UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL

FERNANDA MARCHIORO

# MODELAGEM MATEMÁTICA PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

CAXIAS DO SUL
2018

FERNANDA MARCHIORO

# MODELAGEM MATEMÁTICA PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Caxias do Sul (PPGECiMa), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Isolda Gianni de Lima.
Coorientadora: Profa. Dra. Laurete Zanol Sauer.

CAXIAS DO SUL
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Universidade de Caxias do Sul
Sistema de Bibliotecas UCS - Processamento Técnico

M317m Marchioro, Fernanda
Modelagem matemática para aprendizagem significativa de função do primeiro grau / Fernanda Marchioro. – 2018.
172 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade de Caxias do Sul, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, 2018.
Orientação: Isolda Gianni de Lima.
Coorientação: Laurete Zanol Sauer.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Aprendizagem. 3. Didática. I. Lima, Isolda Gianni de, orient. II. Sauer, Laurete Zanol, coorient. III. Título.

CDU 2. ed.: 51:37

Catalogação na fonte elaborada pela(o) bibliotecária(o)
Ana Guimarães Pereira - CRB 10/1460

**FERNANDA MARCHIORO**

# MODELAGEM MATEMÁTICA PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Caxias do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

**Caxias do Sul, 12 de novembro de 2018.**

**Orientadores:**

____________________________________

Profa. Dra. Isolda Gianni de Lima

Universidade de Caxias do Sul – UCS

____________________________________

Profa. Dra. Laurete Zanol Sauer

Universidade de Caxias do Sul – UCS

**Banca examinadora:**

____________________________________

Prof. Dr. Francisco Catelli

Universidade de Caxias do Sul – UCS

____________________________________

Profa. Dra. Rosana Maria Gessinger

Doutora em Educação

**AGRADECIMENTOS**

A Deus pela oportunidade de vivenciar essa experiência.

A Ayrton e Carmencita, meus pais, pela educação que me proporcionaram e pelas palavras de incentivo sempre que precisei.

A Caroline, minha irmã, pelo apoio nas horas difíceis e compreensão nos momentos de ausência.

A Profa. Dra. Isolda Gianni de Lima, minha orientadora, pela paciência, dedicação, apoio, e principalmente pela pessoa humana, sensível que és. Por todas as trocas de experiência, que foram tão importantes para minha formação profissional e pessoal. Na vida temos uma inspiração e buscamos servir de inspiração para outras pessoas, e a minha inspiração é a Isolda. Tenho uma admiração enorme pela pessoa que és.

A Profa. Dra. Laurete Zanol Sauer, por suas grandiosas contribuições ao meu trabalho.

A Prof. Dr. Francisco Catelli e Profa. Dra. Rosane Maria Gessinger, por participarem da banca e contribuírem para o êxito desse trabalho.

Aos professores do mestrado, que despertaram em mim o interesse por realmente ensinar de forma significativa, melhorando minha prática docente.

A Colégio São Carlos, pela disponibilidade durante a realização da pesquisa.

Aos meus alunos, que se empenharam, se envolveram fazendo essa pesquisa realmente acontecer.

A todos, muito obrigada.

# RESUMO

Na pesquisa que deu origem a esta dissertação, avaliaram-se as contribuições de uma sequência didática, que utiliza a modelagem matemática, para promover a aprendizagem significativa do conceito de função do primeiro grau e de suas propriedades. Elaborou-se uma sequência didática em que os alunos puderam apresentar seus conhecimentos prévios e os conhecimentos resultantes dos estudos após algum tempo, seguindo a teoria da aprendizagem significativa, proposta por Ausubel (2003). Procurou-se partir da realidade dos alunos para a construção do conceito de função de primeiro grau e de outros relacionados, como coeficientes angular e linear e crescimento e decrescimento, com sentido e compreensão e não por mera repetição. Buscou-se responder à seguinte questão de pesquisa: como uma sequência didática, planejada com a modelagem matemática de uma situação do cotidiano, contribui para a construção de conceitos sobre funções do primeiro grau, no sentido de desenvolver competências para a resolução de problemas e não para o uso de fórmulas ou regras meramente decoradas? Foi possível confirmar que a sequência didática planejada e desenvolvida com alunos de primeira série do Ensino Médio apresentou indícios de aprendizagem, ao serem comparados os conhecimentos resultantes com os demonstrados no pré-teste, e que a modelagem matemática, com atividades que visam à aprendizagem significativa, é uma estratégia de ensino que favorece a compreensão dos conceitos envolvidos. A análise dos dados baseou-se em dois eixos, que constituem os princípios dos fundamentos propostos por Borssoi e Almeida (2004). O primeiro, da predisposição do aluno para aprender, em que foi observada a aprendizagem extra conteúdo dos conceitos matemáticos, e o segundo, o cognitivo, que indica se o aluno pode compreender os conceitos matemáticos envolvidos a partir da sequência didática proposta. A sequência didática, aprimorada a partir dos resultados da pesquisa, bem como as atividades de aprendizagem, está disponível em um *website,* no qual é possível acessar o planejamento dos encontros para a sua aplicação.



**Palavras-chave**: Educação matemática. Modelagem matemática. Função do primeiro grau. Aprendizagem significativa. Sequência didática.

**ABSTRACT**

In the research that originated this dissertation it was assessed the contributions of a didactic sequence, which uses the mathematic modeling to promote the meaningful learning of the concept from the first degree function and its properties. It was elaborated a didactic sequence in which students could present their previous knowledge and resulting knowledge from studying for a while, following the theory of meaningful learning, proposed by Ausubel (2003). It was sought to start from the reality of the students for the construction of the concept of first-degree function and other related, such as angular and linear coefficients and growth and decay, with meaning and understanding and not by mere repetition. It was tried to answer the following question of research: as a didactic sequence, planned with the mathematical modeling of a daily situation, contributes to the construction of concepts about functions of the first degree, in the sense of developing skills to solve problems and not only by the use of merely decorated formulas or rules? It was possible to confirme that the didactic sequence planned and developed with students from the first grade of high school promoted learning when ccompared the resulting knowledge to the ones demonstrated in the pre tes and that the mathematic modeling, with activities that aim the meaningful learning, is a strategy of learning that enhance the comprehension of the concepts evolved. The analysis of the data was based in two lines that compose the main fundaments proposed by Borssoi and Almeida (2004). The first one, the learner's predisposition to learn, in which the extra content learning of mathematical concepts was observed, and the second, the cognitive, which indicates if the student can understand the mathematical concepts involved from the proposed didactic sequence. The didactic sequence, enhanced from the research results, as well as the learning activities, is available on a website, where it is possible to access the meeting planning for your application.

**Key words:** Mathematic education. Mathematic modeling. First degree functions. Meaningful learning. Didactic sequence.

## LISTA DE FIGURAS E QUADRO

## LISTA DE BREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| BNCC | Base Nacional Comum Curricular |
| CN | Acertou e não justificou |
| MU | Movimento Uniforme |
| NC | Não acertou |
| NF | Não fez |
| PCN | Parâmetros Curriculares Nacionais |
| PJ | Acertou parcialmente e justificou |
| PN | Acertou parcialmente e não justificou |
| PPGECiMa | Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Caxias do Sul |
| RS | Rio Grande do Sul |
| SI | Sistema Internacional |

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

Ao iniciar o estudo de um novo conteúdo, os alunos costumam questionar o professor sobre a aplicação dos novos conceitos no cotidiano. Como, em geral, os estudantes não conseguem estabelecer esse vínculo sozinhos, é importante que o professor possa orientá-los, apresentando-lhes situações contextualizadas ou indicando aplicações ou relações com outros conceitos, seja em Matemática ou, melhor ainda, também em conhecimentos de outras áreas. Esse fato é compartilhado por autores como Gonçalves Filho (2011) e Almeida e Silva (2010), e também pode ser confirmado pela vivência no dia a dia da docência.

Em relação à matemática escolar, há uma variação de sentimentos, como afirmam os PCN (BRASIL, 1997, p. 15); “de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita frequência em relação à sua aprendizagem”, o que se deve, em parte, ao fato de os alunos não conseguirem compreender a relação que há entre a Matemática e o cotidiano, ou mesmo nem serem capazes de perceber que há essa relação.

De fato, no cotidiano da sala de aula, é comum um aprendizado de rotinas, por o uso de fórmulas decorados, dos alunos com os estudos e com a Matemática. Moreira (2011, p. 25) afirma que os alunos estão aprendendo cada vez menos, porque copiam o que está na lousa, reproduzem no caderno, decoram antes da prova e esquecem rapidamente; “os alunos passam anos de sua vida estudando, segundo esse modelo, informações que serão esquecidas rapidamente”.

No entanto, a Matemática pode ser percebida em muitas situações do cotidiano, como nas compras, em pesquisas, na medicina, na previsão do tempo, na definição de horários, na mídia e em várias outras; porém, a Matemática, que vem contribuindo cada vez mais para a vida das pessoas, não é percebida dessa forma, nem compreendida por muitos alunos, mesmo com o conhecimento matemático básico que constroem em suas vivências.

O conhecimento matemático formal, para a maioria das pessoas, tem origem na escola. Como afirmam Almeida e Silva (2010, p. 222), “esta possibilidade de construção de conhecimento, sem dúvida nos remete à escola – à educação escolar, assumindo-se, implícita ou explicitamente, que a escola é local para aprender", mesmo considerando que o conhecimento está cada vez mais acessível em muitos outros ambientes a qualquer pessoa. Por isso, destaca-se a importância da escola, na sua função social e de desenvolvimento das pessoas, em propiciar situações que impliquem aprendizagens significativas.

Na BNCC (BRASIL, 2017), documento que está sendo finalizado para nortear a educação brasileira e que já vem sendo estudado na escola, encontram-se recomendações sobre a contextualização no ensino da Matemática, a fim de que os alunos atribuam significado ao que estão aprendendo e estabeleçam relações com outros conceitos, em diferentes contextos.

Buscando formas de integrar a contextualização, encontrou-se no ensino por meio da modelagem matemática uma possibilidade de aprendizagem com sentido para o que é ensinado. Bassanezi (2002) descreve que a modelagem é eficiente quando se percebe que acontece uma aproximação da Matemática com a realidade. Pensando assim, pode ser possível oportunizar situações de aprendizagem para que o aluno possa refletir e questionar sobre a Matemática que está ao seu redor, tendo consciência e interesse pelo que está fazendo, podendo associar o que estuda com o mundo em que vive.

Quando o aluno se envolve na construção de sentido e compreensão do que está aprendendo, a aprendizagem acontece de forma espontânea, e o conhecimento vai sendo construído de forma natural, como afirma Ausubel (1963). O autor também defende que, para o aluno ter uma aprendizagem significativa, deve-se considerar o seu conhecimento prévio enquanto ponto de partida para estabelecer conexões com novos conceitos.

Para, então, enfatizar a modelagem matemática como uma estratégia de ensino no sentido de promover a compreensão das aprendizagens propostas aos alunos, foram consultados outros trabalhos, que são apresentados na seção 2.4, como teses, dissertações e artigos científicos sobre modelagem no estudo de funções, associados a diversas áreas – Matemática, Biologia, Química e Física e em atividades, por exemplo, na agricultura, na cozinha e na prática em sala de aula –, sendo possível, na maioria dos trabalhos, perceber o êxito da sua aplicação.

Muitos alunos não mostram interesse pelos conteúdos de Matemática, em geral, devido ao fato de não entenderem porque devem aprender isso ou aquilo, o que acontece, especialmente, quando a prática envolve exercícios que seguem uma sequência repetitiva de resoluções mecânicas, com fórmulas já prontas (com enunciados como calcule, efetue ou resolva). Skovsmose (2008) distingue esse modo de ensino, denominado educação matemática tradicional, de uma educação matemática crítica, aquela que pode servir de suporte para os alunos vivenciarem e compreenderem situações do mundo que os cerca.

Barbosa (2001, p. 3) defende que é necessário remover do currículo conteúdos que não são úteis ou que não têm sentido para os alunos, e afirma que, com a modelagem matemática, “a ênfase é colocada no processo de resolução de problemas aplicados, focalizando a construção de modelos matemáticos”. Sendo assim, há a possibilidade de dar sentido para o que os educandos estão aprendendo, propiciando que atribuam significado aos conhecimentos que constroem. Evidencia-se, dessa forma, que a prática da modelagem matemática é uma forma de envolver a Matemática e suas aplicações.

Com o intuito de dinamizar as aulas, no sentido de envolver os alunos e de despertar interesse e curiosidade pelo que precisam aprender, optou-se por estudar e analisar os benefícios que se podem alcançar, com a modelagem, em educação matemática. Com isso, busca-se elaborar uma proposta pedagógica para promover mais compreensão, no caso deste trabalho, em relação ao conteúdo de funções do primeiro grau. Skovsmose (2008) afirma que, em geral, melhoras na educação matemática estão relacionadas a propostas que desafiam os alunos a irem além da explicação, do exemplo e da repetição dos exercícios. Precisa-se de inovações que quebrem essa aliança com o tradicional.

No ensino de funções, de variável x, é comum a construção de tabelas e gráficos, aplicando-se, à incógnita, um valor positivo, negativo ou nulo (quase sempre -2, -1, 0, 1 e 2); esses números são simples de serem usados, em sua forma algébrica ou com o uso de aplicativos gráficos, de calculadoras ou softwares, mas representam resultados que pouco expressam o entendimento se as informações que revelam não forem exploradas e discutidas. Para Lévy (1999, p. 34), “a questão central não está na mudança do ensino tradicional para os mediatizados por tecnologias, mas na transição de uma educação e uma formação estritamente institucionalizada para uma situação de troca de saberes". O que se está querendo promover é uma aprendizagem com base em interação e contextualização, para favorecer a compreensão dos conceitos, apoiada também pela tecnologia, como suporte às ações de modelagem.

O que se propicia, dessa forma, de acordo com Barbosa (2001, p. 6), é que a aula se transforme em "um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade".

Assim, buscando promover uma aproximação dessas ideias, planejou-se uma estratégia de ensino para favorecer a aprendizagem significativa de função do primeiro grau, considerando-se a importância de o aluno associar o que está aprendendo com o que ele já sabe, por meio da modelagem matemática.

No início do Ensino Médio, espera-se que os alunos já tenham noções básicas sobre o conceito de função e suas aplicações, tal como reconhecer se uma lei de função é do primeiro ou segundo grau, bem como sua representação geométrica como reta ou parábola. No entanto, o que se observa frequentemente é um sentimento de estranheza, principalmente em relação ao conteúdo.

A justificativa para a escolha desse tema deveu-se à experiência e à vivência da professora pesquisadora, ao perceber que os alunos demonstram maior motivação em aulas e atividades desafiadoras, com situações contextualizadas, que os fazem questionar a utilidade do que estão estudando e se interessar pelo sentido do que aprendem, vinculado ao contexto de aplicação.

A professora pesquisadora repensou, então, a própria prática, refletiu sobre as suas aulas, questionou-se e, a partir disso, criou alternativas para qualificar a sua ação pedagógica. A forma como as atividades eram propostas em anos anteriores, é preciso que se reconheça, pouco exigia de raciocínio, de estratégias de resolução, de discussões entre alunos ou destes com a professora. As questões eram diretas e evocavam, basicamente, a aplicação de fórmulas, o que levava os alunos a decorá-las e, por consequência, a usá-las seguindo um modelo de resolução, ainda assim com dificuldades, e logo as esquecendo; os que pareciam aprender o faziam por uma aprendizagem muito mais mecânica do que significativa.

Com o aprofundamento dos estudos, encontrou-se, na teoria da aprendizagem significativa e no ensino por meio da modelagem matemática, uma possibilidade de construir uma prática que envolvesse os alunos de modo a atribuírem sentido às funções, que despertasse o interesse em aprender e entender os conceitos trabalhados, modificando também a sua conduta de decorar fórmulas e resolver as atividades de forma mecânica.

Nesse contexto, o problema de pesquisa que mobilizou e justificou este trabalho é: *como uma sequência didática, planejada com a modelagem matemática de uma situação do cotidiano, contribui para a construção de conceitos sobre funções do primeiro grau, no sentido de desenvolver competências para a resolução de problemas e não apenas para o uso de fórmulas ou regras meramente decoradas?*

Na construção de uma resposta a esse problema, almejou-se alcançar o objetivo geral de *avaliar as contribuições de uma sequência didática que utiliza modelagem matemática, para promover a aprendizagem significativa do conceito de função do primeiro grau e de suas propriedades.*

A esse propósito, foram relacionados os seguintes objetivos específicos:

a) planejar uma sequência didática, para o estudo de funções do primeiro grau, integrando, nas atividades de aprendizagem, situações de modelagem matemática;

b) construir um ambiente de ensino, com fundamentos da aprendizagem significativa, para que o aluno possa compreender e dar sentido aos conceitos sobre funções, sendo capaz de resolver problemas que as envolvam;

c) desenvolver a sequência didática proposta e avaliá-la com especial atenção a indícios de ocorrência de aprendizagem significativa pelos alunos;

d) identificar aspectos da modelagem matemática que favoreçam a aprendizagem significativa do conteúdo abordado;

e) construir um *website* com um material de apoio pedagógico, como produto educacional resultante da dissertação, para o ensino de funções do primeiro grau com a modelagem matemática.

Buscando resposta ao problema de pesquisa, este trabalho está associado ao estudo introdutório de funções do primeiro grau por meio da modelagem matemática, para uma aprendizagem significativa, com uma proposta que visou a diminuir as dificuldades matemáticas dos alunos. Barbosa (2001, p. 4) afirma que “nem matemática nem modelagem são ‘fins’, mas sim ‘meios’ para questionar a realidade vivida”. Sendo assim, acredita-se que, ao juntar ambas, modelagem e Matemática, é possível auxiliar o aluno a desenvolver seu potencial de entendimento do conteúdo, podendo reorganizar as ideias e atribuir significado do que está aprendendo.

As metodologias que normalmente são vivenciadas no ambiente escolar são diferentes em relação ao método que se buscou construir com esta pesquisa, de integrar a modelagem matemática para promover a aprendizagem significativa, e considera-se poder auxiliar outros professores a entenderem como significativo cada passo de uma sequência didática como a que está sendo proposta neste trabalho. Para tanto, visando também a aprimorar e a inovar a prática docente, elaborou-se uma sequência didática que, depois de aplicada e avaliada, está sistematizada em um *website*, como produto educacional resultante desta pesquisa. Espera-se, assim, contribuir com uma proposta didática para os professores, utilizando a modelagem matemática no ensino de funções.

Na continuidade deste texto, há a forma como se deu a construção, a aplicação e a análise dos resultados obtidos com a sequência didática proposta, o que será desenvolvido nos capítulos que seguem.

No segundo capítulo, “Modelagem matemática”, enfatizam-se concepções de diversos autores, como Bassanezi (2002), Bean (2001) e Biembengut e Hein (2003), sobre modelagem matemática e modelos de situações do cotidiano por meio da Matemática. Esses autores defendem a modelagem como uma possibilidade de propiciar uma aprendizagem em que o aluno seja participante ativo no processo de associar situações do seu dia a dia com a Matemática.

No terceiro capítulo, “Aprendizagem significativa”, estão descritos, de acordo com os propósitos deste estudo, aspectos sobre a teoria de Ausubel (2003), cujo destaque principal é a necessidade de o aluno associar o que está aprendendo com o que ele já sabe. Para tal, é indispensável ao aluno a disposição para aprender e que o material de estudos seja adequado para que possa compreender o que está aprendendo. Ainda no terceiro capítulo, descrevem-se aspectos sugeridos por Borssoi e Almeida (2004) para verificar indícios de aprendizagem significativa mediada pela modelagem matemática.

No capítulo quatro, “Procedimentos metodológicos”, encontram-se descritos a forma e o contexto da pesquisa, e como se deu a construção de dados. Uma breve descrição das atividades de aprendizagem está nesse capítulo, assim como justificativas de sua adequação ao contexto e à forma de aplicação.

No quinto capítulo, apresenta-se a análise e a discussão dos resultados da pesquisa, bem como os anseios, as inquietações e os avanços que foram possíveis aos alunos que procuraram compreender os conceitos de função. No sexto capítulo, está descrito o produto final. No sétimo capítulo, estão apresentadas as conclusões da pesquisa e as considerações finais, como finalização desta dissertação.

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A aprendizagem vem sendo discutida na comunidade acadêmica com bastante ênfase, devido ao baixo aproveitamento dos alunos. Muitos deles não percebem mudanças cognitivas expressivas em decorrência das experiências e dos estudos realizados, gerando um sentimento de que estão aprendendo somente para a avaliação. Moreira (1999, p. 12) explica que

> [...] uma das finalidades da educação escolar é propiciar ao aluno meios para que aprenda de forma que se lembre do que aprende quando precisar, quer para aprendizagem de novos conteúdos, quer para resolver problemas com que se depara na sua vida acadêmica ou fora dela.

Não é preciso que se inventem "histórias" envolvendo o conteúdo, para que se tenha uma aprendizagem significativa, basta representar matematicamente alguma situação real, como defende Bassanezi (2004). Para o autor, "modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos sempre elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele" (BASSANEZI, 2004, p. 24).

A modelagem pode ser utilizada como uma abordagem didática para se representar problemas do dia a dia por meio da linguagem matemática, atribuindo um sentido real para determinados conceitos matemáticos e sendo possível fazer previsões sobre o fenômeno representado. Bassanezi (2002, p. 18) fala sobre o uso da Matemática e sua importância de torná-la mais ligada à realidade. De acordo com o autor,

> o objetivo fundamental do "uso" da matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Dessa forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância (BASSANEZI, 2004, p. 24).

A modelagem é um processo que alia a teoria à prática, podendo ser utilizado em diferentes contextos. Porém, não basta conhecer e aplicar o método apenas como um modo de fazer diferente em sala de aula. É necessário que o professor organize atividades que despertem no aluno o interesse de compreender e buscar saber mais sobre aquilo que está aprendendo, ou seja, atividades que deixem o aluno motivado a aprender, ao perceber que consegue entender o significado dos conceitos.

A BNCC (BRASIL, 2017, p.522) afirma que o maior desafio do ensino da Matemática “é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história”. Para tal, o professor tem o papel de orientador, contribuindo para a conexão entre o que o aluno já sabe, o contexto em que está inserido e a Matemática, tornando a aprendizagem significativa.

A modelagem matemática colabora nesse sentido, pois busca instigar um espírito crítico, abrindo espaços para que o aluno pense e questione, desenvolvendo competências para além da memorização. É uma estratégia com potencial para despertar no aprendiz o interesse e o prazer pelo estudo da matemática, diferente do tradicional.

Anastácio (1990, p. 97) nessa linha de raciocício afirma: “faz-se necessário desenvolver nos alunos a capacidade de avaliar o processo de construção do modelo e os diferentes contextos de aplicação dos mesmos”, para que ele possa compreender e interpretar o modelo que validou, para poder aproveitá-lo no seu dia a dia em diferentes situações.

Burak e Soistak (2005, p. 5) explicam que a modelagem matemática faz com que o professor e o aluno encontrem uma solução para um tema comum, “mas infelizmente, ela encontra poucos adeptos dispostos a ensinar matemática dessa forma que traz significado e condições de uma aprendizagem mais eficaz”. Não se trata de fazer um plano de aula diferenciado, que tenha uma atividade destinada à modelagem matemática, apenas para dizer que aplicou na sua aula ou que ensina de forma significativa; nesse caso, o professor tem um trabalho a mais. O processo de modelar deve fazer parte do planejamento diário, a fim de auxiliar o docente, unindo o meio com a Matemática; só assim poderá ter êxito.

Bean (2001, p. 53) descreve que o processo de modelação é aberto a críticas e sugestões para o aperfeiçoamento e afirma que a modelagem matemática “consiste em um processo no qual as características pertinentes de um objeto ou sistema são extraídas, com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras, e representadas em termos matemáticos (o modelo)". O modelo encontrado serve de guia para o conteúdo matemático que se busca alcançar.

Considerando a afirmação de Biembengut e Hein (2003, p. 13), de que "matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir", tem-se com a modelagem uma forma de conectar dois polos, aumentando-se a possibilidade de que as aprendizagens sejam significativas e, portanto, duradouras.

Assim, cabe aos professores tomarem para si o desafio de investir em novas estratégias, de encontrar, estudar e construir processos de ensino e aprendizagem que tenham alguma relação com as vivências dos alunos, associando o conhecimento à sua realidade. Com isso, pode ser que se promova uma educação em que o discente seja, de fato, o agente e se responsabilize junto com o professor por aprender a partir daquilo que já sabe ou já conhece, ficando o conteúdo formalizado como a última ação a ser realizada, considerando-se a construção de um conceito.

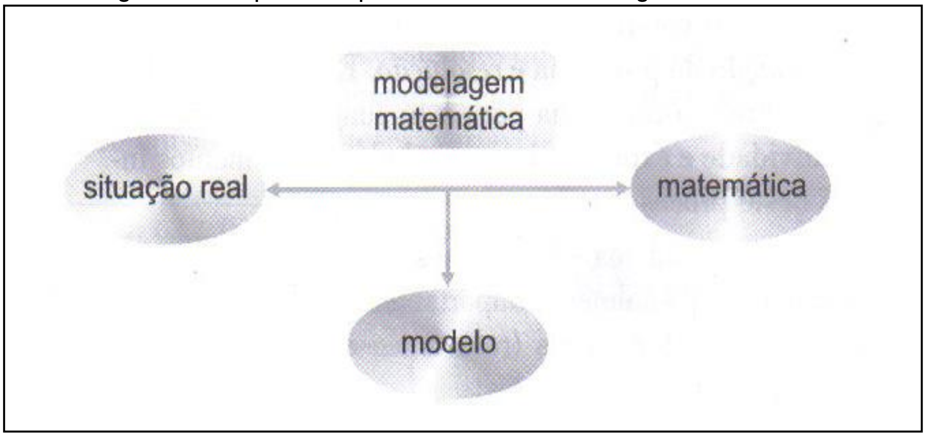
## 2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO

A modelagem matemática é uma estratégia de ensino, em que se considera que "o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem-sucedido, mas caminhar seguindo etapas nas quais o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado", afirma Bassanezi (2002, p. 38). Como também acentua Burak (1992, p. 62),

> a modelagem matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões.

Dessa forma, a modelagem auxilia a relacionar alguma situação de outra área ou da realidade do aluno a uma forma matemática que a represente. Para Bassanezi (1999, p. 11), "quando procuramos agir/refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, compreender ou modificá-la", é que se encontra um modelo matemático que a traduza, aproximando a realidade. Se a modelagem for utilizada dessa forma, como conectora de polos (Figura 1), ela auxiliará na construção de uma aprendizagem significativa e, consequentemente, duradoura.

Figura 1– Esquema representativo da modelagem matemática




Fonte: Biembengut e Hein (2005, p.13).

Assim, quando o aluno consegue fazer essa associação, entre os conteúdos que vem trabalhando e a situação real, tendo a capacidade de compreender e reconhecer ideias matemáticas no seu cotidiano, é provável que tenha interesse em aprender determinado conteúdo e que se sinta agente de sua própria aprendizagem. Barasuol (2006) descreve essa situação, em que é necessário saber discernir o conteúdo, ter criatividade e adaptar as variáveis para encontrar o modelo matemático. Desse modo, o aluno deixa de ser mero reprodutor de exemplos de outros.

Para abordar um conteúdo de forma que o discente seja um aprendiz ativo, mudando a sua postura, Franchi e Gazzeta (2007, p. 1221) sugerem que pode ser "interessante utilizar a Modelagem para introduzir ou aplicar conteúdos matemáticos, na medida em que esses conteúdos podem ser úteis aos indivíduos para a sua vida em sociedade". Como estratégia de ensino e aprendizagem, a modelagem pode ser adaptada à situação em que o professor se encontra, diante de um novo conteúdo ou na retomada de outros.

## 2.2 PROPOSIÇÃO DO TEMA PARA A MODELAGEM

A escolha do tema, quando se trata de modelagem, pode ser feita de várias maneiras. Burak (1992, p. 32) considera adequado quando "o professor incentiva e oferece oportunidades para que os alunos escolham um tema que seja de interesse do grupo e sobre esse tema os alunos realizam a pesquisa”.

Bassanezi (2002) afirma que, se o tema for escolhido pelos alunos, eles podem se interessar mais pela atividade que irão realizar, executando-a com ânimo e dedicação. Já para Biembengut e Hein (2011), o tema pode ser proposto pelo professor ou escolhido pelo aluno. A vantagem de a escolha ser do aluno é que o trabalho versará sobre uma questão de seu interesse, mas a desvantagem é que o tema pode sair do foco proposto pelo professor, demorar muito tempo para ser desenvolvido ou ser complexo demais para o tempo planejado para a atividade. Qualquer desses autores concorda que “seja qual for a forma adotada, cabe ao professor inteirar-se do tema escolhido e preparar, previamente, a condução do processo de tal forma que desenvolva, no mínimo, o conteúdo programático” (BIEMBENGUT; HEIN, 2011, p. 20).

Além dessas visões, ainda há a de Barbosa (2001), que propõe a escolha do tema em três situações distintas, descritas no Quadro 1, variando de acordo com a participação do aluno na elaboração do modelo, mas considerando sempre a participação do professor. O autor ainda reforça que o sujeito que determina o tema não deve ser o fator mais importante, pois essa decisão apenas definirá a forma de organizar a atividade em sala de aula.

Quadro 1 – Atribuições do aluno e do professor na modelagem matemática

| | CASO 1 | CASO 2 | CASO 3 |
|---|---|---|---|
| Elaboração da situação-problema | Professor | Professor | Professor/aluno |
| Simplificação | Professor | Professor/aluno | Professor/aluno |
| Dados qualitativos e quantitativos | Professor | Professor/aluno | Professor/aluno |
| Resolução | Professor/aluno | Professor/aluno | Professor/aluno |

Fonte: Barbosa (2001, p. 40).

Pelo que expressa esse quadro, no primeiro caso o professor prepara e apresenta todo o material, cabendo ao aluno, junto com ele, resolver o problema. No segundo caso, o professor apresenta, ao educando, a situação-problema, e os demais passos para obtenção do modelo ficam a cargo de ambos. E no terceiro caso, o docente e o aluno atuam sempre juntos, sendo agentes em todo o processo de modelagem.

Dessa forma, percebe-se que o tema pode ser escolhido pelo docente, ou por este junto com os estudantes, não sendo esse fator o mais importante da atividade. Neste trabalho, considerando-se o interesse em aprimorar o ensino e a aprendizagem sobre funções, o tema foi proposto pela professora pesquisadora, e buscou-se possibilitar ao aluno uma atividade de modelagem de uma situação do cotidiano, utilizando funções, para que, com isso, ele perceba sua aplicabilidade, com base em conhecimentos prévios, podendo aplicá-las em outras situações.

A Matemática e a modelagem devem andar juntas no cotidiano, no ambiente escolar, como forma de pensar e agir no meio em que estão inseridas. Como defendem Biembengut e Hein (2003, p. 17), “no dia-a-dia, em muitas atividades, é evocado o processo de modelagem. Basta, para isso, ter um problema que exija criatividade, intuição e instrumental matemático”. Havendo esses aspectos, certamente, além de ser uma novidade, tem-se uma nova concepção e uma nova vivência no ambiente escolar que pode ser mais adequada para aprender e conviver.

O professor, ao adotar métodos diversificados, tais como a modelagem matemática no ensino, está demonstrando assumir a tarefa de melhorar a sua prática em sala de aula, de deixar de lado o “sempre fiz assim”, elaborando, aplicando e avaliando novas estratégias para promover a aprendizagem significativa. Como relatam Biembengut e Hein (2003, p. 29), “a condição necessária para o professor implementar modelagem no ensino-modelação é ter audácia, grande desejo de modificar sua prática e disposição para conhecer e aprender”; assim como foi a intenção que mobilizou esta pesquisa, focada em criar condições de proporcionar uma forma, relevante, para ensinar e aprender.

## 2.3 O MODELO MATEMÁTICO

Há diferentes formas de se chegar aos resultados esperados por meio da modelagem matemática em sala de aula, que são descritas, de modos próximos, por Burak e Soistak (2005), Biembengut e Hein (2003) e por Bassanezi (2002). Assim sendo, a construção da prática, neste trabalho, segue o processo de Biembengut e

Hein (2003), também pela razão de que esses autores consideram que a escolha do tema pode ser do professor, sem haver nenhum prejuízo ao aluno ou ao processo.

Dessa forma, apresentam-se, a seguir, as etapas da modelagem com indicação de ações específicas do professor, em seu planejamento e acompanhamento do processo e do estudante, no desenvolvimento proposto.

*1ª etapa – Interação com o assunto*

Nessa etapa, há a interação do aluno com o tema, por meio de pesquisas em livros, revistas, internet e outras fontes, com o intuito de tornar cada vez mais claro o tópico a ser trabalhado, e de interessar-se pelo assunto. Além disso, o professor deve instigá-lo a elaborar hipóteses e questionamentos, detectando possíveis variáveis envolvidas na situação-problema. Sucintamente, ocorrem nessa etapa:

a) o reconhecimento da situação-problema;

b) a familiarização com o assunto a ser modelo-pesquisa.

*2ª etapa – Matematização*

Essa é a etapa em que a situação-problema é traduzida em linguagem matemática por meio de fórmulas, gráficos ou outras representações. Para encontrar o modelo correto e a sentença válida, é preciso muita dedicação e atenção. Além disso, é necessário ter conhecimentos na área da Matemática e do conteúdo do problema para que, ao fim, haja sucesso com o modelo encontrado. É, então, a etapa da:

a) formulação do problema – hipótese;

b) resolução do problema em termos do modelo.

*3ª etapa – Modelo matemático*

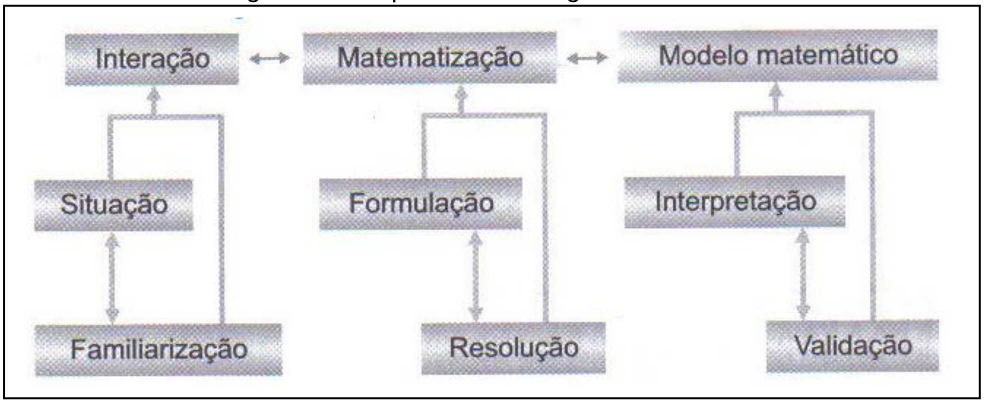
Primeiramente, deve ser averiguado se o modelo é uma boa tradução da situação-problema. Assim, é o momento de analisar as soluções obtidas para verificar se há confiabilidade, aplicando valores no modelo. Não havendo a confirmação do modelo, é necessário retornar à segunda etapa e reorganizar a estratégia de resolução. É o momento do fechamento (provisório se é preciso retomar), em que se procede à:

a) interpretação da solução;

b) validação do modelo (avaliação).

Reunindo todas as etapas, a modelagem pode ser expressa por um esquema, como é mostrado na Figura 2.

Figura 2 – Etapas da modelagem matemática




Fonte: Beimbengut e Hein (2005, p. 15).

As etapas da modelagem matemática são propostas como uma forma de organizar o percurso, de modo que o aluno consiga interpretar a situação real e compreender os conceitos matemáticos envolvidos na atividade; para isso, ele precisa passar por cada etapa e retornar, se necessário, de modo a reformular, reorganizar ou completar possíveis lacunas para validar o modelo.

## 2.4 TRABALHOS RELACIONADOS COM MODELAGEM

Como um complemento a essas considerações, são apresentados alguns projetos com diferentes formas de aplicações de modelagem matemática, que destacam a sua importância na aprendizagem dessa disciplina em que tantos alunos apresentam dificuldades. Segundo Bassanezi (2002, p. 38), “mais importante do que os modelos obtidos é o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sociocultural”.

Os trabalhos aqui apresentados foram selecionados dentre os procurados no Google Acadêmico, utilizando-se como palavras-chave: “modelagem matemática”, “modelagem e função”, “funções e situações do cotidiano” e “aprendizagem significativa e modelagem". Como critério de seleção dos trabalhos, considerou-se o interesse desta pesquisa em relação à proximidade do tema e aos resultados obtidos quanto à aprendizagem dos alunos envolvidos.

Camelo (2013), em seu trabalho de conclusão de curso, utilizou a modelagem para o ensino de funções, visando quebrar o paradigma da pergunta "Porque tenho que aprender isso?". Tornando as aulas mais atrativas e mais significativas, propôs a seus alunos, a observação de como os planos de telefonia, de três empresas, variavam de acordo com o tempo utilizado em ligações. O professor solicitou que os estudantes encontrassem um modelo para calcular o valor pago em cada plano, para concluir qual era a empresa mais vantajosa para cada período de tempo estipulado. A atividade contribuiu para que os alunos se sentissem motivados para o estudo, despertou interesse pelo tema, ajudando-os a consolidar o conceito de função, pensando e construindo estratégias próprias para resolver problemas, atingindo assim o objetivo principal de propor uma atividade que consolide o conceito de função afim, através de uma aplicação, a fim de ilustrar a aplicabilidade e a contextualização da metodologia da modelagem matemática.

Lozada et al. (2006) realizaram um trabalho voltado às dificuldades dos alunos em compreender conceitos de Física, causadas pela falta de entendimento da Matemática. Nesse trabalho, foi proposta a utilização da modelagem no ensino da Física, com o objetivo de propiciar a aprendizagem significativa, como uma metodologia de ensino diferenciada. O ensino da Física, proposto com esse sentido, possibilitou aos alunos a construção de significados e a resolução de situações-problemas com estratégias próprias, o que deu origem a diferentes caminhos para solucionar problemas. Um destaque especial foi atribuído ao momento da validação do modelo, onde ficou evidente que a proposta com modelagem produziu avanços no desenvolvimento do pensamento crítico, não reduzindo-se as resoluções e análises basicamente com a aplicação de fórmulas.

Miguel (2012) aplicou, com alunos de 8ª série, uma atividade prática no moinho da cidade, com o propósito de desenvolver a capacidade de analisar a criatividade e o pensamento crítico por meio da modelagem matemática, para facilitar a compreensão, o entendimento e a ideia de associar a modelagem com o mundo. Os discentes analisaram questões como empregos gerados, capacidade de armazenamento de silos, consumo de água e de energia elétrica, entre outros, com o propósito de que fosse despertado no aluno o interesse em compreender e interpretar os fenômenos modelados matematicamente. O trabalho, para a maioria dos alunos, despertou o gosto por conteúdos matemáticos e propiciou a compreensão de conceitos, como o de função, em uma proposta pedagógica que visava promover a aproximação da Matemática com fatos reais, de forma significativa.

Rossato et al. (2013) propuseram aos estudantes de um curso de mestrado que pesquisassem o valor cobrado em diferentes estacionamentos da cidade de Santa Maria, no Rio Grande do Sul, para que encontrassem um modelo matemático que descrevesse o valor pago de acordo com o tempo de permanência e que representassem graficamente o modelo obtido. O intuito era trabalhar com os diferentes tipos de função e suas propriedades. Os autores afirmam que, com o trabalho, propiciaram, além de segurança aos alunos, que já eram professores, aplicar a modelagem em suas turmas, percebendo que é possível dar significado a conceitos abstratos quando aplicados em situações do dia a dia (ROSSATO et al., 2013). Esse trabalho foi importante para que os mestrandos pensassem a modelagem matemática como uma ferramenta para tornar significativo o aprendizado de funções entre alunos do Ensino Médio.

Borssoi e Almeida (2004) realizaram uma investigação em ambientes de modelagem matemática, considerando a sua potencialidade em relação à aprendizagem significativa, buscando, nas produções dos alunos, indícios de compreensão e construção de conhecimento. No relato, as autoras apresentaram atividades de modelagem matemática que propuseram para uma classe de um curso de Química, onde os alunos foram responsáveis pela definição e resolução de problemas. Ao final, puderam concluir que a modelagem matemática, como estratégia de ensino e aprendizagem, proporcionou a aprendizagem significativa, pois contribuiu para a motivação dos alunos, facilitou a compreensão dos conteúdos e colaborou para a retenção do conhecimento, após um período determinado, em situações que abordavam conceitos de Matemática e de Química.

O vínculo comum que aproxima esses trabalhos é o de que todos evidenciaram a importância da modelagem na transcrição dos acontecimentos em forma de linguagem matemática, possibilitando fazer previsões ou estimativas acerca de uma situação-problema em processos de construção de conhecimento e não de um estudo mecânico reduzido à aplicação de fórmulas.

Além disso, todos destacam que a modelagem propicia maior facilidade na compreensão do conteúdo por parte do aluno, uma vez que ele participa ativamente do processo de aprendizagem, considerando que precisa utilizar conhecimentos previamente adquiridos.

# 3 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Para aprender, Ausubel (2003) confirmou, em sua teoria, que é preciso relacionar o que está sendo aprendido com o que o aluno já sabe, isso como essência da aprendizagem significativa. É necessário associar o que é novo com algum aspecto relevante existente na vida do aluno, como, por exemplo, uma imagem, um símbolo ou outro conceito, de modo a produzir uma nova ideia, que pode se consolidar como um novo conhecimento.

Quando o educando não consegue estabelecer essa associação, do que é novo com algum fato ou aspecto relevante do que conhece, acontece o que Ausubel (2003) chama de aprendizagem mecânica, produzida, em geral, apenas por memorização de fatos, informações, fórmulas decoradas ou artifícios para auxiliar a lembrar do que foi registrado, dias antes da avaliação, e que acaba por ser esquecido depois. Dessa forma, o novo conhecimento não tem ligação com os subsunçores, sendo armazenado de forma superficial.

Como define Moreira (2006, p.15), “o subsunçor é um conceito, uma ideia, uma proposição já existente na estrutura cognitiva, capaz de servir de ‘ancoradouro’ a uma nova informação de modo que esta adquira, assim, significado para o indivíduo”. Dessa forma, segundo Ausubel (apud MOREIRA; MASINI, 2011, p.17), “a aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação se relaciona com um aspecto relevante na estrutura do conhecimento do indivíduo”. Para isso, é necessário que o professor organize uma interação para que possa conhecer o que o aluno já sabe e, a partir daí, proponha uma atividade potencialmente significativa, que vá sendo assimilada na estrutura cognitiva do aluno.

De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 34), para que a aprendizagem seja significativa, é essencial que o “material aprendido seja potencialmente significativo para o aprendiz e principalmente incorporável à sua estrutura de conhecimento através de uma relação não arbitrária e não literal[1]”, ou seja, que o conteúdo tenha significado lógico, base adequada e ideias relevantes para

[1] Não literal significa não ao pé da letra; e não arbitrário indica que um novo conhecimento adquire significado não por interagir arbitrariamente com qualquer conhecimento prévio, mas sim com algum conhecimento em particular.

o aprendiz. Outra condição está relacionada ao fato de “que o aluno manifeste uma disposição para relacionar, de forma não arbitrária e substantiva, o novo material à sua estrutura cognitiva”, ou seja, o aprendiz precisa do conhecimento prévio e deve querer relacioná-lo ao novo conteúdo, modificando-o e questionando sobre o que não sabe. Não se trata de gostar ou não da matéria.

Ainda, Ausubel (2003, p.57, grifos do autor) afirma que o material de aprendizagem só será potencialmente significativo se tiver a “capacidade de relação com a estrutura cognitiva *particular* de um aprendiz em *particular*” e se no material constar um “mecanismo de aprendizagem significativa” que permita ao aluno diferenciar a aprendizagem com significado daquela baseada predominantemente na memorização.

Moreira (2010, p. 18), em seu artigo “O que é afinal aprendizagem significativa?”, enfatiza o significado com base na teoria ausubeliana:

> o aluno aprende a partir do que já sabe. É a estrutura cognitiva prévia, ou seja, conhecimentos prévios (conceitos, proposições, ideias, esquemas, modelos, construtos...) hierarquicamente organizados, a principal variável a influenciar a aprendizagem significativa de novos conhecimentos.

Assim sendo, a avaliação da aprendizagem significativa implica analisar o todo, observar a compreensão e a capacidade de relacionar o que o que o estudante aprendeu com o seu cotidiano; é um processo contínuo e, como afirma Moreira (2010, p.24), ao avaliar “é necessário buscar evidências de aprendizagem significativa, ao invés de querer determinar se ocorreu ou não”, verificando se o aprendiz tem capacidade de explicar, justificar e exemplificar, questionando, resolvendo ou respondendo sobre o que está trabalhando. Por isso, não basta o material ser potencialmente significativo, o aprendiz deve ter disposição para associar o novo conteúdo, de forma não literal e não arbitrária, com o que sabe.

Assim, em relação ao estudo que se propõe aos alunos, se houver interação com possibilidades para a sua aplicação, este poderá ter sentido para eles, ampliando-se as chances de que tenham satisfação em aprender, atribuindo sentido, lógica e importância aos conteúdos que estudam.

Em Matemática, aprender com significado é compreender os conceitos e também os algoritmos de resolução. É necessário que o professor proponha aos alunos situações-problema em que eles possam aplicar os conceitos construídos como recursos do pensamento, em vez de informar como devem ser aplicadas as fórmulas ou de propor cálculos em que sejam utilizados sem que lhes tenham atribuído qualquer significado. Como afirmavam Toledo e Toledo (1997, p. 37),

> se antes era necessário fazer contas rápidas e corretamente, hoje é importante saber por que os algoritmos funcionam, quais são as ideias e os conceitos neles envolvidos, qual a ordem de grandeza de resultados que se pode esperar de determinados cálculos e quais as estratégias mais eficientes para enfrentar uma situação-problema, deixando para as máquinas as atividades repetitivas, a aplicação de procedimentos padrões e as operações de rotina.

Com essa percepção, o sentido do ensino da Matemática está em promover, em todas as situações, condições para que os estudantes compreendam o que aprendam e, com isso, talvez se alcancem os tão almejados bons resultados em avaliações. Por isso, o professor não pode abrir mão de estar em contínuo processo de formação, com disposição para estudar e para juntar-se com seus pares para discutir, trocar ideias, falar das dificuldades e das possibilidades que tem encontrado, num encorajamento mútuo para o esforço na elaboração de situações-problema, nas possibilidades de lidar com hipóteses, com questionamentos, e em propor a formulação de modelos e investir na validação destes.

## 3.1 O PROCESSO DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Há vários fatores que contribuem para a ocorrência da aprendizagem significativa. As novas informações e o novo material, que apresentam uma estrutura lógica, interagem com as ideias relevantes, disponíveis na estrutura cognitiva do aluno, sendo assim assimilados por ele; nesse caso, é possível que o aprendiz compreenda o que realmente está fazendo, como afirmam Moreira e Masini (2001, p.14), “contribuindo para sua diferenciação, elaboração e estabilidade”.

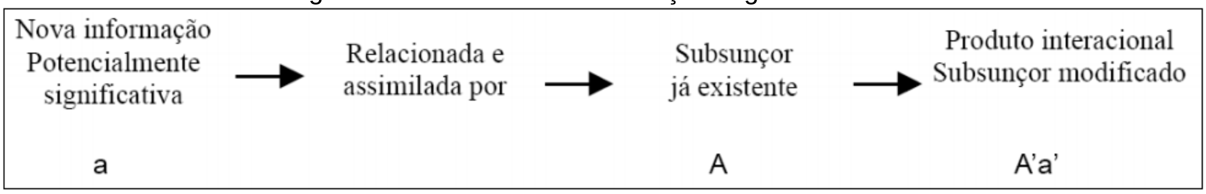
Em um primeiro momento, é preciso que o novo conceito seja adaptável à estrutura cognitiva do aluno; os subsunçores existentes relacionam-se para contribuir com a aquisição de significado da nova informação.

De acordo com Moreira (2006, p. 15),

> pode-se então dizer que a aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação "ancora-se" em conceitos relevantes (subsunçores) preexistentes na estrutura cognitiva. Ou seja, novas ideias, conceitos, proposições podem ser aprendidos significativamente (e retidos), na medida em que outras ideias, conceitos, proposições relevantes e inclusivos estejam, adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem às primeiras.

Essa relação entre estruturas e atos do pensamento concorre para que ocorra uma mudança, de modo que o aluno tenha capacidade de avaliar o que aprendeu e aplicar em situações do seu cotidiano. Então, é necessário que haja uma interligação entre o conhecimento novo e o que já existe, gerando modificações. Esse processo, denominado "processo de assimilação", está representado na Figura 3.

Figura 3 – Processo de assimilação segundo Ausubel




Fonte: Moreira (2006, p. 29).

Se o aluno está em condições adequadas para uma nova aprendizagem, a informação que lhe é apresentada é assimilada por interação com outro conceito já existente na estrutura cognitiva, produzindo então a mudança do subsunçor e promovendo a aprendizagem.

Essa mudança progressiva na estrutura cognitiva do aluno vai tornando o subsunçor mais elaborado e serve de base para novos conhecimentos. Novak e Gowin (1996) afirmam que, à medida que o estudante consegue associar novas relações com tópicos que previamente se pareciam, ele aprimora, modifica e efetua uma relação de hierarquia, possibilitando a ocorrência de outros dois processos: a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.

A diferenciação progressiva acontece quando o indivíduo é exposto a um novo conhecimento, em que as ideias mais gerais são apresentadas antes e progressivamente diferenciadas; em um ambiente em que a aprendizagem é a experiência da mudança de significados, como afirmam Novak e Gowin (1996, p. 115):

> O princípio de Ausubel da diferenciação progressiva estabelece que a aprendizagem significativa seja um processo contínuo, no qual novos conceitos adquirem maior significado à medida que são alcançadas novas relações (ligações proposicionais). Assim, os conceitos nunca são finalmente aprendidos, mas sim permanentemente enriquecidos, modificados e tornados mais explícitos e inclusivos à medida que se forem progressivamente diferenciando.

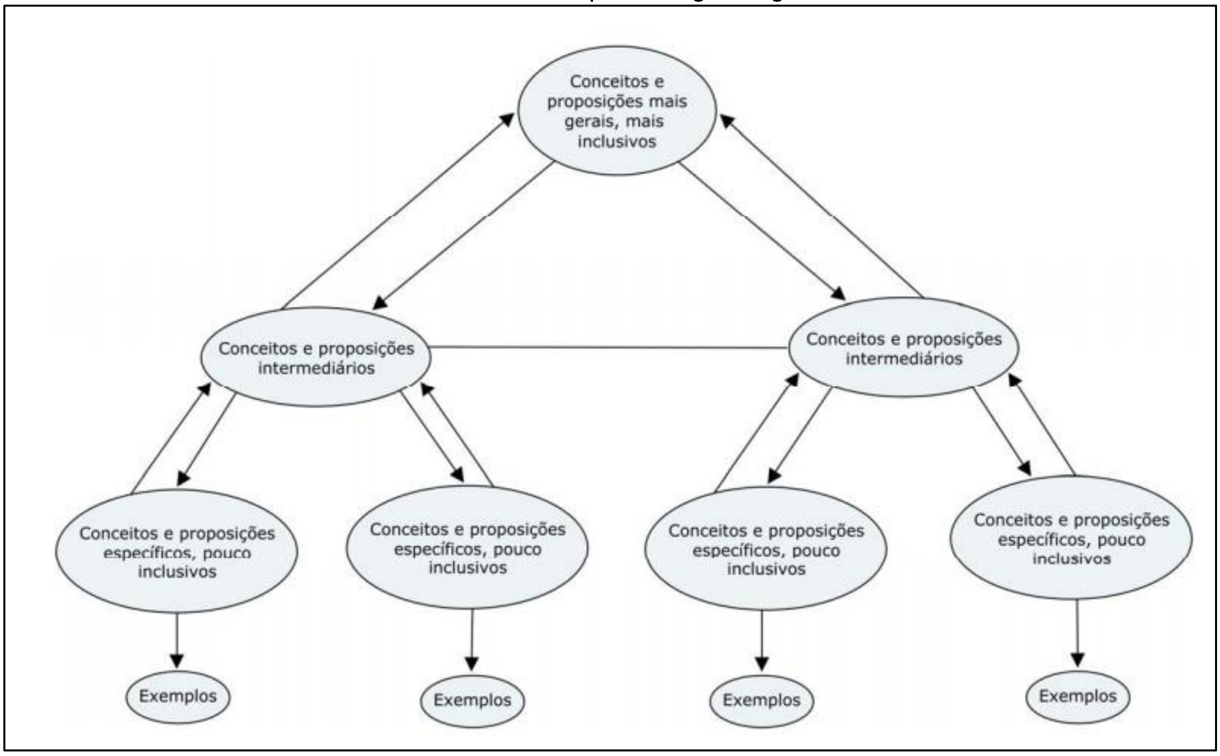
Seguindo essa mesma ideia, Moreira (2010) descreve que, quando há relação entre as ideias, na estrutura cognitiva do aluno, com certo grau de diferenciação, e relacionadas com novos conceitos, apontando as similaridades e as diferenças, estas passam a ter nova concepção e levam a uma reorganização dos conceitos. Esse processo é denominado "reconciliação integradora" e, de acordo com Novak e Gowin (1996, p. 120),

> resulta, simultaneamente, no mínimo numa diferenciação mais profunda de conceitos relacionados. Quando ocorre uma alteração substancial no significado de um conceito (como no nosso exemplo onde os significados sólido, líquido e gasoso foram radicalmente alterados), o tomar consciência das novas relações produz aquele sentimento de "ah, ah!" que temos quando subitamente nos apercebemos de um novo significado ou de uma nova relação num tema de estudo.

O princípio da diferenciação progressiva se relaciona a um acontecimento natural da consciência humana, a um fato espontâneo em que as ideias vão sendo expostas a uma modificação pelo novo conhecimento, enquanto o princípio da reconciliação integradora origina-se em uma parte para promover ideias gerais.

A Figura 4 mostra como Moreira (2013) representou, em uma mesma imagem, a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora, pois são processos simultâneos em que as ações são interligadas. As setas para baixo referem-se à diferenciação progressiva, e as setas para cima, à reconciliação integradora. É necessário que se parta do geral para os conteúdos mais específicos, diferenciando-os, mas de modo que se possa, também, retornar a eles e retomá-los, em um processo de reconciliação integradora.

Figura 4–Um mapa conceitual para diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, processos centrais da teoria da aprendizagem significativa




Fonte: Moreira (2013, p. 14).

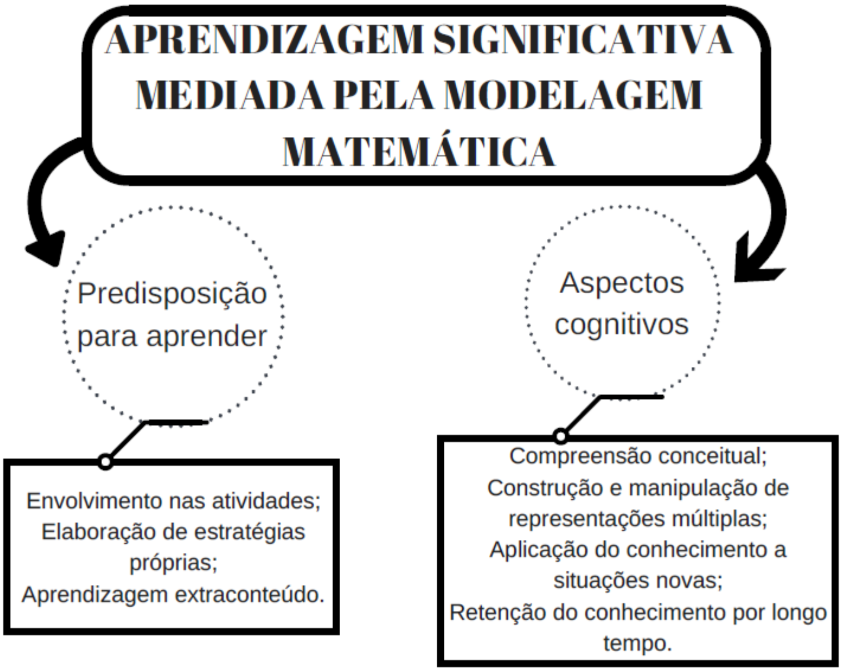
Se o aluno se interessa pelo assunto que está sendo discutido em atividade de aprendizagem, ele, provavelmente, poderá associar os novos conhecimentos com conhecimentos prévios, podendo assim melhorar os conceitos que tinha e integrar outros à sua estrutura cognitiva.

## 3.2 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA MEDIADA PELA MODELAGEM MATEMÁTICA

Almeida e Silva (2014) confirmam que é um fator indispensável, no processo da aprendizagem significativa, que o professor saiba o que o aluno já conhece a fim de elaborar as atividades de aprendizagem. É necessário que o material complemente o ensino e promova a aprendizagem dos alunos.

Com o intuito de averiguar a aprendizagem dos discentes no caso da sequência didática proposta neste trabalho, serão utilizados os aspectos mencionados por Borssoi e Almeida (2004) que descrevem um conjunto de elementos como indicativos de indícios de aprendizagem significativa, considerando o uso da modelagem matemática no ambiente educacional. Esses aspectos são utilizados na análise dos dados oriundos desta pesquisa, visando a promover uma aprendizagem significativa por meio da modelagem matemática. Tais aspectos, indicativos de aprendizagem significativa, são separados em dois grupos, "um mais relacionado com a aprendizagem do conteúdo e, outro, relacionado com a predisposição positiva, condição básica já mencionada" (BORSSOI; ALMEIDA,2004, p.99). A Figura 5 apresenta os dois grupos e seus aspectos.

Figura 5 – Imagem representando os dois grupos e seus aspectos




Fonte: O autor (2018).

No primeiro grupo, considera-se a predisposição para aprender, observada pelo envolvimento do aluno, sua motivação, sua conduta e seu desempenho durante a realização das atividades propostas, segundo os seguintes aspectos:

*Envolvimento nas atividades*: observa-se a participação do aluno durante a realização das atividades, buscando encontrar indicadores da predisposição para aprender, "pois o envolvimento contribui para que o aluno desenvolva competência e criatividade na resolução de problemas e favorece uma atribuição de significados mais efetiva" (BORSSOI; ALMEIDA, 2004, p. 100).

*Elaboração de estratégias próprias:* são observadas as estratégias que levam o aluno ao desenvolvimento das situações propostas, no contexto em que se encontra. Como afirmam Borssoi e Almeida (2004, p. 100):

> a aprendizagem pode ser mais ou menos significativa, dependendo das estratégias adotadas pelo aluno. [...] Em um processo de modelagem, esse aspecto pode ser evidenciado em diferentes momentos e com maior expressão nas etapas que envolvem definição das hipóteses e aproximações simplificadoras e na elaboração e resolução do problema matemático.

*Aprendizagem extraconteúdo:* é observada a aprendizagem além do conteúdo matemático, como a mudança e a "aprendizagem de habilidades, aprendizagem de atitudes, aprendizagem de valores". Há outras aprendizagens que podem favorecer a aprendizagem significativa (BORSSOI; ALMEIDA, 2004, p. 100).

O segundo grupo abrange os aspectos cognitivos para análise da aprendizagem significativa, e são os seguintes:

*Compreensão conceitual:* a compreensão dos conceitos é essencial para se obter a aprendizagem significativa, como afirmam as autoras:

> Em um processo de modelagem matemática, a resolução de um problema só pode ser efetivada realmente se houver a compreensão conceitual de aspectos matemáticos e extra matemáticos envolvidos. A compreensão conceitual requer a interação entre a nova informação e a estrutura conceitual já existente, que remete à existência de conhecimentos prévios relevantes para que o aluno relacione adequadamente uma nova informação com sua estrutura cognitiva. Esse aspecto influencia a capacidade do aluno de adotar estratégias e tomar decisões, além de influenciar no sucesso da modelagem matemática e aprendizagem significativa, pois enquanto não ocorre tal compreensão, provavelmente, a definição das variáveis e das hipóteses será pouco adequada e assim o modelo precisará ser melhorado (BORSSOI; ALMEIDA, 2004, p.100).

*Construção e manipulação de representações múltiplas:* no momento em que o aluno percebe que um mesmo objeto matemático pode ter várias representações, significando a mesma coisa, ele obteve uma aprendizagem com significado no processo de construção do conhecimento. "A atribuição pessoal de significado pelo aluno permite elaborar uma compreensão e uma 'tradução' própria do que se aprende" (BORSSOI; ALMEIDA, 2004, p. 101).

*Aplicação do conhecimento a situações novas:* é possível perceber que o processo de ensino foi significativo quando o aluno emprega o que aprendeu em outra situação.

*Retenção do conhecimento por longo tempo:* caso a aprendizagem tenha sido significativa, o aluno pode resgatar um conceito esquecido, pois os conceitos tornam-se memória de longo prazo.

Dessa forma, com base nos aspectos definidos pelas autoras, pretende-se proceder à análise dos resultados, buscando evidências de aprendizagem significativa. Antes, porém, apresentam-se as características da pesquisa e os procedimentos metodológicos empregados para a coleta de dados.

# 4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com foco no objetivo principal, que é avaliar as contribuições de uma sequência didática que utiliza modelagem matemática, para promover a aprendizagem significativa do conceito de função do primeiro grau e de suas propriedades, as atividades foram elaboradas de modo a propiciar que os alunos retomassem noções e propriedades que já estudaram para encontrar o modelo matemático de uma situação-problema, aprimorando, complementando aprendizagens ou construindo novos conceitos. Com isso, buscou-se promover o entendimento do que é uma função do primeiro grau em um contexto de modelagem matemática. Neste capítulo são descritos a metodologia utilizada, os sujeitos envolvidos e os instrumentos para coleta e análise dos dados.

## 4.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa desenvolvida é qualitativa, pois ocorreu concomitantemente à coleta dos dados, sempre refletindo e analisando os resultados que a guiam, em que os dados são divididos em unidades relevantes e com conexão com o todo, comparando uns com os outros para tirar conclusões (TESCH, 1990).

Em uma pesquisa qualitativa, o pesquisador está sempre apresentando os resultados para aproximar a teoria dos dados coletados, compreendendo e interpretando os fenômenos que o material apresenta. Quando a abordagem é qualitativa, não se expressam considerações simplesmente, mas se compreende o que elas mostram; assim todo o processo pode apresentar indícios que justifiquem o objeto de estudo.

A pesquisa é aplicada, pois trata-se de uma proposta pedagógica construída e desenvolvida em ambiente próprio e real dos participantes e da pesquisadora, e é descritiva, o que, segundo Gil (2008, p. 28), é um tipo de pesquisa que visa à “descrição das características de determinada população ou fenômeno ou estabelecimento de relações entre variáveis”.

## 4.2 CONTEXTO DA PESQUISA

A pesquisa desenvolveu-se com estudos e ações direcionadas para o planejamento, aplicação e avaliação de uma estratégia pedagógica que integra uma sequência didática, planejada com uma situação do cotidiano com modelagem matemática, construída para promover a aprendizagem significativa de conceitos sobre função do primeiro grau. A aplicação da sequência didática, como parte experimental da pesquisa, foi proposta pela professora – que é também a pesquisadora –, a vinte e cinco alunos, com idades variando entre quatorze e quinze anos, de uma primeira série do Ensino Médio de uma escola da rede privada de Caxias do Sul, RS, no primeiro semestre de 2017.

A instituição de ensino referida é bem conhecida pela comunidade que integra, com alunos de famílias empenhadas e cuidadosas com a educação dos filhos e professores que buscam diferenciais para que haja uma aprendizagem de qualidade. Na escola, as salas de aula são bem equipadas, têm lousa digital, computadores e ar condicionado, constituindo-se como um ambiente agradável. Os alunos utilizam, com ênfase, um livro didático, proposto pela escola, em que constam, especialmente, tarefas para auxiliar na aprendizagem dos conteúdos.

Mediante a concordância da escola para o desenvolvimento da pesquisa (Apêndice I) e dos alunos para participarem (Apêndice H), estes receberam atividades investigativas, para que fossem identificados os conhecimentos prévios, na forma de um pré-teste sobre os conceitos de função do primeiro grau, associados com situações diversas do cotidiano e com problemas, relacionados com funções, que já haviam estudado na disciplina de Física.

## 4.3 PRODUÇÃO DE DADOS E PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE

A parte experimental consistiu na aplicação da sequência didática, que foi estruturada para o desenvolvimento de conceitos de função do primeiro grau, integrando as etapas da modelagem matemática, propostas segundo Biembengut e Hein (2003).

As atividades da sequência didática foram elaboradas com pressupostos da aprendizagem significativa, em um processo de modelagem matemática, no qual se buscou observar a predisposição do aluno para aprender, encontrar indícios de diferenciação progressiva e de reconciliação integradora, verificando, assim, se a sequência didática proposta é um material potencialmente significativo, conforme o considera Ausubel (2003).

Como dados de análise, foram utilizadas as produções dos alunos, nas quais se buscaram indícios de aprendizagem significativa. Todos os registros escritos dos alunos foram recolhidos e copiados ou registrados em imagens, para posterior organização em categorias e devidas análises.

Especificamente, foram considerados dados oriundos dos seguintes instrumentos: atividades de aprendizagem, das quais se obtiveram produções dos alunos, como materiais escritos, imagens, resoluções das situações propostas; e um instrumento de avaliação da sequência didática e de autoavaliação, respondido por preenchimento de uma tabela com espaço para assinalar (Apêndices F e G), que foi proposto aos estudantes no último período da aplicação da sequência didática.

Foram elaboradas questões para que os alunos revelassem os seus pareceres sobre as atividades, sobre as suas condutas como estudantes, sobre as aprendizagens que reconheceram ter desenvolvido e sobre dificuldades que não foram sanadas; registros da professora, em um diário pessoal, feitos em cada encontro, com as observações das ações e reações dos alunos, tais como envolvimento, realização das atividades, participação nos grupos, interesse pelos estudos, avanços em relação a dificuldades manifestadas ou constatadas; e, ainda, registros sobre as aprendizagens que a professora desenvolveu no decorrer do planejamento e da aplicação da estratégia.

Para a análise dos dados, após estudos sobre análise textual discursiva de Moraes (2003), optou-se por uma categorização *a priori* considerando, para tal, os aspectos apontados por Borssoi e Almeida (2004), que descrevem um conjunto de elementos como indicativo de indícios de aprendizagem significativa, levando em consideração o uso da modelagem matemática no ambiente educacional.

Os sete aspectos apontados pelas autoras, como descritos na seção 3.2, foram considerados como categorias, além de uma oitava que foi acrescentada, como forma de dar indícios das evoluções das aprendizagens dos estudantes. Essa oitava categoria foi acrescentada para evidenciar o progresso da aprendizagem. Para tanto, acompanhou-se o desempenho de três alunos considerados pela professora pesquisadora com graus cognitivos diferentes, para que se pudesse observar a construção do conhecimento durante o processo e não só na avaliação final.

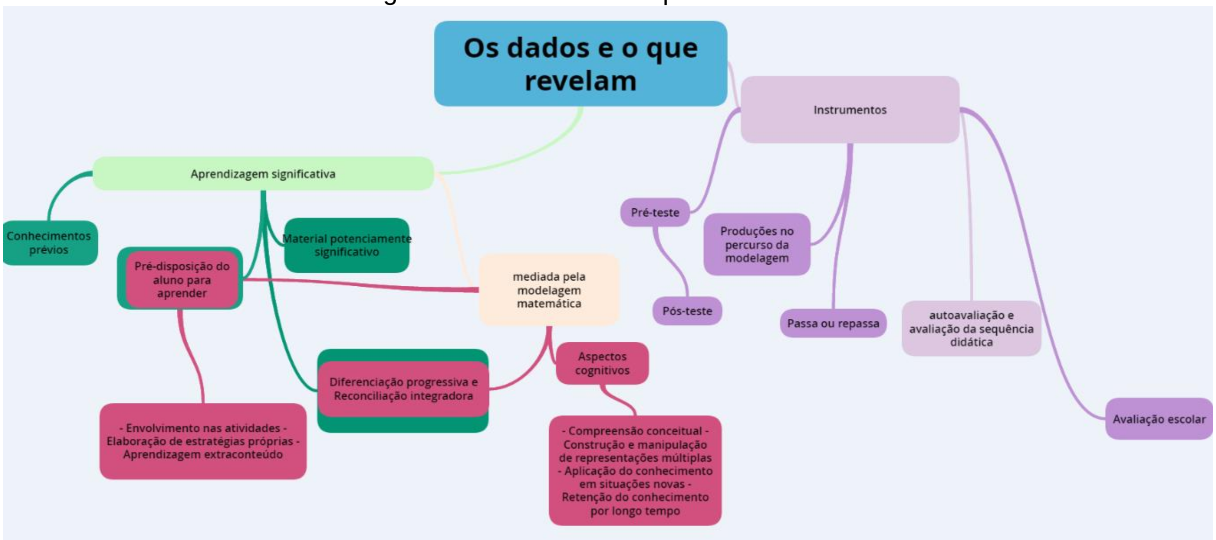
Dessa forma, para proceder às análises, os dados foram divididos em dois grupos: um relacionado à predisposição do aluno para aprender, em que foi analisada a aprendizagem além dos conteúdos, como valores e condutas dos estudantes; e outro, das condições cognitivas, em que foi analisada a evolução do discente, segundo aspectos da aprendizagem significativa. Sendo assim, o planejamento da sequência didática teve como direcionamento a proposição de atividades segundo o que se buscou analisar.

Em todos os encontros, os registros das atividades dos estudantes foram recolhidos para uma análise da pesquisadora, com o propósito de coletar dados (em cópias digitais), mas também de dar retorno aos alunos, com comentários sobre erros ou aspectos que pudessem ser aprimorados, e para que, no grande grupo, fosse possível a discussão sobre dúvidas, propiciando a reconstrução de resoluções, como forma de aprimoramento em um processo de avaliação formativa.

A discussão, com toda a turma, após as reformulações das atividades nos pequenos grupos, era mediada pela professora que, geralmente, solicitava para algum estudante, preferencialmente quem tivesse recebido algum comentário, expor a sua nova ideia aos colegas. Em oportunidades como essas, os alunos eram chamados a justificar e verbalizar as resoluções e os pensamentos que os guiaram para chegar às soluções, e todo esse envolvimento fez parte da avaliação trimestral do aluno.

Os instrumentos de produção e coleta de dados e as categorias de análise estão representadas na Figura 6, na forma de uma síntese ilustrativa. Após isso, é apresentada uma descrição de como foram observados e analisados os dados com base na teoria que fundamenta este trabalho.

Figura 6 – Os dados e o que eles revelam




Fonte: O autor (2018).

Na etapa da avaliação e análise dos resultados, buscou-se identificar o que foi possível o aluno compreender e a evolução dessa compreensão. Assim como Coll et al. (2006, p. 202), entende-se que “avaliar as aprendizagens realizadas pelos alunos equivale a especificar até que ponto desenvolveram e/ou aprenderam determinadas capacidades em consequência do ensino recebido”. Nesse sentido, com a avaliação, foi possível refletir e observar se o aprendiz relacionou os conteúdos e conceitos de forma satisfatória por meio dos instrumentos propostos.

Coll et al. (2006) descrevem a importância de verificar se o aluno é capaz de resolver diferentes situações, compreendendo o seu significado e podendo aplicar no desenvolvimento de diferentes tarefas, em diferentes contextos.

Como instrumentos principais para essa verificação (destacados na cor lilás na Figura 6), foram elaborados um pré e um pós-teste, procurando, assim, uma forma de evidenciar se eles demonstraram mais conhecimento e melhores condições de resolver as questões do que eles tinham no primeiro momento, quando responderam o pré-teste.  Para a análise das resoluções apresentadas no pré e no pós-teste, estas foram classificadas nas seguintes categorias:

- CN = acertou e não justificou;
- PJ = acertou parcialmente e justificou;
- PN = acertou parcialmente e não justificou;
- NC = não acertou;
- NF = não fez.

Com a análise, procuraram-se evidências de aprendizagem significativa durante todas as etapas da sequência didática. Os conceitos foram analisados buscando identificar os que foram construídos e outros, sobre os quais as dificuldades ainda permanecem. Como critério de variedade de graus de aprendizagem, buscou-se saber se o aluno foi capaz de explicar, justificar ou exemplificar, nas suas resoluções das atividades que foram sendo realizadas. Esses aspectos (destacados na cor verde, na Figura 6) provêm das condições para uma aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2003), alguns dos quais são destacados no processo da modelagem, segundo Borssoi e Almeida (2004) (na Figura 6 com a cor rosa). Tais aspectos são explicados a seguir:

a) Conhecimentos prévios: identificados no pré-teste, forneceram elementos para adequar o planejamento às necessidades e às dificuldades apresentadas nas resoluções das questões propostas. Ainda assim, a apresentação e a discussão de todas as questões seguiram-se com toda a classe, em uma atividade que, no contexto desta pesquisa, serviu também como um organizador prévio, adiantando ideias e procurando despertar a curiosidade e o interesse para o entendimento do que estava sendo proposto para ser aprendido.

b) Predisposição para aprender: busca-se observar se o aluno se interessa em se envolver na situação-problema descrita, buscando estratégias eficientes para resolvê-la, não somente fazendo uma atividade de repetição. Identificada no decorrer de toda sequência didática.

c) Material potencialmente significativo: o material foi elaborado seguindo uma sequência de desenvolvimento de ideias para promover um sentido lógico e para que o aluno percebesse a importância dos conteúdos que estudou. Por isso, as duas condições devem andar juntas, pois não adianta o material ser significativo se o aluno não tiver interesse em se envolver nas atividades.

Esses aspectos anteriores, segundo as autoras, promovem a diferenciação progressiva e reconciliação integradora, descritas abaixo, para o contexto desta pesquisa:

*Diferenciação progressiva* – desenvolvimento de competências em cada uma das formas de representação de função (verbal, numérica, algébrica e geométrica), distinguindo, traduzindo, enriquecendo e modificando o sentido dos conceitos, sendo as ideias específicas em cada forma progressivamente diferenciadas.

*Reconciliação integradora* – quando os discentes se tornam aptos a resolver situações variadas e mais elaboradas, a modelar matematicamente novas situações e a compreender problemas de complexidade maior, com as novas concepções.

Ausubel (2003) também considera que, se a aprendizagem é significativa, ela deve durar por um período de tempo mais longo (do que dura uma aprendizagem mecânica), e esse foi outro aspecto examinado, no tempo que foi possível considerar dentro do período escolar em que foi desenvolvida a sequência didática.

Assim, diante do material produzido, foram pontuados os *aspectos* que são indícios de aprendizagem significativa no ambiente da modelagem matemática, descritos por Borssoi e Almeida (2004), e que favorecem a compreensão e a aquisição de uma aprendizagem significativa. As autoras dividem esses aspectos em dois grupos: um referente à predisposição do aluno para aprender, e outro sobre os aspectos cognitivos, conforme descrito na seção 3.2.

## 4.4 DESCRIÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A modelagem matemática serve como suporte para atividades de aprendizagem significativa, em que os alunos podem resolver situações do cotidiano e também aplicar conceitos matemáticos em outros assuntos.

A sequência didática planejada para esta pesquisa parte da ideia de que os alunos possuem noções básicas do conceito de função de primeiro grau e objetiva, então, que estas fossem sendo diferenciadas progressivamente em um processo de reconciliação integradora, de modo a promover compreensão de tais conceitos.

Uma função matemática pode ser representada de diferentes formas: algebricamente, quando expressa por uma fórmula explícita; verbalmente, se é descrita com palavras; numericamente, por meio de tabela de valores; ou geometricamente, quando está representada por seu gráfico. Cada representação pode favorecer a compreensão da função e, assim, permitir ao aluno ir de uma representação para outra.

Como conceitos da aprendizagem significativa, no contexto de funções, diferenciar progressivamente pode ser entendido como compreender, uma a uma, as diferentes formas de expressar uma mesma função, e, ao poder transitar de uma para outra forma, o aluno dá indícios de que alcançou a reconciliação integradora.

Para isso, é necessário que o aprendiz conheça essas quatro formas, que entenda o significado de domínio, de imagem e da lei que descreve uma dada função. Com o propósito de promover a compreensão de conceitos sobre função do primeiro grau, de forma significativa, integrou-se a modelagem, com a qual é possível relacionar funções com situações do cotidiano.

O assunto escolhido para o desenvolvimento da sequência didática foi o valor pago em alguns estacionamentos da cidade, desconsiderando-se meios turnos, diárias e mensalistas. Esse contexto tem relação com o cotidiano dos alunos e pode ser facilmente inserido nos conteúdos previstos no currículo programático da série em foi desenvolvida a proposta.

A sequência didática está estruturada em seis etapas, que estão descritas, a seguir, com enfoque nos aspectos relevantes de cada uma; elas estão detalhadas nos Apêndices A até G, que integram seus planejamentos e a programação completa das atividades.

## 4.5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA E O SEU DESENVOLVIMENTO

No que segue, é apresentada a sequência didática, na forma de relato, com fundamentos da estratégia e esclarecimentos sobre como foi planejada e desenvolvida em cada um dos encontros. As atividades de aprendizagem que integram cada uma das etapas da sequência didática encontram-se em apêndices identificados em suas descrições. A proposta foi aplicada em seis momentos, cinco deles na sequência regular das aulas e o último duas semanas depois do quinto encontro. A duração dos encontros foi de dois períodos de cinquenta minutos cada.

### 4.5.1 Primeiro encontro

O primeiro encontro foi organizado com o propósito de identificar os conhecimentos dos estudantes em relação ao conceito e às noções básicas que envolvem o estudo de funções. Os resultados do pré-teste serviram de base para uma análise do planejamento das demais etapas, já previamente estruturadas, indicando ajustes ou mudanças que devem ser feitas nas atividades de aprendizagem e nos instrumentos de avaliação, visando ao alcance dos objetivos de aprendizagem propostos.

O pré-teste (Apêndice A) foi composto por atividades com as quais se busca verificar se o aluno reconhece e relaciona as quatro formas de representação de uma função, associadas a situações do cotidiano. Os estudantes trabalharam primeiramente em duplas selecionadas pela professora, para, depois, participarem de uma discussão, em grupos de duas duplas, acerca das dificuldades que surgiram na resolução das questões.

Após essa discussão sobre as questões, foram apresentadas as resoluções pelos grupos no quadro, com orientações, complementos e intervenções da docente, no que foi necessário.

Nesse encontro, foi dada uma tarefa extraclasse propondo que os alunos encontrassem o valor cobrado em alguns estacionamentos (considerando a variação de locais: próximo da escola, mais longe da escola, no shopping da cidade) de acordo com a variação do preço pelo tempo de permanência. Os alunos foram orientados a registrar os valores e a forma como são cobrados, preferencialmente, em fotografia.

Em uma segunda tarefa para ser realizada antes do segundo encontro, os alunos deveriam realizar atividades, propostas no livro didático que eles possuem, sobre os mesmos conteúdos abordados no primeiro encontro. Propor tarefas do livro didático é uma norma da escola em que foi realizada a pesquisa para o professor do Ensino Médio, o que deve constar no seu planejamento anual, como estudos em classe ou em tarefa extraclasse, sem, no entanto, ser necessário que esse livro seja o recurso principal ou o mais utilizado no decorrer dos estudos.

Assim, sendo os alunos habituados com a realização de tarefas do livro, integrá-las é um procedimento natural: o que deve ser feito é, cuidadosamente, selecionar as mais adequadas à natureza das demais atividades planejadas para compor a sequência didática – em geral, situações-problema contextualizadas que envolvem, em algum grau, diferentes formas de expressar uma função (verbal, algébrica, numérica e geométrica). Com essa consideração, neste estudo de funções, o livro da escola foi utilizado para indicação de atividades extraclasse, selecionadas de acordo com as demais que foram propostas em sala de aula.

### 4.5.2 Segundo encontro

O segundo encontro iniciou com uma discussão sobre as tarefas extraclasse, com esclarecimentos de dúvidas, mediante a apresentação das resoluções na lousa, pelos alunos.

Esse encontro foi dedicado a uma exploração do processo de modelagem matemática que utiliza conceitos sobre função, da forma como foram concebidos em cada grupo.

Como avaliação, nesse momento, buscou-se verificar se uma atividade abordada por meio da modelagem matemática é potencialmente significativa para a elaboração de conceitos de função, verificando indícios de que o aluno associa e modela matematicamente situações do cotidiano.

Os grupos já deviam ter em mãos os valores das tarifas e a forma de cobrança do estacionamento a que foram designados pesquisar. Cada grupo tinha a seu encargo um dos tipos de estacionamento propostos pela professora, os quais são descritos a seguir.

Os estacionamentos indicados foram: os de parquímetro de zonas verde e azul, o estacionamento rotativo perto da Escola (área central da cidade), um estacionamento rotativo longe da Escola (fora da área central da cidade) e o estacionamento de um shopping. Os locais deveriam apresentar formas diferentes de cobrança e considerar a proximidade das casas em que mora a maior parte dos componentes dos grupos.

Com os dados que surgiam, inicialmente, os alunos ficaram livres para tentar modelar matematicamente o valor cobrado no estacionamento consultado. Sempre que surgiam dificuldades de compreensão ou na resolução, foram feitos novos questionamentos para o grupo, tentando estimular o desenvolvimento do raciocínio e a troca de ideias. Nesse processo, a professora atuou como mediadora da atividade, com desafios para guiar os alunos, mas não forneceu informações que os direcionassem a conclusões.

Almeida e Silva (2014) afirmam que é um requisito primordial que o professor saiba o que o aluno já sabe, e que ele possa elaborar uma atividade e um material que complementem o ensino e a aprendizagem dos estudantes.

No processo de modelagem matemática, as etapas descritas por Biembengut e Hein (2003) foram propostas ao grande grupo:

A primeira etapa da modelagem consiste na *interação com o assunto*, na qual é realizada uma conversa, para um aprofundamento do conhecimento sobre o tema. Para tanto, a professora fez questionamentos sobre onde os pais deixam os veículos estacionados, nos diferentes locais da cidade, questionando inclusive se optam por estacionamentos privados ou na via pública. Os alunos foram questionados também sobre os critérios para a escolha do estacionamento e se os alunos têm conhecimento sobre as tarifas cobradas em cada uma das opções.

Assim, eles puderam refletir, ampliando o seu entendimento sobre o tema e descobrindo diferentes formas de cobrança. Nesse momento, segundo Almeida e Silva (2014), o aluno está preparando a sua estrutura cognitiva para a aprendizagem de novos conceitos. O aluno interage com o professor, com os colegas, expondo suas ideias e explorando informações de forma oral, dinâmica e em grupo.

Também, para despertar o interesse dos alunos, foram feitos questionamentos, enquanto eles socializavam, com os colegas, sobre os valores pesquisados:

- Quais são os tipos de estacionamento que conhecem?
- Como variam os valores?
- O que podem dizer sobre a variação do valor? Ela depende do quê?
- Com tantas opções de estacionamentos, como saber qual é melhor e mais vantajoso para estacionar?
- Há diferença entre os valores cobrados por estacionamentos na via pública em relação aos valores cobrados nos rotativos privados? Por quê?

O objetivo dessa conversa foi despertar a curiosidade do aluno para as próximas etapas da atividade e verificar a evolução do seu entendimento sobre o tema proposto.

Após essa introdução, passou-se à segunda etapa da modelagem, que diz respeito à *matematização*, em que o estudante tem o problema e precisa resolver modelando-o matematicamente e anotando todas as observações. O discente precisa, nesse momento, de conhecimentos matemáticos, na área em que o modelo será aplicado.

Os alunos devem ser observados no decorrer de todo o processo. Lemos (2006) sugere princípios que evidenciam uma aprendizagem significativa e os aspectos a serem observados para uma avaliação, tais como: se o aluno é o centro do processo, percebendo-se como construtor do próprio conhecimento; se o professor é mediador e responsável pelo evento de aprendizagem; se o aprendiz interage com conhecimentos anteriores, reorganizando-os em diferentes momentos do processo educativo.

Nesse momento, nos grupos, os alunos responderam a perguntas em uma folha para entregar para a professora, com a intenção de dar início ao processo de matematização.

- Quanto será pago nesse estacionamento para diferentes tempos de permanência?
  a)15min b) 43min c) 1h22min d) 2h30min
- Faça, usando uma linha do tempo, um desenho que represente a forma de cobrança nesse estacionamento.
- Como seria essa representação na forma de uma tabela para o valor a ser pago em cada período de tempo (horas)?
- Quais são e como se relacionam as variáveis da tabela?
- Represente num gráfico esses valores encontrados pelos tempos correspondentes.
- Pense e escreva uma possível equação, na forma de uma relação matemática, que represente, genericamente, esses valores da cobrança do estacionamento.

A terceira e última etapa é a criação do *modelo matemático,* quando é preciso verificar se o modelo tem validade e se ele se aproxima da situação-problema, traduzindo-a de forma satisfatória. Para tanto, precisa-se aplicar outros valores no modelo matemático, para verificar se de fato ele é confiável. Os alunos, em seu próprio material, fizeram suposições de outros valores, para verificar se o modelo encontrado estava de acordo com o valor cobrado. Caso não fosse verdadeiro, poderiam voltar e reorganizar o modelo que traduz a situação-problema. Após esse trabalho inicial em grupos, os alunos apresentaram para os colegas o modelo que organizaram. Puderam conversar e discutir sobre algumas situações que precisavam compreender melhor, podendo verificar a validade dos modelos.

Ao final desse encontro, os alunos receberam as atividades (Apêndice B) do livro didático para serem resolvidas em casa, antes do terceiro encontro.

### 4.5.3 Terceiro encontro

O encontro iniciou com a discussão da tarefa na lousa, de forma a debater as dúvidas, contando com explicações complementares da professora sobre as resoluções apresentadas.

Em seguida, iniciou-se uma nova atividade de modelagem, dessa vez em conjunto, no grande grupo, em que a professora apresentou o preço cobrado por um estacionamento (o da frente à escola), ao qual a maioria dos alunos tem acesso.

Com os valores apresentados na lousa, foram feitos os mesmos questionamentos da aula anterior, com a intenção de dar início ao processo de matematização, de forma a usar um modelo comum para discutir a função do primeiro grau. Cada grupo respondeu a uma das questões, relacionadas ao estacionamento proposto pela professora.

Após ser encontrado o modelo (o modelo resultante, no caso dos preços praticados no estacionamento indicado, está descrito no capítulo 5, durante a descrição dos encontros), com discussão coletiva e orientação da professora, esta intervém com questionamentos que envolvem conceitos de função, relacionados com o contexto em que estão trabalhando.

Supondo que uma pessoa fique no estacionamento durante t horas, quanto ela vai pagar se:

a) $t = 1$ hora

b) t = 2 horas

c) t = 3 horas

d) t = 4 horas

e) t = t horas, sendo t = horas cheias

Representando, no sistema cartesiano, os pontos (tempo, valor), pode-se afirmar que pertencem a uma mesma reta? Qual é a equação matemática dessa reta?

Nesse momento, é possível ir se afastando do contexto, para que os alunos atentem e compreendam os conceitos de função do primeiro grau. Chegou-se, assim, a um modelo *v* (*t*), de valor cobrado por tempo de permanência no estacionamento, para ser pensado, também, como uma equação de reta: (equação que descreve a situação proposta pela professora) $v(t) = 3t + 1$.

A professora segue com mais questionamentos, para que os alunos concluam o tipo de função que encontram e qual é o tipo do gráfico.

a) Quanto paga uma pessoa que estaciona por 5 horas?

b) E se ficar 8 horas?

c) Quanto tempo ficou estacionado um carro, se o valor pago foi R$ 31,00?

d) E se o pagamento for de R$ 46,00?

e) Como fica a representação no sistema cartesiano de pontos (t, v) sendo v o valor do estacionamento por t horas de permanência?

f) Quanto varia o valor do estacionamento a cada hora de permanência?

g) Onde aparece esse valor (3) na equação $v(t) = 3t + 1$? E qual o nome desse termo?

h) Qual o sentido do 1 nessa equação? Esse valor é uma quantia a ser paga nesse estacionamento? [2]

i) Em uma situação qualquer, em que *v* é uma variável real que depende de um valor qualquer *t* dentro do conjunto dos números reais, como ficaria a representação dos pontos (*t*, *v*) no sistema cartesiano?

j) E então, o que representa o 1 nessa equação $v(t) = 3t + 1$, de acordo com o gráfico? E qual o nome desse termo?

---

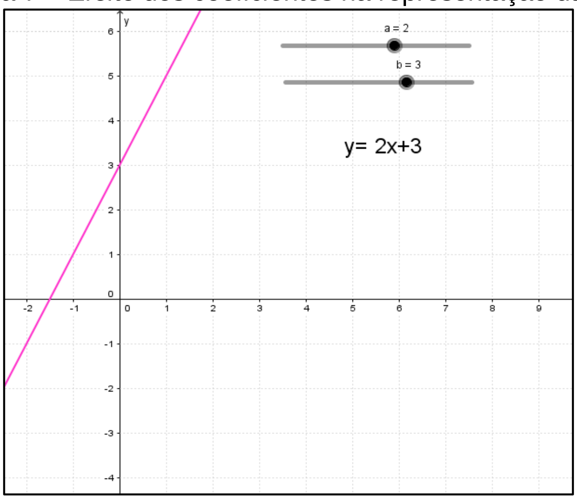
[2] Faz sentido fazer essa pergunta aos alunos porque esse valor corresponderia a um tempo 0 (zero) de permanência no estacionamento.

Após os questionamentos e feitos os registros no caderno, a professora explicou, organizando as ideias, que a função descrita pelo estacionamento é definida por mais de uma sentença: uma constante, que apresenta um valor fixo, e que representa a situação inicial do estacionamento, para uma permanência de até certo tempo (exemplo 30 minutos) e outra, para qualquer tempo acima de uma hora, a qual possui uma variável, e que é do tipo $f(x) = ax + b$, sendo $x$, a variável independente da função. O coeficiente angular (*a*) determina a variação de y para cada unidade de variação de x, e o coeficiente linear (*b*) determina o valor em que a reta intercepta o eixo y, por determinar o ponto (0, *b*).

O conceito de zeros da função, que pode ser identificado como, por exemplo, x', que é o valor de *x* que torna *y* igual a zero, é algebricamente determinado, definindo o ponto (x', 0), que, geometricamente, é o ponto onde a reta intercepta o eixo *x*.

A discussão e a análise dos coeficientes foram conduzidas com o apoio do *software* GeoGebra, com a intenção de que as conclusões fossem dos alunos, orientados por perguntas que direcionavam para o conceito pretendido, como mostra a Figura 7.

Figura 7 – Efeito dos coeficientes na representação da reta



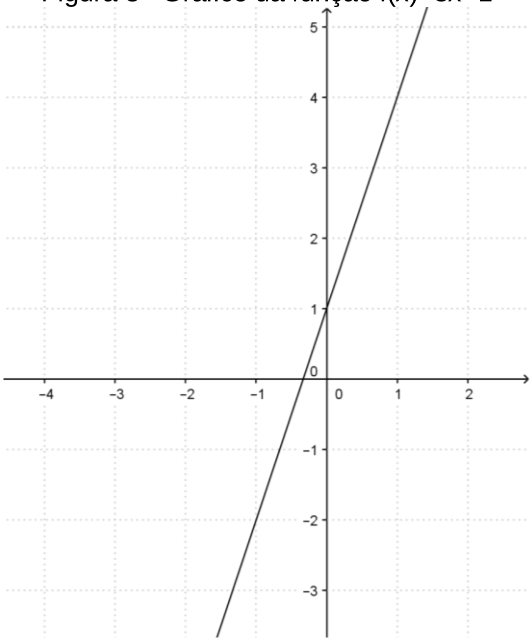

Fonte: O autor (2018).

Após a compreensão desses conceitos, os alunos foram desafiados a construírem gráficos de retas, utilizando o significado do coeficiente linear, do coeficiente angular (como taxa de variação) e de zero da função; isso, em lugar de uma clássica tabela de pontos elaborada, geralmente, com valores aleatórios de *x* para determinar valores correspondentes aos de *y*.

Como um exemplo, discutido com todos e ilustrado no quadro, apresentou-se $f(x) = -3x + 6$ , em que se considerou, primeiramente, se a função é crescente ou decrescente; em seguida, que fosse identificado o ponto em que essa função interceptaria o eixo *y*, já o representando no plano cartesiano, e, por fim, que se calculasse o zero dessa função, igualmente, representando-o no plano cartesiano. Com a discussão sobre quantos pontos são necessários para determinar a reta, esta pode ser traçada, unindo esses dois pontos, âncora da construção, como forma de construir o gráfico da função. Outras funções do primeiro grau foram propostas para a construção de seus gráficos, para uma prática e, também, para a discussão de algumas situações específicas, como uma função em que não há coeficiente angular ou coeficiente linear.

Para finalizar o contexto matemático das funções do primeiro grau, foi discutida com os alunos a forma de encontrar a lei da função a partir do conhecimento do seu gráfico, como, por exemplo, a que está representada na Figura 8.

Figura 8– Gráfico da função f(x)=3x+1




Fonte: O autor (2018).

Os mesmos dados, que são os coeficientes linear e angular, devem ser determinados ao ler e interpretar o gráfico, para que seja possível determinar a lei que descreve a função representada pela reta.

Também para funções consideradas apenas com sentido matemático, sem um contexto específico, a terceira etapa da modelagem é a da *validação do modelo e a avaliação,* para interpretar, confrontar e verificar se o modelo se aproxima de dados e hipóteses levantadas. O aluno precisa verificar se o modelo é aceitável para descrever a situação. Caso o modelo elaborado não seja adequado, é necessário retomar etapas e ajustá-lo para que ele seja real, como é a situação.

Ainda como parte dessa terceira etapa da modelagem, ampliam-se as reflexões, pois é quando o aprendiz reorganiza suas ideias, por meio de modificações, percebendo detalhes que antes não lhe haviam chamado a atenção. Para tanto, os grupos retomaram os modelos construídos no segundo encontro, para os preços dos estacionamentos, considerando, agora, todas as discussões, explicações e representações dos conceitos presentes nesse terceiro encontro.

Ao final desse encontro, os alunos novamente receberam atividades (Apêndice C) para realizarem em casa. As atividades foram indicadas no livro didático, com o intuito de fixar os conteúdos trabalhados, a definição de função do primeiro grau e suas quatro formas de representação.

### 4.5.4 Quarto encontro

A aula iniciou com a discussão das atividades das tarefas de casa. A professora indicou por sorteio os alunos que deveriam responder aos seus questionamentos durante a discussão.

Em seguida, foi proposta aos alunos uma situação-problema, envolvendo a compra e venda de peras, por um comerciante, visando ao lucro. A função gerada, de acordo com a situação-problema, é $f(x) = 2x - 500$, sendo *f* a função que representa o valor recebido pelo comerciante ao vender *x* peras.

A função descreve a situação em que “Um comerciante gastou R$ 500,00 na compra de um lote de peras. Como cada pera será vendida a R$ 2,00, ele deseja saber quantas peras deverá vender para obter lucro com as vendas. ” Essa foi a ideia inicial para se trabalhar o estudo do sinal de uma função do primeiro grau. Em qualquer situação, o estudo do sinal indica, em quais valores do domínio, a função é nula, negativa ou positiva. No caso da situação apresentada, identificar onde a função é positiva, negativa ou nula é o mesmo que identificar quando o comerciante terá lucro, prejuízo ou nenhuma das duas situações em seu negócio.

Para tanto, foi solicitado aos alunos que esboçassem o gráfico da função como uma reta contínua, na ideia de uma aproximação da situação real, considerando que a venda acontece para quantidades inteiras de peras. Após isso, propôs-se que explicassem, sobre lucro, prejuízo ou nenhum deles com a venda de peras, respondendo as seguintes questões:

a) O que acontece vendendo-se 250 peras?

b) O que acontece vendendo-se mais de 250 peras?

c) O que acontece vendendo-se menos de 250 peras?

Com essas questões, o intuito foi propiciar que os alunos percebessem que não há lucro e nem prejuízo para $x = 250$, pois $f\ (250) = 0$. Que há lucro para $x > 250$, pois $f(x)>0$ *e* prejuízo para $x <250$, pois $f(x) < 0$.

A discussão com tal situação, e com outros exemplos, foi proposta para auxiliar na compreensão das ideias envolvidas na análise do sinal de uma função: quando é positiva, negativa ou nula.

Na sequência, com os alunos organizados em dois grandes grupos, foi realizada uma atividade (Apêndice D) de revisão do conteúdo, juntando as ideias e os conceitos construídos e discutidos, na forma de jogo, denominada “Gincana de função do 1º grau”, uma dinâmica diferenciada para envolver os alunos na resolução das atividades. As questões foram variadas sobre as formas de representação de funções do primeiro grau.

A dinâmica da gincana é a seguinte: Com a turma dividida em duas equipes, a professora sorteia uma questão e um aluno de cada equipe, para que vá à frente e resolva a questão no quadro. A professora apresenta a pergunta aos dois alunos, que vão até o seu grupo, para pedir auxílio, e retornam quando concluem a resolução, apresentando-a para a professora. Caso a solução esteja correta, ela é explicada para o grande grupo e a equipe ganha um ponto. Se estiver errada, o estudante volta à equipe e corrige. Com isso, pode acontecer de se ter um grupo vencedor da “gincana da função do 1º grau”.

Ao final do quarto encontro, os alunos novamente receberam atividades (Apêndice D) para realizarem em casa, assim como nos encontros anteriores, selecionadas do livro didático e, nesse caso, referentes à definição de função de primeiro grau e às quatro formas de representação que podem ser utilizadas.

### 4.5.5 Quinto encontro

O quinto encontro foi destinado à aplicação de um pós-teste, com a intenção de verificar indícios de melhora no entendimento de função do primeiro grau, comparando o que os estudantes sabiam com o que trabalharam nas atividades, aplicando as ideias e os conceitos estudados em outras situações, incluindo algumas do cotidiano.

Os alunos, organizados em duplas, resolveram as atividades do pós-teste, cujas questões são semelhantes às do pré-teste quanto ao conteúdo, mas com grau maior de complexidade em relação ao que devem responder, por serem solicitados a justificar os procedimentos adotados. Assim, as questões foram planejadas para verificar se houve avanços, no decorrer das etapas da sequência didática, pois os conceitos básicos precisam ancorar novas aprendizagens que serão propostas.

Como no pré-teste, no pós-teste (Apêndice E), buscou-se verificar se o aluno reconhece e relaciona as quatro formas de representação de uma função, associadas ou não a situações do cotidiano.

Ao final da aula, a professora levou esses materiais para analisar as resoluções também das tarefas que os alunos receberam para realizar em casa.

### 4.5.6 Sexto Encontro

O último encontro aconteceu depois de algumas semanas, quando os alunos responderam a uma avaliação de conhecimentos, da forma como é proposta pela Escola, com todos os conteúdos trabalhados durante o período determinado, e que envolveu conceitos de função do primeiro grau, Teorema de Tales e regra de três.

A avaliação (Apêndice F) tem atividades próximas às desenvolvidas no pré e no pós-teste, envolvendo as quatro formas de representação de função e a transformação de uma forma para outra. Para o contexto da pesquisa, essa avaliação foi realizada, também, com o propósito de verificar se o aluno reteve o conhecimento durante o tempo de desenvolvimento da sequência didática, analisando se as aprendizagens foram duradouras, em algum período possível de ser considerado, sendo este um dos benefícios da aprendizagem significativa. A aprendizagem duradoura, para Ausubel (2003), é aquela em que o aluno aprende com significado, auxiliando-o na capacidade de aprender outros conteúdos, pois ele pode fazer um resgate rápido, quando necessário, de conceitos a serem reativados em situações próximas ou novas. Esse é o sentido atribuído à aprendizagem duradoura, mais do que indicar que a aprendizagem dura por uma quantidade maior de tempo.

Essa avaliação foi realizada, individualmente e sem consulta, durante um período de aula, e foi a professora quem analisou as resoluções e definiu a nota de desempenho dos alunos, conforme requisita a escola onde foi realizada a pesquisa.

Para os fins da pesquisa, mas também como conduta da prática pedagógica, nesse encontro foi aplicado, ainda, um instrumento de avaliação da estratégia (Apêndice G), para conhecer as opiniões alunos sobre a sequência didática como recurso aprendizagem, e com questões também de autoavaliação, para que refletissem sobre suas condutas como estudantes, envolvimento, dedicação, participação e sobre as aprendizagens que reconheciam ter desenvolvido e as dificuldades ainda não sanadas.

Com a autoavaliação, busca-se um parecer dos estudantes, de modo a se ter indícios de que a aprendizagem foi reconhecida por eles, com grau de envolvimento e de avanços. A autoavaliação é promovida para que os alunos reflitam sobre o que e como aprenderam com a prática pedagógica vivenciada em sala de aula, acreditando-se que, com isso, possam refletir sobre o que e como estudaram, traçando o seu retrato enquanto estudante. Como Hoffmann (2001, p.53), entende-se que a autoavaliação é o “exercício do aluno pensar, sobre o seu pensamento, pensar sobre suas atitudes, analisar criticamente ideias defendidas, observar seus exercícios e tarefas para completá-los, enriquecê-los”.

Espera-se que seja possível que o aluno identifique as lacunas durante o processo de ensino aprendizagem, resgatando conceitos e elaborando mentalmente o caminho que percorreu durante a sequência didática.

Para o professor, a autoavaliação também serve como material de análise e reflexão sobre os conhecimentos propiciados aos alunos, bem como para identificar falhas que possam auxiliar a aprimorar a sua prática.

Hoffmann (2001, p. 53) afirma igualmente que a autoavaliação só terá sentido para o educando se ele puder tomar consciência sobre a sua "conduta cotidiana, de forma natural e espontânea como aspecto intrínseco ao seu desenvolvimento", favorecendo, assim, a sua aprendizagem, ampliando suas capacidades iniciais, pensando e refletindo sobre as estratégias que utilizou para resolver as situações matemáticas.

A autora afirma, ainda, que quando o aluno se autoavalia, o professor "provoca-o a refletir sobre o que está fazendo, retomar passo a passo seus processos, tomar consciência das estratégias de pensamento utilizada" (HOFFMANN, 2001, p. 54). Com isso, nessa pesquisa, a professora pode observar se os objetivos iniciais de promover a compreensão dos conceitos sobre função, bem como a capacidade de resolver problemas, foram atingidos, além de verificar se a modelagem matemática favoreceu a aprendizagem significativa do conteúdo.

Nessa atividade de autoavaliação, promovida no último encontro, havia questões para que o aluno apresentasse um parecer (ruim, regular, bom ou muito bom) de acordo com o seu desempenho e a compreensão do conteúdo estudado. As questões são do tipo: "Participei das atividades, realizando as tarefas propostas em sala de aula e extraclasse?", "Fui capaz de relacionar conceitos matemáticos em situação do cotidiano?", "Consegui expor o meu pensamento de forma escrita na resolução de problemas?", "Aprendi com essa forma de ensinar e recomendando-a para outros conteúdos?". Além disso, foi solicitado que os estudantes descrevessem conceitos importantes que lembravam e aprenderam sobre função de primeiro grau, atribuindo uma nota a seu próprio desempenho, além de que apresentassem o que pensavam sobre a forma de trabalho proposta.

As questões da autoavaliação forneceram subsídios para uma avaliação inclusive das condições de aprendizagem que foram providenciadas e organizadas pela professora e pela mediação que foi propiciada em sala de aula aos alunos com os materiais e a docente. As respostas da autoavaliação forneceram indícios de que as condições promovidas foram favoráveis ao desenvolvimento da aprendizagem, dos quais se pode inferir que a mediação pela professora foi adequada, gerando melhora nos resultados da avaliação.

Todo material produzido com a aplicação da sequência didática foi considerado no momento da análise de dados, servindo de reflexão para a professora sobre indícios da aprendizagem. Segundo Moreira (2013, p.30), “a avaliação da aprendizagem significativa deve ser feita em termos de buscas de evidências”, para que seja possível perceber como os alunos compreenderam essa prática e observar, também, suas condutas e seus pareceres sobre suas aprendizagens e sobre a proposta de estudos que lhes foi oferecida.

A avaliação ocorreu durante todo o processo, sendo consideradas e discutidas todas as atividades, sempre com interação e propostas de ações complementares para a melhora do entendimento do que estava sendo estudado, como possibilidade de avançar na diferenciação progressiva e na integração de conhecimentos a outros existentes. Em um processo de avaliação formativa, as atividades foram formuladas para que o aluno pudesse progredir e aprender com elas, e para que se pudesse analisar o crescimento de cada estudante.

A avaliação somativa também integrou a avaliação geral para produzir o resultado final na avaliação trimestral, em que foram considerados diversos instrumentos. Além do instrumento especifico aplicado no sexto encontro, todas as atividades realizadas foram consideradas, conforme designado por normas da escola, levando-se em conta o percurso completo do aluno durante a realização da sequência didática.

# 5 ANÁLISE, RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, é descrita a análise dos dados oriundos dos registros das produções dos alunos em atividades de aprendizagem, das resoluções das questões do pré e do pós-teste, da avaliação escolar, da autoavaliação e das observações da professora, buscando encontrar, nesses instrumentos, indícios de aprendizagem significativa.

A análise é qualitativa e a organização dos dados deu-se por meio de aspectos indicativos (divididos em sete itens) de aprendizagem significativa, conforme é proposto por Borssoi e Almeida (2004), e de um oitavo (totalizando oito categorias), que se refere à evolução das aprendizagens. No que segue, cada uma delas será título e argumento de uma seção deste quinto capítulo, apresentadas considerando os encontros em que se revelaram indícios do que está sendo analisado.

As categorias de estudo têm origem em dois grandes grupos de aspectos, já mencionados na seção 4.3: um referente à predisposição do aluno para aprender, observada pelo *envolvimento nas atividades*, pela *elaboração de estratégias próprias* e pela *aprendizagem extraconteúdo*; e outro que leva em conta os aspectos cognitivos: *compreensão conceitual*, *construção e manipulação de representações múltiplas*, *aplicação do conhecimento em situações novas* e *retenção do conhecimento por longo tempo*. Acrescentou-se a estas mais uma categoria, a que se chamou *progresso das aprendizagens* e na qual foi observada a evolução de alguns alunos que representam uma amostra dos desempenhos da classe.

Com essas análises, buscou-se, no final, produzir argumentos que justifiquem a sequência didática proposta como sendo uma estratégia potencialmente significativa para o ensino e a aprendizagem, planejada com a modelagem matemática de uma situação do cotidiano, em que os alunos compreendem e aplicam conceitos de função sem ficar presos ao uso de fórmulas ou a resoluções em mera repetição de exercícios que seguem um modelo padrão.

Moreira (2010) afirma não ser possível concluir se ocorreu ou não uma aprendizagem significativa; podem-se apenas apresentar evidências de que o aluno sabe explicar e utilizar o que aprendeu para resolver atividades e situações propostas, também como novas situações e por mais tempo do que o período dedicado ao ensino da unidade considerada.

Para cada uma das etapas planejadas, uma proposta específica de avaliação foi organizada, visando à reconstrução de aprendizagens e à construção de dados para a análise, com as quais fosse possível identificar indícios de uma aprendizagem significativa mediada pela modelagem matemática. A professora, no papel de observadora, enquanto pesquisadora, e de mediadora de toda a sequência didática, organizou e direcionou o andamento das atividades, ajustando-as sempre que necessário, visando aos objetivos de aprendizagem significativa.

A seguir, dedicam-se, então, oito seções à análise das oito categorias mencionadas. A primeira delas diz respeito à predisposição dos alunos para aprender, sendo observados, no percurso das etapas da sequência didática, indícios de envolvimento do aluno, em diversas atividades propostas, identificados por demonstração de motivação, interação e empenho na realização das atividades de aprendizagem.

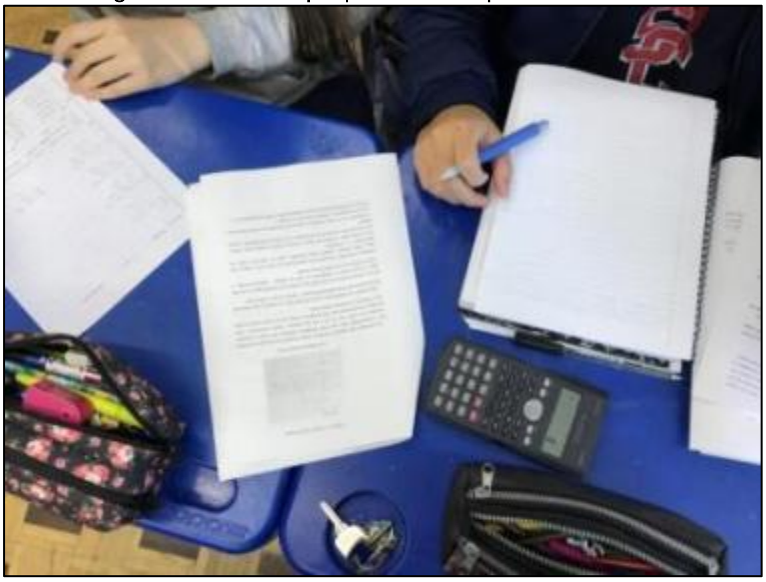
## 5.1 ENVOLVIMENTO NAS ATIVIDADES

O envolvimento contribui para que o aluno possa desenvolver as competências necessárias para a aprendizagem significativa, pois ele se envolve na resolução dos problemas, compreendendo os conceitos envolvidos, como explicam Borssoi e Almeida (2004).

A novidade de uma estratégia diferenciada causou curiosidade e expectativa nos alunos. No primeiro encontro, ao se discutirem as resoluções das atividades do pré-teste, muitos queriam responder e justificar que as haviam feito corretamente, mostrando, aos colegas e à professora, que sabiam sobre as ideias propostas, enquanto conhecimentos prévios, de noções de Física e de Matemática abordadas nas questões. Conforme solicitado, os alunos iam interagindo, respondendo ou perguntando, e foi possível perceber sua atenção e curiosidade enquanto sanavam-se as suas dúvidas. Essa foi uma primeira novidade, também, para a professora.

Os alunos mostraram-se curiosos e motivados, pois esperavam por algo diferente; afinal, haviam assinado o termo de consentimento para suas participações na pesquisa e previam que alguma coisa inovadora viria pela frente. Assim foi, também, no início do primeiro encontro, quando a professora entregou as atividades pedindo que se organizassem em duplas, conforme sorteio inicial. Não houve reclamações e eles puderam interagir com colegas com os quais, em alguns casos, não tinham muita afinidade, o que não é uma postura comum de se observar entre os estudantes quando trabalham em grupos. A Figura 9 mostra os alunos, já em duplas, de prontidão, com calculadora, caderno e o material contendo as questões propostas.

Figura 9 – Alunos preparando-se para os estudos



Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Na sequência, a Figura 10 retrata alunos trabalhando em parceria nas suas duplas, concentrados na realização das atividades.

Figura 10 – Alunos em atividade no primeiro encontro

Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

No segundo encontro, foram feitos alguns questionamentos sobre os tipos de estacionamento que os alunos conheciam; sobre a variação dos valores cobrados e do que estes dependem; sobre como saber qual é o mais vantajoso, dentre tantas opções de estacionamento; sobre qual seria o melhor, considerando um rotativo privado e a via pública. Todos esses questionamentos serviram para que os alunos interagissem entre si a respeito do assunto. Alguns argumentavam que o estacionamento rotativo privado é mais seguro, porém é mais caro; outros explicavam que, na via pública, a cada período de tempo, é preciso ir até o parquímetro e renovar o *ticket*, pois ele é válido por tempo limitado. Os discentes afirmaram que os pais utilizam, geralmente, os estacionamentos privados, mais por motivos de segurança.

No segundo e terceiro encontro, houve atividades de modelagem matemática. No segundo encontro, especialmente, os alunos mostraram-se empolgados. Nos pequenos grupos (quatro alunos), queriam, de fato, compreender como expressariam os valores que haviam pesquisado com relações matemáticas; além disso, precisavam expressar e discutir as suas ideias sobre os valores e os tempos de estacionamento, sobre a lei que descreveria a variação dos preços e a forma de cobrança. Na apresentação dos modelos aos demais colegas, cada grupo tinha a preocupação de evidenciar que o modelo estava correto.

O encontro que tratou da modelagem do valor cobrado no estacionamento que fica em frente à escola foi realizado com discussões coletivas e representações no quadro, feitas, em alguns casos, pelos estudantes, e, em outros, pela professora, com a explicação dos conceitos de função do primeiro grau. Os alunos mostraram-se confiantes e envolvidos nas atividades, pois já tinham feito modelo semelhante, e, nesse momento, podiam aprimorar a nova situação com conceitos que haviam relacionado na sua estrutura cognitiva.

No quarto encontro, a aula foi especial, pois aconteceu a "Gincana de função do 1º grau". Todos estavam bastante animados, cada grupo mostrava interesse e pensava em resolver corretamente e de forma rápida, para apresentar cada questão à professora, que conferia resoluções e respostas, e ganhar pontos para a sua equipe.

Mesmo em questões de nível mais complexo, pode-se perceber que houve participação e vontade de resolver cada desafio, de forma que as atividades envolveram os alunos, tirando-os da zona de conforto.

Sendo assim, o aluno, ao se envolver nas atividades propostas, pode querer relacionar o que ele já sabe com os novos conceitos, o que foi observado em seus questionamentos, explicações, justificativas e exemplificações. Dessa forma, há grande possibilidade de que compreenda os conceitos de forma significativa por meio da modelagem matemática.

## 5.2 ELABORAÇÃO DE ESTRATÉGIAS PRÓPRIAS

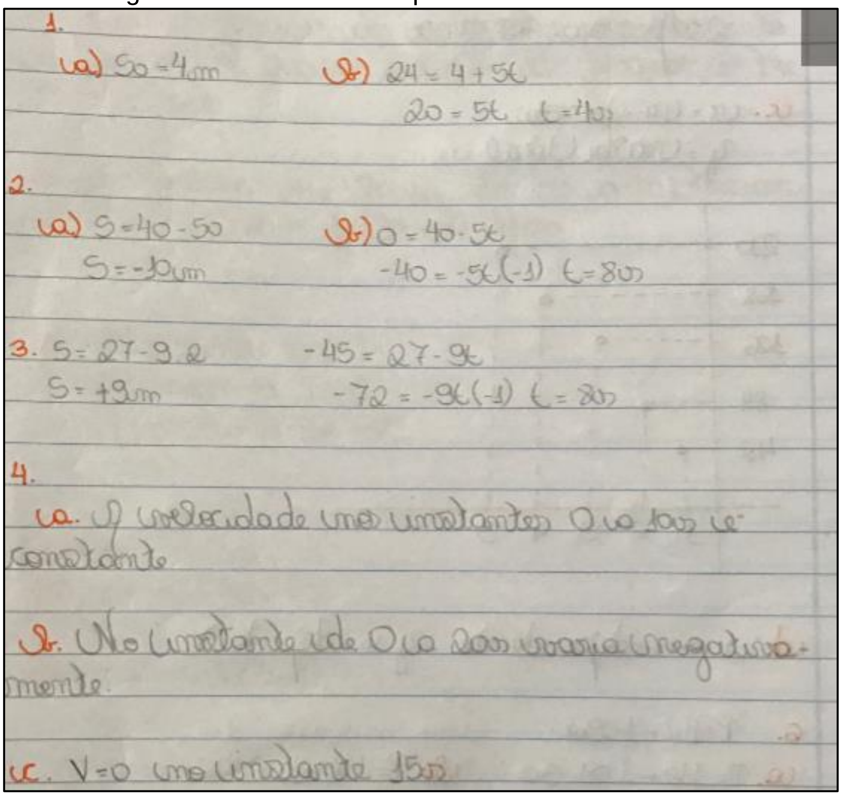
Na análise desta categoria, consideraram-se as diferentes estratégias e formas de pensar de que os alunos precisaram para resolver as situações propostas, no decorrer dos encontros. Borssoi e Almeida (2004) afirmam que, quando o aluno se depara com uma situação próxima do seu cotidiano, ele mostra-se mais interessado, parecendo que a forma de resolver se torna mais fácil, pois ele cria mecanismos e estratégias próprias para chegar a uma solução.

No primeiro encontro, quando olharam as atividades, alguns ficaram surpresos ao identificar questões de Física, argumentando que não tinham ido bem nas avaliações e que não sabiam as fórmulas de cor. A professora procurou amenizar a situação, encorajando os alunos ao comentar que aquela seria mais uma oportunidade para aprimorar conhecimentos, especialmente os de Matemática, e que o importante era exatamente perceber que não era necessário saber as fórmulas decoradas, mas, sim, ideias importantes no contexto da Física.

Ao lerem as atividades, pareceram acham superinteressante a forma como questões de Física puderam ser pensadas com a Matemática e conseguiram, na sua maioria, compreender o que era necessário fazer, criando estratégias próprias e realizando com sucesso o primeiro grupo de atividades. Na

Figura 11, observam-se respostas a questões em que era solicitado que determinassem o instante inicial e o tempo final do movimento de um móvel. Pode-se perceber que os alunos não utilizaram as fórmulas, mas fizeram a transposição do conhecimento matemático para a Física. As atividades referiam-se a diversas situações-problema em que os alunos deveriam representar a função nas suas várias formas: em tabelas, em gráficos, descrevendo a situação em palavras e algebricamente.

Figura 11 – Atividades de pré-teste envolvendo Física




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

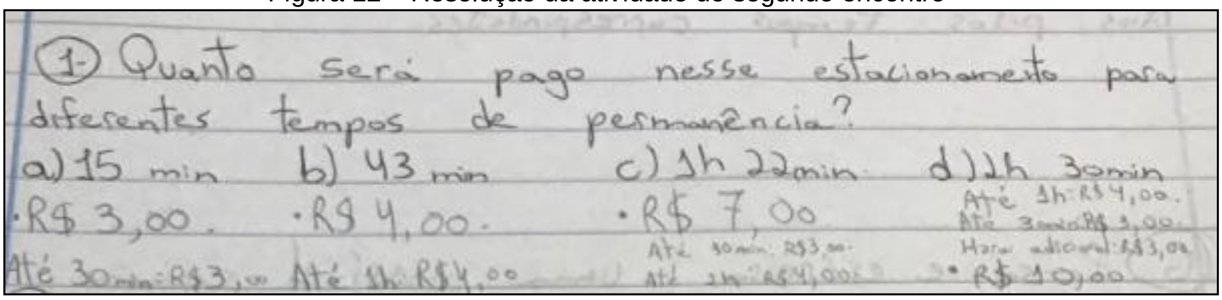
No segundo encontro, cada aluno recebeu uma folha de papel almaço para desenvolver a atividade destinada à modelagem matemática. Inicialmente, nos grupos, apresentaram uns aos outros os valores coletados nos estacionamentos visitados, para que selecionassem um. A professora verificou o que os grupos escolheram, para que modelassem situações diferentes.

Como forma de levá-los a pensar nas relações representadas em cada caso, a professora perguntou: “quanto será pago, nesse estacionamento, para diferentes tempos de permanência?” As opções de resposta eram a)15min; b) 43min; c) 1h22min; e  d) 2h30min.

Os alunos precisaram elaborar estratégias variadas para resolver as situações de forma satisfatória. Primeiramente, todos conseguiram perceber que o valor a ser pago dependia do tempo de permanência. Para determinar os preços, alguns alunos, iniciaram fazendo uma regra de três, considerando o valor cobrado por minuto, para que pudessem calcular o valor por 15 minutos, por 43 minutos e assim por diante, mas acharam estranho e chamaram a professora, que questionou se, de fato, essa forma de proceder fornecia os valores que tinham sido informados no estacionamento, e se, quando iam a alguns estacionamentos, o preço pago era cobrado por minuto.

Os alunos, conversando e trocando ideias, perceberam que o estacionamento considerava a hora cheia para o cálculo, independentemente se a pessoa permanece 10 ou 18 minutos, por exemplo, a partir da próxima hora. Sendo assim, reorganizaram suas respostas, podendo compreender os cálculos que haviam feito, como mostra a Figura 12:

Figura 12 – Resolução da atividade do segundo encontro



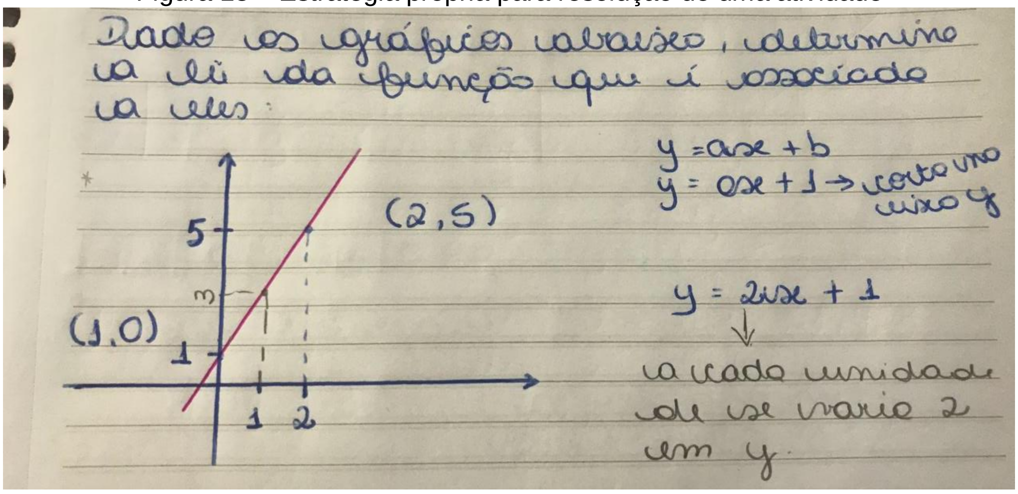
Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

No processo de modelagem matemática, é imprescindível a elaboração de estratégias próprias, pois há uma situação do cotidiano proposta para os estudantes resolverem com o que conhecem, dando significado para a aprendizagem ali envolvida, motivando-os a chegarem a uma solução compatível com a realidade.

No terceiro encontro, os alunos precisaram resolver situações envolvendo modelagem matemática e também houve a introdução dos conceitos de função do primeiro grau. Em uma das atividades, quando precisaram determinar a lei da função, observando os elementos que influenciam na forma gráfica, foi necessário que pensassem na forma algébrica. Sendo assim, construíram o conceito de função do primeiro grau por meio de valores conhecidos e da lei da função que descrevia aquele gráfico. O intuito era propiciar ao aluno formas para que ele aprendesse de modo a resolver tanto atividades de aula como novas situações, apresentadas em outros contextos, como afirma Moreira (1999).

A Figura 13 apresenta a forma como um aluno resolveu a atividade com base na compreensão dos significados de coeficiente angular e coeficiente linear, para determinar a lei que descreve o gráfico. Sendo assim, foi possível observar que o aluno elaborou uma estratégia própria para resolver a atividade proposta.

Figura 13 – Estratégia própria para resolução de uma atividade




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

No quarto encontro, os alunos precisaram elaborar estratégias variadas para resolver as situações da gincana, buscando compreender o contexto que estava envolvido em cada questão. Assim, pensaram alternativas para encontrar respostas sem o uso de fórmulas decoradas. As atividades da gincana envolviam os conceitos de função trabalhados, contextualizados e em todas as formas de representação. Os estudantes organizaram-se e discutiram as situações, tentando resolver de forma correta, para ganhar pontos e para que o colega que fosse à frente explicar soubesse e compreendesse o que estava fazendo. A Figura 14 mostra alunos trabalhando em grupos envolvidos na resolução da questão.

Figura 14 – Gincana função de 1º grau, quarto encontro

Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

No quinto encontro, de realização do pós-teste, a proposta era analisar a evolução individual de cada um, de acordo com os conhecimentos prévios de função do primeiro grau manifestados na aplicação do teste; ainda assim, os alunos sentaram em duplas, para que discutissem as situações, se necessário.

Nesse encontro, os alunos envolveram-se em diferentes estratégias, buscando mecanismos para resolver as questões, que eram contextualizadas e exigiam interpretações, para que pudessem efetuar as resoluções nas diferentes formas de representações de função.

Nesse encontro, perceberam-se menos questionamentos, poucos tiveram dúvidas sobre como resolver ou não compreendiam o que era para fazer, mostrando que haviam trabalhado com os conceitos, utilizando-os em estratégias próprias para a resolução das atividades, aprimorando conhecimentos prévios, que agora fazem parte da estrutura cognitiva e que podem ser resgatados, quando necessário. Parece possível confirmar que, quando o estudo é associado a situações reais, fica mais fácil a compreensão. Nesse encontro, observou-se, ainda, a reconciliação integradora (MOREIRA, 2011), pois os alunos associaram o que havia em seus conhecimentos com conflitos cognitivos que automaticamente aconteceram durante a eliminação de diferenças aparentes, confirmando a aprendizagem, quando se integraram.

## 5.3 APRENDIZAGEM EXTRACONTEÚDO

A aprendizagem extra conteúdo vai além de conceitos matemáticos; é a aprendizagem de valores, de habilidades e de atitudes, observáveis em casos em que o aluno precisa trabalhar sozinho, ou conversar com colegas e expor ideias a um grupo, clara e organizadamente, apresentando a forma como pensa, aceitando colaborações e sugestões dos colegas, como afirmam Borssoi e Almeida (2004).

Na maioria dos encontros, os alunos realizaram as atividades em duplas ou em grupos e interagiram entre si, podendo se ajudar, conversando e contribuindo uns com os outros. Nos momentos de apresentação de resoluções para o grande grupo, foi possível perceber a interação entre os estudantes que estavam apresentando e os demais colegas, como mostra a Figura 15, que mostra os alunos atentos ao que é apresentado no quadro.

Figura 15 – Apresentação para o grande grupo

Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

No decorrer do desenvolvimento de toda a sequência didática, percebeu-se uma mudança gradativa no ambiente de aprendizagem, pois os alunos mostraram-se sempre ativos, participativos e, em vários momentos, houve uma interação que indicou grande envolvimento, especialmente, quando as situações matemáticas eram relacionadas com o cotidiano. Esse é o ambiente de ensino e aprendizagem, proposto por Barbosa (2001), com a modelagem matemática de situações da realidade, para extrair e construir conceitos, de forma conjunta, trabalhando com valores, além de conceitos específicos, percebendo-se que “o envolvimento dos alunos ocorre na medida em que seus interesses se encontram com esses” (BARBOSA, 2001, p.6).

Em continuação à análise das categorias propostas por Borssoi e Almeida (2004), passa-se ao segundo grupo, que abrange aspectos cognitivos da aprendizagem significativa e cuja divisão foi anunciada no início deste capítulo. Essas categorias constituem as próximas seções.

## 5.4 COMPREENSÃO CONCEITUAL

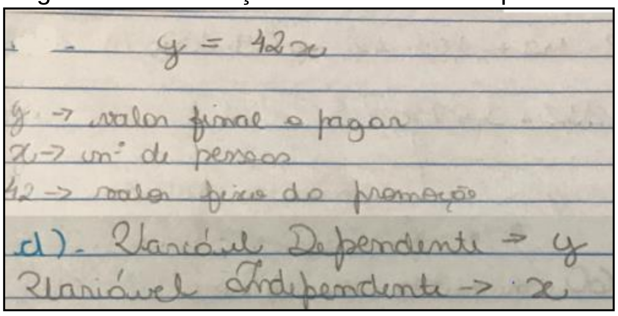
A compreensão dos conceitos ocorre quando os alunos associam o novo conceito que está sendo abordado com ideias que já existem na sua estrutura cognitiva. Ao fazer essa relação, o aprendiz consegue encontrar estratégias para resolver uma determinada situação, planejando e tomando decisões para resolver o problema que lhe é proposto. Nesse caso, é possível dizer que houve aprendizagem significativa, de acordo com Borssoi e Almeida (2004).

No primeiro encontro, com a aplicação do pré-teste, a proposta era a de que os discentes resolvessem as atividades resgatando conceitos que já haviam estudado. Naquele momento, não se esperava que tivessem domínio dos conteúdos, pois, como pré-teste, o intuito era o de verificar conhecimentos prévios.

A seguir, são relatadas algumas das atividades em que se reconheceram indícios de compreensão de conceitos sobre funções nesse momento do pré-teste, e que foram, depois de resolvidas individualmente, discutidas entre os alunos. Essas discussões foram de muita colaboração na continuação dos estudos, pois foi possível contar com a interação entre os estudantes para a compreensão dos conceitos básicos sobre função do primeiro grau.

Na atividade 5 (Apêndice A), os alunos precisavam representar, em um plano cartesiano, valores presentes em uma tabela referente ao preço pago por certo número de pessoas em um rodízio de pizza, e, depois, expressar tais valores por meio de uma relação matemática. Nessa atividade, foi possível perceber que os alunos conseguiram representar a situação proposta em um modelo matemático, expressando as variáveis envolvidas. A Figura 16 ilustra como um estudante descreveu a situação, demonstrando ter compreendido quais eram as variáveis e a relação que poderia estabelecer entre elas.

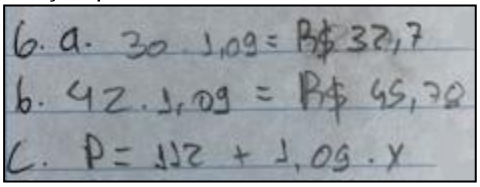
Figura 16 – Resolução da atividade 5 do pré-teste




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Na atividade 6 (Apêndice A), letras *a* e *b*, os alunos precisaram calcular o valor a ser pago por uma pessoa que fala, respectivamente, 30 minutos e 42 minutos, de acordo com o valor cobrado por um plano de telefonia. Nessa atividade, alguns não observaram o valor fixo a ser acrescentado e calcularam apenas o preço cobrado por minuto falado, como mostra a Figura 17. É possível, nessas duas situações, que tenham apenas feito contas, como acontece, com frequência, na aprendizagem mecânica, ou que não tenham entendido a pergunta completamente, pensando no valor correspondente apenas aos minutos falados. Tais hipóteses justificam-se porque, na letra *c* dessa mesma atividade, que solicitava que escrevessem a lei da função que descreve o preço P a ser pago para um total de x minutos falados, os alunos acertaram a resposta.

Figura 17 – Resolução parcialmente correta da atividade 6 do pré-teste



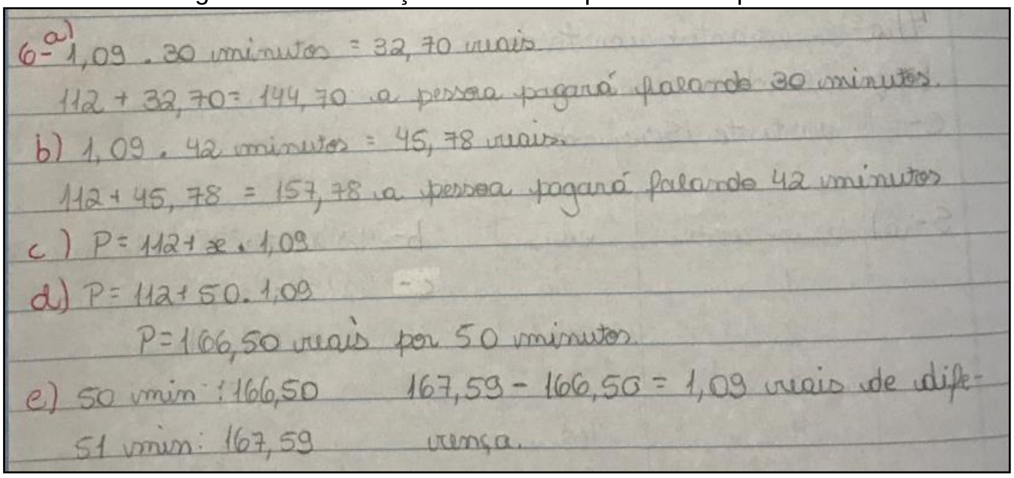
6. a. 30 . 1,09 = R$ 32,7
b. 42 . 1,09 = R$ 45,78
c. P = 112 + 1,09 . x

Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Já, na

Figura 18, é possível ver os cálculos de outro aluno, que acertou a resposta e a comentou, indicando compreensão.

Figura 18 – Resolução correta da questão 6 do pré-teste



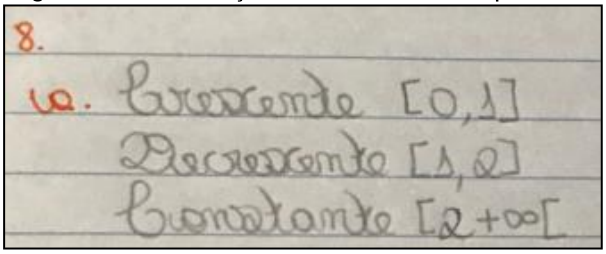
6 - a) 1,09 . 30 minutos = 32,70 reais.
112 + 32,70 = 144,70 a pessoa pagará falando 30 minutos.
b) 1,09 . 42 minutos = 45,78 reais.
112 + 45,78 = 157,78 a pessoa pagará falando 42 minutos
c) P = 112 + x . 1,09
d) P = 112 + 50 . 1,09
P = 166,50 reais por 50 minutos.
e) 50 min : 166,50 167,59 - 166,50 = 1,09 reais de dife-
51 min: 167,59 rença.

Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Na atividade 8 (Apêndice A) (*a*, *b* e *c*), havia um gráfico para que analisassem em que intervalo a função era crescente, decrescente ou constante. Os estudantes tinham compreensão do intervalo de variação de cada função e puderam reconhecer os conceitos envolvidos. A

Figura 19 retrata a resolução de um aluno que representou de forma correta o comportamento da função em cada um dos intervalos.

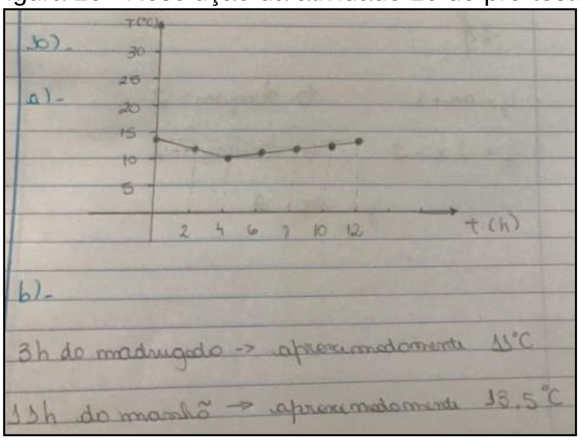
Figura 19 – Resolução da atividade 8 do pré-teste




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017)

Na atividade 10 (Apêndice A), havia registros, em uma tabela, da temperatura em um período de certo dia, em Caxias do Sul. Ela solicitava que os alunos representassem os valores da tabela como pontos do plano cartesiano, expressando a temperatura T em função do tempo t, e que, depois, usassem o gráfico para estimar a temperatura às 3 horas da madrugada e às 11 horas da manhã. Vários alunos não deixaram o gráfico claro e não souberam aproximar a temperatura nos horários solicitados. Porém, representaram adequadamente os pontos, como mostra a Figura 20, e souberam apresentar as temperaturas pela análise do gráfico.

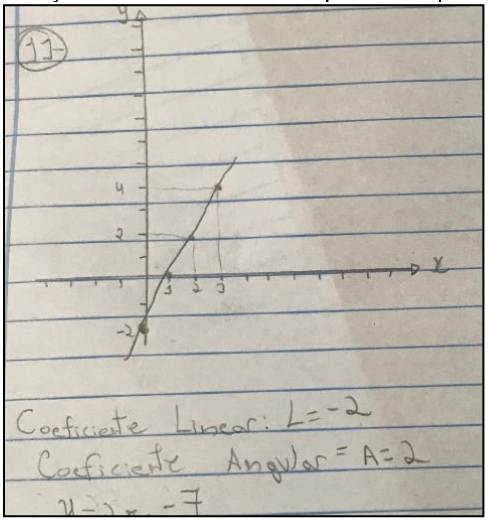
Figura 20– Resolução da atividade 10 do pré-teste




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Na atividade 11 (Apêndice A), era necessário seguir os passos 1 a 3, que indicavam um ponto (0,-2) para início e que, a cada unidade de x, aumentavam duas em y, e elaborar o gráfico da função de 1º grau. Essa foi a atividade em que se observou maior grau de dificuldade, pois os alunos não lembravam ou não tinham, ainda, compreendido o significado de coeficiente angular e linear, ainda que pudessem resgatá-los de um lembrete colocado na mesma página da questão. Alguns discentes erraram ao localizar os pontos no gráfico, outros encontraram o valor do coeficiente angular e linear, mas não sabiam escrever a lei da função. Enfim, esses conceitos não estavam claros para alguns alunos. A Figura 21 mostra a resolução de um deles que determinou corretamente o coeficiente angular e também o linear, porém, sem ideia do significado desses termos na lei da função, pois, quando descreveu a lei, errou.

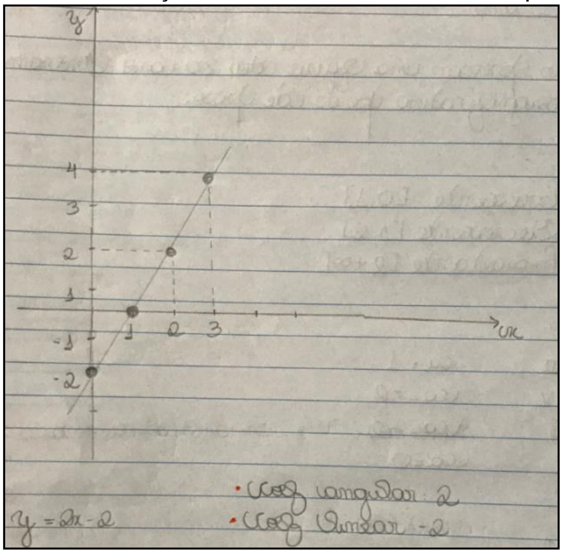
Figura 21– Resolução da atividade 11 do pré-teste parcialmente certo




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Na Figura 22, no entanto, é possível perceber que o aluno tem clareza desses conceitos, pois descreveu a lei da função de forma correta, reconhecendo o coeficiente angular, o coeficiente linear e seu valor na lei da função.

Figura 22 – Resolução correta da atividade 11 do pré-teste




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

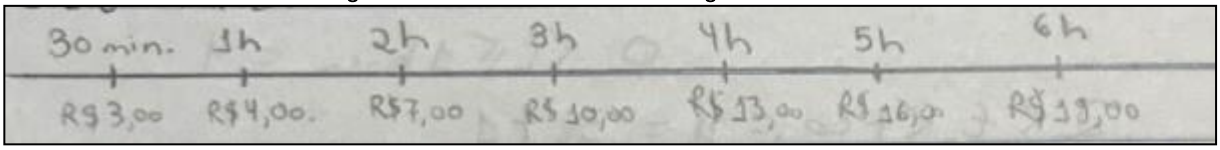
Durante o pré-teste, a compreensão conceitual revelou-se bastante limitada, ainda que alguns estudantes tenham demonstrado conhecimentos que puderam resgatar, para resolver as atividades. Foi possível concluir que aproximadamente metade dos alunos respondeu tudo e justificou; os demais não justificaram, não demonstrando clareza sobre o que tinham pensado para calcular e obter a solução.

No segundo encontro, houve a primeira atividade de modelagem matemática, relativa aos valores cobrados por estacionamentos que os alunos, em grupo, haviam coletado. Nesse encontro, a estratégia didática foi a de questionamentos, para que pudessem chegar a um modelo válido.

A primeira questão pedia que eles determinassem os valores para determinados tempos de permanência, de acordo com o estacionamento que iriam trabalhar nesse encontro, entre, por exemplo: a) 15min; b) 43min; c) 1h22min; e d) 2h30min.

A segunda questão solicitava uma linha de tempos, na forma de desenho, para representar como era feita a cobrança nesse estacionamento. No início, os grupos tiveram dúvidas sobre essa representação, não sabiam bem se faziam um plano cartesiano ou uma reta. A professora comentou sobre a linha do tempo que fazem nas aulas de História, em que aparecem a data e o fato ocorrido. Nesse caso, precisavam, então, fazer o mesmo com o tempo de permanência e o preço cobrado. Com isso, compreenderam o que era solicitado e conseguiram resolver a atividade de forma satisfatória. Na Figura 23, aparece a representação de um dos grupos, para o estacionamento que cobrava R$ 3,00 por 30 minutos, R$ 4,00 por uma hora e, depois disso, R$ 3,00 por hora adicional.

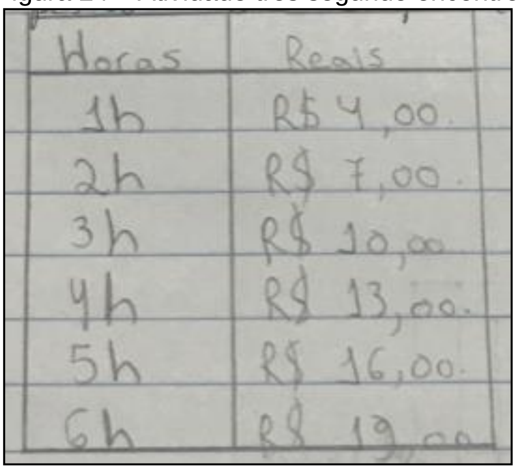
Figura 23 – Atividade dois do segundo encontro




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

A terceira questão solicitava a representação, na forma de uma tabela, para o valor a ser pago para cada período de permanência (em horas). Todos acharam fácil essa atividade, pois entenderam que era bem parecido com o que tinham feito na linha do tempo. A Figura 24 mostra a tabela elaborada por um grupo, que não contém o valor correspondente para os primeiros 30 minutos, talvez por ter sido indicado que o tempo deveria ser expresso em horas.

Figura 24 – Atividade três segundo encontro

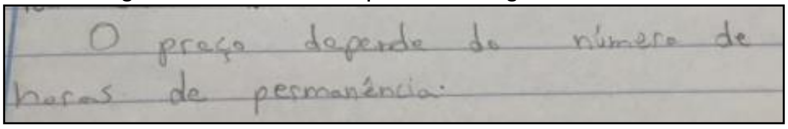


| Horas | Reais |
|---|---|
| 1h | R$ 4,00. |
| 2h | R$ 7,00. |
| 3h | R$ 10,00 |
| 4h | R$ 13,00. |
| 5h | R$ 16,00. |
| 6h | R$ 19,00 |

Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

A quarta questão solicitava quais eram e como se relacionavam as variáveis da tabela. Os alunos descreveram que as variáveis eram o tempo de permanência, como variável independente, e o valor a ser pago, como variável dependente (Figura 25).

Figura 25 – Atividade quatro do segundo encontro

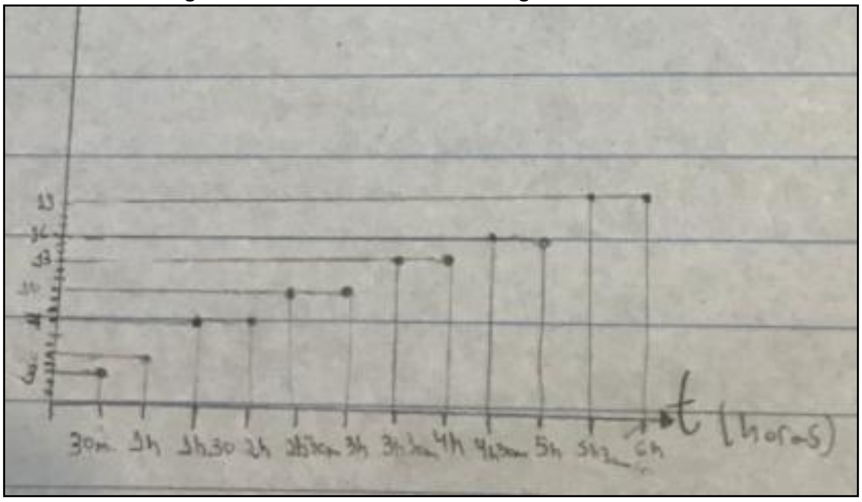


O preço depende do número de horas de permanência.

Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Na quinta questão, solicitou-se que os estudantes representassem, em gráfico, esses valores encontrados pelos tempos correspondentes, e, a partir destes, expressassem os valores cobrados no estacionamento para qualquer tempo. Num primeiro momento, os alunos só localizaram os pontos que colocaram na tabela da atividade anterior, sem relacionar valores para tempos entre as horas. A professora, então, questionou se, entre a primeira e a segunda hora, há muitas variações do tempo de permanência e se o valor será sempre o mesmo. Outro grupo traçou uma reta unindo os pontos e a professora questionou: “se a pessoa, por exemplo, ficar 1h30min, ela vai pagar esse valor indicado na reta que une os pontos dos tempos 1h e 2h?”. Com questionamentos assim, os grupos puderam perceber que não, que seria uma linha, mas que eram partes constantes nos intervalos de tempo, primeiro de meia hora e depois de uma hora. Mas, mesmo assim, para representar essa ideia, os alunos tiveram dificuldades, como mostra a resolução apresentada na Figura 26, não compreendendo bem como expressar os valores, como apresentá-los em intervalos, e se eram abertos ou fechados. É natural que tivessem essa dificuldade, pois a função que determina os preços, na realidade, é uma função definida por partes, um assunto mais adiantado no estudo de funções, e a maioria mostrou que, apesar de nunca ter pensado em tal situação, conseguiu expressá-la de uma forma próxima da real.

Figura 26 – Atividade cinco segundo encontro



Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Nesse segundo encontro, a atividade era de modelagem matemática, num primeiro caso de situação real a representar, associada com ideias e termos sobre funções. Pôde-se observar que houve compreensão conceitual de ideias básicas por parte de todos os grupos, pois puderam representar a situação-problema na forma matemática, com uma aproximação da realidade, como descreve Bassanezi (2004).

O terceiro encontro seguiu com atividades de modelagem, e os mesmos grupos se organizaram para responder as mesmas perguntas da atividade da aula anterior, aprimorando o processo de modelagem, dessa vez de uma situação apresentada pela professora. Cada grupo recebeu uma das questões para que discutisse e, depois, apresentasse para os colegas o que havia sido pensando. Essa atividade foi simples para os alunos, considerando a discussão com toda a classe, no encontro anterior, e familiaridade das ideias, uma vez que eles já haviam respondido questionamentos similares para os valores pagos em estacionamentos que eles próprios pesquisaram. Nesse encontro, a proposta era modelar a situação dos valores expressos na Figura 27.

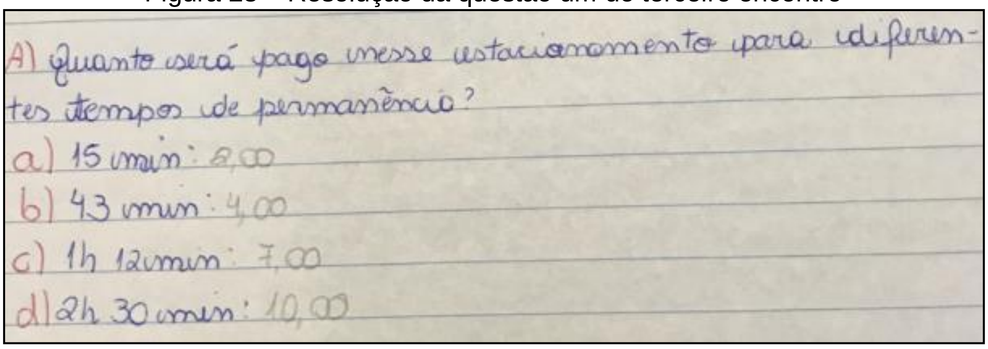
Figura 27 – Valores do estacionamento em frente à escola


Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Estão descritas, a seguir, as questões respondidas ou resolvidas por cada grupo. Buscou-se, assim, propor que os alunos reorganizassem suas ideias sobre a forma como resolveram a situação anteriormente, buscando corrigir e sanar as dúvidas sobre o modelo que encontraram, de modo a representar cada caso próximo da realidade.

*Questão um*: “Quanto será pago nesse estacionamento para diferentes tempos de permanência?” Opções de resposta: a) 15min; b) 43min; c) 1h22min; d) 2h30min. Dessa vez, foi possível perceber que os grupos resolviam com compreensão os casos dados; nesse momento, eles já haviam modificado a sua estrutura cognitiva, adequando-a a novos conhecimentos, podendo aplicá-los de forma satisfatória, entendendo o que era necessário fazer. A Figura 28 mostra a resolução correta de um grupo referente ao estacionamento em frente à escola.

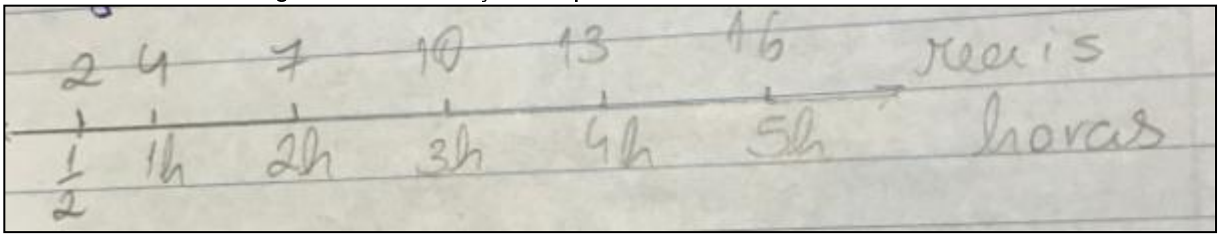
Figura 28 – Resolução da questão um do terceiro encontro




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

*Questão dois*: “Faça, usando uma linha de tempos, um desenho que represente a forma de cobrança nesse estacionamento”. Nessa questão também foi possível perceber a compreensão dos alunos e um maior envolvimento, pois conseguiram representar de forma satisfatória o preço cobrado de acordo com o tempo de permanência. A Figura 29 mostra a representação de um grupo.

Figura 29 – Resolução da questão dois do terceiro encontro



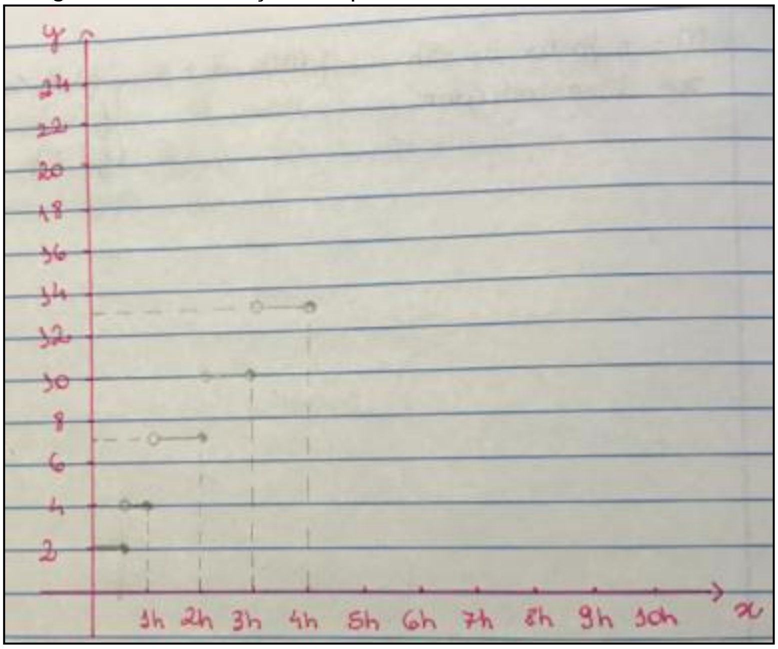

Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

*Questão três*: “Como seria essa representação na forma de uma tabela para o valor a ser pago em cada período de tempo (em horas)?”. Os alunos resolveram essa questão adequadamente, esclarecendo os tempos e os valores cobrados.

*Questão quatro*: “Quais são e como se relacionam as variáveis da tabela?”. Os estudantes descreveram que as variáveis eram tempo de permanência, variável independente, e o valor a ser pago, variável dependente.

*Questão cinco*: “Represente num gráfico esses valores encontrados pelos tempos correspondentes, de modo que expressem os valores cobrados para qualquer tempo de permanência”. Nessa atividade, ainda houve um pouco de dúvida de como seria a representação, qual seria o intervalo correto de tempo para cada pedacinho de reta constante, mas, após discutirem no grupo, puderam avançar e compreender que, a cada variação de hora, um valor diferente era cobrado, e traçar o gráfico. Um aluno questionou: “*se ficar duas horas não posso pagar dois valores, né*?” Pois bem, o aluno percebeu que o gráfico, sem diferenciar intervalos abertos e fechados, mostrava isso. Portanto, a turma, em conjunto, concluiu que era necessário, em cada parte constante, adequar as extremidades com aberto ou fechado. Construíram então o gráfico para uma faixa inicial tempo, como mostra a Figura 30.

Figura 30 – Resolução da questão cinco do terceiro encontro

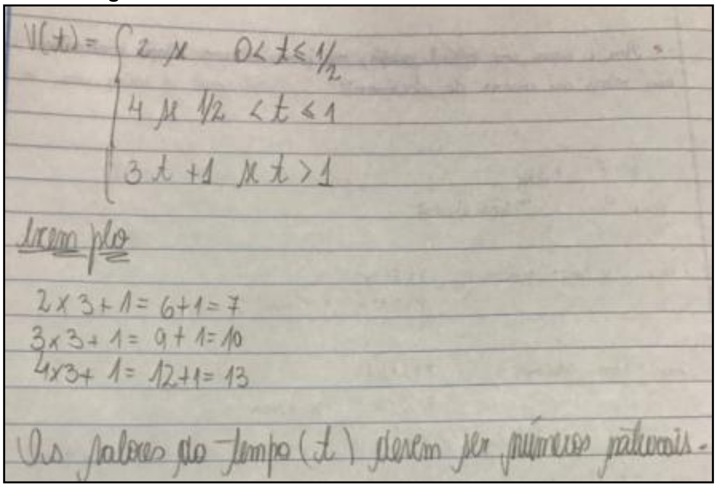



Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

*Questão seis*: “Pense e escreva uma possível equação, na forma de uma relação matemática que represente os valores de cobrança do estacionamento”. No primeiro momento, essa havia sido a questão na qual os alunos apresentaram maior dificuldade, pois ainda não tinham trabalhado com representação de função por partes. Foi possível perceber que, após as discussões, explicações entre pares, entre grupos, com questionamentos da professora e com ajustes feitos após testarem valores para validar o modelo, puderam aprimorar as expressões em gráficos que haviam feito na aula anterior, representando adequadamente. Entenderam que representaram o valor a ser pago durante os primeiros trinta minutos, ou meia hora, que era de R$ 2,00; a partir dessa meia hora e até fechar uma hora o valor era de R$ 4,00, e esse era o valor que estava sendo representado no gráfico.

Por último, concluíram uma equação $y = 4 + 3t$ (cada hora adicional tinha o valor de R$ 3,00) e um aluno comentou *“Mas eu tinha percebido no meu trabalho que, se eu colocar ali 5 horas, não vai dar o preço de R$16,00 e sim de R$ 19,00”.* Outro aluno, então, respondeu: *“mas ali, precisamos colocar somente a hora adicional que a pessoa permanece no estacionamento, no caso, 4 horas; daí dá certo.”* Realmente era isso que acontecia, e surgiu um novo comentário: *“Mas, professora, se eu colocar* $y = 3t + 1$ *também é certo, né?”*. Os demais alunos analisaram, fizeram testes com diferentes valores e puderam perceber que de fato tinham um modelo da situação para tempos acima de uma hora de permanência. Com isso, chegaram a uma função do primeiro grau e essa foi, então, a equação utilizada para a sistematização desse tipo de função na etapa seguinte. A Figura 31 mostra a lei da função descrita pelo grupo, ainda com aspectos a aprimorar, como a condição sobre *t* na última parte da equação.

Figura 31 – Atividade seis do terceiro encontro




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Nessa atividade, foi possível perceber a diferenciação progressiva, pois o aluno foi exposto a uma nova situação, envolvendo conceitos relacionados com função, trabalhados anteriormente. Ainda nesse caso, observou-se que ele já transcreve de modo mais compreensível, de uma forma para outra, a representação de função e que enriqueceu seus conceitos, melhorando suas resoluções, tendo suas ideias progressivamente diferenciadas. Sendo assim, o discente pode reorganizar sua estrutura cognitiva, com seus conhecimentos prévios e os novos conceitos, e construir subsunçores mais estáveis para resolver situações de função do primeiro grau, confirmando o que Novak e Gowin (1996) afirmam, de que a aprendizagem nunca termina, mas vai sempre sendo enriquecida.

Dessa forma, a modelagem matemática cumpre seu papel, descrito por Burak (1992), de poder ser utilizada para explicar fenômenos presentes no cotidiano em paralelo com a Matemática, auxiliando na tomada de decisões.

Na sequência, ainda no terceiro encontro, foram feitos os questionamentos, apresentados a seguir, com o intuito de iniciar a construção dos conceitos relacionados com função do primeiro grau, através da sistematização das ideias que estavam sendo elaboradas sobre o conteúdo.

Aproveitando os valores que os alunos utilizaram, com naturalidade, para validar o modelo, como 2 horas, 3 horas e 4 horas, e encaminhando a observação de uma reta como modelo construído, foi proposta a eles uma situação hipotética considerando tempos de estacionamento somente de horas cheias.

Assim, apresentou-se aos alunos a seguinte situação:

"Supondo que uma pessoa fique no estacionamento durante t horas, quanto ela vai pagar se permanecer:

a) t = 1 hora
b) t = 2 horas
c) t = 3 horas
d) t = 4 horas
e) t = t horas, sendo t = horas cheias?"

Comentou-se então: num sistema cartesiano, esses tempos e os valores correspondentes formam pontos de uma reta. Os alunos escolheram a letra *e*, como já haviam antecipado quando encontraram que o modelo real é $y = 3t + 1$, prontamente, pois estavam pensando a situação modelada anteriormente, que os levou a essa equação. A partir disso, buscou-se que os alunos representassem de forma correta no plano cartesiano e observassem que os pontos pertencem a uma mesma reta.

Com isso, a professora foi introduzindo os conceitos, retomando a definição de função e depois passando ao de função de primeiro grau e de seus coeficientes, angular e linear, função crescente e decrescente, por meio de questionamentos que envolviam atividades que levassem os alunos a pensarem e concluírem algumas novas situações, descritas a seguir. Nessa discussão, todas as atividades ou questões propostas foram copiadas por todos em seus cadernos e apresentadas, oralmente, no grande grupo, com vistas a uma interação para que todos avaliassem as suas respostas e para que fossem discutidas as dúvidas ou os modos diferentes de pensar ou resolver. As questões propostas foram as seguintes:

a) *Quanto paga uma pessoa que estaciona por 5 horas?* Com facilidade o aluno respondeu R$ 16,00.

b) *E se ficar 8 horas?* Outro aluno respondeu que pagaria R$ 25,00 e explicou que pagaria três reais por hora, mais aquele R$ 1,00 correspondente à primeira hora.

c) *Quanto tempo ficou estacionado um carro, se o valor pago foi R$ 31,00?* Nessa atividade, o estudante respondeu que precisou igualar a equação a 31 e isolar o valor de *x*. Sendo assim, o tempo de permanência era de 10 horas.

d) *E se o pagamento for de R$ 46,00?* Nessa atividade, o aluno pensou em descontar dos 46 reais, um real da primeira hora e depois dividir os 45 por 3. Sendo assim, obteve êxito também na sua resposta, que foi 15 horas.

e) *Como fica a representação no sistema cartesiano de pontos (t, v) sendo v o valor do estacionamento por t horas de permanência?*

Os estudantes resolveram essa atividade em seus cadernos e a professora somente corrigiu na lousa, para que eles percebessem que não havia tempo antes do zero, e mostrou que, para essa situação, seria feita uma reta, que serviria para introduzir os conceitos. Eles deviam fazer somente os pontos, com os valores inteiros de t.

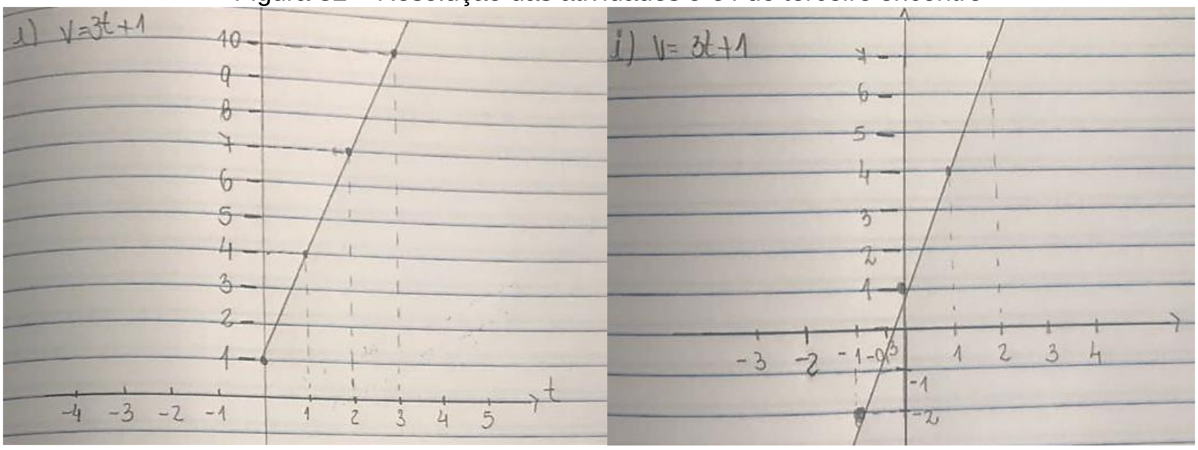
f) *Quanto varia o valor do estacionamento a cada hora de permanência?* O discente que respondeu logo soube dizer que variava R$ 3,00.

g) *Onde aparece esse valor na equação* $v(t) = 3t + 1$*? E qual o nome desse termo numa equação desse tipo? Alguém lembra?* O aluno que respondeu essa atividade soube dizer que era o valor que estava junto com a variável t, mas não lembrava o nome desse termo. Outro colega disse que era coeficiente angular, "*que tinha na folhinha de atividades que fizemos."*

h) *Qual o sentido do 1 nessa equação? Esse valor é uma quantia a ser paga nesse estacionamento?* Nesse caso, o aluno respondeu que ninguém paga R$ 1,00 nesse estacionamento. Outro aluno disse: *"mas também ninguém fica zero horas no estacionamento".* Sendo assim, compreenderam que, para a situação do estacionamento, não fazia sentido, mas que era relacionado com zero. A professora pediu que registrassem que "*isso acontece, porque essa equação, como situação do estacionamento, só vale a partir de 1h de permanência*".

i) *Mas, se for numa situação qualquer, em que v é uma variável real que depende de um valor qualquer t do conjunto dos números reais? Nessa situação, como ficaria a representação dos pontos (t, v) no sistema cartesiano?* Cada aluno realizou essa atividade em seu caderno, como na letra *e.* Depois, a professora desenvolveu as ideias numa resolução na lousa e discutiu com os aprendizes, para que todos verificassem e adequassem os seus gráficos. A ideia que tinham estava correta, simplesmente precisavam prolongar a reta sobre os pontos que representaram na letra *e*, para mais valores. A Figura 32 mostra a resolução da atividade letra *e*, seguida pela resolução da letra *i*.

Figura 32 – Resolução das atividades *e* e *i* do terceiro encontro



Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

j) *E então, nesse caso geral, o que representa o 1 nessa equação* $v(t) = 3t + 1$*?* O aluno disse que era onde a reta cortava o eixo y, e a professora destacou o ponto (0,1) no gráfico do quadro, confirmando que era onde o gráfico cortava o eixo y, das ordenadas.

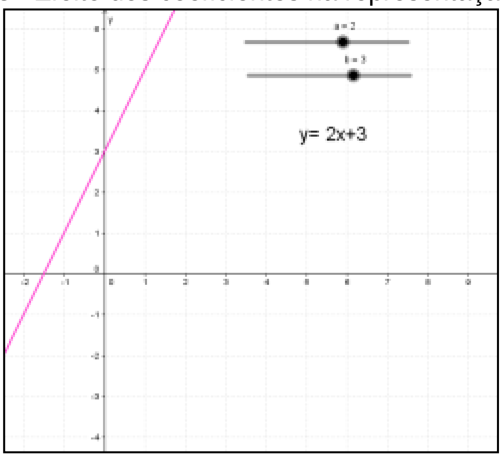
Com isso, a professora iniciou uma exposição dialogada, retomando os conceitos, apresentando-os na lousa, sobre a função afim, do tipo: $f(x) = ax + b$, em especial, da função do primeiro grau ($a \neq 0$), sendo *x* a variável independente da função. O coeficiente angular (*a*) determina se a função cresce ou decresce, pois indica a variação de $y = f(x)$ por unidade de *x*, e o coeficiente linear (*b*) determina o valor onde a reta intercepta o eixo y, pois determina o ponto (0, *y*) do gráfico da função.

Seguiu-se a discussão sobre a forma gráfica, que é sempre uma reta, fato causado por ser a variação de *y* constante por unidade de *x*; podendo ser crescente, decrescente, dependendo dessa variação (*a*) ser positiva ou negativa, indicando que y aumenta ou diminui (a) por unidade de x. Observou-se também o caso de ser uma função constante, quando y não varia (*a* = 0) sendo então $y = f(x) = b$.

Foi destacado o conceito de zero da função, que algebricamente é o valor de *x* que torna *y* igual a zero e, geometricamente, é o valor onde a reta intercepta o eixo x.

A discussão e a análise dos coeficientes foram conduzidas com o apoio do *software GeoGebra*, para favorecer as conclusões por parte dos estudantes, orientados por perguntas que direcionavam para o conceito pretendido. A apresentação do *GeoGebra* foi da forma que mostra a Figura 33, e conforme a professora ia alterando o controle deslizante para *a*, os alunos puderam perceber que alterava a forma da reta em crescente, decrescente ou constante. Assim também, conforme se alteravam os valores de *b*, alterava-se o ponto onde a reta interceptava o eixo y.

Figura 33– Efeito dos coeficientes na representação da reta




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

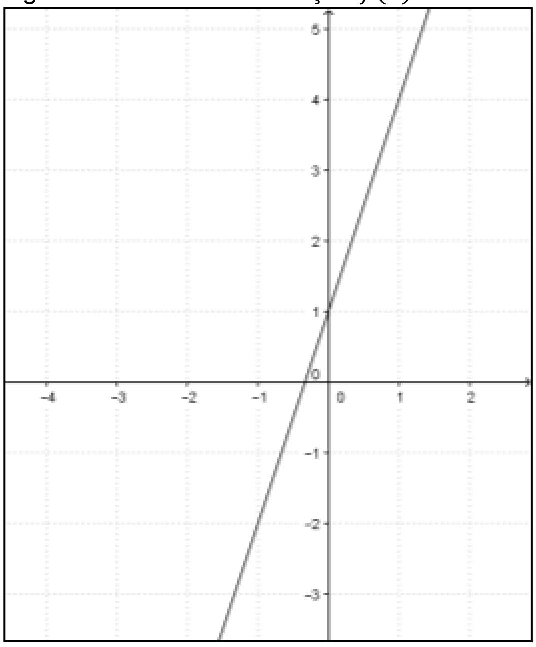
Feita essa sistematização dos conceitos, com questionamentos e discussões que auxiliavam a diferenciação progressiva que promove a compreensão dos conceitos, foi discutido com os alunos sobre como se pode fazer a construção do gráfico de uma reta, sem utilizar (uma tabela de) pontos aleatórios, mas aplicando o significado dos coeficientes, isto é, do que cada um representa graficamente.

Com um exemplo na lousa, $f(x) = -3x + 6$, e de um primeiro modo, foi proposto que, analisando a equação, determinassem primeiramente se a função é crescente ou descrente e que pensassem porque seria de uma forma ou outra; em seguida, foi solicitado que identificassem o ponto onde a reta intercepta o eixo *y* e que o representassem no plano cartesiano; por fim, foi solicitado que calculassem o zero dessa função e também o representassem no plano cartesiano. Sendo reta, concluíram que era suficiente traçar uma reta unindo os dois pontos representados (0, 6) e (2, 0), para encontrar o gráfico da função. Foi proposto que fizessem, dessa forma, os esboços de mais alguns gráficos, a saber: a) f(x) = -2; b) f(x) = 3x-4; e c) y = -2x+5.

Antes de os estudantes representaram cada uma das retas, em seus cadernos, as três funções foram analisadas, procurando-se retirar informações das equações e caracterizando cada gráfico como reta crescente, descrente (e quanto crescia ou decrescia) ou constante, identificando coeficiente linear – por cálculo mental ou escrito –, os zeros das funções e distinguindo, nessas situações, o caso diferenciado da função constante apresentada na letra *a.*

Para finalizar essa etapa de apresentação e formalização dos conceitos, foi explorada com os alunos a forma de encontrar a lei da função a partir do seu gráfico. O gráfico abaixo (Figura 34) mostra a representação que a professora fez para os alunos no *software GeoGebra* da função $f(x) = 3t + 1$.

Figura 34 – Gráfico da função $f(x) = 3x + 1$




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Foi solicitado que os estudantes escolhessem pontos desse gráfico para que fosse possível determinar a lei que descreve essa função. Os alunos escolheram os pontos (0,1) e (1,4), pois eram de coordenadas inteiras bem visíveis, e a professora desafiou a que fosse determinada a equação $y = ax + b$, que descreve esse gráfico.

Prontamente, um aluno disse que o *b* era o valor onde cortava o eixo *y*, nesse caso, 1; sendo assim, iniciou-se escrevendo na lousa a lei como $y = ax + 1$. Na sequência, a professora questionou: "*no ponto (1,4), qual é o x e qual é o y*?". Os alunos responderam que 1 era o valor de *x*, e 4, o valor de *y*. Então, a docente solicitou que substituíssem em $y = ax + 1$ esses valores. Os alunos substituíram e encontraram $4 = 1a + 1$, determinando que o valor de $a = 3$.

Dessa forma, a função que descreve esse gráfico é $y = 3x + 1$. A professora pediu, então, que observassem que antes tinham a função e traçaram o gráfico e, agora, a partir do gráfico, puderam escrever a lei da função representada por ele.

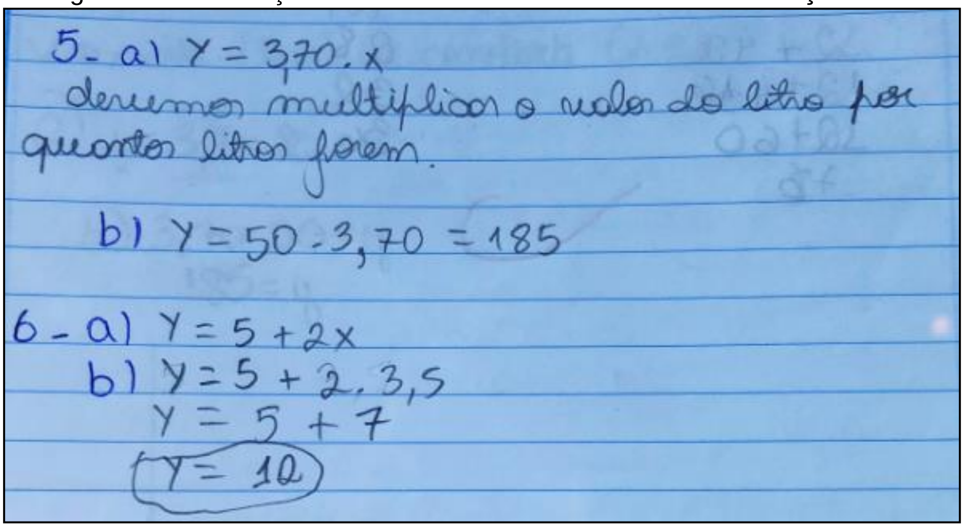
Em seguida, foi analisada a variação de t para cada unidade de x. *Se x = 0, qual é o valor de y?* (Os alunos responderam 1); *se x = 1, qual será o valor de y?* (Os alunos responderam y = 4); *se x=2, qual será o valor de y?* (Os alunos responderam y = 7); e assim sucessivamente, para que percebessem que, a cada unidade de x, y aumenta 3 unidades, atribuindo-se assim o devido significado do conceito de coeficiente angular.

Nesse terceiro encontro, houve, então, a introdução de conceitos referentes à função afim, em que o aluno partiu de uma situação do cotidiano, modelou-a matematicamente utilizando os conceitos que tinha em sua estrutura cognitiva e pôde ir aprimorando conforme o passo a passo descrito, podendo compreender os conceitos e avançando na aprendizagem com significado. De acordo com Burak (1992), o objetivo da modelagem matemática é explicar matematicamente situações do cotidiano do aluno, chegando mais próximo da realidade. Se o modelo conseguir conectar polos, entre situações do cotidiano e a Matemática, isso será essencial para se promover uma aprendizagem com sentido para o aluno.

No quarto encontro, na "Gincana de função do 1º grau", em que havia situações variadas na forma de representação e diferentes contextos, alguns alunos já tinham domínio dos conceitos, outros precisaram da ajuda dos colegas para resolver as atividades. Nas situações-problema, ficou claro que o aluno tinha mais facilidade em resolver o que lhe era proposto, pois não “substituía” valores apenas, ele pensava no real significado daqueles valores e podia associar com o conteúdo, conectando polos, dando sentido à sua aprendizagem.

A Figura 35 mostra a resolução das atividades 5 e 6 da gincana. Na primeira, os alunos tinham o valor cobrado pelo litro de gasolina e precisavam determinar a lei que descreve a função, para qualquer quantidade de litros, e, também, determinar o valor pago por 50 litros. Na segunda atividade, os estudantes tinham o preço fixo cobrado por um taxista, mais o valor cobrado por quilômetro rodado. Era solicitado que eles determinassem a lei que descreve essa função e também o preço pago por alguém que percorreu 3,5 km, como mostra a Figura 35.

Figura 35 – Resolução das atividades 5 e 6 da “Gincana de Função Afim”




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

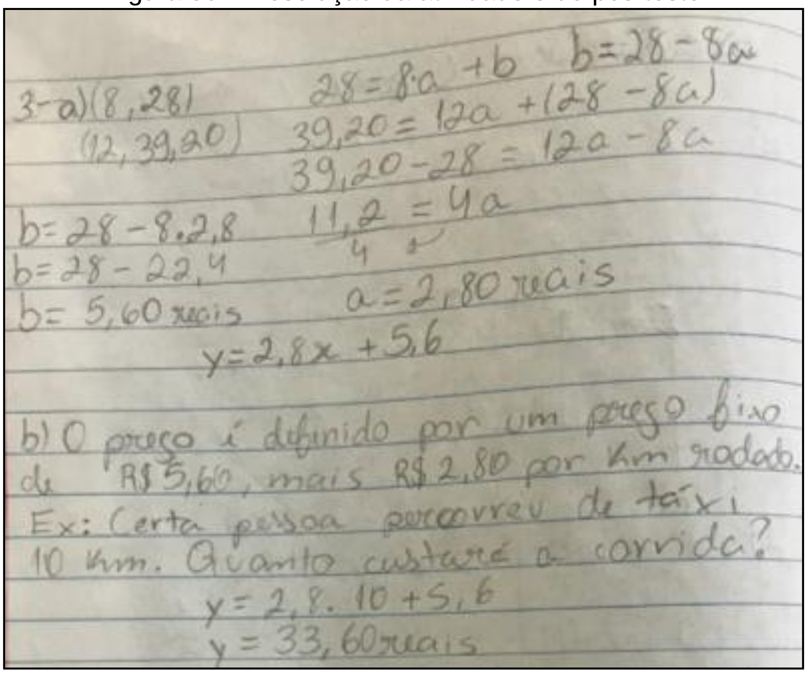
Dessa forma, é possível perceber que o aluno compreendeu os conceitos envolvidos, pois interpretou a situação proposta, pôde justificar o modelo matemático encontrado e validá-lo, aplicando o valor pago por 50 litros de gasolina.

Foi possível notar, também, que o discente conseguiu compreender o modelo que descreve o valor cobrado por um taxista, durante uma corrida. Tendo a taxa fixa, mais o valor cobrado por km rodado, o estudante relacionou-os com a forma da equação, aplicando os conceitos aprendidos, pois conseguiu calcular o valor cobrado para quem percorre 3,5 km.

No quinto encontro, as atividades do pós-teste relacionavam-se a diferentes formas de representação de função. A atividade 3 (Apêndice E), por exemplo, em que apareciam dois valores cobrados por um táxi para determinadas quantidades de quilômetros rodados, em que se questionava o valor fixo cobrado e a variação a cada quilômetro percorrido, deixou os alunos bastante surpresos, por ser mais uma situação real, com valores verdadeiros, que eles, talvez, não imaginassem poder utilizar na aula. Transformar os valores de uma corrida de táxi em uma função matemática, isto é, em um modelo matemático, e poder determinar os valores cobrados por quantidades quaisquer que pudessem pensar deixou-os ainda mais surpresos, bem como determinar as quantidades da variável independente, partindo de um valor final da função.

Ausubel (2003) afirma que o material só será potencialmente significativo se atingir cada aluno em sua particularidade, com mecanismos que o levem a diferenciar progressivamente e a reconciliar de forma integradora, podendo dar sentido, do seu modo, à situação do cotidiano que lhe é proposta. A Figura 36 mostra a forma de resolução da atividade 3, por um aluno, que demonstrou compreender os conceitos e aplicá-los em novas situações, descrevendo as hipóteses envolvidas.

Figura 36 – Resolução da atividade 3 do pós-teste




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Nesse encontro do pós-teste, foi possível perceber indícios de que houve a compreensão conceitual de forma significativa. O estudante compreendeu as situações propostas envolvendo conceitos matemáticos, bem como extra matemáticos, resolvendo-as corretamente. O aluno demonstrou alegria, ao compreender novos conceitos e resolver outros problemas em Matemática. Como descreve Moreira (2006), o indivíduo aprende significativamente quando ele pode associar o que já sabe com a nova informação e aplicar em outras ideias, de forma adequada. Nesse estudo, obtiveram-se indícios de que tenha ocorrido essa compreensão conceitual, em que o novo conhecimento, aprendido em um tipo de situação, serviu de subsídio para a resolução de outras.

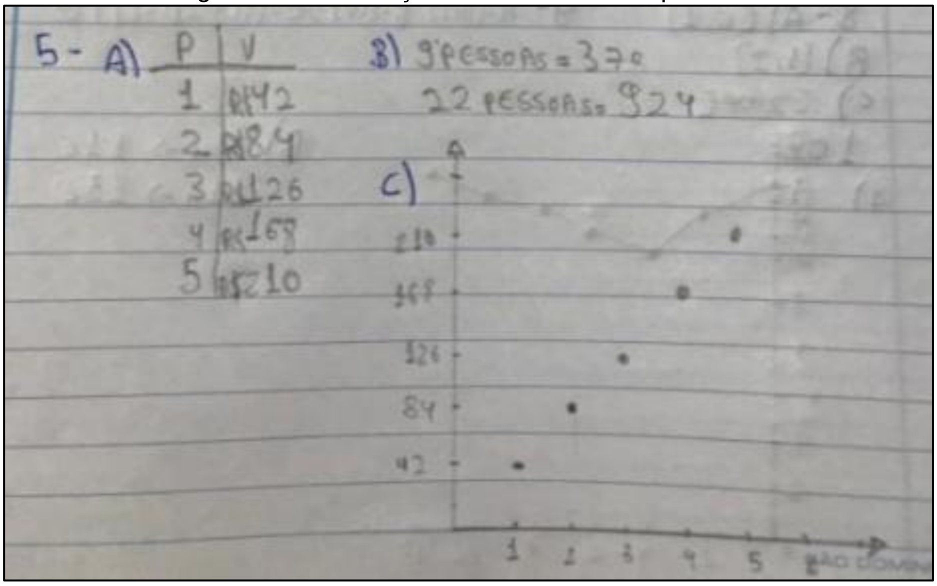
## 5.5 CONSTRUÇÃO E MANIPULAÇÃO DE REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS

Nessa categoria, foram consideradas situações em que o aluno soube transcrever as funções de uma para outra dentre as diversas formas de representação: algébrica, gráfica, verbal ou em tabela. Ao proceder assim, o estudante dá indícios de que teve êxito na construção dos conceitos de função do primeiro grau, de forma significativa, sem que nada tenha sido decorado. Ele desenvolve, durante o processo, um mecanismo de elaboração de significado, compreendendo de forma própria o que aprendeu.

Nessa categoria, foi possível observar essa aquisição do conhecimento, ao percorrer os encontros de estudo. Cada representação pode favorecer a compreensão da função e, assim, ir de uma representação para outra, sendo uma forma de diferenciar progressivamente e de promover, pela compreensão das diferentes formas de expressão da função, a reconciliação integradora.

No primeiro encontro, na atividade 5 (Apêndice A) do pré-teste, os alunos tinham o preço cobrado por pessoa, em uma pizzaria (R$ 42,00), e precisavam representar na forma de tabela os preços pagos por determinados números de pessoas e representar esses valores no plano cartesiano, definindo as variáveis dependente e independente. Os discentes compreenderam a atividade e representaram de uma forma para outra. A Figura 37 apresenta a representação da função na forma de tabela e depois reproduzida na forma gráfica.

Figura 37 – Resolução da atividade 5 do pré-teste



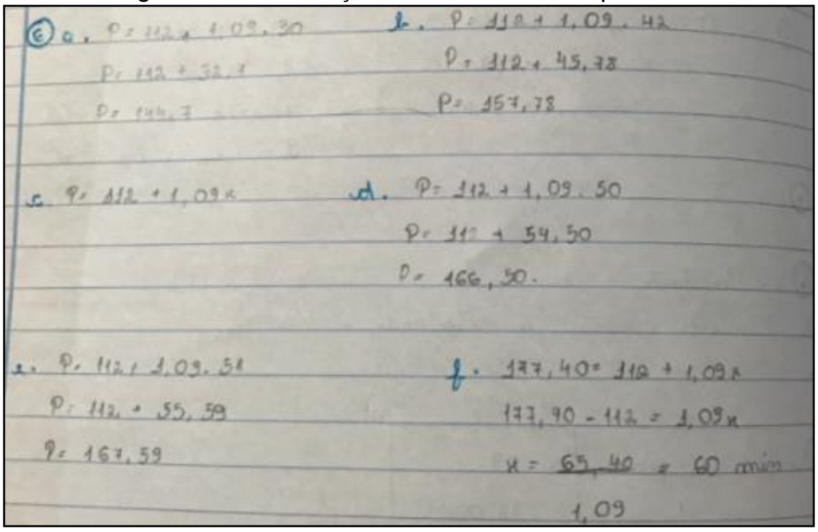
Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Na discussão dessa atividade, foi possível perceber que todos os alunos construíram adequadamente a tabela com alguns valores cobrados na pizzaria, dependendo do número de pessoas, e, na letra *c*, um estudante apenas uniu os pontos do gráfico, não distinguindo, por distração, como ele comentou, que o número de pessoas é uma variável discreta. Sendo assim, nessa situação, eles mostraram conhecer as formas variadas de representação de uma função.

Na atividade 6 (Apêndice A), os alunos tinham uma situação-problema e precisavam representa-la na forma algébrica, interpretando-a, até elaborar a lei que a descrevesse. Essa atividade apresentava o valor pago por uma empresa de telefonia, com taxa fixa de R$112,00 e mais R$1,09 por minuto adicional.

Nas letras *a*, *b*, *d* e *e* dessa atividade, foi solicitado os valores a serem pagos em alguns casos variados de minutos falados no mês, e a maioria dos estudantes, mais de 80%, calculou-os corretamente. Os que erraram não somaram o valor da taxa fixa mensal. Na letra *c*, deviam apresentar o valor pago ao serem falados *x* minutos, e apenas um aluno colocou a variação na taxa fixa mensal, invertendo os dados fornecidos. Na letra *f*, para determinar os minutos falados em determinado valor de conta mensal, o mesmo estudante errou, outra vez, por desconsiderar a mesma taxa fixa. A Figura 38 mostra a resolução do aluno que interpretou corretamente o problema, resolvendo todas as questões dessa atividade e apresentando estratégias para cada cálculo, mostrando compreender a forma algébrica e a sua utilização para obter uma ou outras das variáveis solicitadas.

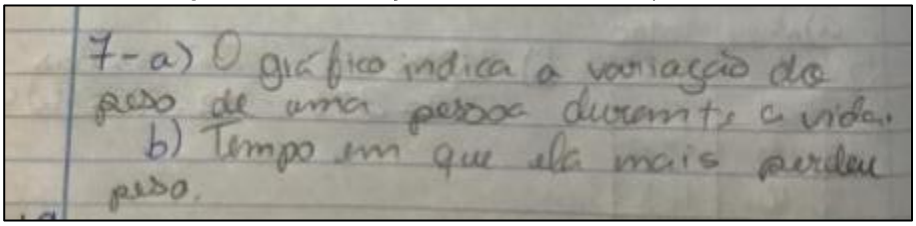
Figura 38 – Resolução da atividade 6 do pré-teste




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Na atividade 7 (Apêndice A), os discentes precisavam interpretar o gráfico, que apresentava a variação do peso de uma pessoa, ao longo de sua vida, e explicar verbalmente as informações que ele mostrava. Somente 8% dos alunos não acertaram. Os demais explicaram de forma correta, interpretando o que o gráfico representa, como mostra a Figura 39:

Figura 39 – Resolução da atividade 7 do pré-teste

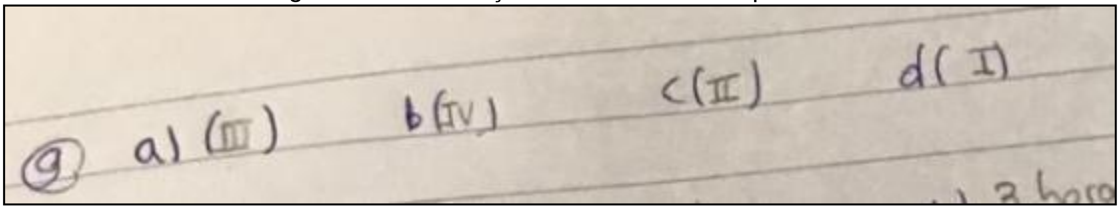



Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Na atividade 9 (Apêndice A), os alunos precisavam associar a função na forma algébrica com a sua forma gráfica, dado um conjunto de cinco funções expressas algebricamente e quatro gráficos. Um aluno não resolveu a atividade, e os demais acertaram, mas não justificaram como pensaram para chegar ao resultado. A Figura

40 apresenta a maneira como um deles associou a equação com a forma gráfica, apenas com a resposta final. De fato, no pré-teste, os estudantes mostraram que sabem fazer, não conseguindo ainda justificar as resoluções, dando indícios de que não dominam significados ou de que não têm o hábito de refletir sobre eles.

Figura 40 – Resolução da atividade 9 do pré-teste




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

No segundo encontro, os aprendizes envolveram-se com a modelagem matemática de uma situação do cotidiano, referente aos valores cobrados em estacionamentos da cidade, dependendo do tempo de permanência. Os grupos tinham situações diferentes e, na sequência, foram descritas e apresentadas algumas partes da atividade. Alguns grupos trabalharam com a modelagem matemática, uma forma de representar a situação proposta, representando-a nas mais variadas formas.

A questão proposta foi: *pense e escreva uma possível equação, na forma de uma relação matemática, que represente esses valores da cobrança do estacionamento.* Houve dificuldade e, inicialmente, os alunos não conseguiram representar de forma satisfatória o valor cobrado no estacionamento relacionando-o com uma função matemática. Como os valores eram diferentes, alguns grupos, que tinham a variação do preço apenas pela variação por horas de permanência, puderam representa-la mais rapidamente, demonstrando maior facilidade, mas os demais, cujo valor era diferente em intervalos diferentes de tempo, tiveram uma grande dificuldade em representa-la. A professora auxiliou os alunos com novos questionamentos, para que pudessem realizar a atividade com êxito. Foi possível perceber que os estudantes tinham a noção de representação da função na forma algébrica, de forma geral, mas no caso de serem leis diferentes em intervalos de tempo diferentes, como ocorre em muitos estacionamentos, não puderam representar cada uma delas.

Esse encontro foi planejado com o passo a passo da modelagem matemática, descrita por Biembengut e Hein (2003), o qual é dividido em outras três etapas, que serão feitas nos subcapítulos que seguem.

### 5.5.1 Interação com o assunto

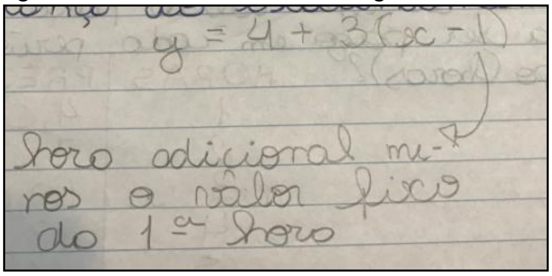
A primeira etapa é aquela em que o aluno se familiariza com o assunto, reconhecendo a situação-problema, entrando em contato com o assunto da pesquisa. Nessa interação, houve uma conversa inicial, para um aprofundamento do conhecimento sobre o tema, com questionamentos sobre estacionamentos, já descritos anteriormente, referentes à forma de escolha, forma de cobrança e onde costumam estacionar. Nesse momento, segundo Borssoi e Almeida (2004), o aprendiz prepara a sua estrutura cognitiva para a aprendizagem de novos conceitos. O aluno interagiu com o professor e com os colegas, no momento em que estavam em grupos, expondo suas ideias e explorando informações de forma oral, dinâmica e em grupo.

### 5.5.2 Matematização

Nessa etapa, o aluno tem a situação-problema, e precisa modelá-lo matematicamente, de forma a representá-la utilizando conceitos matemáticos. Todo o processo é anotado, para que, sendo necessário, o estudante possa voltar e corrigir a situação proposta, a fim de que haja sucesso no modelo encontrado. Lemos (2006) sugere indícios que evidenciam uma aprendizagem significativa, se o aluno é o centro do processo, sendo o próprio responsável pelo evento de aprendizagem.

O modelo matemático foi todo construído por meio da análise das sentenças propostas e auxiliando o aluno a ir percebendo a sua evolução; primeiro ele calculou valores de forma aleatória, depois representou alguns de forma crescente e na forma de tabela, após na forma gráfica, e, por fim, na forma algébrica. Na Figura 41, aparece a representação dos valores cobrados em um estacionamento que cobra R$ 4,00 pela primeira hora e R$ 3,00 por hora adicional.

Figura 41 – Atividade seis do segundo encontro




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Nessa imagem, é possível perceber que o aluno representou o valor cobrado no estacionamento de forma correta, considerando a hora adicional de três reais, sendo descontada a primeira hora, já que está sendo cobrado um valor de quatro reais.

### 5.5.3 Modelo Matemático

Nesse momento, é preciso perceber se o modelo tem validade e se ele se aproxima da situação-problema. Nesse caso, é preciso aplicar outros valores ao modelo para verificar se de fato ele é confiável. Os alunos, em seu próprio material, foram fazendo suposições de outros valores para verificar se o modelo encontrado estava de acordo. Sempre que não fosse correto, poderiam voltar e reorganizá-lo. Após esse trabalho inicial, em grupos, os estudantes socializaram com toda a classe o modelo que organizaram. Puderam conversar e organizar algumas situações que não haviam compreendido, verificando a validade dos modelos propostos pelos grupos. A Figura 42 mostra uma aluna apresentando para os colegas o modelo encontrado pelo seu grupo, e os demais grupos testando a sua validade.

Figura 42 – Alunos validando os modelos construídos pelos grupos

Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Nesse encontro, então, foi possível perceber a Matemática presente em situações do cotidiano, e a modelagem serve, especialmente, a esse fim, como afirma Bassanezi (2002), em que é preciso extrair informações do problema principal para reescrever e representar em um ambiente abstrato, um ambiente matemático. Constata-se, dessa forma, que os alunos puderam fazer isso.

As etapas e o próprio processo de modelagem matemática têm como objetivo a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos na situação-problema. É necessário o movimento de ir e voltar entre modelo e situação-problema, para que sejam supridas as lacunas de entendimento da situação e do modelo. Foi possível, assim, ver a passagem de uma forma de representação para outra, em que o discente tinha a situação-problema e precisou representá-la em outras variadas formas (gráfica, algébrica e numérica).

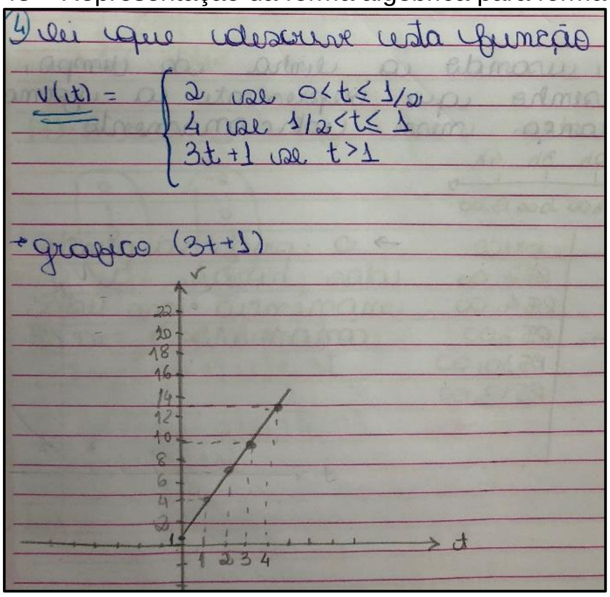
Biembengut e Hein (2003) afirmam que a modelagem matemática e a Matemática devem andar juntas, pois em muitas situações do cotidiano há conceitos matemáticos e, para isso, basta ter criatividade e alguns conhecimentos de conceitos para obter êxito no modelo encontrado.

Nesse encontro da modelagem matemática, foi possível perceber que o novo conceito se relacionou com conceitos que havia na estrutura cognitiva do aluno (subsunçores), como descreve Moreira (2006). Ou seja, houve a diferenciação dos conceitos antigos e a reconciliação para que se atingisse o êxito no modelo encontrado; as novas informações foram aprendidas significativamente, na medida em que foram relacionadas e integradas aos conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva dos alunos.

No terceiro encontro, foi feita a modelagem de uma situação proposta pela professora, com a participação e a discussão de todos os estudantes. Esse foi o momento em que o aprendiz reorganizou suas ideias, por meio de modificações que considerou necessárias, percebendo aspectos que antes não havia percebido; isso foi propiciado pelas explicações da professora para uma sistematização sobre conceitos de função do primeiro grau.

Durante a explicação de conceitos e os questionamentos apresentados pela professora, também houve a representação de formas múltiplas, momento em que os alunos precisavam transcrever de uma forma para outra a situação proposta, como mostra a Figura 43, na qual o estudante precisou representar da forma algébrica para a forma gráfica, o gráfico de $f(t) = 3t + 1$, utilizando os conceitos de função do primeiro grau aprendidos e o valor modelado matematicamente, do preço cobrado no estacionamento situado em frente à escola.

Figura 43 – Representação da forma algébrica para forma gráfica




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

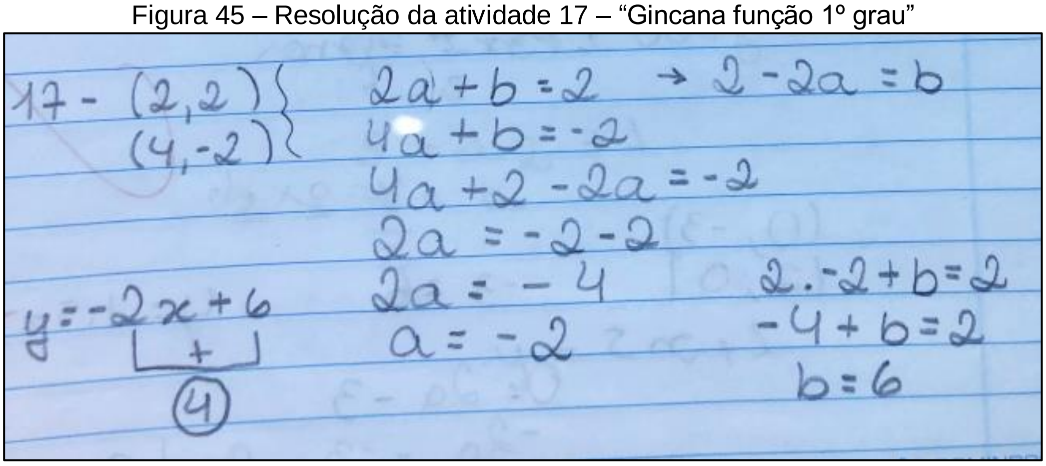
No quarto encontro, durante a “gincana de função do 1º grau”, os conceitos apareciam em variadas formas e situações, e o aluno precisava criar mecanismos próprios para resolver as atividades. Os discentes precisaram transcrever de uma forma para outra as funções envolvidas, de acordo com a situação-problema proposta. Os estudantes trabalharam em grupos para apresentar as resoluções aos colegas e à professora, descrevendo como pensaram para chegar à solução encontrada. A Figura 44 mostra os alunos de um dos dois grupos, discutindo e resolvendo as atividades.

Figura 44 – Alunos resolvendo os desafios do quarto encontro

Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

A Figura 45 mostra a forma como um aluno resolveu a atividade 17, da Gincana, em que se apresentava as coordenadas de dois pontos do gráfico de uma função $f(x) = ax + b$ e era solicitado que determinassem o valor de $a + b$. Nessa atividade, o estudante utilizou um sistema para determinar a lei que descreve a função, sabendo transcrever de uma forma para outra, encontrando a solução para a questão proposta.

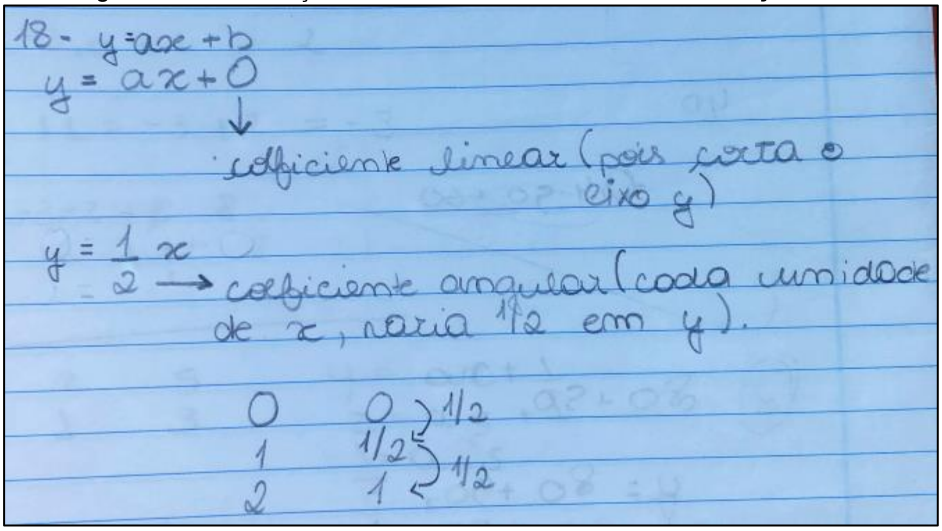
Figura 45 – Resolução da atividade 17 – “Gincana função 1º grau”



Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Na atividade 18 (Apêndice D), na qual havia um gráfico, o aluno precisava determinar a função que descreve aquele gráfico. O mesmo grupo que resolveu a atividade anterior na forma de sistema, agora, encontrou outra estratégia para resolver a sua atividade, utilizando o conceito de coeficiente linear e angular, como mostra a Figura 46.

Figura 46 – Resolução da atividade 18 – “Gincana de Função Afim”

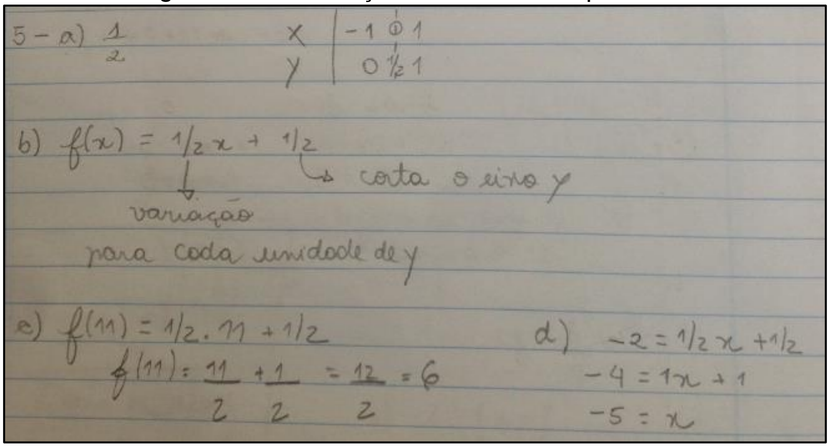



Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

No quinto encontro, durante o pós-teste, como as atividades tinham o intuito de revelar a evolução dos alunos, em vários exercícios era necessária a representação múltipla, em que o aprendiz precisava compreender os aspectos matemáticos de cada forma de representação de função, para poder transitar entre os conceitos, demonstrando, assim, se a aprendizagem foi significativa, como afirma Borssoi e Almeida (2004).

Na atividade 5 (Apêndice E) do pós-teste, os alunos precisavam analisar a função graficamente, representá-la algebricamente e compreender mais alguns conceitos para responder os questionamentos. A Figura 47 mostra a resolução de um aluno, que demonstrou capacidade de representação e tradução própria da função, de uma forma para outra, compreendendo os conceitos envolvidos e obtendo êxito na resolução da atividade. É possível perceber que ele criou uma estratégia para conhecer a variação de y para cada unidade de x, elaborando uma tabela com os valores do gráfico, observando a variação nesse intervalo e justificando as suas respostas de forma correta.

Figura 47 – Resolução atividade 5 do pós-teste




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

De acordo com Borssoi e Almeida (2004), a compreensão conceitual ocorre quando o aluno pode associar o que ele já sabe com o novo conteúdo, adotando estratégias para resolver as atividades e tomando decisões certas no momento da modelagem matemática. A compreensão dos conceitos é o ponto principal para a aprendizagem significativa, e foi possível encontrar indícios disso, quando o estudante mostrou compreender os conceitos e representar de uma forma para outra as funções com os conteúdos extra matemáticos envolvidos.

## 5.6 APLICAÇÃO DO CONHECIMENTO A SITUAÇÕES NOVAS

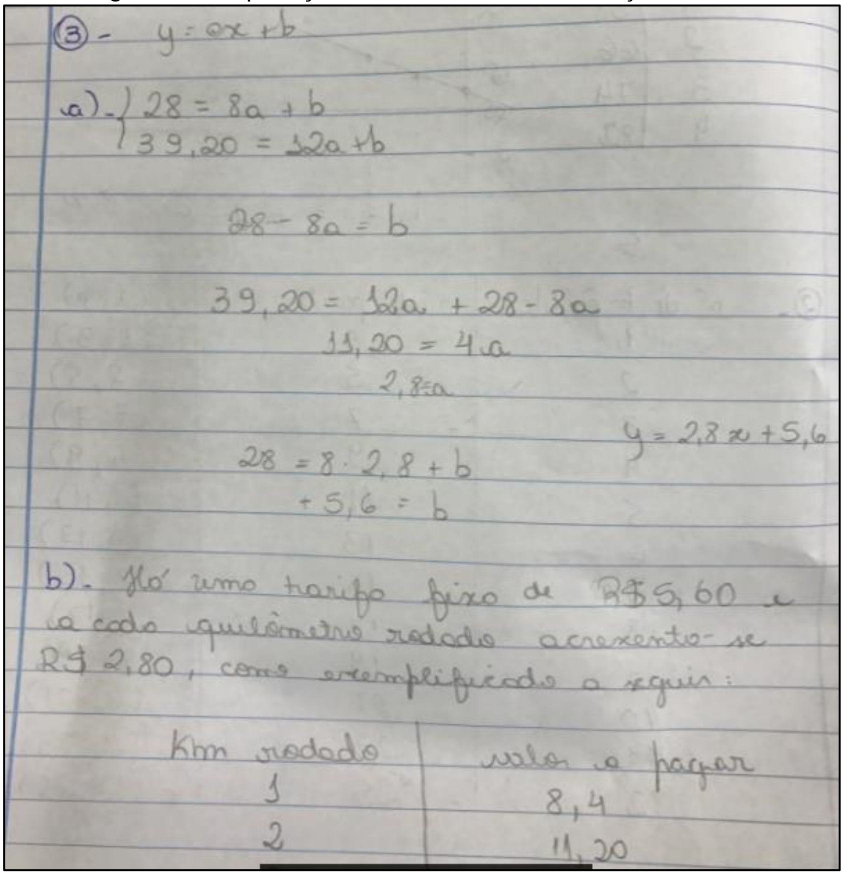
O interesse na avaliação desta categoria está em verificar se, nas situações propostas aos alunos durante os encontros, houve evolução no entendimento dos conceitos. Com efeito, isso ficou evidente ao se reconhecer que podiam aplicá-los em diferentes e novas situações, em relação, principalmente, às formas variadas de representação. Quando isso acontece, de acordo com Borssoi e Almeida (2004), é possível dizer que houve uma aprendizagem com significado para o aluno.

No momento em que o aprendiz vai progressivamente alterando os seus subsunçores, atribuindo significados diferenciados e podendo aplicá-los em outras situações, é quando são fortalecidas as aprendizagens com significado; como descreve Moreira (2010, p. 6), são momentos em “que a aprendizagem significativa decorre da interação não-arbitrária e não-literal de novos conhecimentos com conhecimentos prévios (subsunçores) especificamente relevantes”.

No decorrer dos encontros, conforme os conceitos iam sendo abordados, os alunos precisavam aplicá-los em novas situações, em diferentes tipos de situações de apresentação de uma função para analisá-las, relacionando-as com outras que conheciam para resolver problemas e obter os resultados solicitados.

Assim foi, por exemplo, o caso em que o aluno precisava modelar uma situação do cotidiano, relacionada com o valor cobrado pelo táxi durante uma corrida. O estudante percebeu que, a cada quilômetro rodado, o valor da tarifa aumentava em R$ 2,80, e, tendo uma taxa fixa de R$ 5,60, soube construir e validar o modelo encontrado, como mostra a Figura 48. Nesse caso, é possível observar a aplicação do conhecimento em novas situações, diferentes daquelas que foram modeladas em aula, em uma resolução que se diferencia muito de uma mera repetição. O discente resolveu na forma de sistema de equações, criando um mecanismo para resolver a situação.

Figura 48 – Aplicação dos conceitos em situações novas


③ - $y = ax + b$

a) $\begin{cases} 28 = 8a + b \\ 39,20 = 12a + b \end{cases}$

$28 - 8a = b$

$39,20 = 12a + 28 - 8a$

$11,20 = 4a$

$2,8 = a$

$y = 2,8x + 5,6$

$28 = 8 \cdot 2,8 + b$

$+5,6 = b$

b) Há uma tarifa fixa de R$ 5,60 e a cada quilômetro rodado acrescenta-se R$ 2,80, como exemplificado a seguir:

| Km rodado | valor a pagar |
|---|---|
| 1 | 8,4 |
| 2 | 11,20 |

Fonte: Banco de dados da autora (2017).

Moreira (2010) afirma que as situações novas devem ser propostas durante todo o processo de ensino e aprendizagem; assim, o aluno estará acostumado a resolver situações envolvendo conceitos trabalhados e também buscando estratégias próprias para resolver.

Nesse momento, foi possível observar indícios de aprendizagem significativa, pois o aluno precisou ir refinando e diferenciando progressivamente os conceitos de função do primeiro grau, tendo, possivelmente, estabelecido reconciliações entre a forma de representação e a sua aplicação, para dar significado a conceitos ainda instáveis, integrando as diferenças que impediam de serem compreendidos, como descreve Moreira (2010, p. 12), ao explicar que a aprendizagem com significado "implica compreensão, transferência, capacidade de explicar, descrever, enfrentar situações novas".

## 5.7 RETENÇÃO DO CONHECIMENTO POR LONGO TEMPO

Em relação à essa categoria de análise, apresenta-se o resultado da avaliação que foi aplicada depois de duas semanas do encerramento da aplicação da sequência didática proposta, na forma de uma avaliação geral, como é costume da Escola, que envolve todos os assuntos estudados durante todo o trimestre. No caso dessa avaliação, os conteúdos envolvidos foram: função do primeiro grau, teorema de Tales e regra de três.

O tempo entre o fechamento das atividades e a avaliação geral pode não ter sido muito extenso, e não há referência a quanto tempo se refere Ausubel (2003) ou Borssoi e Almeida (2004) no que se refere à “retenção por mais tempo”; o que se entende é que em situações futuras o estudante que aprende significativamente pode acessar o conhecimento, do seu pensamento, e aplicá-lo ou mesmo aprimorá-lo ao utilizá-lo para novas aprendizagens.

No caso desta pesquisa, na avaliação geral da escola, além de ter acontecido duas semanas depois, considera-se o fato de que, entre o estudo de funções e a aplicação dessa prova, foram estudados outros conteúdos. Em relação a esse mesmo tipo de avaliação, em anos anteriores, observou-se que houve, com essa experiência, um avanço significativo na aprendizagem dos alunos, o que se observou no desenvolvimento de todos os exercícios aplicados.

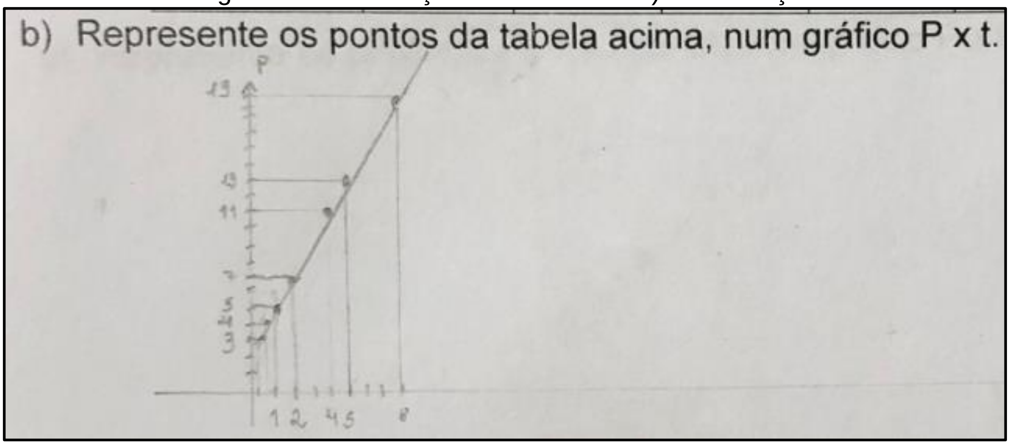
A forma como as atividades eram propostas na avaliação de anos anteriores – é preciso que se reconheça – envolvia pouca ou nenhuma exigência de raciocínio. As questões eram diretas e se evocava, basicamente, a aplicação de fórmulas, o que levava os estudantes a decorá-las e, por consequência, os que aprendiam o faziam por uma aprendizagem muito mais mecânica do que significativa.

Com isso, refletindo-se agora, era comum que fossem cometidos erros muito elementares pelos alunos, e isso era justificável. Agora, no entanto, as questões foram de um grau de complexidade maior, envolveram mais conceitos, exigindo uma análise de cada ideia envolvida e o entendimento do que aprenderam; só assim poderiam resolver os tipos de questão que lhes foram propostas.

Certamente, essa nova forma de desenvolver a aprendizagem está pautada em uma forma diferenciada de abordar os conceitos, e desse modo encontraram-se indícios de que houve aprendizagem, pois as resoluções refletiram ideias e pensamentos, com menor incidência de erros nas resoluções e respostas das questões.

A Figura 49 apresenta a forma como um aluno resolveu uma das atividades da avaliação, em que havia uma situação do preço pago pelo tempo de permanência em um estacionamento, na qual era necessário transcrever de uma forma de representação matemática para outra, encontrando um modelo matemático que descrevesse a situação. A figura mostra que o estudante representou na forma gráfica os valores cobrados pela hora cheia de permanência no estacionamento e os expressou corretamente na tabela; depois traçou a reta solicitada e escreveu a sua forma algébrica.

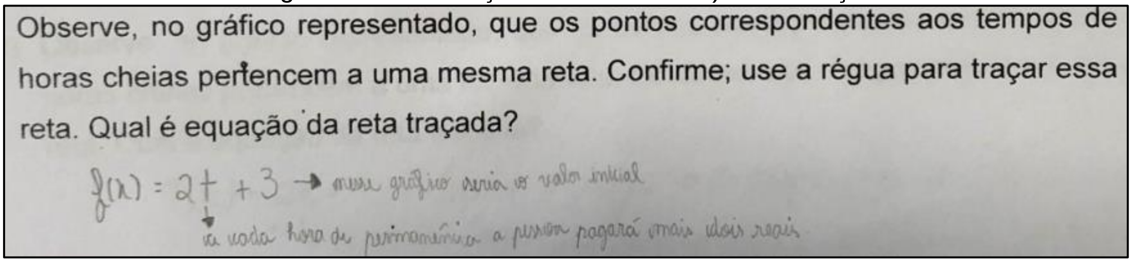
Figura 49 – Resolução da atividade 2b) da avaliação




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

A Figura 50 mostra o modelo encontrado por um aluno, para representar a reta traçada, conforme era solicitado. Ele justificou de forma certa os coeficientes da função, pois o valor do coeficiente linear é o valor inicial, cobrado pelo estacionamento na primeira hora, e o coeficiente angular é a variação paga por hora adicional.

Figura 50 – Resolução da atividade 2c) da avaliação




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017)

Com essas análises, foi possível perceber que os conceitos puderam ser resgatados, depois de um certo tempo, na estrutura cognitiva do aluno. Constata-se, assim, que se tem indícios da ocorrência da aprendizagem significativa. O estudante tem um estímulo para resolver as atividades, pois compreende o que está fazendo e tem estratégias para resolver e modelar matematicamente a situação-problema, em um curto período de tempo (MOREIRA, 2010).

Com aprendizagem significativa, o que é novo "trata-se de um conhecimento dinâmico, não estático, que pode evoluir e, inclusive, involuir" (MOREIRA, 2010, p. 4), pois, com o passar do tempo, o indivíduo domina os conceitos e se dispõe a novas aprendizagens.

A avaliação final possuía atividades semelhantes às do pré-teste e às do pós-teste, envolvendo as quatro formas de representação de função e situações-problema diversas, para que o aluno pudesse apresentar e demonstrar o que tinha compreendido de conceitos.

As atividades foram planejadas para promover a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora. Da diferenciação progressiva, buscaram-se indícios em situações que envolvem as diferentes formas de representar função do primeiro grau, ao verificar se o discente distinguiu e operou corretamente em cada forma e se foi capaz de traduzir de uma forma para outra, enriquecendo e modificando os conceitos, tendo suas ideias gerais progressivamente diferenciadas. À medida que esse processo foi se desenvolvendo, procurou-se reconhecer, como consequência, a reconciliação integradora, destacando indícios de que houve uma reorganização na sua estrutura cognitiva, com compreensão de conceitos, construindo estratégias para resolver novas e variadas situações que envolveram função do primeiro grau. No que segue, a última parte da análise dedica-se a buscar indícios desses dois aspectos fundamentais que se distinguem na aprendizagem que se almeja como significativa para os alunos.

## 5.8 PROGRESSO DAS APRENDIZAGENS

Essa categoria de análise não é considerada explicitamente dentre os aspectos apontados por Borssoi e Almeida (2004). No entanto, para esta pesquisa de aprendizagem significativa na escola, considera-se importante destacar o progresso das aprendizagens, inclusive como demonstração de um processo de avaliação formativa que percorreu o desenvolvimento da sequência didática. Optou-se por relatar essa distinção, com a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora, pois, segundo Ausubel (2003), são aspectos (imprescindíveis ou fundamentais) importantes a serem evidenciados como indícios de aprendizagem significativa. Para essa análise, observaram-se as estratégias que os alunos utilizaram nas resoluções das situações propostas, procurando por aquelas que revelaram entendimento, especialmente, por apresentarem resoluções que não se caracterizem como mera repetição de aplicação de fórmulas; essa atividade de repetição deve ser deixada para as máquinas, como afirmam Toledo e Toledo (1997).

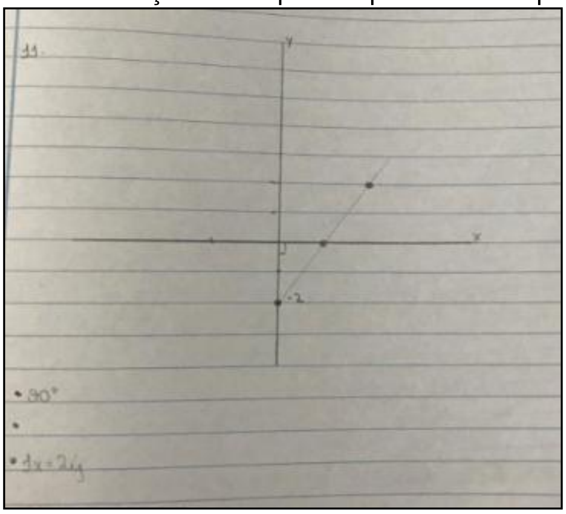
Assim, nesta pesquisa, a diferenciação progressiva foi considerada ao se constatarem indícios de que o aluno compreendeu cada uma das maneiras de representar uma função, podendo transcrever de uma forma para outra, apropriando-se dos conceitos, progressivamente. Já a reconciliação integradora foi observada quando o estudante apresentou indícios de ter organizado a sua estrutura cognitiva com os novos conhecimentos, podendo resolver situações variadas que envolvam funções do primeiro grau nas suas diferentes formas de representação.

Como relato dessa análise, apresenta-se o acompanhamento de três estudantes, identificados como E1, E2 e E3, na resolução de um mesmo tipo de atividade, nos instrumentos de pré-teste, pós-teste e na avaliação final. As atividades não são as mesmas e os estudantes também são diferentes em relação à forma como desenvolveram suas aprendizagens.

A primeira aluna, E1, é bastante dedicada e, mesmo assim, tem dificuldades no entendimento de conceitos matemáticos; em geral, apresenta lacunas em conteúdos básicos para a aprendizagem de Matemática. Na sala de aula, normalmente, precisa de um acompanhamento mais individualizado. Além disso, percebe-se que precisa estudar “muito” e, mesmo assim, apresenta dificuldades.

Analisando as primeiras resoluções dessa aluna, no instrumento de pré-teste, observou-se que E1 não conseguiu resolver várias questões; contudo respondeu algumas corretamente e soube justificá-las, deixando outras parcialmente resolvidas, por terem parte da resolução ou por não ter conseguido justificar o que era apresentado. Abaixo, a Figura 51 mostra que a estudante não conseguiu representar o ponto (0,-2) no plano cartesiano para, a partir daí, traçar uma reta por outro(s) ponto(s) obtido(s), avançando-se uma unidade em x e o correspondente y aumentando duas unidades. Nessa questão em específico, os alunos precisavam identificar os coeficientes linear e angular dessa reta, bem como a equação da função f cujo gráfico é a reta representada.

Figura 51 – Resolução de E1 para a questão 11 do pré-teste

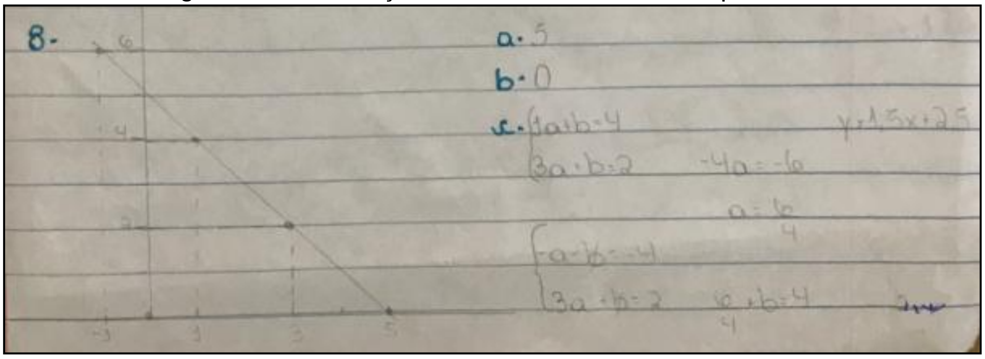


Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

No pós-teste, entretanto, observou-se um aumento de questões corretamente resolvidas e justificadas, estando as demais parcialmente corretas ou sem argumentos sobre como foram obtidos resultados encontrados.

A Figura 52 mostra como E1 representou adequadamente o gráfico, mas ainda não identificou os valores do coeficiente linear e angular, e também não conseguiu determinar a lei da função da questão oito, a qual tentou encontrar utilizando a forma de sistema. É possível perceber que E1 compreendeu a forma de determinar a lei da função e que conseguiu resolver o sistema de equações.

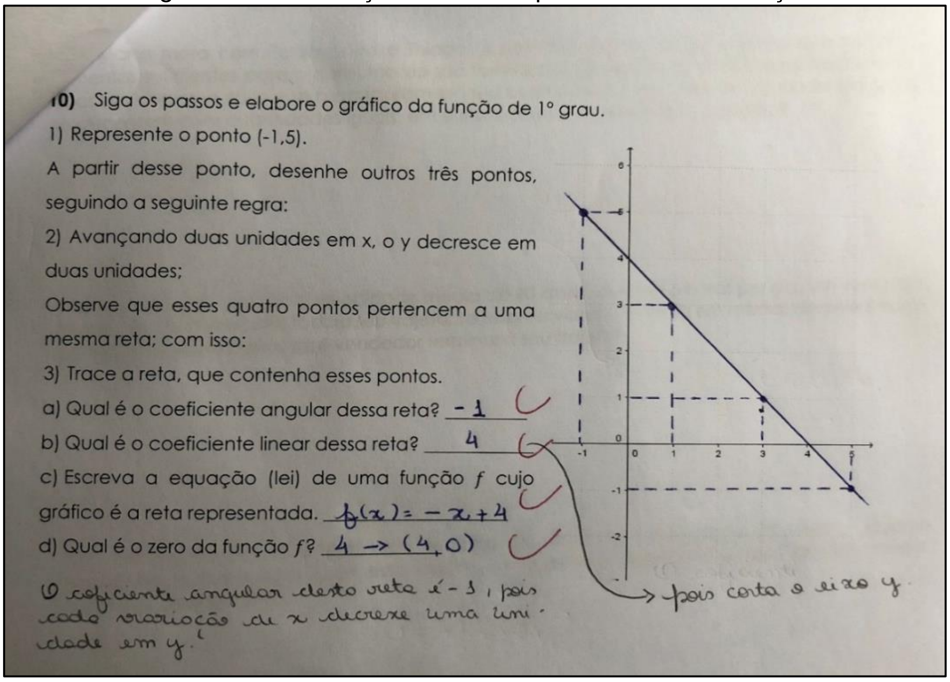
Figura 52 – Resolução de E1 da atividade 8 do pós-teste



Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Já na avaliação final da Escola, é possível perceber que, no mesmo tipo de questão, E1 determinou corretamente a lei da função, o coeficiente linear e coeficiente angular, nesse momento sem utilizar sistema de equações, demonstrando ter aplicado o significado desses coeficientes, como consta na Figura 53, especialmente ao se observar a justificativa que apresenta ao final da resolução.

Figura 53 – Resolução de E1 da questão 10 da avaliação




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

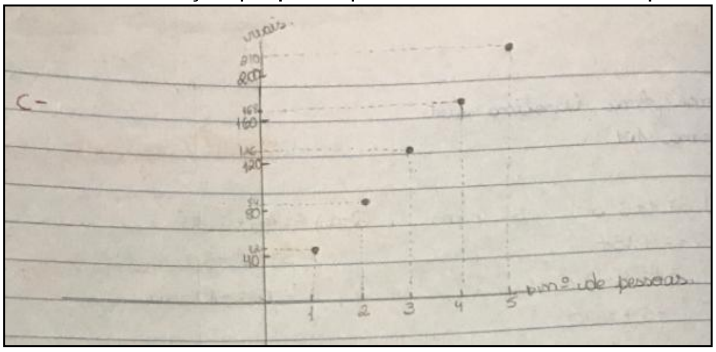
Observando o progresso das resoluções do pré-teste, pós-teste e da avaliação, tem-se indícios de aprendizagem significativa e de que o material foi potencialmente significativo, pois levou a aluna a pensar e a criar estratégias próprias para resolver as situações, podendo associá-las ao cotidiano. Os estudantes precisam estar predispostos a aprender, e isso aconteceu com E1, que se envolveu nas atividades, sendo perceptível o seu avanço, como demonstrado nas resoluções aqui analisadas.

É possível também perceber indícios de diferenciação progressiva, quando E1 aprimora conceitos que, aparentemente, ainda estavam em construção. Isso aconteceu em situações do pré e do pós-teste, em que ela pôde ir relacionando aquilo que já sabia com os novos conceitos trabalhados. À medida que esses conhecimentos são enriquecidos, acontece a reconciliação integradora; quando o aluno pode reorganizar esses conceitos na sua estrutura cognitiva, aprimorando o seu significado, com os materiais que pode acrescentar, ampliando seus detalhes e dando uma nova configuração ao tema de estudo. Esses indícios, de que houve aprendizagem significativa, são descritos por Novak e Gowin (1996). Quando há sensação de "*ah! Entendi!*", houve aprendizagem e foi possível perceber que resultou de um processo progressivo de construção do conhecimento, em que cada etapa, cada nova aprendizagem servia de suporte para aprender mais e compreender melhor.

O segundo aluno, E2, faz as atividades solicitadas, mas não possui envolvimento e dedicação além do que é necessário. Apresenta ou fala pouco de dificuldades e demonstra poucas lacunas em conteúdos anteriores. Em geral, não precisa de acompanhamento em sala de aula, não é de estudar "muito" e garante um bom desempenho. No que segue, é feita uma análise das representações gráficas de atividades realizadas por E2.

Analisando como se desenvolveu no decorrer da sequência didática proposta, no pré-teste, pode-se perceber que ele resolveu praticamente todas as questões, metade delas corretamente e justificadas, sendo as demais parcialmente resolvidas ou sem justificativas para os resultados que encontrou. A Figura 54 mostra que E2 respondeu ao que era solicitado na atividade 5, que representasse, em um plano cartesiano, os preços cobrados em uma pizzaria, em função do número de pessoas, que estavam representados em uma tabela.

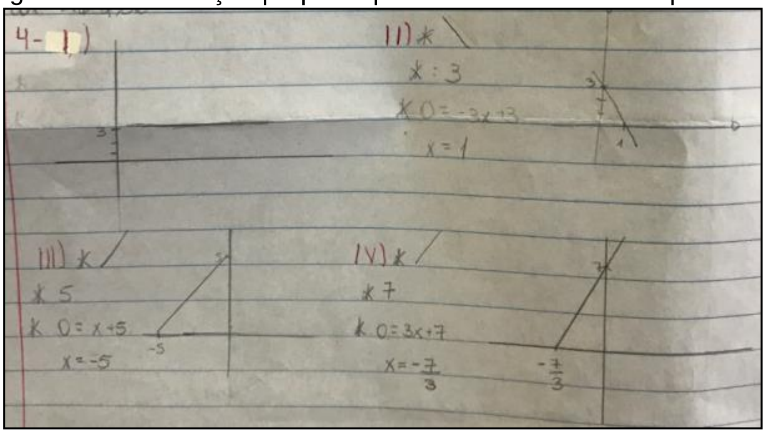
Figura 54 – Resolução proposta por E2 da atividade 5 do pré-teste



Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

No pós-teste, poucas questões não foram resolvidas adequadamente, aumentou o número de resoluções corretas e justificadas, e poucas estavam parcialmente certas ou justificadas. A Figura 55 mostra que E2 representou adequadamente todas as questões sobre representação gráfica na atividade 4, mas não considerou, em todas, a forma geral das representações dando a ideia do domínio real dessas funções. Nas demais atividades, E2 continuou acertando a maior parte dos exercícios em que era necessário transcrever da forma algébrica para forma gráfica, e manteve essa maneira "resumida" de fazer as representações.

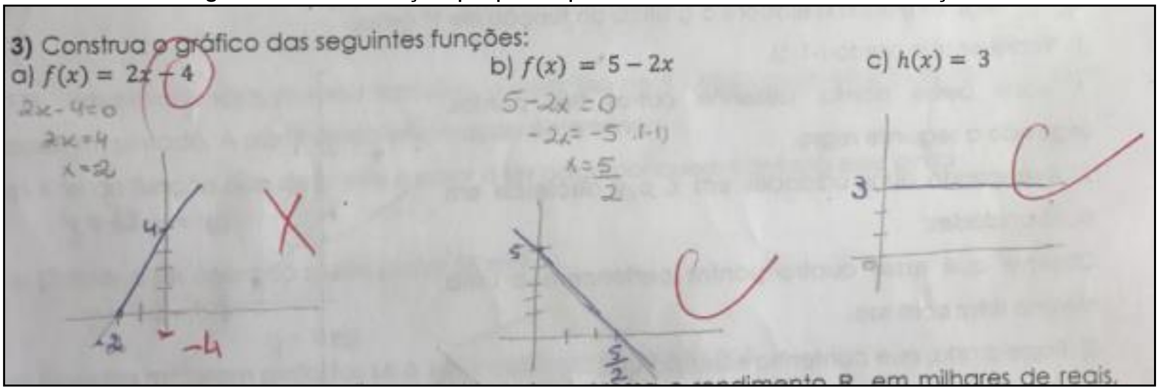
Figura 55 – Resolução proposta por E2 da atividade 4 do pós-teste



Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Já na avaliação final, no mesmo tipo de questão, E2 demonstrou um domínio maior das situações, entendendo as funções em seus domínios e apenas em uma não usou adequadamente o coeficiente linear; o que pode ter sido um equívoco ou um impulso de responder sem atentar para o que fazia, como acontece em uma aprendizagem mecânica, pois a reta interceptou o eixo y no ponto (0,4) ao invés de interceptar no (0,-4).

Figura 56 – Resolução proposta por E2 da atividade 3 da avaliação




Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

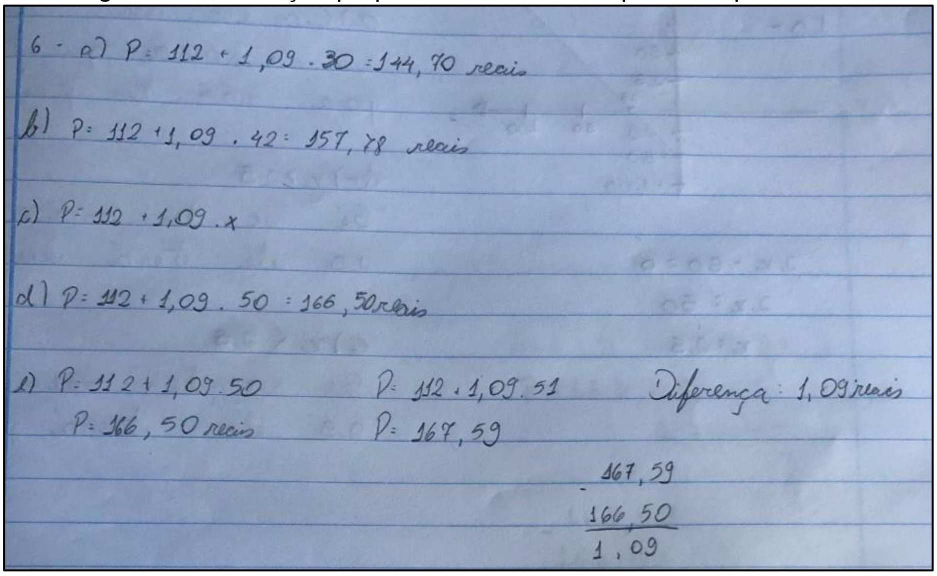
No conjunto das atividades, considerou-se que E2 promoveu a aprendizagem significativa para a representação gráfica, pois encontraram-se indícios de que houve diferenciação progressiva e de reconciliação integradora. A diferenciação progressiva pôde ser observada a partir do pré-teste, em que as resoluções apresentaram uma evolução na aplicação dos significados dos conceitos, pois foram sendo abordados com mais detalhes, dando indícios de modificação e enriquecimento no entendimento dos conceitos, reconhecendo-se assim progressos no pós-teste e na avaliação final. Nesse processo de retomada e de aprimoramento, o que foi propiciado pela sequência didática planejada com acompanhamento, discussões, interações, questionamentos é que vai propiciar a reconciliação integradora, como descrevem Moreira e Buchweitz (1993).

O terceiro aluno, E3, é bastante dedicado e não possui maiores dificuldades em Matemática. É um aluno que, durante as aulas, resolve tudo de forma rápida e satisfatória e mostra compreender o que lhe é proposto e o que resolve. Será analisada, desse aluno, a transcrição da forma verbal para a forma algébrica das situações propostas.

Quanto ao seu desempenho na sequência didática proposta, durante o pré-teste, ele só não resolveu uma das questões, tendo argumentado que não conseguiu terminar no tempo proposto; a maior parte das questões foi resolvida e adequadamente justificada, e algumas foram bem resolvidas, mas não foram justificadas. Portanto, ele apresentou boas resoluções para todas as questões que resolveu.

A Figura 57 mostra a resolução que E3 apresentou na atividade 6 do pré-teste, determinando a lei da função de uma empresa de telefonia que cobra uma quantia fixa de R$ 112,00, com internet inclusa e torpedos ilimitados, mais uma parcela variável de R$1,09 por minuto falado, quando a chamada partir do celular. Nota-se que E3 também calculou valores de acordo com a lei que determinou.

Figura 57–Resolução proposta atividade 6 do pré-teste por E10 da



6 - a) P: 112 + 1,09 . 30 : 144,70 reais

b) P: 112 + 1,09 . 42 : 157,78 reais

c) P: 112 + 1,09 . x

d) P: 112 + 1,09 . 50 : 166,50 reais

e) P: 112 + 1,09 . 50 P: 112 + 1,09 . 51 Diferença: 1,09 reais

P: 166,50 reais P: 167,59

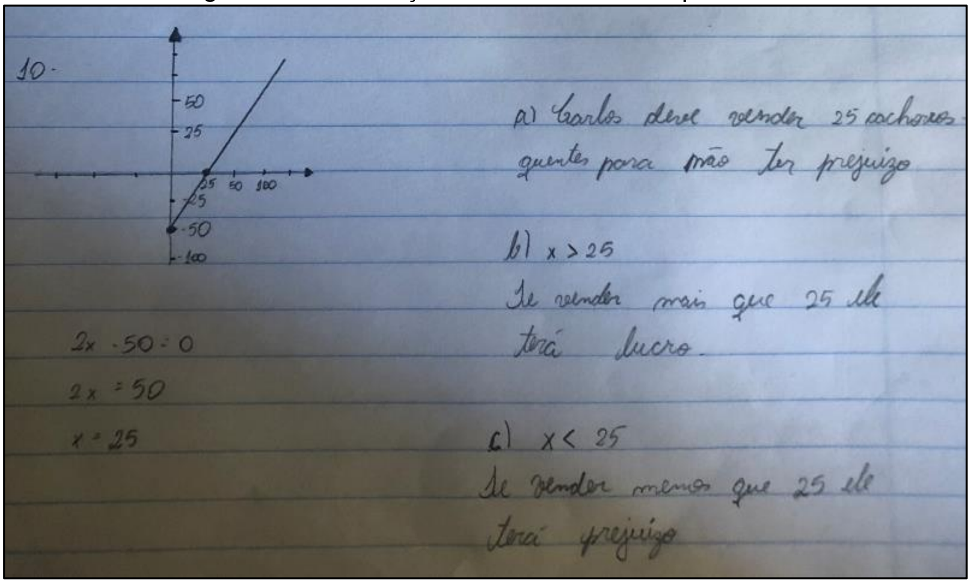
167,59 - 166,50 = 1,09

Fonte: Banco de dados da pesquisa (2017).

Na sua resolução, ele apresenta poucas contas, opera como que em pensamento e apresenta poucas justificativas para o que o resolve. Entretanto é possível perceber que raciocina com lógica e que aplica o que significa cada dado nas resoluções, indicando que compreende os conceitos que utiliza.

Durante o pós-teste, outra vez resolveu corretamente todas as questões, mas não apresentou justificativas em todas e algumas não estavam adequadamente justificadas. A Figura 58 mostra que o aluno soube interpretar a situação e resolver a atividade de acordo com o que era solicitado. A questão 10 fala de uma banca que vende cachorro-quente, que tem o lucro descrito pela lei $L(x) = 2x - 50$ e para a qual se questionava quantos cachorros-quentes deveriam ser vendidos para que houvesse lucro, prejuízo ou nenhum nem outro. Nesse caso, observa-se que o aluno apresenta como justificativa a leitura, em outra forma, da resposta que encontra, apesar de sugerir com a conta abaixo do gráfico, que partiu do pensamento.

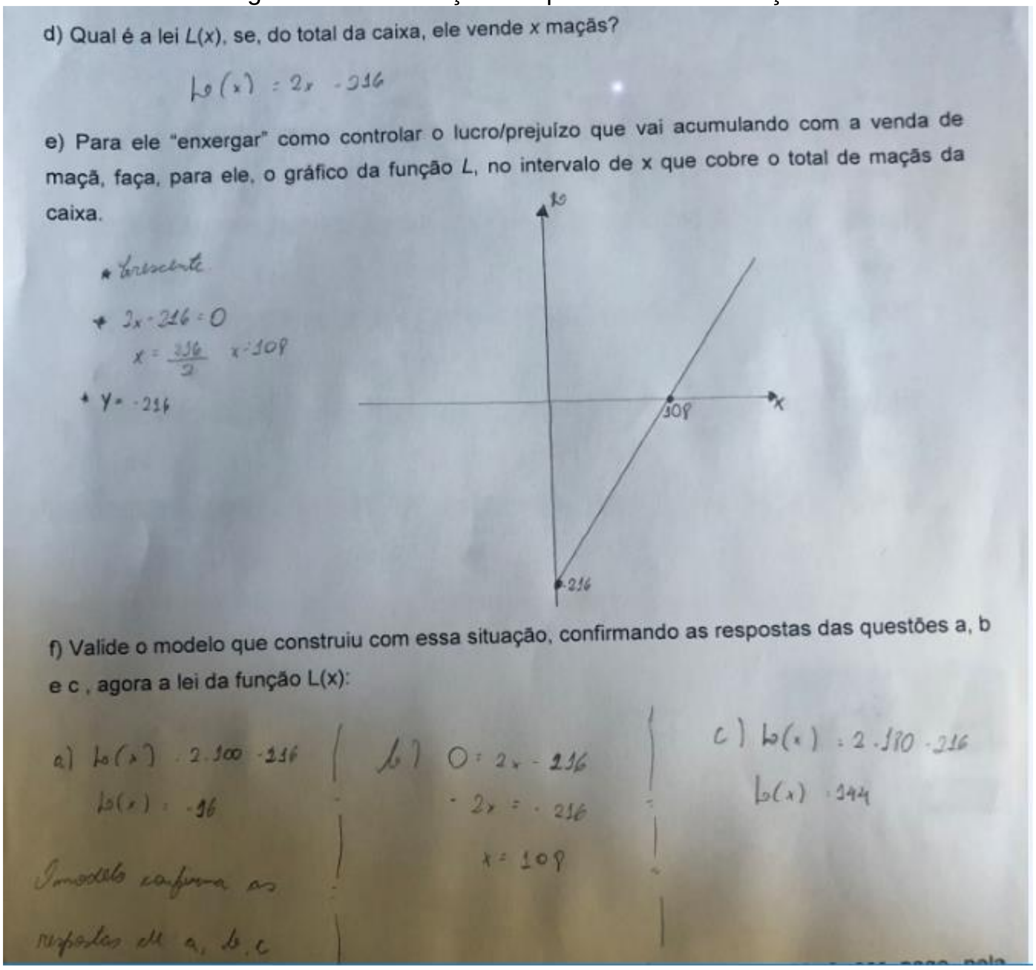
Figura 58 – Resolução da atividade 10 do pós-teste




Fonte: Banco de dados da autora (2017).

Na avaliação final, foi possível perceber que, no mesmo tipo de exercício, E3 acertou e justificou todas as questões, mostrando que a sequência didática também pode ajudar os alunos sem muita dificuldade, a construírem os conceitos, aprimorando-os, como mostra a Figura 59, que é um recorte da questão 1 da avaliação final. O aluno tinha uma situação referende ao lucro de um comerciante e determinou corretamente um modelo que descreve a situação, bem como o representou na forma gráfica e validou o modelo, confrontando valores calculados anteriormente.

Figura 59 – Resolução da questão 1 da avaliação


d) Qual é a lei $L(x)$, se, do total da caixa, ele vende $x$ maçãs?

$L(x) = 2x - 216$

e) Para ele "enxergar" como controlar o lucro/prejuízo que vai acumulando com a venda de maçã, faça, para ele, o gráfico da função $L$, no intervalo de x que cobre o total de maçãs da caixa.

- crescente
- $2x - 216 = 0$
  $x = \frac{216}{2}$ $x = 108$
- $y = -216$



f) Valide o modelo que construiu com essa situação, confirmando as respostas das questões a, b e c , agora a lei da função L(x):

a) $L(x) = 2 \cdot 100 - 216$
$L(x) = -16$

b) $0 = 2x - 216$
$-2x = -216$
$x = 108$

c) $L(x) = 2 \cdot 180 - 216$
$L(x) = 144$

O modelo confirma as respostas de a, b, c

Fonte: Banco de dados da autora (2017).

As condições para que ocorra a aprendizagem significativa, de acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980), podem ser percebidas analisando o material produzido por esse aluno. As condições são predisposição para aprender e material potencialmente significativo. Foi possível perceber que E3, que já era muito bom, interessou-se em realizar as atividades, buscando estratégias para atingir êxito na resolução das atividades.

É possível, também, afirmar que o material foi potencialmente significativo, pois o aluno continuou empenhado e conseguiu realizar, com bom desempenho, todas as atividades propostas nas aulas de Matemática, como já era de costume acontecer.

É possível encontrar indícios de que o estudante teve suas ideias gerais progressivamente diferenciadas, pois pôde distinguir, compreender, traduzir e representar as funções de formas diferentes, tornando-se apto a resolver situações mais complexas, compreendendo as propostas e aplicando os novos conceitos, integrando e reconciliando conhecimentos que foram sendo aprimorados.

Cada aluno, na sua condição, mostrou progressos de aprendizagem, evoluindo na sua particularidade e atingindo, cada um, pontos diferentes de chegada, pois como considera Ausubel (2003), as condições prévias são determinantes, juntamente com o material, como condições de aprendizagem. Certamente, tem-se consciência de que não é com uma estratégia diferenciada que tudo muda e pode ser aplicada para todos.

A lição que se aprendeu é de que fazendo diferente, com base em uma teoria que orienta e alicerça, é possível chegar-se a resultados variados, especialmente com os alunos que precisam de mais auxílio para aprender e compreender conceitos, ideias, representações e procedimentos de Matemática. O ponto de chegada a que se chegou com essas análises revela que a sequência didática planejada com situações do cotidiano, associada à modelagem matemática, pode contribuir para a construção de conceitos de função do primeiro grau, de forma significativa, avançando-se muito, também, na melhora das condições de aprendizagem oferecidas aos alunos, condições essas que mostram ser possível excluir o hábito ou a necessidade de apenas decorar.

# 6 PRODUTO EDUCACIONAL

Com os resultados oriundos dos estudos desta pesquisa, com a qual se planejou, elaborou, aplicou e avaliou uma prática de modelagem matemática para promover a aprendizagem significativa, foi produzido um material de apoio pedagógico na forma de planejamento de uma atividade de modelagem, comentado e ilustrado com a experiência que foi desenvolvida para ser compartilhada, de modo a servir de inspiração aos professores como material didático, principal ou complementar, para a abordagem de função do primeiro grau, na sua prática docente.

O planejamento da sequência didática (Apêndices A a G), aprimorado com essa experiência, é apresentado em um *website*[3], possível de ser acessado na página do Programa de Mestrado. Nesse material de apoio pedagógico, estão descritas as etapas para o desenvolvimento da aprendizagem significativa relacionada com um modelo matemático, conforme a prática desenvolvida nesta pesquisa.

O propósito dessa socialização é o de sugerir que outros professores possam conhecer, avaliar e adequar a sequência didática proposta aos perfis das suas turmas, às suas características didáticas e concepções pedagógicas, além de que, se acolherem o desafio de uma experiência inspirada na que foi relatada neste trabalho, ou em outro de aprendizagem significativa mediada por modelagem matemática, aceitem o convite de compartilhar novas ideias, para renovar o *website* desse produto educacional, e apresentar os resultados da sua prática, que certamente serão dependentes e característicos de outras realidades de escola, de alunos e de perfil docente.

[3] https://fernandammarchioro.wixsite.com/modelagemefuncao

# 7 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio deste trabalho, buscou-se atingir o objetivo geral, de *avaliar as contribuições da sequência didática, que utiliza modelagem matemática, para aprendizagem significativa dos conceitos de função do primeiro grau e de suas propriedades*. Esse objetivo decorreu do problema que mobilizou a pesquisa e o seu relato de dissertação: *Como uma sequência didática, planejada com a modelagem matemática de uma situação do cotidiano, contribui para a construção de conceitos sobre funções do primeiro grau, no sentido de desenvolver competências para a resolução de problemas e não para o uso fórmulas ou regras meramente decoradas?*

No planejamento das ações a serem realizadas, alguns objetivos específicos foram propostos, e contemplados, como providências estruturantes, encaminhadas para o percurso de alcance do objetivo geral e para construção de uma resposta ao problema de pesquisa.

Primeiramente, ressalta-se que, com a sequência didática planejada com a modelagem matemática, constatou-se que os alunos perceberam que a Matemática pode estar relacionada com o cotidiano, que é possível construir modelos para situações diferentes, podendo compreender conceitos relacionados a funções do primeiro grau, como foi o caso desta pesquisa, desenvolvendo a comunicação matemática escrita e oral sobre conceitos e ideias com as quais eles interagem individualmente e em grupos.

Dos resultados obtidos, observou-se que os alunos desenvolveram a aprendizagem com sentido e avançaram na capacidade de analisar e pensar sobre os conteúdos que integraram a sequência didática, podendo argumentar com palavras ou representações e apresentar indícios de que conseguem ler, representar e reconhecer formas variadas de uma função do primeiro grau.

Os alunos mostraram envolvimento e disposição para resolver as diferentes situações-problema das atividades de cada etapa da sequência didática, discutindo com os colegas de grupo, apresentando as resoluções para que fossem apreciadas, comentadas e ajustadas no grande grupo, e complementadas com explicações e fechamentos da professora, podendo assim compreender o significado de função do primeiro grau, não mais preocupando-se somente com resoluções mecânicas em instrumentos de avaliação, como era comum outrora acontecer.

Diante das observações e análises procedidas, considerando as etapas da modelagem matemática e das condições necessárias para ocorrência da aprendizagem significativa, evidenciou-se que a sequência didática, elaborada com fundamentos teóricos assumidos em todo o percurso da pesquisa, ao ser aplicada, apresentou indícios de ocorrência de uma aprendizagem significativa, revelando que os alunos demonstraram interesse e gosto pelo estudo, que houve construção de conhecimentos e de que estes foram reconhecidos e aplicados em diversas situações-problemas, que também envolveram o cotidiano, e que foi possível a integração de conceitos com outras áreas do conhecimento. Ressalta-se, ainda, a quebra do paradigma da repetição do conteúdo, pelo professor e depois pelo aluno, em atividades de aprendizagem e de avaliação da aprendizagem, dando lugar a discussões e à socialização de ideias e de aprendizagens em cada grupo de estudos e no grande grupo.

A modelagem favoreceu a compreensão de conteúdos, pois o assunto proposto despertou o interesse dos alunos, mostrou ter sido desafiador e ao alcance de todos. A convivência com os estudantes nessa experiência pedagógica, que serviu como pesquisa de mestrado, demonstrou que o discente desenvolve autonomia quando constrói conhecimento, atribuindo sentido ao que aprende; assim, constrói também mecanismos próprios para resolver situações do cotidiano. Esta é a satisfação maior que sente o professor, é a satisfação do dever cumprido, ao perceber que os conhecimentos propostos para serem aprendidos foram diferenciados progressivamente, sendo possível que muitos alunos atingissem situações de reconciliação integradora.

Foi possível confirmar que a sequência didática elaborada com a modelagem matemática, no ensino de função do primeiro grau, para promover a aprendizagem significativa, mais uma vez resultando em êxito, como anteciparam a fundamentação teórica e os demais trabalhos, relacionados com o tema desta pesquisa, e que foram apresentados nesta dissertação.

Não se quer dizer que a modelagem matemática é a solução para o ensino de função do primeiro grau, nem mesmo que os resultados, ao se desenvolver outra vez a mesma sequência didática deste estudo, serão os mesmos a que se chegaram; o aspecto principal com o que se corrobora é o de que a modelagem auxilia na compreensão dos conceitos. Houve, sem dúvida, momentos em que não se atingiram resultados que eram esperados, nem mesmo resultados que fossem satisfatórios para todos, porém, o que é certo é que, com a estratégia da modelagem, avançou-se, e muito, em propiciar condições para uma aprendizagem significativa, contribuindo significativamente para qualificar o ensino de função de primeiro grau.

Da autoavaliação, destaca-se, pelos comentários dos alunos, que a sequência didática teve atividades mais dinâmicas, aplicáveis ao dia a dia, questões que precisavam de “análise profunda” e entendimento, muito além de conteúdos decorados, sendo possível observar por eles mesmos que melhoravam a cada aula. De outros comentários, evidencia-se a compreensão dos conceitos a partir das atividades e que o trabalho em grupo auxilia no melhor entendimento dos problemas e da matemática que ajuda a resolvê-los.

O produto final que resultou dessa dissertação de mestrado é um material que será socializado na forma de *website* e artigos científicos a serem submetidos em eventos ou revistas da área da educação matemática. Toda a proposta estará disponível com o propósito de que outros professores possam conhecer, avaliar e adequar a sequência didática proposta aos perfis de suas turmas, em trabalhos de aprendizagem significativa mediada por modelagem matemática. Nesse *website*, também haverá um espaço para que professores possam compartilhar suas experiências utilizando essa proposta.

Por fim, reservou-se outra contribuição valorosa, relacionada à vida profissional da professora pesquisadora, pois fez com que ela refletisse e repensasse toda sua prática a partir desta pesquisa, buscando novas formas de abordar os conteúdos, de envolver os alunos em atividades de aprendizagem que os favoreçam a atribuir sentido para o que aprendem e a afastar-se cada vez mais de uma aprendizagem puramente mecânica. Os resultados da pesquisa serviram de inspiração para a programação de novas aulas, mais dinâmicas, com mais participação de quem deve aprender – que é o aluno –, e que buscam a integração da modelagem matemática, sempre que é possível em relação ao conteúdo trabalho, construindo outras propostas didáticas focadas em promover a aprendizagem significativa.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L.M.W.; SILVA, K.A.P. Por uma educação matemática crítica: a modelagem matemática como alternativa. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.12, n.2, p. 221-241, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, Karina Alessandra Pessôa da (orgs). **Modelagem Matemática em Foco.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2014.

ANASTÁCIO, M.Q. A. **Considerações sobre a modelagem matemática e a educação matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro, 1990.

AUSUBEL, D.P. **The psychology of meaningful verbal learning**. New York: Grune and Stratton, 1963.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimento**: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Paralelo, 2003.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional.** Trad. Eva Nick. 2. edição. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BARASUOL, F. F. Modelagem matemática: uma metodologia alternativa para o ensino da matemática. **UNIrevista,** p. 01-06, 01 abr. 2006.

BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. In: **Reunião anualda ANPED**, 2001, Caxambu. Anais. Caxambu: ANPED, 2001. 1 CDROM.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2004.

BASSANEZI. R. C. **Modelagem matemática**: uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. Biomatemática IX. Campinas. 1999.

BEAN, D. W. O que é modelagem matemática? **Educação matemática em Revista**, São Paulo, ano 8, n. 9/10, p.49-57, abr, 2001.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino.** 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Editora Contexto, 2005.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino.** São Paulo: Editora Contexto, 2011.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Modelagem Matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 6, n. 2, p.91-121. São Paulo, 2004.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL, Ministérios da Educação. Portal da Base Curricular Nacional. Disponível em: basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio. Acesso em: junho 2018 – 2017.

BURAK, D. **Modelagem matemática:** ações e interações no processo de ensino e aprendizagem. Tese (doutorado educacional). Faculdade de Educação. Universidade de Campinas – Unicamp. Campinas, 1992.

BURAK, D.; SOISTAK, A. V. F. O conhecimento matemático elaborado via metodologia alternativa da modelagem matemática. In: III Congresso Internacional de Ensino da matemática, 2005, Canoas, RS. **III Seminário Internacional de Ensino da Matemática**. Canoas, RS: ULBRA, 2005.

CAMELO, S. M. **Estudo de função afim através da modelagem matemática.** Campina Grande, 2013.

COLL, C. et al. A avaliação da aprendizagem no currículo escolar: uma perspectiva construtivista. In: _____ **O construtivismo na sala de aula.** São Paulo, SP, 2006. cap. nº 7. p. 197-221.

FRANCHI, R. H. O. L.; GAZZETTA, M. Vivenciando atividades de modelagem no ensino fundamental. In: **V Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática**. Ouro Preto - MG, 2007.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GONÇALVES FILHO, L. **Modelagem Matemática**: meio facilitador na compreensão da função de 1º grau? São Paulo: 2011.

HOFFMANN, J. **Avaliar para promover:** as setas do caminho / Jussara Hoffmann, - Porto Alegre: Mediação, 2001.

LEMOS, E. S. A aprendizagem significativa: estratégias facilitadoras e avaliação. **Série-Estudos** – Periódico do Mestrado em Educação da UCDB. Campo Grande: n. 21. p. 53-66. 2006.

LÉVY, P. **A inteligência coletiva**: por uma antropologia do ciberespaço. 2. ed. São Paulo: Loyola, 1999.

LOZADA, C. O.; ARAÚJO, M. S. T.; MORRONE, W.; AMARAL, L. H. A modelagem matemática aplicada ao ensino de física no ensino médio. **Revista LOGOS**, SP, 2006.

MIGUEL I. C. **Uma proposta de modelagem matemática aplicada à produção da farinha de trigo**. 2012.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & Educação**, v.9, n. 2, p.191-211, 2003.

MOREIRA, M. A. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.** Brasília: UnB, 2006.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa.** Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1999.

MOREIRA, M. A. **O que é afinal aprendizagem significativa?** Aula Inaugural do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais, Instituto de Física, Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, MT, 23 de abril de 2010.

MOREIRA, M. Aprendizagem Significativa em mapas conceituais. **Textos de Apoio ao Professor de Física**, PPGEnFis/IFUFRGS, v. 24, n. 6, 2013.

MOREIRA, M. A.; BUCHWEITZ, B. **Novas estratégias de ensino e aprendizagem:** os mapas conceituais e o vê epistemológico. Lisboa: Plátano Edições Técnicas. 1993.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa:** a teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2001.

MOREIRA, M. A., MASINI, E.F.S., **Aprendizagem Significativa:** a teoria de David Ausubel. 4.ed. São Paulo: Editora Centauro, 2011.

NOVAK, J. D.; GOWIN, B. D. **Aprender a aprender.** Lisboa: Plátano Edições Técnicas, Tradução para o português de Carla Valadares, do original **Learning how to learn.** 1996.

ROSSATO, S. L.; MONTEIRO, F. L.; CAMARGO, T.; ENES, I.; PAULA, S.; BISOGNIN, V. **Modelagem matemática no ensino de funções com o tema preço de estacionamento na cidade de Santa Maria.** Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral do curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano – RS. Santa Maria. 2013.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da educação matemática crítica**. São Paulo: Papirus, 2008.

TESCH, Renata. **Qualitative research***:* analysis, tipes and software tools. New York: The Falmers Press, 1990.

TOLEDO, M.; TOLEDO, Mauro. **Didática de matemática**: como dois e dois. São Paulo: FTD, 1997.

# APÊNDICES

## APÊNDICE A – PRÉ-TESTE

ATIVIDADES PRIMEIRO ENCONTRO

Em aulas de Física, você estudou o Movimento Uniforme (MU), em que foi determinada a posição do móvel num instante qualquer do movimento, para uma dada velocidade escalar. Esse fenômeno pode ser expresso por um tipo de equação que representa uma função do primeiro grau. Funções do primeiro grau serão estudadas nesta unidade de ensino e aprendizagem como uma estratégia em que se busca resgatar e complementar ideias e conceitos que já foram estudados.

Vamos ver, então, o que você recorda das equações do Movimento Uniforme, que foram estudadas neste ano na disciplina de Física, e que expressam funções do primeiro grau.

**1)** Um ponto material descreve um movimento uniforme e suas posições obedecem à função horária: $s = 4 + 5t$, com unidades do SI. Determine:

a) A posição do móvel no instante em que inicia a observação desse movimento.

b) Em que instante o móvel ocupa a posição 24m.

**2)** Um automóvel desloca-se em movimento uniforme de equação$s = 40 - 5t$, com unidades no sistema internacional(SI). Determine:

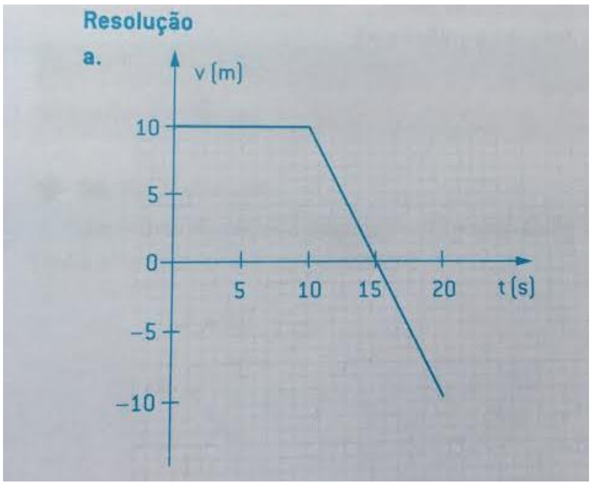
a) A posição do móvel no instante 10s.

b) O instante em que o móvel passa pela origem (s = 0) da trajetória?

**3)** Um objeto realiza um MU com função horária $s = 27 - 9t$ (unidades no SI). Determine a posição do objeto no instante 2s e também o instante em que o móvel passa pela marca -45 m da trajetória.

**4)** O gráfico da Figura 1 foi obtido medindo-se a velocidade escalar, em função do tempo, de um móvel. Observando esse gráfico:a) o que se pode afirmar sobre a velocidade no período de 0 a 10s? b) E no intervalo de 10 s a 20 s? c) Em qual instante a velocidade foi nula?

Figura 1 – Gráfico da velocidade




Fonte: Apostila da escola (2015)

As atividades que seguem envolvem outras situações de funções do primeiro grau, apresentadas para que você identifique aspectos em outros contextos; situações que podem ser do dia a dia das pessoas. Vamos reconhecer, nessa atividade, conhecimentos que você já possui e outros, se for o caso, para os quais será necessária uma atenção diferenciada.

Esta tarefa é um desafio para o qual você deve fazer um esforço para relacionar conhecimentos que você certamente já possui. Vamos ver como você se sai?

**5)** Uma pizzaria oferece uma promoção aos clientes, em comemoração ao dia das mães, incluindo água ou refrigerante no valor da refeição. Nessa promoção, o rodízio é cobrado no valor de R$ 42,00 por pessoa.

a) Elabore uma tabela, que poderia ser exposta junto ao caixa, com o preço a ser pago nessa pizzaria, durante essa promoção, para os seguintes casos de pagamento: 1, 2... 5 pessoas.

b) Em outros casos, a pessoa do caixa é instruída a fazer a devida conta. Qual o valor cobrado para uma família de 9 pessoas? E um grupo de 22 pessoas, quanto pagará?

c) Apresente, em um plano cartesiano, os preços em função do número de pessoas, conforme representou na tabela construída na situação *a*.

d) Qual é a variável dependente e qual a independente, conforme expresso em *c?*

**6)** Uma empresa de telefonia cobra P reais a serem pagos na fatura da conta mensal de telefonia celular. O valor a ser pago é composto por uma quantia fixa de R$ 112,00, com internet inclusa e torpedos ilimitados, mais uma parcela variável, de R$1,09 por minuto falado, quando a chamada partir do celular. Nessas condições, e considerando sempre a pessoa que fala como tendo ligado, responda ao que segue.

a) Qual o valor a ser pago por uma pessoa que fala 30 minutos?

b) Qual o valor cobrado de outra pessoa, se essa falar 42 minutos?

c) Considerando que o valor P depende da taxa fixa mais o valor correspondente aos minutos utilizados, escreva a lei da função que descreve o preço P a ser pago para um total de $x$ minutos falados.

d) Usando a lei construída em *c*, quanto paga uma pessoa que fala 50 minutos?

e) Qual é a diferença entre os valores cobrados de duas pessoas, uma que fala 50 minutos e outra que fala 51 minutos?

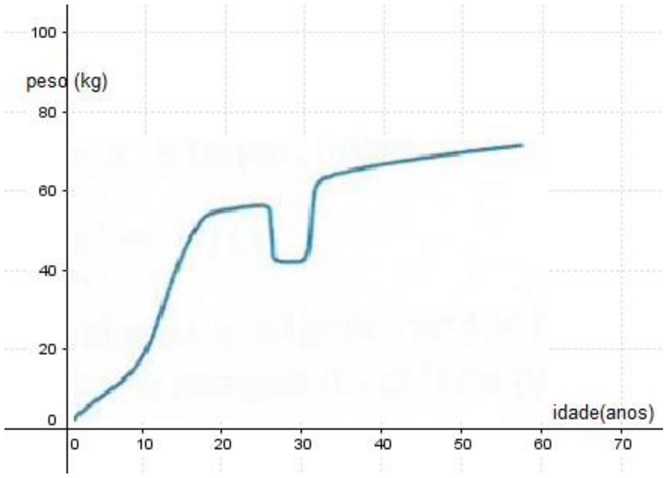
f) Quantos minutos falou uma pessoa que pagou um valor de R$177,40?

**7)** (Adaptado de STEWART,2003) O gráfico da Figura 2 apresenta o resultado de uma pesquisa, em que se estudou como varia o peso médio de uma pessoa ao longo da sua vida, em função da idade.

(a) Descreva o que o gráfico indica.

(b) O que pode ter acontecido com as pessoas por volta dos 30 anos?

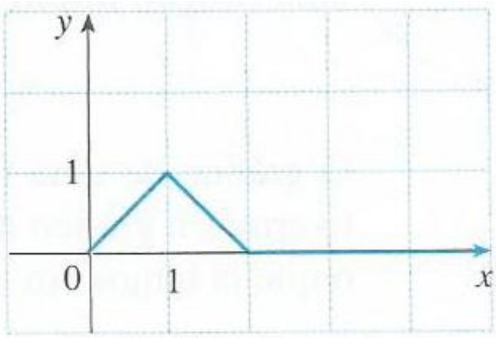
Figura 2 - Gráfico da variação de peso (kg)




Fonte: Cálculo, volume I / James Stewart (2003).

**8)** (Adaptado de STEWART, 2003) Determine o intervalo de *x*, em que o gráfico, representado na Figura 3 é: (a) crescente, (b) decrescente ou (c) constante.

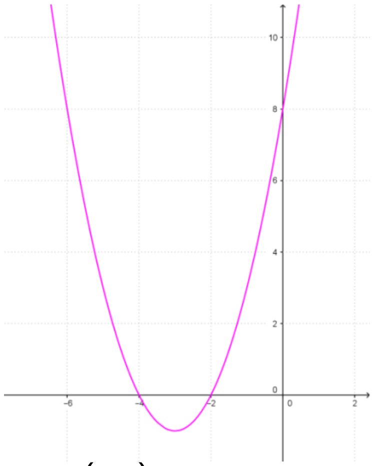
Figura 3 – Gráfico para classificação de intervalos



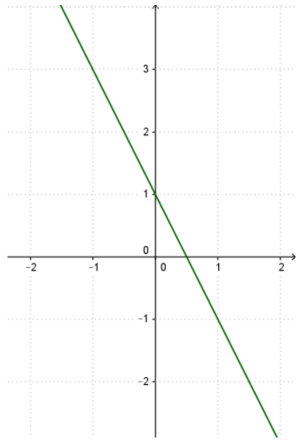

Fonte: Cálculo, volume I / James Stewart (2003)

**9)** Associe cada representação gráfica à lei da função que descreve, escrevendo, nos parênteses abaixo do gráfico, o número da lei correspondente:

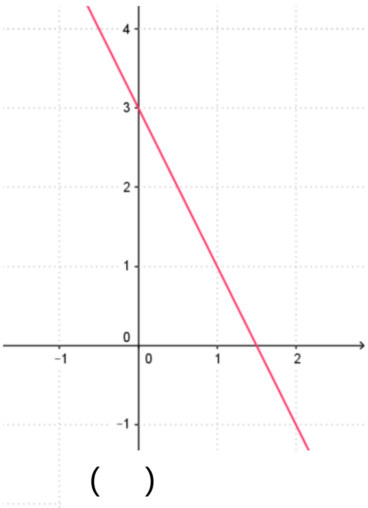
| | | |
|---|---|---|
| ( I ) $f(x) = -2$ | ( II ) $y = -2x + 3$ | ( III ) $y = x^2 + 6x + 8$ |
| (IV ) $f(x) = -2x + 1$ ( V ) $y = -3x + 2$ | | |

a) 

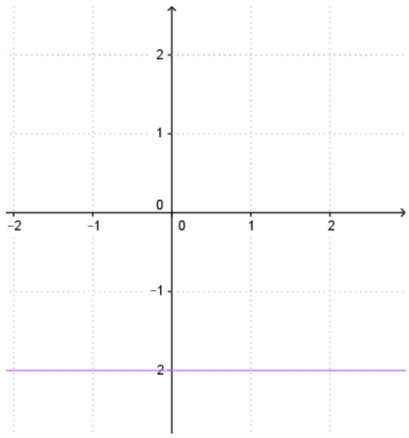
( )

b) 

( )

c) 

( )

d) 

( )

variação de *y* pela correspondente variação de *x*.

**10)** Os registros de temperatura T (em ºC) foram tomados a cada duas horas, desde a meia noite até o meio dia, em Caxias do Sul, no Rio Grande do Sul, num dia de agosto de 2016.

| t (horas) | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T (ºC) | 14 | 12 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |

a) Represente os pontos da tabela num plano cartesiano para observar melhor, como varia a temperatura T em função do tempo t.

b) Use o gráfico para estimar a temperatura às 3 horas da madrugada e às 11 horas da manhã.

**11)** Siga os passos 1 a 3indicados abaixo e elabore o gráfico da função de 1º grau. Após, responda às questões propostas.

- 1. Represente o ponto (0, -2) no plano cartesiano;
  2, A partir desse ponto desenhe outros três pontos, seguindo a seguinte regra: avançando uma unidade em x, o y aumenta em duas unidades;
  Observe que esses quatro pontos pertencem a uma mesma reta, com isso:
- 3. Trace a reta, que contém esses pontos.
  Qual é o coeficiente angular dessa reta?
  Qual é o coeficiente linear dessa reta?
  Escreva a equação (lei) da função $f$ cujo gráfico é a reta representada.

Nessas atividades anteriores, você pôde organizar, planejar e pensar em várias ideias para a resolução das questões, reorganizando e relembrando conteúdos que você estudou. Agora, você terá de tarefa algumas atividades do livro didático, em que você poderá aprofundar os assuntos trabalhados nesta aula. Esta continuidade é muito importante, pois você pode aprimorar a revisão de assuntos que auxiliarão na sequência dos nossos estudos.

TAREFAS PRIMEIRO ENCONTRO

1)

Mackenzie-SP

| Locadoras | Taxa fixa | Preço por quilômetro percorrido |
|---|---|---|
| X | R$ 50,00 | R$ 1,20 |
| Y | R$ 56,00 | R$ 0,90 |

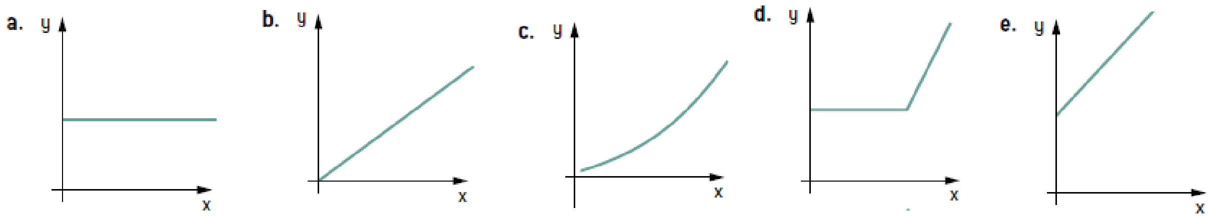
Observando a tabela referente aos valores cobrados por duas locadoras X e Y de veículos é correto afirmar que:

a. Para exatamente 20 quilômetros percorridos, esses valores são iguais.
b. A partir de 20 quilômetros rodados, o custo total em X é menor do que em Y.
c. Para X, o custo total é sempre menor.
d. A partir de 15 quilômetros rodados, o custo total em Y é menor do que em X.
e. Até 32 quilômetros rodados, o custo total em X é menor do que em Y.

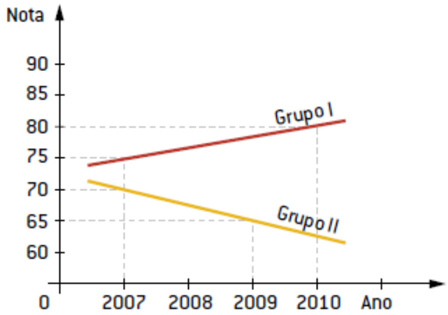
2) Considere a função do 1º grau cuja lei de formação é dada por $f(x) = 2x + k$. Determine k, sabendo que 5 é a raiz da função.

3) Uma estudante oferece serviços de tradução de textos em língua inglesa. O preço a ser pago pela tradução inclui uma parcela fixa de R$20,00 mais R$3,00 por página traduzida. Em determinado dia, ela traduziu um texto e recebeu R$80,00 pelo serviço. Calcule a quantidade de páginas que foi traduzida.

4) Em um restaurante, o quilo da refeição é R$ 25,00. O preço **y**, em reais, a ser pago por uma pessoa pode ser expresso em função do consumo x, em quilos. O gráfico que melhor representa a relação entre o preço a ser pago e o consumo em quilos é:




5) (UFSM-RS) O gráfico a seguirmostra a evolução das notas em Matemática de dois grupos de estudantes, denominados Grupo I e Grupo II.




Analisando o gráfico e considerando o período de 2007 a 2010, é possível afirmar:

a. Os dois grupos melhoraram as notas.

b. A nota do grupo I, em 2008, foi 80.

c. A nota do grupo I aumentou de 2008 a 2009 e diminuiu de 2009 a 2010.

d. A nota do grupo II não sofreu alteração.

e. A nota do grupo I aumentou, enquanto a nota do grupo II diminuiu.

6) Considere a função de 1º grau, cuja lei de formação é dada por $f(x) = -3x - 5$. Determine:

a) $f(-1) =$

b) $f(0) =$

c) $x tal que f(x) = 1$

d) A raiz da função:

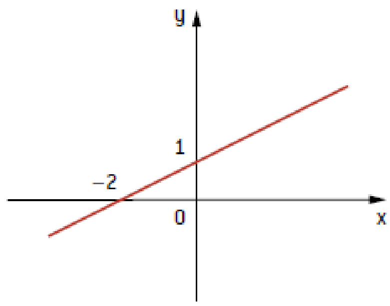
# APÊNDICE B – TAREFAS SEGUNDO ENCONTRO

ATIVIDADES DO SEGUNDO ENCONTRO

Nesse encontro, os alunos, dispostos dos valores cobrados por estacionamentos, deverão modelar matematicamente para encontrar um modelo que descreva a situação proposta.

TAREFAS SEGUNDO ENCONTRO

1) Observe o gráfico da função$f(x) = a \cdot x + b$que está representado na figura e responda às questões.



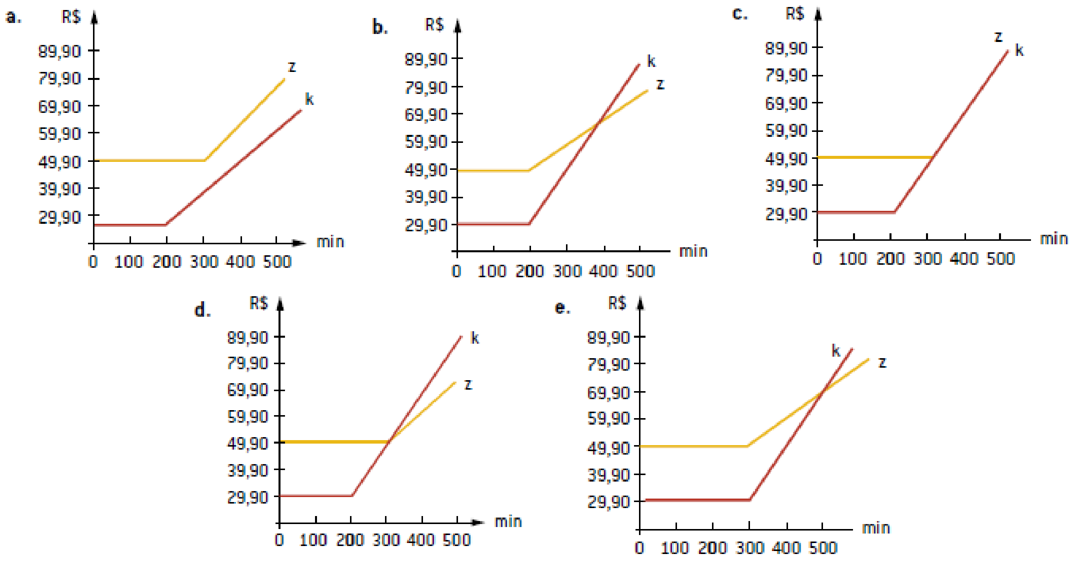

**a.** Qual é o valor de b?

**b.** Qual é a raiz da função?

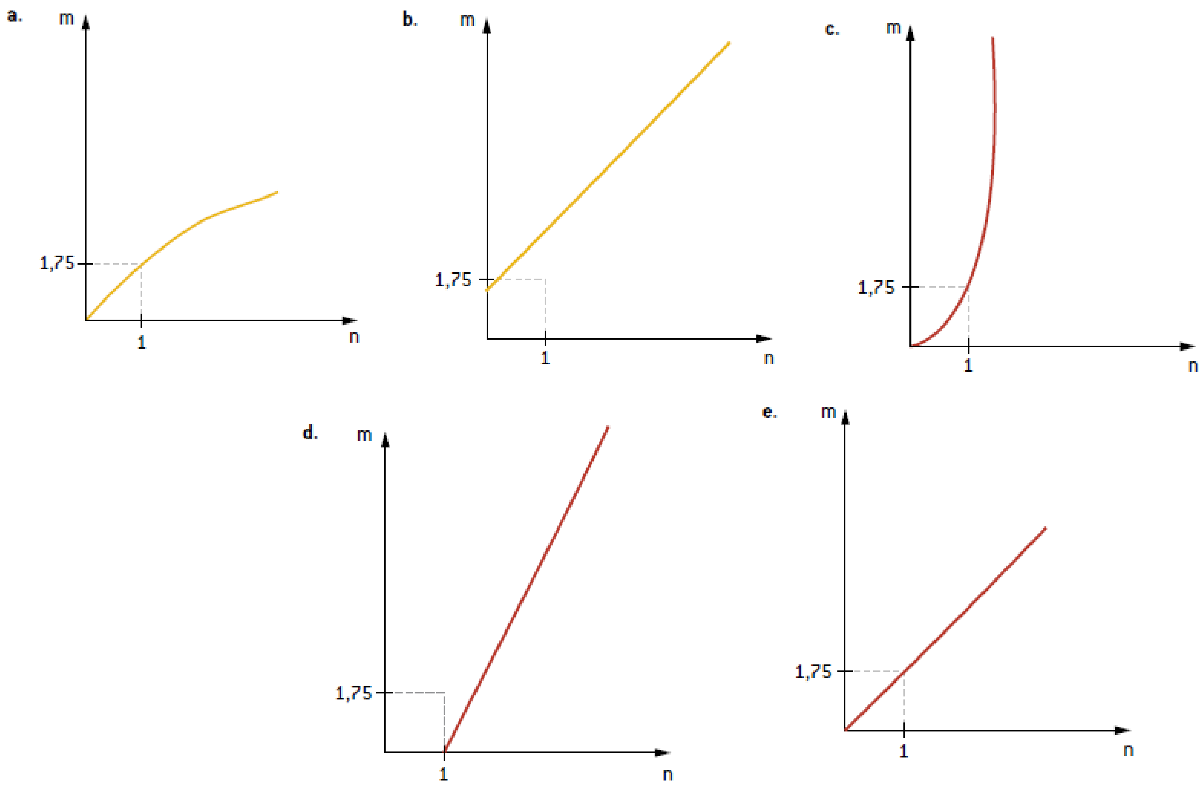
**c.** Qual é o valor de $f(2)$?

**d.** Qual é a variação de $y$ por unidade de $x$?

2) Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente. O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é:




3) (Enem)As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independentemente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 por quilograma. Dos gráficos, o que representa o preço pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é:



4) Considere a função de 1º grau, cuja lei de formação é dada por $f(x) = -5x + 6$. Determine:

a) $f(-2) =$

b) $f(0) =$

c) $x tal que f(x) = 11$

d) A raiz da função.

5) O custo mensal que certa confecção tem para produzir camisas é dado pela função$C(n) = 5\,000 + 30n$, em que C é o custo contado em reais, e n, o número de camisas produzidas. Com base nessas informações, pode-se estimar que o custo para a produção de 600 camisas é igual a:

**a.** R$17.000,00 **b.** R$19.000,00 **c.** R$21.000,00 **d.** R$23.000,00

# APÊNDICE C – TAREFAS TERCEIRO ENCONTRO

ATIVIDADES TERCEIRO ENCONTRO

Nesse encontro, todos juntos, professores e alunos, modelaram matematicamente o novo preço de um estacionamento, podendo corrigir os erros do modelo do encontro anterior, agora com a mediação da professora, para que houvesse a introdução dos conceitos de função.

TAREFAS TERCEIRO ENCONTRO

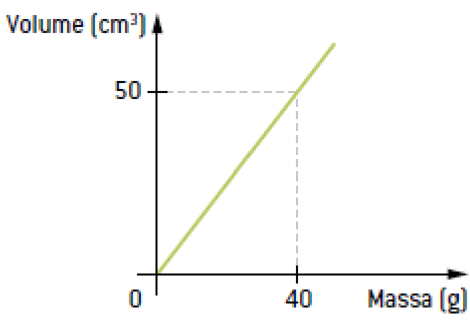
1) Esboce o gráfico das funções reais e classifique-as em crescente, decrescente ou constante em cada caso:

a)$f(x) = -2$

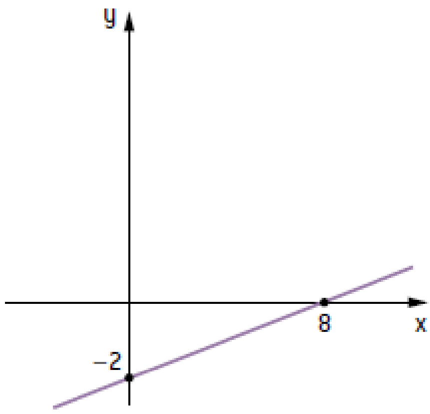
b) $g(x) = 4x - 2$

c) $h(x) = -2x + 4$

2) Apresentamos o gráfico do volume do álcool em função de sua massa, à temperatura fixa de 0°C. Com base nos dados do gráfico, determine a lei de formação da função.




3) Determine a sentença matemática da função do primeiro grau cujo gráfico está esboçado a seguir.


y
x
8
−2

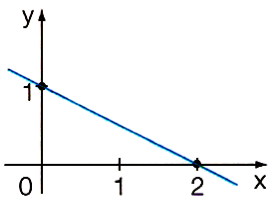
## APÊNDICE D – GINCANA DE FUNÇÃO DO 1º GRAU

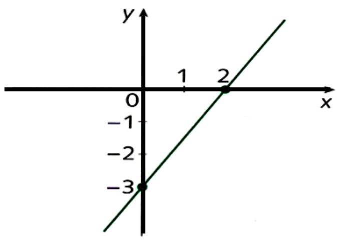
ATIVIDADES QUARTO ENCONTRO

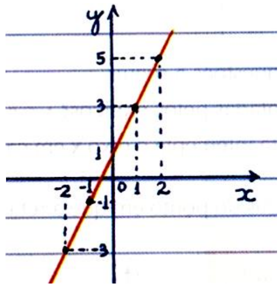
1) Esboce o gráfico das funções:

a) $f(x) = 1$ b) $f(x) = -2x - 4$ c) $f(x) = -2x + 3$ d) $f(x) = 3x+9$

2) Determine a lei da função que descreve o gráfico abaixo:



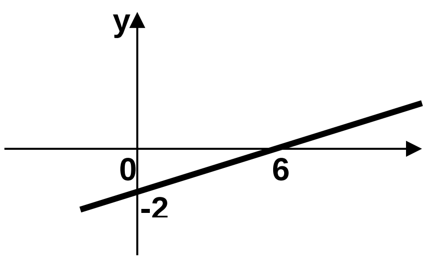



3) Determine a lei da função do 1º grau, que satisfaz as condições:

a)* raiz é 1 * (-2,3) b) Determine o valor de f(2)

4) O gráfico abaixo representa uma função polinomial do 1º grau do tipo **y = ax + b** .
De acordo com esse gráfico, responda as seguintes questões:




a) A função é crescente ou decrescente?

b) O valor do coeficiente **a** é positivo ou negativo?

c) O valor do coeficiente **b**?

d) Determine a lei da função:

4) Marcelo costuma abastecer seu carro sempre em um mesmo posto de gasolina. Nesse posto, o preço do litro de gasolina é R$ 3,70. Representando por **y** o total a ser pago e por **x** o número de litros de combustível. Baseado nessas informações:

a) Escreva a lei da função ou fórmula matemática.

b) Qual o preço pago por Marcella que colocou 50litros de combustível, nesse mesmo posto?

5) Em uma corrida de táxi, o usuário ou cliente deve pagar R$ 5,00 de "bandeirada" (valor inicial que se paga fixado no taxímetro) e R$ 2,00 por cada quilômetro rodado. Seja **x** a distância percorrida por um táxi e **y** o preço a ser pago pela corrida; responda:

a) Que função matemática representa essa situação?

b) Quando pagaria um cliente ou usuário de um táxi, se fizesse uma corrida de 3,5 km?

6) Considere a Função do 1º Grau $F(x) = -3x + 2$. Determine os valores de x para que se tenha:

a. $F(0) =$ b. $F(x) = 11$ c. $F(-2) =$

7) (UFRN-02)A academia "Fique em Forma" cobra uma taxa de inscrição de R$ 80,00 e uma mensalidade de R$ 50,00. A academia "Corpo e Saúde" cobra uma taxa de inscrição de R$ 60,00 e uma mensalidade de R$ 55,00.

a) Determine as expressões algébricas das funções que representam os gastos acumulados em relação aos meses de aulas, em cada academia.

b) Qual academia oferece menor custo para uma pessoa que pretende "malhar" durante **um ano**? Justifique, explicitando seu raciocínio.

8) (ENEM) As corridas de táxi convencionais iniciam com a cobrança de um valor inicial denominado **bandeira**


* Bandeira 1: cobrada de segunda a sexta-feira, das 6 horas às 18 horas, e no sábado, das 6 horas às 12 horas.

* Bandeira 2: cobrada de segunda a sexta-feira, das 18 horas às 6 horas, e no sábado, das 12 horas às 24 horas. Aos domingos e feriados, é cobrada o dia todo. As figuras mostram os valores cobrados nas respectivas bandeiras.

Suponha que cada quilômetro rodado pelo veículo custe R$ 0,90 e que, quando o táxi fica parado durante uma hora completa à espera do cliente, há a cobrança de R$ 43,00, pois o taxímetro não para de funcionar.

Samuel pegou um táxi às 10 horas de uma segunda-feira de sua casa até o banco onde possui conta para fazer uma retirada de dinheiro. A distância de sua casa até o banco é de 10 km. Ao chegar ao banco, o taxista ficou esperando o cliente do lado de fora da agência e, como a fila estava muito grande, Samuel demorou 60 minutos para realizar a operação financeira. Logo após, voltou ao táxi e foi para seu trabalho que dista do banco 12 km.

Quanto ele pagou pela corrida completa?

a) R$ 66,30b) R$ 62,80 c) R$ 57,30 d) R$ 55,50 e) R$ 23,30

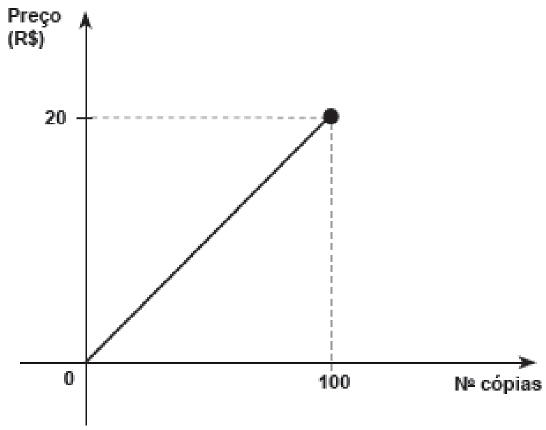
9) (ENEM) Considere a tabela na qual está descrito o crescimento de uma planta em laboratório ao longo dos meses.

| Mês do ano de 2014 | Altura (cm) |
|---|---|
| Fevereiro | 12 |
| Março | 16 |
| Abril | 20 |
| Maio | 24 |

Se a planta mantiver o comportamento descrito pela tabela, a sua altura em agosto de 2015 deverá ser? Explique a forma que você pensou e qual expressão matemática descreve isso.

a) 88 cm. b) 84 cm. c) 70 cm. d) 76 cm. e) 72 cm.

10) (ENEM) A gráfica de José cobra cópias em preto e branco de acordo com o comportamento gráfico mostrado.




Desse modo, o preço pago nessa gráfica por

a) 100 cópias é R$ 15,00.

b) 100 cópias é R$ 10,00.

c) 50 cópias é R$ 7,50.

d) 50 cópias é R$ 10,00.

e) 25 cópias é R$ 2,50.

11) Os procedimentos de decolagens e pouso de uma aeronave são os movimentos mais críticos de operação, necessitando de concentração total da tripulação e da torre de controle dos aeroportos. Segundo levantamento da Boeing, realizado em 2009, grande parte dos acidentes aéreos com vítimas ocorre após iniciar-se a fase de descida da aeronave. Dessa forma, é essencial para procedimentos adequados de segurança monitorar o tempo de descida do aparelho. A tabela a seguir mostra a altitude **y** de uma aeronave registrada pela torre de controle, **t** em minutos após o início dos procedimentos de pouso.

| Tempo t (em minutos) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| Altitude t (em metros) | 10000 | 8000 | 6000 | 4000 | 2000 |

Disponível em: <www.meioaereo.com>. Acesso em: 14 maio 2014.

Considere que, durante todo o procedimento de pouso, a relação entre **y** e **t** é linear. De acordo com os dados apresentados, a relação entre **y** e **t** é dada por

a) y = – 400t.

b) y = – 2000t.

c) y = 8 000 – 400t.

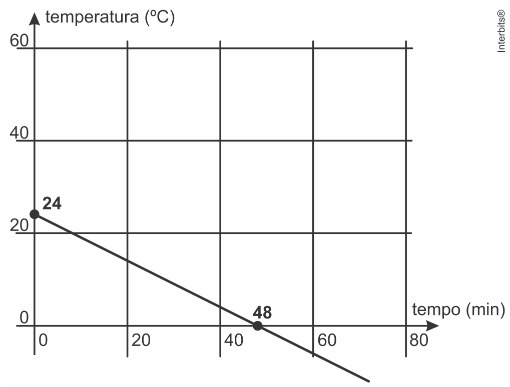
d) y = 10 000 – 400t.

e) y = 10 000 – 2 000t.

12) (IFSUL 2017) Numa serigrafia, o preço $y$ de cada camiseta relaciona-se com a quantidade $x$ de camisetas encomendadas, através da fórmula $y = -0,4x + 60.$ Se foram encomendadas $50$ camisetas, qual é o custo de cada camiseta?

a) R$40,00 b) R$50,00 c) R$70,00 d) R$80,00

13) (Espm 2017) O gráfico abaixo mostra a variação da temperatura no interior de uma câmara frigorífica desde o instante em que foi ligada. Considere que essa variação seja linear nas primeiras $2$ horas.




O tempo necessário para que a temperatura atinja $-18\ °C$ é de:

a) 90min b) 84min c) 78min d) 88min e) 92min

14) (Fmp 2017) Considere as seguintes cinco retas do plano cartesiano, definidas pelas equações:

$r_1 : 2x + 3y = 5;$

$r_2 : -x + \frac{1}{3}y = 2;$

$r_3 : y = x;$

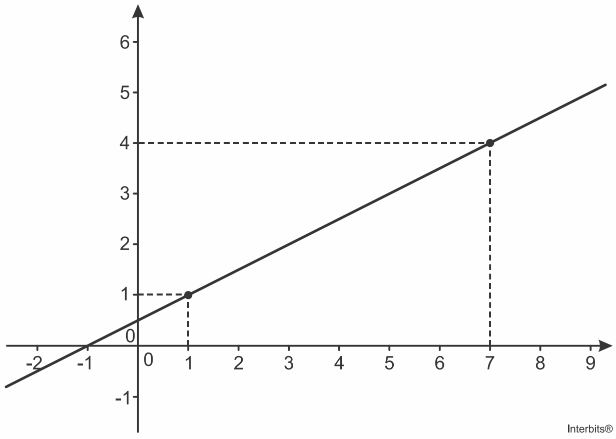
$r_4 : 2x = 5;$

$r_5 : x - y = 0.$

Apenas uma das retas definidas acima **NÃO** é gráfico de uma função polinomial de grau $1$, $y = f(x).$ Essa reta é a

a) $r_1$ b) $r_2$ c) $r_3$ d) $r_4$ e) $r_5$

15) (IFSUL 2017) Uma função do 1º grau $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui o gráfico abaixo.




A lei da função $f$ é

a) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

b) $f(x) = x + 1$

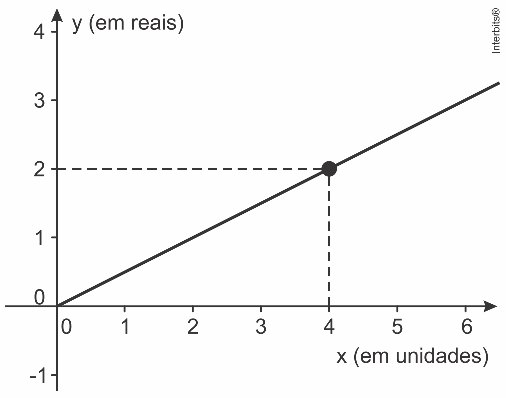
c) $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$

d) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

16) (IFAL 2016) Os pontos de um plano cartesiano de coordenadas $(2, 2)$ e $(4, -2)$ pertencem ao gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$. Qual o valor de $a + b$?

a) 0. b) 2. c) 4. d) 6. e) 8.

17) (IFSP 2016) O gráfico abaixo apresenta informações sobre a relação entre a quantidade comprada $(x)$ e o valor total pago $(y)$ para um determinado produto que é comercializado para revendedores.




Um comerciante que pretende comprar 2.350 unidades desse produto para revender pagará, nessa compra, o valor total de:

a) R$ 4.700,00.

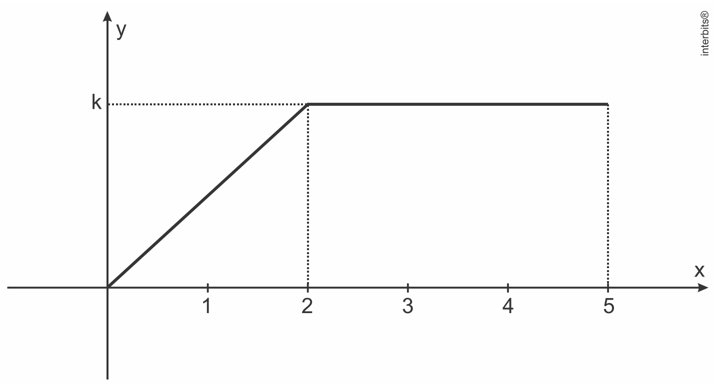
b) R$ 2.700,00.

c) R$ 3.175,00.

d) R$ 8.000,00.

e) R$ 1.175,00.

18) Determine o intervalo em que a função é crescente, decrescente e constante:




19) Na função $f(x) = -3x + 2$

(A) faça um esboço do gráfico da função e descreva o que se pode observar com a variação de x e f(x).

(B) faça um esboço do gráfico da função e o estudo do seu sinal.

# APÊNDICE E – PÓS-TESTE

ATIVIDADES QUINTO ENCONTRO

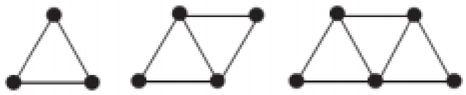
Caros alunos, nesta atividade, peço que, ao resolverem cada questão, expliquem as resoluções, escrevendo como pensaram para chegar às respostas.

1) Um pintor cobra por seu trabalho, o valor fixo de R$50,00 pela visita mais R$8,00 para cada m² pintado. A partir dessa informação determine:

a) A lei da função que descreve o valor a ser pago por quem contrata esse pintor;

b) Faça o esboço do gráfico da função descrita na letra (a).

2) (Azevedo – IMPA - 2014) Observe a figura abaixo, que relaciona o número de palitos de fósforo com o número de triângulos:



Seguindo o padrão estabelecido, complete a tabela abaixo:

| número de triângulos – t | número de palitos – p | (t, p) |
|---|---|---|
| 1 | 3 | (1, 3) |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |

a) Quantos palitos são necessários para formar 12 triângulos?

b) Quantos triângulos são formados com 30 palitos?

c) Determine a expressão algébrica que representa o número de palitos em função do número de triângulos.

3) Uma corrida de táxi, na cidade de Caxias do Sul, pode ser determinada de acordo com os valores praticados conforme informa a tabela abaixo:

| Km rodados | 8 | 12 |
|---|---|---|
| Valor da corrida | 28 | 39,20 |

Fonte: *http://www.waytaxi.com/taxi/rs/caxias-do-sul* (Atualizado em 01/04/2017)

a) Determine a lei, na forma $y = ax + b$, da reta que contém esses valores, e que pode ser usada para qualquer outra situação.

b) A partir da lei determinada, descreva como é definido o preço das corridas de táxi. Exemplifique com uma situação de algum passageiro que pega táxi na nossa cidade.

4) Faça o esboço do gráfico de cada uma das funções definidas abaixo:

| | | | |
|---|---|---|---|
| I) f(x) = 3 | II) y= -3x +3 | III) y= x +5 | IV) f(x)= 3x+7 |

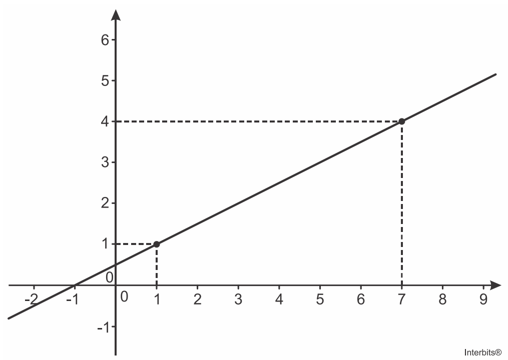
5) (IFSUL - 2017) Uma função do 1º grau y= f(x) possui o gráfico a reta representada ao lado.

a) Qual é o coeficiente angular da reta?

b) A lei da função.

c) Determine f(11).

d) Determine o valor de x, que tem f(x) = -2.




6) Considere a função $f(x) = -3x + 4$, de 1º grau, e responda às questões:

a. Onde o gráfico corta o eixo y?

b. Em qual ponto o gráfico corta o eixo x?

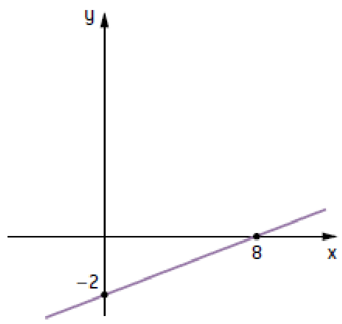
c. Qual é o valor da função para x= 3?

d. Qual ponto do gráfico tem f(x) = 3?

e. Quanto é a varia *y* para cada unidade de *x*?

f. Represente o gráfico desta função:

7) Qual a lei da função cujo gráfico está esboçado ao lado?




8) Siga os passos 1 a 3 e elabore o gráfico da função de 1º grau.

1. Represente o ponto (-1,6) no plano cartesiano;

2. A partir desse ponto, desenhe outros três pontos, seguindo a seguinte regra: avançando duas unidades em x, o y decresce em duas unidades;

3. Observe que esses quatro pontos pertencem a uma mesma reta, com isso, trace a reta, que contém esses pontos.

Agora, responda:

a) Qual é o coeficiente angular dessa reta?

b) Qual é o coeficiente linear dessa reta?

c) Qual é a equação (lei) de uma função $f$ cujo gráfico é a reta representada?

d) Qual é o zero da função $f$?

9) Observe o gráfico, que está completo, de uma função e responda:

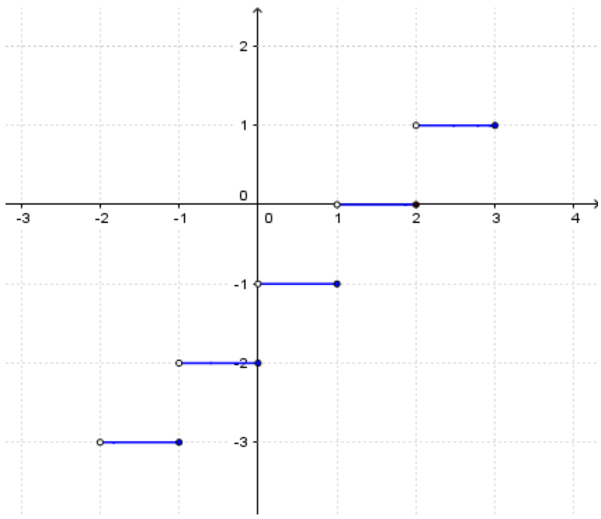
A) Qual é a imagem de $x = -\frac{3}{2}$?

B) Que valores tem x, quando a imagem é -1?

C) Qual é o domínio da função?

D) Qual é o conjunto imagem?

E) Escreva a lei da função representada:



10) Carlos decidiu vender cachorro quente em dias de jogos no Maracanã. Ele aluga um carrinho por R$ 50,00 ao dia. Ele vende cachorro quente por R$ 5,00 e calculou que seus custos (condimentos, salsicha, molho, guardanapo e gás) são de R$ 3,00

por unidade. Logo o lucro de um único cachorro quente é de R$ 2,00. Para facilitar a compreensão de sua contabilidade: $L(x) = 2x - 50$

a) Represente graficamente essa situação.

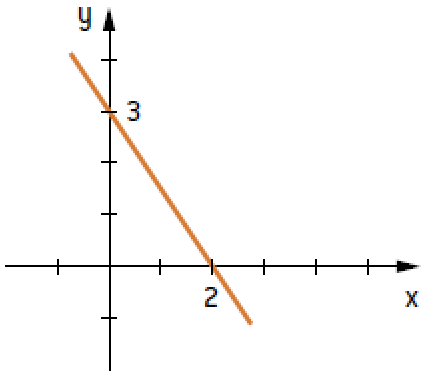
b) Quantos cachorros quentes deverão ser vendidos para que Carlos não tenha nem lucro e nem prejuízo?

c) Quantos cachorros quentes deverão ser vendidos para que Carlos tenha lucro?

d) Quantos cachorros quentes serão vendidos se Carlos tiver prejuízo?

**TAREFAS QUINTO ENCONTRO**

01) (UFRGS-RS) Observe o gráfico seguinte.




A função representada nesse gráfico é:

a. $y = -\frac{3}{2}x + 3$ b. $y = \frac{3}{2}x + 2$c. $y = -\frac{2}{3}x + 3$ d. $\frac{2}{3}x + 3$ e. $\frac{2}{3}x + 2$

02) Sabendo que os pontos (2, –3) e (–1, 6) pertencem ao gráfico de uma função real do primeiro grau, determine:

a. o esboço do gráfico;

b. a função.

# APÊNDICE F – AVALIAÇÃO

## AVALIAÇÃO TIPO A

**1)** Um comerciante pagou R$ 216,00 por uma caixa com 180 maçãs.

Como cada maçã dessa caixa é vendida a R$ 2,00, responda as seguintes questões:

a) Se da caixa forem vendidas 100 maçãs, o comerciante tem lucro ou prejuízo? De quanto?

b) Quantas maçãs devem ser vendidas para que o comerciante recupere o valor pago pela caixa de maçãs?

c) Qual é o lucro do comerciante se ele vende todas as maçãs da caixa?

Até aqui é moleza, não é? Mas se o comerciante quiser saber qual o lucro ou o prejuízo que ele tem com a venda de maçãs, por quantidade acumulada de maçãs vendidas, ele pode usar a função $L$, sendo $L(x)$ o lucro/prejuízo que tem com a venda de $x$ maçãs. Ajude o comerciante a conhecer esta função, para que saiba, ao certo, o quanto ganha ou perde, se ele vende 1, 2, 3,..., 180 maçãs.

d) Qual é a lei $L(x)$, se, do total da caixa, ele vende $x$ maçãs?

e) Para ele "enxergar" como controlar o lucro/prejuízo que vai acumulando com a venda de maçã, faça, para ele, o gráfico da função $L$, no intervalo de x que cobre o total de maçãs da caixa.

f) Valide o modelo que construiu para essa situação, confirmando as respostas das questões a, b e c, agora a lei L(x).

**2)** Os valores descritos na imagem representam a cobrança em um estacionamento de Caxias do Sul. Observe que os valores cobrados, para carros, são diferenciados para os tempos de permanência de 15 minutos, 30 minutos e 1 hora. E, a partir de 1 hora, são cobrados 2,00 para cada hora a mais de permanência.

a) Complete a tabela com valores P ou t, sendo P o pagamento correspondente ao tempo t de permanência de um carro nesse estacionamento.

| P (R$) | 3 | 4 | 5 | 7 | | 13 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t (horas) | 1/4 | | 1 | 2 | 4 | | 8 |

b) Represente os pontos da tabela acima, num gráfico P x t.

c) Observe, no gráfico representado, que os pontos correspondentes aos tempos de horas cheias pertencem a uma mesma reta. Confirme; use a régua para traçar essa reta. Qual é equação da reta traçada?

d) Retorne, agora à tabela de preços do estacionamento e analise o valor para camionetes, que pagam R$ 7,00 por 1 hora e, depois, mais R$ 3,00 a cada hora adicional. Qual é o valor pago pelo estacionamento de uma camionete que permanece nesse estacionamento:

t = 3 horas? t = 6 horas?

e) Qual é a equação matemática que modela o valor Q a ser pago pelo estacionamento de uma camionete que permanece t horas cheias nesse estacionamento?

f) Valide o modelo construído em (e), utilizando-o para confirmar os valores calculados em (d), acima. O modelo construído está correto? Por quê?

**3)** Construa o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x - 4$ b) $f(x) = 5 - 2x$ c) $h(x) = 3$

**4)** (PUCMG-2015) A função linear $R(t) = at + b$ expressa o rendimento $R$, em milhares de reais, de certa aplicação. O tempo $t$ é contado em meses, $R(1) = -1$ e $R(2) = 1$. Nessas condições, o rendimento obtido nessa aplicação, em <u>cinco</u> meses, é:

a) R$ 7 000

b) R$ 6 500

c) R$ 6 000

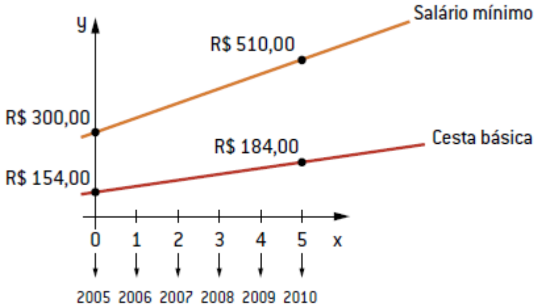
d) R$ 5 500

e) R$ 5 000

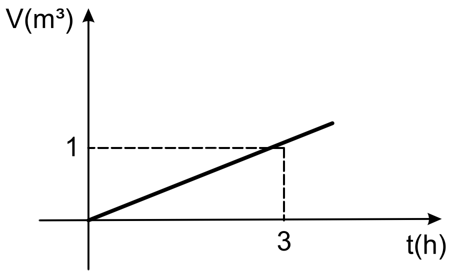
**5)** Complete a tabela, sabendo que o coeficiente angular da função $y = ax + b$ é -1. Depois, analisando os valores, escreva a lei dessa função, que está representada na tabela:

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | 0 | | 5 |
| Y | 4 | 2 | |

**6)** Observe a figura e determine a lei da função que descreve o gráfico de como variou do **salário mínimo**, de 2005 a 2010:




**7)** (CFT SC/2010) O volume de água de um reservatório aumenta, em função do tempo, de acordo com o gráfico.

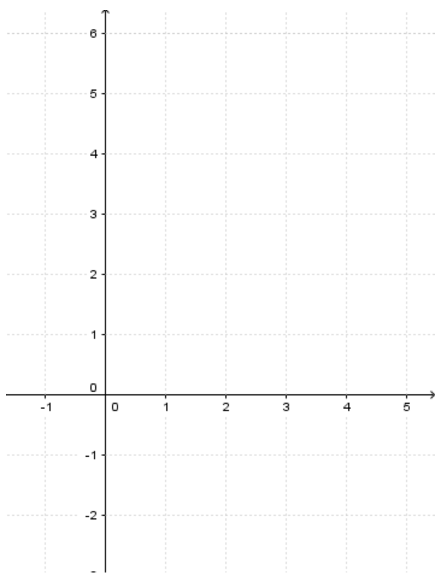



a) Determine a lei da função:

b) Qual o volume do reservatório após **6h** de torneira aberta?

**8)** Siga os passos e elabore o gráfico da função de 1º grau.

1) Represente o ponto (-1,5).



A partir desse ponto, desenhe outros três pontos, seguindo a seguinte regra:

2) Avançando duas unidades em x, o y decresce em duas unidades;

Observe que esses quatro pontos pertencem a uma mesma reta; com isso:

3) Trace a reta, que contenha esses pontos.

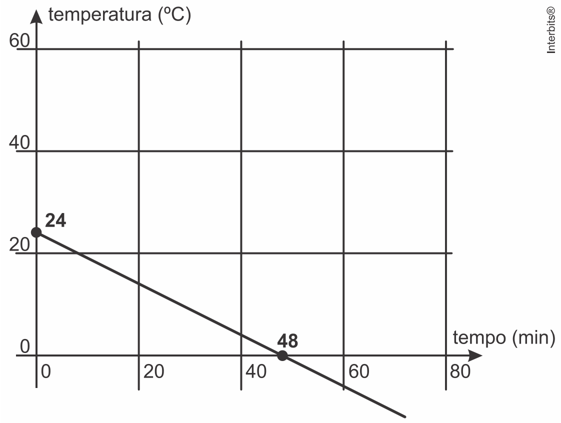
a) Qual é o coeficiente angular dessa reta?

b) Qual é o coeficiente linear dessa reta?

c) Escreva a equação (lei) de uma função $f$ cujo gráfico é a reta representada.

d) Qual é o zero da função $f$?

**9)** O gráfico mostra a variação da temperatura no interior de uma câmara frigorífica desde o instante em que foi ligada.




a) Qual era a temperatura da câmara frigorífica quando essa foi ligada?

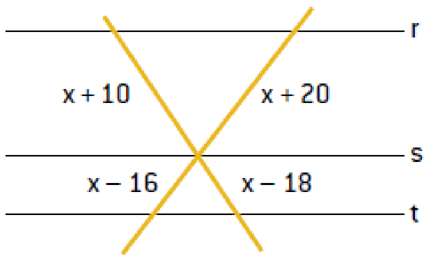
b) Depois de quanto tempo a temperatura foi de 0ºC (zero graus)?

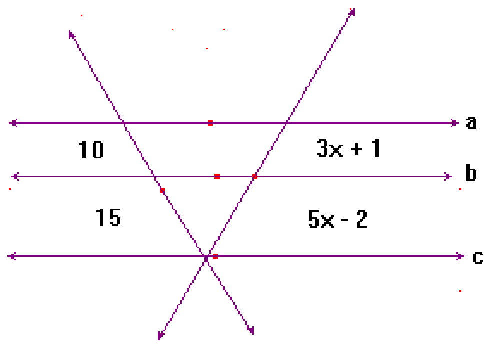
c) Determine a lei da função:

d) Como variou a temperatura em cada minuto? (coeficiente angular)

e) Determine depois de quanto tempo (minutos) a temperatura atingiu $-18\ °C$.

**10)** Determine o valor de x em cada caso:




**11)** Um pintor cobra, por seu trabalho, o valor fixo de R$ 40,00 pela visita mais R$ 12,00 para cada m² pintado. A partir dessa informação determine:

a) A lei da função que descreve o valor a ser pago por quem contrata esse pintor;

b) O valor a ser cobrado se ele pintar 58 m²?

c) Quantos m² foram pintados se o valor cobrado foi R$ 892,00?

**12)** Considere a função de 1º grau, cuja lei de formação é dada por $f(x) = -3x - 5$. Determine:

**a.** em que valor o gráfico corta o eixo y?

**b.** Qual é o valor da função para x= 2?

**c.** Qual valor de x tem f(x) = 10?

**d.** a raiz da função.

**13)** Numa fábrica de calçados, 8 operários, igualmente eficientes, produzem 36 pares de calçados a cada 5 horas. Quantos pares de calçados poderão ser entregues se 6 desses operários trabalharem exatamente durante 6 horas?

**14)** **(ENEM)** Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m³. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Essa indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m³, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente. A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a?

**15)** **(Civil)** Marta mora com Pedro, Luiza e Thiago (4 pessoas). Ela foi ao supermercado e comprou alimentos suficientes para o consumo de sua família por 15 dias. No entanto, inesperadamente, duas tias vieram visitá-la e se hospedaram em sua casa durante esse período. Supondo que todos se alimentem com quantidades iguais, em quanto tempo os alimentos acabarão?

**16)** Um veículo faz um determinado percurso em 50min com velocidade de 10km/h. Quanto tempo ele gastaria para fazer esse mesmo percurso se utilizar uma velocidade 20% menor, passando a ser 8km/h?

**AVALIAÇÃO TIPO B**

**1)** Um comerciante pagou R$ 216,00 por uma caixa com 180 maçãs.
Como cada maçã dessa caixa é vendida a R$ 2,00, responda as seguintes questões:
a) Se da caixa forem vendidas 100 maçãs, o comerciante tem lucro ou prejuízo? De quanto?
b) Quantas maçãs devem ser vendidas para que o comerciante recupere o valor pago pela caixa de maçãs?
c) Qual é o lucro do comerciante se ele vende todas as maçãs da caixa?

Até aqui é moleza, não é? Mas se o comerciante quiser saber qual o lucro ou o prejuízo que ele tem com a venda de maçãs, por quantidade acumulada de maçãs vendidas, ele pode usar a função $L$, sendo $L(x)$ o lucro/prejuízo que tem com a venda de $x$ maçãs. Ajude o comerciante a conhecer esta função, para que saiba, ao certo, o quanto ganha ou perde, se ele vende 1, 2, 3,..., 180 maçãs.
d) Qual é a lei $L(x)$, se, do total da caixa, ele vende $x$ maçãs?
e) Para ele "enxergar" como controlar o lucro/prejuízo que vai acumulando com a venda de maçã, faça, para ele, o gráfico da função $L$, no intervalo de x que cobre o total de maçãs da caixa.
f) Valide o modelo que construiu para essa situação, confirmando as respostas das questões a, b e c , agora a lei L(x).

**2)** Os valores descritos na imagem representam a cobrança em um estacionamento de Caxias do Sul. Observe que os valores cobrados, para carros, são diferenciados para os tempos de permanência de 15 minutos, 30 minutos e 1 hora. E, a partir de 1 hora, são cobrados 2,00 para cada hora a mais de permanência.

a) Complete a tabela com valores P ou t, sendo P o pagamento correspondente ao tempo t de permanência de um carro nesse estacionamento.

| P (R$) | 3 | 4 | 5 | 7 | | 13 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t (horas) | 1/4 | | 1 | 2 | 4 | | 8 |

b) Represente os pontos da tabela acima, num gráfico P x t.

c) Observe, no gráfico representado, que os pontos correspondentes aos tempos de horas cheias pertencem a uma mesma reta. Confirme; use a régua para traçar essa reta. Qual é equação da reta traçada?

d) Retorne, agora à tabela de preços do estacionamento e analise o valor para camionetes, que pagam R$ 7,00 por 1 hora e, depois, mais R$ 3,00 a cada hora adicional. Qual é o valor pago pelo estacionamento de uma camionete que permanece nesse estacionamento:

t = 3 horas? t = 6 horas?

e) Qual é a equação matemática que modela o valor Q a ser pago pelo estacionamento de uma camionete que permanece t horas cheias nesse estacionamento?


f) Valide o modelo construído em (e), utilizando-o para confirmar os valores calculados em (d), acima. O modelo construído está correto? Por quê?

**3)** Construa o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = 1 - x$ b) $f(x) = 2x + 5$ c) $h(x) = -2$

**4)** (PUCMG 2015) A função linear $R(t) = at + b$ expressa o rendimento $R,$ em milhares de reais, de certa aplicação. O tempo $t$ é contado em meses, $R(1) = -1$ e $R(2) = 1.$ Nessas condições, o rendimento obtido nessa aplicação, em <u>quatro</u> meses, é:

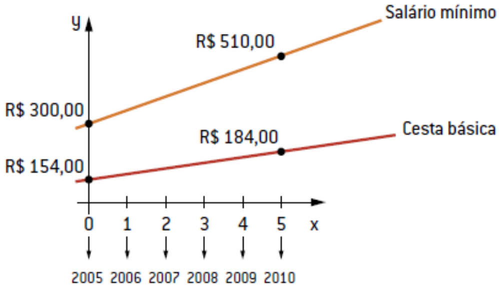
a) R$ 3.500,00

b) R$ 4.500,00

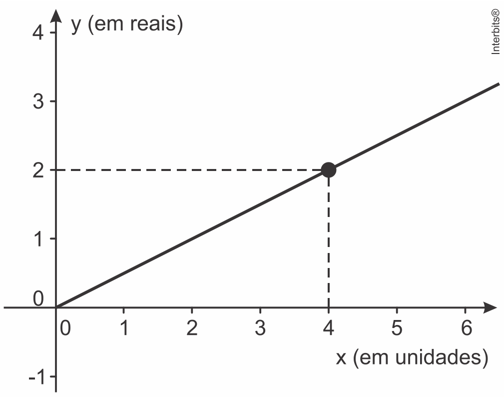
c) R$ 5.000,00

d) R$ 5.500,00

**5)** Observe a figura e determine a lei da função que descreve o gráfico de como variou do **cesta básica**, de 2005 a 2010:



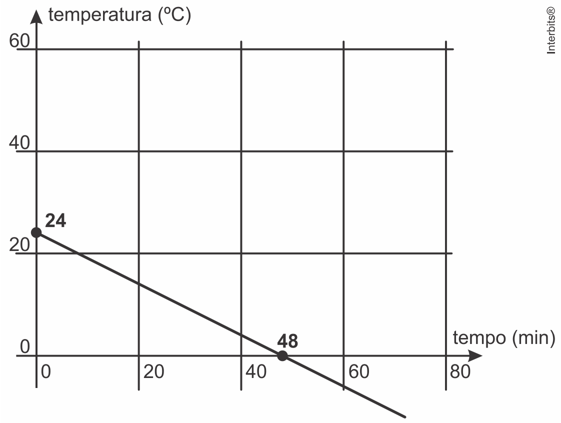

**6)** (IFSP - 2016) O gráfico abaixo apresenta informações sobre a relação entre a quantidade comprada (x) e o valor total pago (y) para um determinado produto que é comercializado para revendedores.




a) Determine a lei da função:

b) Um comerciante que pretende comprar 350 unidades desse produto para revender pagará, nessa compra, o valor total de?

**7)** O gráfico mostra a variação da temperatura no interior de uma câmara frigorífica desde o instante em que foi ligada.




a) Qual era a temperatura da câmara frigorífica quando essa foi ligada?

b) Depois de quanto tempo a temperatura foi de 0ºC (zero graus)?

c) Determine a lei da função:

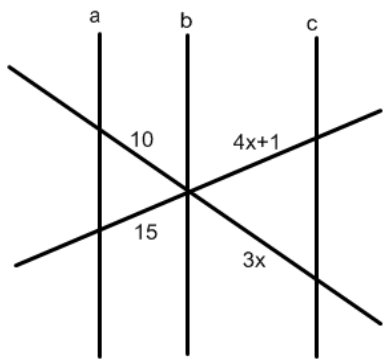
d) Como variou a temperatura em cada minuto? (coeficiente angular)

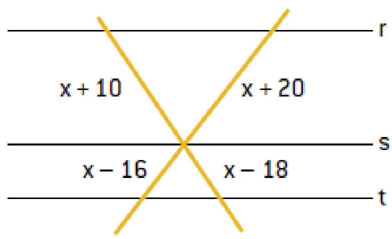
e) Determine depois de quanto tempo (minutos) a temperatura atingiu $-18\ °C$.

**8)** Complete a tabela, sabendo que o coeficiente angular da função $y = ax + b$ é -1. Depois, analisando os valores, escreva a lei dessa função, que está representada na tabela:

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | 0 | | 5 |
| Y | 4 | 2 | |

**9)** Determine o valor de x em cada caso:



**10)** Siga os passos e elabore o gráfico da função de 1º grau.

1) Represente o ponto (-1,5).

A partir desse ponto, desenhe outros três pontos, seguindo a seguinte regra:

2) Avançando duas unidades em x, o y decresce em duas unidades;

Observe que esses quatro pontos pertencem a uma mesma reta; com isso:

3) Trace a reta, que contenha esses pontos.

a) Qual é o coeficiente angular dessa reta?

b) Qual é o coeficiente linear dessa reta?

c) Escreva a equação (lei) de uma função $f$ cujo gráfico é a reta representada.

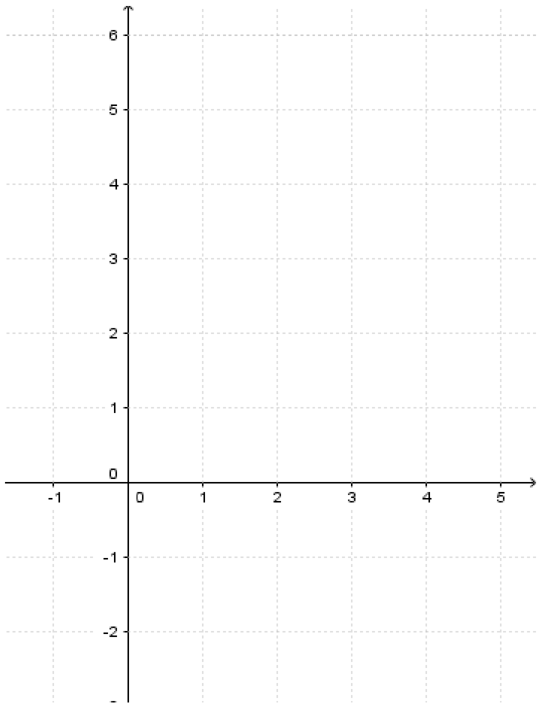
d) Qual é o zero da função $f$?

**11)** Um motorista de táxi cobra R$ 5,60 de bandeirada (valor fixo) mais R$ 2,80 por quilômetro rodado (valor variável). Determine:

a) Função que define o valor a ser cobrado por uma corrida de x quilômetros:

b) O valor a ser pago por uma corrida relativa a um percurso de 18 quilômetros:

c) Quantos km foram rodados em uma corrida de R$ 14,00?




**12)** Considere a função de 1º grau cuja lei de formação é dada por $f(x) = -5x + 6$. Determine:

**a.** em que valor o gráfico corta o eixo y?

**b.** Qual é o valor da função para x= 2?

**c.** Qual ponto do gráfico tem f(x) = 11?

**d.** a raiz da função.

**13)** Marta mora com Pedro, Luiza e Thiago (4 pessoas). Ela foi ao supermercado e comprou alimentos suficientes para o consumo de sua família por 15 dias. No entanto, inesperadamente, duas tias vieram visitá-la e se hospedaram em sua casa durante esse período. Supondo que todos se alimentem com quantidades iguais, em quanto tempo os alimentos acabarão?

**14)** Viajando com uma velocidade média de 80 km/h, durante 6 horas por dia, um vendedor leva 6 dias para executar todo o seu trajeto. Se resolver viajar a 90 km/h em média, durante 8 horas por dia, em quantos dias esse vendedor terminaria seu trajeto?

**15)** Um veículo faz um determinado percurso em 50min com velocidade de 10km/h. Quanto tempo ele gastaria para fazer esse mesmo percurso se utilizar uma velocidade 20% menor, passando a ser 8km/h?

**16)** Um ciclista percorre, em média, 200 km, em dois dias, pedalando durante 5 horas por dia. Em quantos dias esse ciclista, pedalando 6 horas por dia, percorrerá 600 km?

## APÊNDICE G – AUTOAVALIAÇÃO

| | Eu estudante... | ☹️ | 😐 | 🙂 | 😁 |
|---|---|---|---|---|---|
| 01. | participei das atividades, realizando as tarefas propostas em sala de aula e extraclasse? | | | | |
| 02. | busquei em outros materiais para compreender o que era preciso? | | | | |
| 03. | melhorei, obtive e crescimento observando o meu primeiro trabalho até a avaliação? | | | | |
| 04. | fui capaz de resolver os exercícios propostos de cada encontro? | | | | |
| 05. | consegui compreender a linguagem utilizada nos problemas? | | | | |
| 06. | fui capaz de relacionar conceitos matemáticos em situação do cotidiano? | | | | |
| 07. | compreendi conceitos relacionados à função resolvendo problemas? | | | | |
| 08. | consegui expor o meu pensamento de forma escrita na resolução de problemas? | | | | |
| 09. | achei este trabalho diferente do que estávamos habituados a realizar? | | | | |
| 10. | achei que o tempo para resolver as atividades foi suficiente? | | | | |
| 09. | aprendi com esta forma de estudar e recomendando para outros conteúdos? | | | | |
| 10. | consigo escrever algumas coisas importantes sobre o que eu aprendi de funções. Vou escrever algumas dessas no espaço abaixo. | | | | |
| | | | | | |
| 11. | Se você pudesse se dar uma nota, de 0 a 10, que nota você atribuiria que indicasse o quanto você aprendeu nesse estudo. Você sabe dizer por quê? | | | | |
| 12. | Se você falar dessa metodologia para algum amigo, irá cursar a 1ª série, o que você diria sobre a maneira como trabalhamos? | | | | |

# APÊNDICE H – TERMO DE CONSENTIMENTO

## TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Prezado(a) participante,

Sou mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Mestrado Profissional, da Universidade de Caxias do Sul. Estou realizando uma pesquisa de construção e avaliação de uma proposta pedagógica para a aprendizagem significativa do conceito de função e de função do primeiro grau, que é desenvolvida por mim e orientada pela Profª. Drª. Isolda Gianni de Lima.

O estudo de tais conceitos está proposto na formação discente do Ensino Médio. Diante da relevância do desenvolvimento de práticas que viabilizem a aprendizagem significativa, convido-o a participar desta pesquisa. A sua participação dar-se-á através dos registros das tarefas de aprendizagem e de pareceres descritivos que forem solicitados durante o andamento da pesquisa. Estes servirão como avaliações dos benefícios da proposta que será utilizada como metodologia nesta unidade de aprendizagem.

A participação nesta pesquisa é voluntária e tem fins, exclusivamente, de investigação.

Em qualquer publicação oriunda desta pesquisa, a sua identidade será mantida no mais rigoroso sigilo. Como participante, você pode obter informações sobre o andamento da pesquisa sempre que achar necessário.

O seu benefício de aceitar participar deste estudo será mediante o reconhecimento da sua contribuição para a compreensão do fenômeno estudado e para a produção de conhecimento científico.

Quaisquer dúvidas relativas à pesquisa poderão ser esclarecidas pela professora pesquisadora, pelo telefone (54)991558383 ou pelo e-mail fernandam.marchioro@gmail.com.

Atenciosamente

| | |
|---|---|
| ____________________________ | ____________________________ |
| Fernanda Marchioro | Profª. Drª. Isolda Gianni de Llima |
| Professora pesquisadora | Professora orientadora |

Declaro que estou ciente das informações acima e de que minha identidade, enquanto participante, será plenamente preservada. Assim, autorizo a utilização de minhas interações e produções no contexto da aprendizagem para fins da pesquisa.

| | |
|---|---|
| ____________________________ | ____________________________ |
| Nome do(a) estudante | Local e data |

____________________________________________

Nome e assinatura do(a) responsável

## APÊNDICE I – TERMO DE ANUÊNCIA

A instituição Colégio São Carlos, situada na cidade de Caxias do Sul, estado do Rio Grande do Sul, autoriza a professora pesquisadora Fernanda Marchioro, mestrando orientado pela Profª. Dra. Isolda Gianni de Lima, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática: Mestrado Profissional em ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Caxias do Sul, a desenvolver uma pesquisa, que é parte da dissertação de mestrado MODELAGEM MATEMÁTICA PARA UMA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU, em suas dependências, tomando ciência de que as informações serão tratas somente para fins de pesquisa, e tendo por entendimento que os dados obtidos serão utilizados somente para fins de investigação, sem qualquer risco ou dano a essa instituição.

Caxias do Sul, ____ de _____ de 2017.

_________________________________ _________________________________

Assinatura do pesquisador Assinatura com carimbo da instituição

# APÊNDICE J – PRODUTO FINAL

De fato, no cotidiano da sala de aula, é comum um aprendizado de rotinas, como o uso de modelos decorados, dos alunos com os estudos e com a Matemática. Moreira (2011, p. 25) afirma que os alunos estão aprendendo cada vez menos, porque copiam o que está na lousa, reproduzem no caderno, decoram antes da prova e esquecem rapidamente; “os alunos passam anos de sua vida estudando, segundo esse modelo, informações que serão esquecidas rapidamente”.

Buscando formas de integrar a contextualização, encontrou-se no ensino por meio da modelagem matemática uma possibilidade de aprendizagem com sentido para o que é ensinado. Bassanezi (2002) descreve que a modelagem é eficiente quando se percebe que acontece uma aproximação da Matemática com a realidade. Pensando assim, será possível oportunizar situações de aprendizagem para que o aluno possa refletir e questionar sobre a Matemática que está ao seu redor, tendo consciência e interesse pelo que está fazendo, podendo associar o que estuda com o mundo em que vive.

Quando o aluno se envolve na construção de sentido e compreensão do que está aprendendo, a aprendizagem acontece de forma espontânea, e o conhecimento vai sendo construído de forma natural, como afirma Ausubel (1963). O autor também defende que, para o aluno ter uma aprendizagem significativa, deve-se considerar o seu conhecimento prévio como ponto de partida para estabelecer conexões com novos conceitos.

Com o intuito de dinamizar as aulas, no sentido de envolver os alunos e de despertar interesse e curiosidade pelo que precisam aprender, optou-se por estudar e analisar os benefícios que se podem promover, com a modelagem, em educação matemática. Com isso, buscou-se elaborar uma proposta pedagógica para promover mais compreensão, no caso deste trabalho, em relação ao conteúdo de funções do primeiro grau. Skovsmose (2008) afirma que, em geral, melhoras na educação matemática estão relacionadas a propostas que desafiam os alunos a irem além da explicação, do exemplo e da repetição dos exercícios. Precisa-se de inovações que quebrem essa aliança com o tradicional.

No ensino de funções, é comum a construção de tabelas e gráficos, aplicando valores, quase sempre -2, -1, 0, 1 e 2, representantes de números positivos, negativos e o nulo, e que são simples de serem usados, em sua forma algébrica ou com o uso de aplicativos gráficos que apresentam resultados que pouco expressam o entendimento se as informações que revelam não forem exploradas e discutidas. Para Lévy (1999, p. 34), “a questão central não está na mudança do ensino tradicional para os mediatizados por tecnologias, mas na transição de uma educação e uma formação estritamente institucionalizada para uma situação de troca de saberes”. O que se está querendo promover é uma aprendizagem com base em interação e contextualização, para favorecer a compreensão dos conceitos, apoiada também pela tecnologia, como suporte às ações de modelagem.

**JUSTIFICATIVA**

A justificativa para a escolha desse tema deveu-se à experiência e à vivência da professora pesquisadora, por perceber que os alunos precisam de aulas e atividades em que sejam desafiados com situações contextualizadas, pois eles questionam a utilidade do que estão estudando e mostram-se curiosos quando lhes é oferecido um contexto com sentido sobre o que aprendem.

A professora pesquisadora repensou a própria prática, refletiu sobre ela, sobre as suas aulas, questionou-se e, a partir disso, criou alternativas para qualificar a sua ação pedagógica. A forma como as atividades eram propostas em anos anteriores, é preciso que se reconheça, pouco exigia de raciocínio, de estratégias de resolução, de discussões entre alunos ou destes com a professora. As questões eram diretas e evocava-se, basicamente, a aplicação de fórmulas, o que levava os alunos a decorá-las e, por consequência, a usá-las seguindo um modelo de resolução, ainda assim com dificuldades, e a logo esquecê-las; os que aprendiam o faziam por uma aprendizagem muito mais mecânica do que significativa.

**PROBLEMA DE PESQUISA**

Nesse contexto, o problema de pesquisa que mobilizou e justificou este trabalho é: *como uma sequência didática, planejada com a modelagem matemática de uma situação do cotidiano, contribui para a construção de conceitos sobre funções do primeiro grau, no sentido de desenvolver competências para a resolução de problemas e não para o uso fórmulas ou regras meramente decoradas?*

**OBJETIVOS**

Na construção da resposta desse problema, almejou-se alcançar o objetivo geral de *avaliar as contribuições de uma sequência didática que utiliza modelagem matemática, para promover a aprendizagem significativa do conceito de função do primeiro grau e de suas propriedades.*

A esse propósito, foram relacionados os seguintes objetivos específicos:

a) planejar uma sequência didática, para o estudo de funções do primeiro grau, integrando, nas atividades de aprendizagem, situações de modelagem matemática;

b) construir um ambiente de ensino, com fundamentos da aprendizagem significativa, para que o aluno possa compreender e dar sentido aos conceitos sobre funções, sendo capaz de resolver problemas que as envolvam;

c) desenvolver a sequência didática proposta e avaliá-la com especial atenção a indícios de ocorrência de aprendizagem significativa pelos alunos;

d) identificar aspectos da modelagem matemática que favoreçam a aprendizagem significativa do conteúdo abordado;

e) construir um *website* com um material de apoio pedagógico, como produto educacional resultante da dissertação, para o ensino de funções do primeiro grau com a modelagem matemática.

As metodologias que normalmente são vivenciadas no ambiente escolar são diferentes em relação ao método que se buscou construir com esta pesquisa, e considera-se que este poderá auxiliar outros professores a entenderem como significativo cada passo de uma sequência didática como a que está sendo proposta neste trabalho. Para tanto, visando também a aprimorar e a inovar a prática docente, elaborou-se uma sequência didática que, depois de aplicada e avaliada, está sistematizada em um *website*, como produto educacional resultante desta pesquisa. Espera-se, assim, contribuir com uma nova proposta didática para os professores, utilizando a modelagem matemática no ensino de funções.

Este guia foi aplicado em uma pesquisa acadêmico-profissional e demonstrou excelentes resultados e indícios de ocorrência de aprendizagem pelos estudantes participantes.

Desejo que você possa fazer um ótimo trabalho!

Que sua experiência seja tão gratificante quanto a minha!