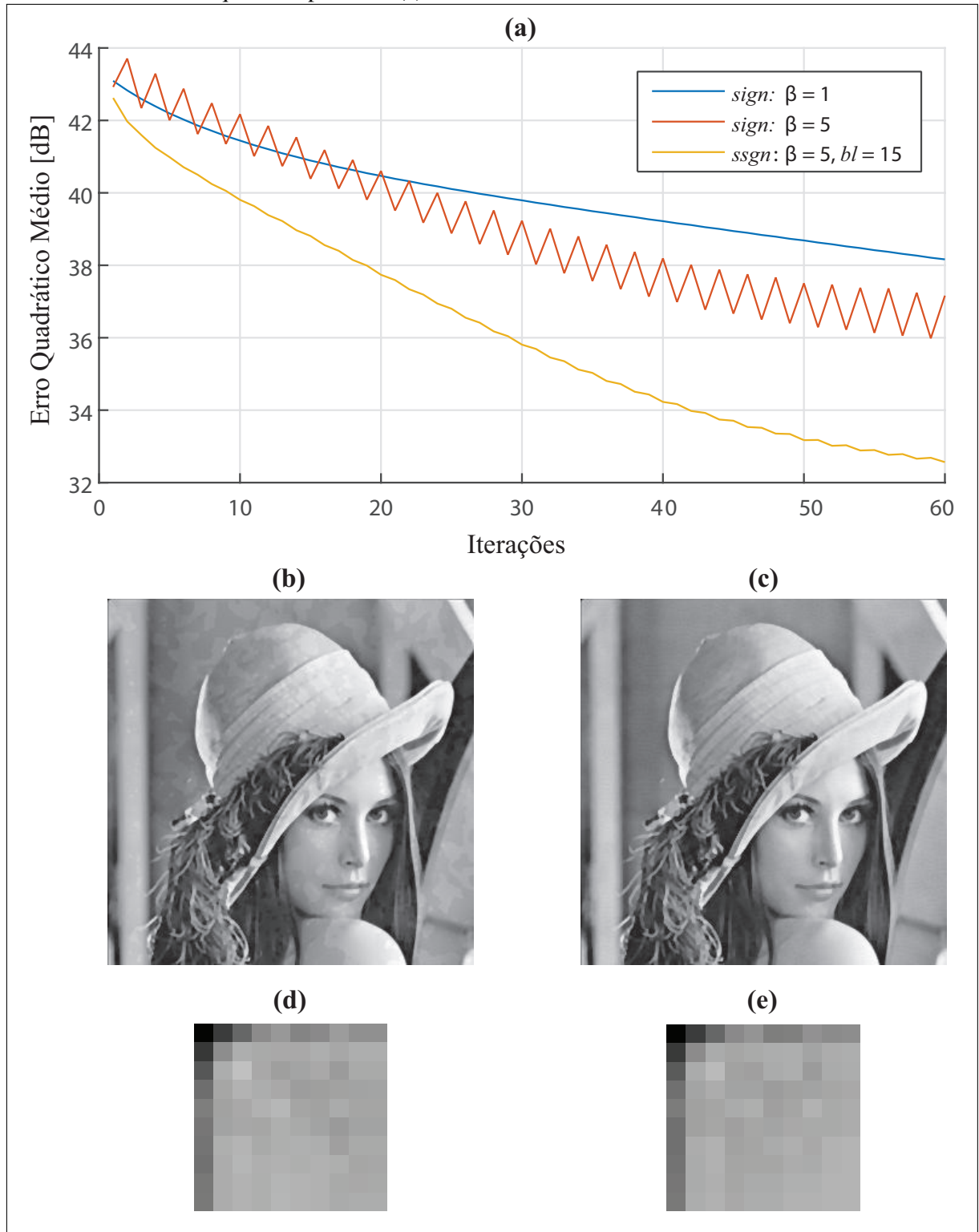
A segunda simulação desta cena tem o objetivo de comparar a possibilidade de rápida convergência do algoritmo original. Para isso utiliza-se do $\beta = 5$ em ambos os algoritmos. A resposta representada na Figura 16 apresenta similaridade com os resultados obtidos na primeira cena de teste, porém com uma resposta sutilmente diferente do algoritmo original com β rápido. Ao contrário do resultado apresentado na Figura 14 o aumento do β caracteriza uma piora no MSE já nas primeiras iterações, apresentando alguma vantagem apenas após 20 iterações. Em contrapartida, o resultado obtido com a função de ativação permanece em vantagem. As características visuais de ambos sugerem novamente a presença de artefatos indesejáveis no algoritmo original e a boa qualidade do algoritmo modificado.

Figura 15 – (a) Evolução do MSE. (b) Reconstrução à 60ª iteração com a função *sign*. (c) Reconstrução à 60ª iteração com a função *ssgn*. (d) Em detalhe, o canto esquerdo superior de (b). (e) Em detalhe, o canto esquerdo superior de (c).



Fonte: Autor (2017).

Figura 16 – (a) Evolução do MSE. (b) Reconstrução à 60ª iteração com a função *sign* e $\beta = 5$. (c) Reconstrução à 60ª iteração com a função *ssgn*. (d) Em detalhe, o canto esquerdo superior de (b). (e) Em detalhe, o canto esquerdo superior de (c).



Fonte: Autor (2017).

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre a técnica de reconstrução de imagens com super-resolução. Apesar dos diversos algoritmos existentes, existe um consenso na literatura sobre as características desejáveis que podem ser obtidas com a modelagem da solução através da minimização da norma l_1 do erro de reconstrução. Essa escolha se dá principalmente pelas vantagens em relação à robustez que essa norma agrega em relação à preservação de bordas nas imagens. Entretanto, em função do uso dessa norma, o gradiente da função custo recai na função *sign*, altamente não linear. Essa característica implica na presença de *chattering* nas imagens reconstruídas, resultante da não linearidade envolvida no processo de reconstrução.

Ao mesmo tempo, identificou-se que bons resultados têm sido obtidos em algoritmos de restauração de imagens, baseados em norma l_1 , através da substituição da função *sign* por uma função de ativação sem descontinuidades (FERREIRA et al., 2008). Esta abordagem tem como principal objetivo atenuar os efeitos oscilatórios implícitos do uso de funções descontínuas, melhorando o resultado da reconstrução final.

Um dos algoritmos de SRR baseados em norma l_1 mais citados na literatura é proposto por Farsiu et al. (2004), que explora o ganho em robustez agregado pela norma utilizada. Neste trabalho foi proposta a fusão entre o algoritmo de Farsiu et al. (2004) e o método proposto por Ferreira et al. (2008), possibilitando a avaliação do uso de funções de ativação em aplicações de SRR.

Foram identificadas significativas vantagens do método proposto em comparação ao método original de SRR. A possibilidade de trabalho com maiores passos de convergência concebem ao método proposto a redução do custo computacional necessário para alcançar certos níveis de reconstrução. Além disso, o método proposto sugere maior robustez a *outliers*, o que pode ser claramente observado nas regiões de fronteira das imagens reconstruídas.

Este trabalho se limita à apresentação e interpretação dos resultados práticos obtidos a partir do método proposto. Trabalhos futuros são instigados a fim de provar matematicamente a característica de rápida convergência, bem como sua abrangência em todos os casos de aplicação. Espera-se que, desta forma, os bons resultados aqui obtidos sejam confirmados analiticamente para a ampla aplicação deste método em algoritmos de SRR baseados em norma l_1 .

REFERÊNCIAS

- BALURE, C. S.; KINI, R. A survey - super resolution techniques for multiple, single, and stereo images. **Fifth International Symposium on Electronic System Design (ISED)**, United States, p. 215–216, 2014.
- BHATIA, J.; OKADE, M. A novel image enhancement technique based on statistical analysis of DCT coefficients for JPEG compressed images. **Twenty Second National Conference on Communication (NCC)**, [S.l.], 2016.
- BORMAN, S.; STEVENSON, R. L. Super-resolution from image sequences: a review. **Midwest Symposium on Circuits and Systems**, [S.l.], 1998.
- COSTA, G. H. **Estudo do comportamento do algoritmo LMS aplicado à reconstrução de vídeo com super-resolução**. 2007. 114 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.
- COSTA, G. H. Perspectivas e desafios em super-resolução de imagens: da modelagem a aplicação. **Simpósio Brasileiro de telecomunicações**, Curitiba, PR, 2011.
- COSTA, G. H.; BERMUDEZ, J. C. M. On super-resolution versus image interpolation. **SBrT International Telecommunications Symposium (ITS)**, Manaus, AM, p. 1–5, 2010.
- FARSIU, S. et al. Fast and robust multiframe super resolution. **IEEE Transactions on Image Processing**, [S.l.], v. 13, p. 1327 – 1334, Oct. 2004.
- FERREIRA, L. V. et al. Image restoration using l1-norm regularization and a gradient-based neural network with discontinuous activation functions. **International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)**, [S.l.], p. 2512 – 2519, 2008.
- HANS, W. J. et al. Fast single image super-resolution algorithm using feature based regression analysis. **International Conference on Wireless Communications, Signal Processing and Networking (WiSPNET)**, [S.l.], p. 509–514, 2016.
- HANSON, O. **Robust and fast super resolution**. 2007. Disponível em: <<http://www1.idc.ac.il/toky/videoProc-07/projects/SuperRes/srproject.html>>. Acesso em: 19 nov. 2017.
- HURTIK, P.; MADRID, N. Bilinear interpolation over fuzzified images: enlargement. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS (FUZZ-IEEE), 2015., 2015. **Anais...** IEEE, 2015.
- JOHNSON, S.; SNIDER, A. Antenna array output power minimization using steepest descent adaptive algorithm. In: THE 2005 IEEE ANNUAL CONFERENCE WIRELESS AND MICROWAVE TECHNOLOGY, 2005., 2005. **Anais...** IEEE, 2005.
- KAUR, H.; RANI, J. Mri brain image enhancement using histogram equalization techniques. **International Conference on Wireless Communications, Signal Processing and Networking (WiSPNET)**, [S.l.], p. 770–773, 2016.

- KEYS, R. G. Cubic convolution interpolation for digital image processing. **IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP)**, [S.l.], p. 480 – 483, 2008.
- LEHMANN, T.; GONNER, C.; SPITZER, K. Survey: interpolation methods in medical image processing. **IEEE Transactions on Medical Imaging**, [S.l.], v. 18, n. 11, p. 1049–1075, 1999.
- MOKARI, A.; AHMADYFARD, A. An adaptive single image method for super resolution. **Signal Processing and Intelligent Systems Conference (SPIS)**, [S.l.], p. 169 – 173, 2015.
- NASROLLAHI, K.; MOESLUND, T. B. Super-resolution: a comprehensive survey. **Machine Vision and Applications**, [S.l.], v. 25, n. 6, p. 1423–1468, 2014.
- NOBLE, B.; DANIEL, J. W. **Applied linear algebra (3rd edition)**. [S.l.]: Pearson, 1987.
- PARK, S. C. et al. Super-resolution image reconstruction: a technical overview. **IEEE Signal Processing Magazine**, United States, v. 20, n. 3, p. 21–36, May 2003.
- PELEG, T.; ELAD, M. A statistical prediction model based on sparse representations for single image super-resolution. **IEEE Transactions on Image Processing**, [S.l.], v. 23, n. 6, p. 2569–2582, jun 2014.
- SHAH, A. J.; GUPTA, S. B. Image super resolution-a survey. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON EMERGING TECHNOLOGY TRENDS IN ELECTRONICS, COMMUNICATION & NETWORKING, 2012., 2012. **Anais...** IEEE, 2012.
- SINGH, G. et al. Spatial domain color image enhancement based on local processing. **3rd International Conference on Signal Processing and Integrated Networks (SPIN)**, [S.l.], p. 265–269, 2016.
- SIU, W.-C.; HUNG, K.-W. Review of image interpolation and super-resolution. **Proceedings of The 2012 Asia Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference**, [S.l.], p. 1–10, 2012.
- THEVENAZ, P. et al. **Image interpolation and resampling**. 1. ed. Orlando, USA: Academic Press, 2000. 901 p.
- YAMAGUCHI, T.; IKEHARA, M. The quick and high quality image interpolation for single image using multi-filtering and weighted mean. **IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)**, [S.l.], p. 2841–2845, 2016.
- ZHOU, J.; WU, Y. Finding the right exemplars for reconstructing single image super-resolution. **IEEE The International Conference on Image Processing (ICIP)**, [S.l.], 2016.
- ZIBETTI, M. V. W. **Restauração da resolução de sequência de imagens usando regularização adaptativa**. 2003. 114 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.
- ZITOVA, B.; FLUSSER, J. Image registration methods: a survey. **Image and Vision Computing**, Czech Republic, v. 21, p. 977–1000, 2003.
- ZIWEI, L. et al. Overview on image super resolution reconstruction. **26th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)**, [S.l.], 2014.

ZOMET, A. et al. Robust super-resolution. **International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)**, [S.l.], v. 1, p. 645–650, 2001.

GLOSSÁRIO

Aliasing: recobrimento de espectro causado por uma frequência de amostragem abaixo da taxa de Nyquist.

Blurring: borramento.

Boundary layer: camada limite.

Chattering: efeito oscilatório ocasionado pela reconstrução a partir de uma função descontínua.

Gradient based: baseado em gradiente.

High-pass: passa-altas (empregado na definição do tipo de filtro utilizado).

High resolution: alta resolução.

Hopfield Network: uma topologia de rede neural.

Low resolution: baixa resolução.

Motion blur: borramento por movimento.

Noise: ruído.

Outliers: artefatos que não compõem a cena amostrada em todos os instantes de captura, sendo visíveis apenas em alguns desses.

Point spread function: função de representação do modelo de dispersão de um sensor de imagem.

Signal to noise ratio: relação sinal-ruído.

Super resolution: super-resolução.

Super resolution reconstruction: reconstrução com super-resolução.

Warping: distorção.

APÊNDICE A - ALGORITMO EM MATLAB

De acordo com o método proposto no Capítulo 3, altera-se o algoritmo disponível em Hanson (2007), incluindo neste a função *ssgn* na retropropagação do erro do gradiente, conforme detalhado a seguir. A partir disso, o parâmetro *boundary layer* pode ser variado para a obtenção das diferentes respostas da técnica de camada limite, conforme apresentado neste trabalho.

```

1  function G = FastGradientBackProject(Xn, Z, A, Hpsf, boundaryLayer)
2  % Computes the gradient backprojection for the fast deblurring and
3  % interpolation method. This function implements the gradient of the
4  % level one norm between the blurred version of the current deblurred HR estimate and
5  % the original blurred HR estimate created by the median and shift method.
6  %
7  % Inputs:
8  % Xn - The current estimate of the deblurred HR image
9  % Z - The original blurred estimate of the HR image
10 % A - Normilzation factor for each pixel
11 % Hpsf - The PSF function (common to all frames and space invariant)
12 %
13 % Outpus:
14 % The backprojection of the sign of the residual error
15 % Blur the current HR estimate
16 Zn = imfilter(Xn, Hpsf, 'symmetric');
17
18 % Deblur the normalized sign of Xdiff
19 % OBS: use boundaryLayer = 0 to classic sign function
20 Gsign = ssgn(A.*(Zn-Z), boundaryLayer);
21
22 % Unblur the backprojected image
23 G = imfilter(A.*Gsign, flipud(fliplr(Hpsf)), 'symmetric');
24 end

1  function Y = ssgn(X, boundaryLayer)
2  % Continuous sign function with boundary layer technique
3
4  [m n] = size(X);
5
6  for(M = 1:m)
7      for(N = 1:n)
8          if (X(M,N) > -boundaryLayer) && (X(M,N) < boundaryLayer)
9              Y(M,N) = X(M,N) / boundaryLayer;
10         else
11             Y(M,N) = sign(X(M,N));
12         end
13     end
14 end
15 end

```