

UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL
ÁREA DO CONHECIMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E ENGENHARIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MARCELO DA LUZ DA ROCHA

**UM MODELO DE PESOS PARA A RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS
EM TOMOGRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA VIA MÍNIMOS
QUADRADOS PONDERADOS APLICÁVEL AO MONITORAMENTO
DE FLUXO EM DUTOS**

CAXIAS DO SUL

2019

MARCELO DA LUZ DA ROCHA

UM MODELO DE PESOS PARA A RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS
EM TOMOGRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA VIA MÍNIMOS
QUADRADOS PONDERADOS APLICÁVEL AO MONITORAMENTO
DE FLUXO EM DUTOS

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade de Caxias do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica. Área de concentração: Projeto e Fabricação.

Orientador: Dr. Guilherme Holsbach Costa

CAXIAS DO SUL

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Universidade de Caxias do Sul
Sistema de Bibliotecas UCS - Processamento Técnico

R672m Rocha, Marcelo da Luz

Um modelo de pesos para a reconstrução de imagens em tomografia por impedância elétrica via mínimos quadrados ponderados aplicável ao monitoramento de fluxo em dutos / Marcelo da Luz Rocha. – 2019.

107 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade de Caxias do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2019.

Orientação: Guilherme Holsbach Costa.

1. Tomografia. 2. Impedância (Eletricidade). 3. Mínimos quadrados. 4. Método dos elementos finitos. I. Costa, Guilherme Holsbach, orient. II. Título.

CDU 2. ed.: 616-073.7

Catálogo na fonte elaborada pela(o) bibliotecária(o)
Paula Fernanda Fedatto Leal - CRB 10/2291

**“ UM MODELO DE PESOS PARA A RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS
EM TOMOGRAFIA POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA VIA MÍNIMOS
QUADRADOS PONDERADOS APLICÁVEL AO MONITORAMENTO
DE FLUXO EM DUTOS ”**

Marcelo da Luz da Rocha

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade de Caxias do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica. Área de concentração: Projeto e Fabricação.

Caxias do Sul, 14 de março de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Guilherme Holsbach Costa,
Orientador,
Universidade de Caxias do Sul.

Prof. Dr. Alexandre Fassini Michels,
Universidade de Caxias do Sul.

Prof. Ph.D. Frank Patrick Missell,
Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Prof. Dr. Leonardo Dagnino Chiwiacowsky,
Universidade de Caxias do Sul.

*“A reação mais comum da mente humana a uma conquista não é satisfação,
e sim o anseio por mais.”*

Yuval Noah Harari

RESUMO

Esta dissertação desenvolve uma abordagem capaz de melhorar a qualidade de imagens oriundas de tomógrafos por impedância elétrica. Para tanto, propõe-se a aplicação do método de Mínimos Quadrados Ponderados, alternativamente à solução via Mínimos Quadrados, largamente utilizada pela literatura. A solução proposta utiliza um modelo de pesos variante no espaço, no qual os valores de impedância estimados, de cada elemento da malha de elementos finitos, é função da distância entre o elemento e o eletrodo de medição. Esse modelo se baseia nas linhas de campo elétrico no plano tomográfico para ponderar o erro de medição realizado por um eletrodo/canal de medição. Os resultados obtidos com simulações permitem concluir que a abordagem proposta é capaz de aproximar a forma e a posição dos objetos de interesse. Obteve-se melhoras não só na resolução espacial das imagens, mas, de forma geral, no erro de posicionamento, deformação de forma e oscilação; em comparação à solução de Mínimos Quadrados. Portanto, em relação à baixa resolução das imagens, que é um dos principais problemas da técnica de Tomografia por Impedância Elétrica, a abordagem proposta neste trabalho é promissora na reconstrução de imagens.

Palavras-chaves: Problema Inverso. Tomografia por Impedância Elétrica. Mínimos Quadrados Ponderados. Modelo de pesos.

ABSTRACT

This dissertation develops an approach able to improve the quality of least squares image reconstructions from electrical impedance tomography. Thereupon, it is proposed the application of the weighted least squares method, alternatively to the least squares solution, widely used in the literature. The proposed solution uses a spacial variant weights model in which the estimated impedance values of each element from the finite element mesh is a function of the distance between the element and the measuring electrode. This model predicts the electric field lines in the tomographic plane to weight the measurement error performed by an electrode/measurement channel. The results obtained with simulations allow to conclude that the proposed approach is able to approximate the shape and position of the objects of interest. Improvements were obtained not only in the spatial resolution of the images, but, in general, in the positioning error, shape deformation and oscillation; in comparison to the least squares solution. Therefore, in relation to the low resolution of the images, which is one of the main problems of the technique of electrical impedance tomography, the proposed approach is promising for image reconstruction.

Key-words: Inverse Problem. Electrical Impedance Tomography. Weighted Least Square. Weights model.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Sistema de Tomografia por Impedância Elétrica típico.	15
Figura 2 – Diferença entre campo duro e campo macio.	17
Figura 3 – Roteiro de geração de imagens em TIE.	23
Figura 4 – Diagrama em blocos do <i>hardware</i> da TIE.	24
Figura 5 – Plano resistivo: as linhas de campo estão representadas por linhas cheias e as equipotenciais por linhas tracejadas.	25
Figura 6 – Principais tipos de algoritmos para reconstrução em TIE.	52
Figura 7 – Abordagem não linear típica para TIE.	61
Figura 8 – Erro de posição calculado em função das distâncias do centro de gravidade da Imagem Reconstruída (r_f) e da Imagem Segmentada (r_s).	64
Figura 9 – Oscilação dos <i>pixels</i> fora do círculo C	65
Figura 10 – Deformação de forma obtida pela quantidade de <i>pixels</i> fora do círculo C	65
Figura 11 – Representação do domínio tomográfico por um modelo eletrostático.	69
Figura 12 – Domínio do tomógrafo discretizado por uma MEF com 16 eletrodos.	72
Figura 13 – Módulo do campo elétrico $ \mathbf{E} $ em função da distância d	74
Figura 14 – Comportamento, por meio de pesos, das linhas de campo elétrico.	76
Figura 15 – Resultados de imagens em TIE para um artefato circular.	81
Figura 16 – Resultados de imagens em TIE para três artefatos circulares.	83
Figura 17 – Resultados de imagens em TIE para a letra “T”.	86
Figura 18 – Comparação qualitativa do Experimento C com a literatura atual.	88
Figura 19 – Foto do sistema KHU Mark1.	90
Figura 20 – Resultados para o conjunto de dados <i>iirc_data_2006</i>	92
Figura 21 – Circuito equivalente.	104
Figura 22 – Malha com dois elementos.	105

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Histórico dos principais tomógrafos por impedância elétrica.	16
Tabela 2 – Algoritmos para o problema direto.	46
Tabela 3 – Figuras de mérito do Experimento A.	82
Tabela 4 – Erro de estimação da localização e tamanho dos artefatos do Experimento B.	84
Tabela 5 – Erro de estimação do diâmetro da haste do Experimento D.	91

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A/D	Analógico/Digital
CG	Centro de Gravidade
CGO	<i>Complex Geometrical Optics Solutions</i>
D/A	Digital/Analógico
EIDORS	<i>Electrical Impedance Tomography and Diffuse Optical Tomography Reconstruction Software</i>
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEC	Método dos Elementos de Contorno
mGN	método Gauss-Newton
PE	<i>Position Error</i>
RES	<i>Resolution</i>
RNG	<i>Ringing</i>
ROI	<i>Region of Interest</i>
RWLS	<i>Regularized Weighted Least Square</i>
SD	<i>Shape Deformation</i>
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>
TC	Tomografia Computadorizada
TIE	Tomografia por Impedância Elétrica
TRE	Tomografia por Resistência Elétrica
TSVD	<i>Truncated Singular Value Decomposition</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Problema direto

Ω	Meio arbitrário em análise
Γ	Contorno do meio arbitrário em análise
γ	Admitividade elétrica
σ	Condutividade elétrica
u	Potencial elétrico
∇	Vetor gradiente
\hat{n}	Vetor normal unitário

Método dos elementos finitos

\mathbf{Y}	Matriz de admitância
\mathbf{i}	Vetor de corrente elétrica
\tilde{u}	Aproximação finita do potencial elétrico
ϕ_i	Função interpolação
v	Função de teste arbitrária
ψ_i	Coefficientes que ponderam as funções de interpolação
E	Número de elementos da malha
N	Número de pontos nodais da malha

Modelos de eletrodos

i_l	Corrente injetada pelo eletrodo l
u_l	Potencial constante no eletrodo l

z_l Impedância de contato do eletrodo l

Γ_l Porção de Γ que corresponde ao eletrodo l

L Número de eletrodos

Matriz de sensibilidade

\mathcal{J} Matriz de sensibilidade ou Jacobiano

\mathbf{V} Medidas de potencial elétrico no contorno

K Padrões de corrente elétrica injetados

Problema mal posto

ϖ Vetor de valores singulares de uma matriz

ρ Vetor singular da esquerda

ν Vetor singular da direita

$diag(\cdot)$ Função inclusão ou extração da diagonal de uma matriz

Regularização

\mathbf{R} Matriz de regularização

\mathbf{T} Operador de reconstrução linearizado e regularizado

λ Parâmetro de regularização ou hiperparâmetro

$\|\cdot\|_\ell$ Norma ℓ , onde ℓ é geralmente 2

Algoritmos para o problema inverso

$F(\cdot)$ Operador de mapeamento direto não linear

ϵ Estimativa de erro nas medições

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	MOTIVAÇÃO DO TRABALHO	18
1.2	CONTRIBUIÇÃO DO TRABALHO	21
1.3	OBJETIVOS	21
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	22
2	REVISÃO DA LITERATURA	23
2.1	PADRÕES DE EXCITAÇÃO E MEDIÇÃO	23
2.2	PROBLEMA DIRETO	26
2.2.1	Método dos elementos finitos	30
2.2.1.1	Método dos resíduos ponderados	32
2.2.1.2	Condições de contorno	38
2.2.2	Matriz de sensibilidade	43
2.2.3	Algoritmos para o problema direto	45
2.3	RECONSTRUÇÃO	46
2.3.1	Regularização	49
2.3.2	Algoritmos para o problema inverso	52
2.3.2.1	Reconstrução do problema inverso linearizado	54
2.3.2.2	Reconstrução do problema inverso não-linear	55
2.4	AVALIAÇÃO DAS IMAGENS	62
3	ABORDAGEM PROPOSTA	66
3.1	MODELAGEM ELETROSTÁTICA DO DOMÍNIO TOMOGRÁFICO	67
3.2	MODELO DE PESOS PONDERADOS ESPACIALMENTE VARIANTE	71
3.3	ALGORITMO DE RECONSTRUÇÃO	76
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	78
4.1	EXPERIMENTO A	80
4.2	EXPERIMENTO B	82

4.3 EXPERIMENTO C	85
4.4 EXPERIMENTO D	89
5 CONCLUSÃO E TRABALHO FUTURO	93
REFERÊNCIAS	94
APÊNDICE A MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS: ABORDA- GEM DIRETA	104
APÊNDICE B ALGORITMOS PARA O PROBLEMA DIRETO: FA- TORAÇÃO DE CHOLESKY	108

1 INTRODUÇÃO

Vários tipos de tomografias evoluíram desde a década de 1980 (LYTLE; DINES, 1978), (BATES; MCKINNON; SEAGAR, 1980), (DINES; LYTLE, 1981) com o objetivo de fornecer soluções alternativas de baixo custo em aplicações clínicas, geofísicas e industriais. Dentre essas técnicas, se destacou a Tomografia por Impedância Elétrica – TIE (do inglês, *Electrical Impedance Tomography*) (WANG, 2005), (WILKINSON et al., 2005) que permite uma instrumentação segura e de baixo custo.

A TIE é uma técnica, não invasiva, de imageamento das propriedades elétricas de estruturas internas de um corpo. O objetivo é obter a distribuição de impedância (ou admitância) no domínio de interesse, que pode ser estimada pela injeção de correntes elétricas ou pela aplicação de potenciais elétricos no domínio e pela medição de potenciais ou correntes por meio de vários eletrodos que são alocados no contorno do domínio.

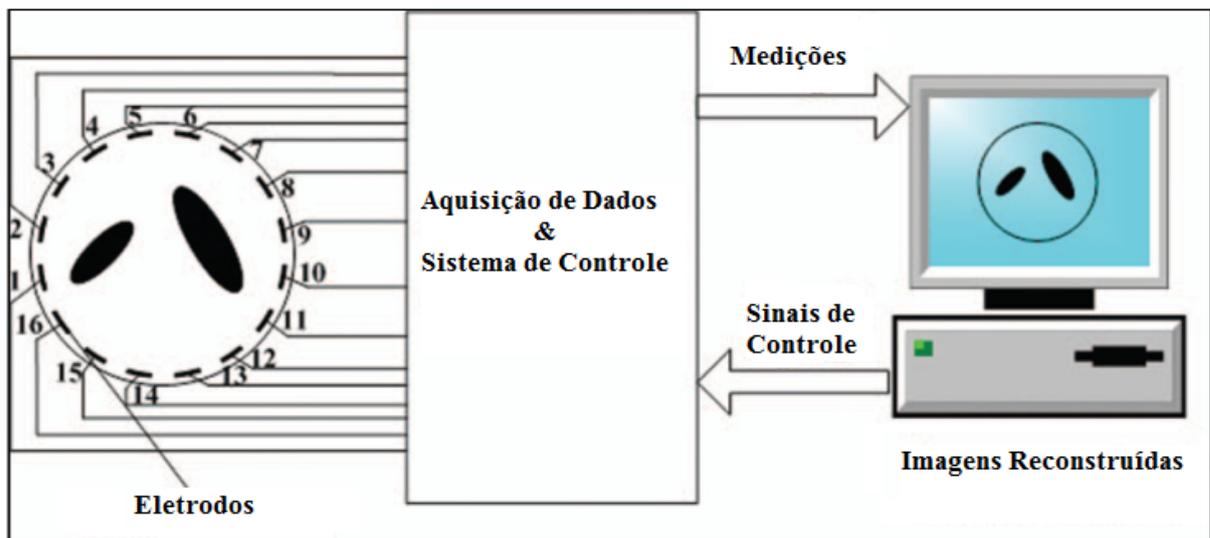
Em um sistema típico, o conjunto de medições de potencial elétrico é obtido a partir da superfície de um volume condutivo (Figura 1), enquanto ele é submetido a uma sequência de padrões de corrente de baixa frequência (menor que 100 kHz). Os níveis de corrente elétrica são limitados por motivos de segurança e definidos pela norma IEC60601-1:2015 (IEC60601-1, 2015). A injeção do sinal de excitação é realizada por um determinado par de eletrodos na superfície do volume condutor, ao passo que a resposta ao estímulo é adquirida por outros pares de eletrodos. Por fim, as respostas são processadas por um algoritmo de reconstrução, gerando uma imagem de um plano tomográfico baseada na distribuição de impedância da seção transversal do volume condutor circundado pelo plano dos eletrodos (WANG et al., 2012).

Por simplicidade, o termo “admitividade” é usado para descrever a propriedade elétrica complexa de um volume condutivo, cujas partes real e imaginária são, respectivamente, medidas de condutividade e susceptibilidade em um determinado ponto dentro do volume. Em TIE, foi convencionado o termo “impedância”, ainda que, de fato, o que é estimado pelo método é a distribuição de admitância dentro do volume.

A Tomografia por Impedância Elétrica pertence a uma família de modalidades de imagens eletromagnéticas, juntamente com técnicas como: Tomografia por Capacitância

Elétrica (HUANG et al., 1992), (XIE et al., 1992) e Tomografia por Indução Eletromagnética (GRIFFITHS, 2001), (NORTON; BOWLER, 1993). Os conceitos práticos da TIE foram apresentados em aplicações geofísicas em 1911 (ALLAUD; MARTIN, 1977), quando a técnica inicialmente foi chamada de Tomografia por Resistência Elétrica (TRE). Imagens geradas por TRE indicavam a presença de minérios e movimento de líquidos (águas subterrâneas e lixiviação).

Figura 1 – Sistema de Tomografia por Impedância Elétrica típico.



Fonte: Adaptado de WANG et al. (2012).

O interesse clínico na técnica de TIE começou no final da década de 1970 (HENDERSON; WEBSTER, 1978) e focou-se em obter imagens do abdômen, cérebro e mama. A primeira técnica clínica de imagens por impedância elétrica foi proposta por Henderson, Webster e Swanson (1976) e por Henderson e Webster (1978) que projetaram o que chamaram de “câmera de impedância”, baseada no princípio da tomografia por raios X, no entanto, a resolução espacial foi menor do que a de raios X.

Brown, Barber e Freeston (1983) propuseram uma nova estratégia de medição para a TIE e a refinaram em (BROWN; BARBER, 1985), que ficou conhecida como “eletrodo adjacente” ou par vizinho, e é utilizada até hoje. O primeiro tomógrafo por impedância elétrica comercial para pesquisa médica surgiu em 1987 e ficou conhecido como sistema Sheffield APT (*Applied Potential Tomography*) (BROWN; SEAGAR, 1987). Dez anos depois, em 1997, foi lançado o primeiro tomógrafo comercial para processos industriais

que foi chamado de sistema Manchester (WANG; DICKIN; BECK, 1993).

Diversos sistemas (Tabela 1) foram desenvolvidos nas últimas três décadas por grupos de pesquisas e foram disponibilizados comercialmente, principalmente, para atender demandas de uso clínico e industrial.

Tabela 1 – Histórico dos principais tomógrafos por impedância elétrica.

Autores	Instituição	Projeto	Área
Brown e Seagar (1987)	Universidade de Sheffield	MARK I	Biomédica
Brown et al. (1994)	Universidade de Sheffield	MARK III	Biomédica
Wilson et al. (2001)	Universidade de Sheffield	MARK III.5	Biomédica
Lidgey et al. (1992)	Universidade de Oxford Brookes	OXPACT-II	Biomédica
Zhu et al. (1994)	Universidade de Oxford Brookes	OXPACT-III	Biomédica
Newell et al. (1988), Gisser et al. (1991) e Cook et al. (1994)	Instituto Politécnico Rensselaer	ACT-III	Biomédica
Lima et al. (2007)	Universidade de São Paulo	TIMPEL	Biomédica
Wang et al. (1993)	Universidade de Manchester	MARK I-b	Industrial
Ma et al. (2003), Wang et al. (2005) e Schlaberg et al. (2008)	Universidade de Leeds	FICA	Industrial
Jia et al. (2010)	Universidade de Leeds	ERT	Industrial
Cilliers et al. (2001) e Wilkinson et al. (2005)	Universidade de Manchester e Universidade de Cape Town	-	Industrial

Fonte: Adaptado de BOONE; BARBER; BROWN (1997).

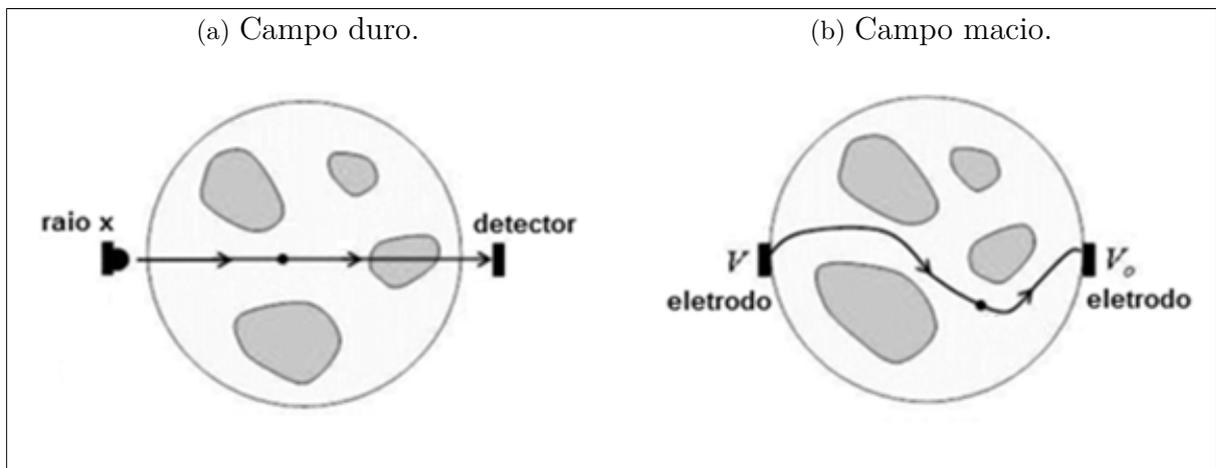
As técnicas de tomografia são comumente divididas em de campo macio (tradução livre do inglês, *soft field*), como a Tomografia por Impedância Elétrica, e de campo duro (*hard field*), como, por exemplo, a Tomografia Computadorizada (TC) de raios X amplamente estabelecida no campo de imagens de alta resolução.

Na TC, feixes paralelos são guiados para o corpo a partir de uma fonte de raios X, enquanto detectores dispostos no outro extremo do corpo (Figura 2-(a)) medem os feixes atenuados à medida que esses transpassam diferentes meios. Este procedimento é repetido, girando-se fonte e detector ao redor do corpo sob análise. Em sequência, imagens da distribuição do feixe atenuado dentro do corpo são geradas utilizando algoritmos de

reconstrução.

Nos métodos de campo duro, os raios X se propagam em linha reta através do corpo, e a absorção de um ponto do corpo pode ser completamente independente da absorção em outro ponto. O arranjo geométrico da TC de raios X permite medir a atenuação ao longo de cada direção do feixe colimado. Isso reduz a reconstrução de imagens a um problema linear com matrizes de sensibilidade esparsas e bem condicionadas (RADON, 1917).

Figura 2 – Diferença entre campo duro e campo macio.



Fonte: Adaptado de MENIN (2009).

Por outro lado, na TIE, ou em qualquer radiação eletromagnética de baixa frequência, tem-se um comprimento de onda tão longo que uma representação eletrostática é mais apropriada para descrever o campo em todo o corpo. É inerente à abordagem do campo macio que a intensidade do campo em qualquer ponto seja uma função da distribuição das propriedades elétricas em todo o corpo (Figura 2-(b)). Como o campo é modificado em todo o corpo, os valores dos potenciais elétricos medidos em um determinado local de fronteira sob um dado padrão de excitação é uma função não linear da distribuição dos parâmetros elétricos em todo o corpo. Isso torna o problema de reconstrução associado menos fácil de ser resolvido se comparado com técnicas que utilizam *hard field* e isso pode ser visto como uma desvantagem.

1.1 MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

O interesse no assunto pode ser constatado pela acentuada taxa de publicações em TIE após os anos 2000. Numerosos artigos de revisão foram publicados em diversos aspectos: revisões com foco no problema matemático (BORCEA, 2002), (UHLMANN, 2009), (ADLER; GABURRO; LIONHEART, 2016); aspectos clínicos (DIJKSTRA et al., 1993) e revisões gerais (BROWN, 2003), (HOLDER, 2004), (ADLER; BOYLE, 2017).

Atualmente, a capacidade de se obter uma imagem do interior de um objeto torna a TIE uma ferramenta com importantes aplicações em diferentes áreas. Na área clínica, apresenta possibilidades: no monitoramento de órgãos como pulmão (HAHN et al., 1995), atividade cardíaca (VONK-NOORDEGRAAF et al., 2000), cérebro (ABBOUD et al., 1995), função gastrointestinal (MANGNALL et al., 1987) e na geração de imagens para detecção de câncer (ASSENHEIMER et al., 2001), (CHEREPENIN et al., 2001), (BOR-SIC et al., 2009). Na geologia, pode ser uma ferramenta de prospecção de novos depósitos subterrâneos de jazidas incrustadas em diversas formações rochosas e na extração de petróleo (BRADY et al., 2009).

Na engenharia, a técnica pode ser utilizada para monitorar o fluxo de gases, líquidos ou bolhas no interior de dutos (XIE; ATKINSON; LENN, 2007), na determinação de reagentes em soluções líquidas armazenadas em recipientes fechados (KANTARCI; BORAK; ULGEN, 2005) e em testes não destrutivos em materiais, como na detecção de corrosão e pequenas fissuras em metais (VILHUNEN, 2002).

Com um custo aproximado de apenas uma fração do preço de um *scanner* de tomografia computadorizada moderno (MENIN, 2009), um equipamento de TIE é uma ferramenta de imagem portátil que cabe facilmente em uma linha de produção industrial para controle de processo ou em uma sala de operação para monitoramento de pacientes em tempo real.

No entanto, a precisão é severamente afetada pela não linearidade no problema de reconstrução da imagem, no sentido de que mesmo grandes melhorias nas medições geram pequenas melhoras na qualidade das imagens (BORCEA, 2002). De modo análogo, a imagem reconstruída pode ser vista como uma fonte de informação que visa responder

a certas questões sobre as propriedades elétricas internas de um determinado volume. Neste contexto, uma imagem de uma resolução razoavelmente baixa é, portanto, uma fonte limitada de informação.

Uma das principais dificuldades na reconstrução de imagens de TIE consiste na solução de um problema inverso mal posto (HANSEN, 1998), ou seja, não há uma única distribuição de admitividade para um determinado conjunto de potenciais elétricos em eletrodos de superfície e o resultado é altamente dependente dos dados de entrada. Esse desenvolvimento matemático do problema inverso em TIE data de meados de 1980 (CALDERON, 1980).

A maioria dos algoritmos numéricos existentes de TIE, requer o cálculo de uma matriz de sensibilidade que relaciona as perturbações da admitância no interior do domínio com as perturbações nos dados de contorno, mas entre eles há uma grande diversidade quanto à forma como essa matriz é manuseada. Em geral, a matriz de sensibilidade (Jacobiano) é fortemente mal condicionada com relação à inversão e, como tal, necessita de algoritmos que imponham restrições de regularização e de informações prévias para preservar a exclusividade e a estabilidade da solução. Os algoritmos mais atuais, segundo Vallejo (2013), podem ser classificados como:

- Métodos por linearização – supõe-se que a perturbação da admitividade tem uma pequena variação em relação à distribuição de admitividade homogênea do domínio (POLYDORIDES, 2002). Exemplos: Matriz de Sensibilidade (BAGSHAW et al., 2003), método *Backprojection* (CHEREPENIN et al., 2002) e o NOSER (*Newton's One-Step Error Reconstructor*) (CHENEY et al., 1990);
- Métodos iterativos – o problema inverso é tratado como um problema de minimização, que estima uma distribuição de admitividade, ao minimizar a diferença entre os potenciais elétricos simulados e os potenciais medidos no contorno do corpo (DOBSON, 1992). Esse método utiliza técnicas de regularização para reduzir as oscilações na solução (ADLER; GUARDO, 1996), como a regularização Tikhonov-Phillips (VAUHKONEN et al., 1998) e *Total Variation* (BORSIC; MCLEOD; LIONHEART, 2001). Exemplo: método Newton-Raphson (KALLMAN; BERRYMAN,

1992), (EDIC et al., 1998);

- Inversão (Bayesiano) – a ideia é formular o problema inverso de admitividade como um problema estático, no qual os potenciais elétricos e a distribuição de admitividade são modelados como variáveis randômicas (NISSINEN; HEIKKINEN; KAIPIO, 2008). Exemplo: método *Simulated Annealing* (MARTINS et al., 2012) e algoritmos genéticos (ROLNIK; SELECHIM, 2006);
- *Layer Stripping* – a admitividade é determinada perto do contorno por meio dos dados coletados na fronteira e para um número finito de camadas, que discretizam o domínio. Os dados no contorno são recalculados para a camada próxima ao contorno do domínio utilizando a equação de Ricatti. O processo é repetido, estimando a admitividade camada por camada, reconstruindo as camadas do contorno para o interior do corpo (SOMERSALO et al., 1991);
- Método D-bar – caracteriza-se por encontrar a solução do problema inverso por meio das *Complex Geometrical Optics Solutions* (CGO) e da teoria *Inverse Scattering*. O método permite a reconstrução não linear em um só passo e sem estimar admitividades intermediárias (ISAACSON et al., 2004), (DEANGELO; MUELLER, 2010).

Os sistemas mais antigos utilizavam o método *Backprojection* (BROWN; SEAGAR, 1987), que é baseado nos métodos por linearização e a maioria dos trabalhos experimentais anteriores a esta década basearam-se neste algoritmo e no método *Layer Stripping*. Atualmente, segundo Adler e Boyle (2017) a abordagem de reconstrução por métodos iterativos, com alguma regularização, é a técnica mais comum na literatura.

Por fim, apesar de todos os avanços em *software* e *hardware*, ainda a qualidade das imagens reconstruídas pela tomografia por impedância é inferior aos demais métodos de imageamento já estabelecidos, tais como a ressonância magnética e a tomografia computadorizada por raios X (ADLER; BOYLE, 2017).

1.2 CONTRIBUIÇÃO DO TRABALHO

Nesta dissertação, com vistas a obter imagens de TIE com melhor qualidade, é aplicada a abordagem de Mínimos Quadrados Ponderados com Regularização (do inglês, *Regularized Weighted Least Square* - RWLS) para estimar a distribuição de admitividade dentro do domínio. Ainda que outros trabalhos sugiram o emprego desse método em problemas de TIE (KALLMAN; BERRYMAN, 1992), (KIM et al., 2000), (LEI et al., 2008), (GREGOR; FESSLER, 2015), (MAMATJAN et al., 2013), (CHITTURI; FARRUKH, 2017), dentro da revisão bibliográfica apresentada neste trabalho não é possível encontrar a efetiva aplicação do método¹.

Neste trabalho, é proposto um modelo de pesos espacialmente variante como ponderação do erro quadrático. Pressupõe-se que medições realizadas próximas aos pares de eletrodos são mais confiáveis em relação a medidas realizadas longe da fonte. Em outras palavras, atribui-se pesos aos possíveis erros de medidas realizadas por cada par de eletrodo. A dissertação inova no modo de construção da matriz de pesos ao propor que valores de impedância estimados, para cada elemento da malha de elementos finitos, sejam uma função da distância entre o elemento e o canal de medição, seguindo um modelo determinístico de pesos variante no espaço que prediz as linhas de campo elétrico no plano tomográfico.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo principal desse trabalho é desenvolver um algoritmo capaz de melhorar a qualidade de imagens oriundas de tomógrafos por impedância elétrica em relação ao estado-da-arte. Como objetivos secundários da pesquisa proposta, menciona-se:

- O1. Obter um método de reconstrução de imagens com custo computacional compatível com os existentes;
- O2. Avançar a *expertise* do Grupo de Pesquisas em que este trabalho se insere sobre Tomografia por Impedância Elétrica.

¹ Note-se que o trabalho de Kallman e Berryman (1992) não apresenta, sequer, uma seção de resultados.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O trabalho está organizado em quatro capítulos. No Capítulo 2, é apresentada a formulação matemática, problema direto e o problema inverso da Tomografia por Impedância Elétrica. Na Seção 2.1, são descritos os padrões de excitação e medição, apresentados os principais componentes de um tomógrafo típico de TIE, e caracterizadas as estratégias de medições mais utilizadas. Na Seção 2.2, é descrito o problema direto, modelo matemático clássico a partir das equações derivadas de Maxwell, descreve-se a metodologia do método de elementos finitos, o Jacobiano e são indicados os principais algoritmos aplicáveis. Na Seção 2.3 é apresentado o problema inverso (reconstrução), problema inverso mal posto, da TIE e algoritmos que resolvem esse tipo de problema, em especial o método de Gauss-Newton. Na Seção 2.4, é descrita a métrica de avaliação proposta em (ADLER et al., 2009). Sugere-se ao público familiarizado com a técnica de Tomografia por Impedância Elétrica a leitura das Seções 2.3 e 2.4, sendo essa última opcional para quem já leu o artigo (ADLER et al., 2009). Leitores com alguma noção de problema inverso mal posto, mas que não tiveram contato com a TIE, podem ler as Seções 2.1, 2.2 e 2.4 (opcional). Para as demais pessoas, recomenda-se a leitura do Capítulo 2 por inteiro. No Capítulo 3, é descrita a abordagem proposta. No Capítulo 4, são apresentados resultados de simulação com imagens sintéticas e medições reais. Por fim, no Capítulo 5, é apresentada uma discussão final seguida da proposta de trabalho futuro.

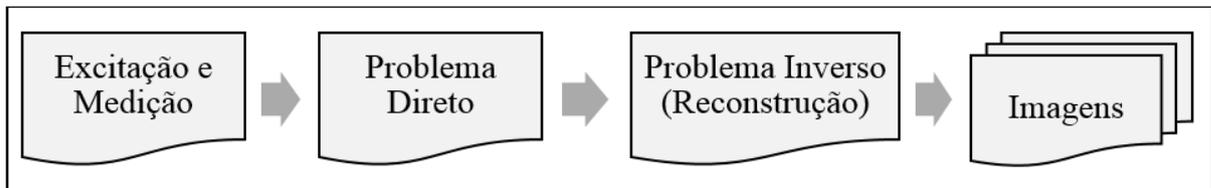
2 REVISÃO DA LITERATURA

A Tomografia por Impedância Elétrica (TIE) pode ser vista como um problema de estimação de parâmetros que representam um domínio de distribuições elétricas, supondo que os padrões de excitação e as medições sejam conhecidas. Em geral, a literatura separa o problema da TIE em dois:

- Problema Direto – define a distribuição das propriedades elétricas no domínio, a partir dos padrões de excitação, para calcular as respostas elétricas nos eletrodos;
- Problema Inverso (ou reconstrução) – conhecido o sinal de resposta nos eletrodos e o padrão de excitação, procura-se a distribuição elétrica interna do domínio.

Esta revisão descreve desde o princípio físico até a avaliação das imagens em TIE. O roteiro da Figura 3 mostra os principais passos pelos quais um sistema clássico interpreta as medidas das propriedades de interesse e esclarece como os componentes do sistema se relacionam entre si.

Figura 3 – Roteiro de geração de imagens em TIE.

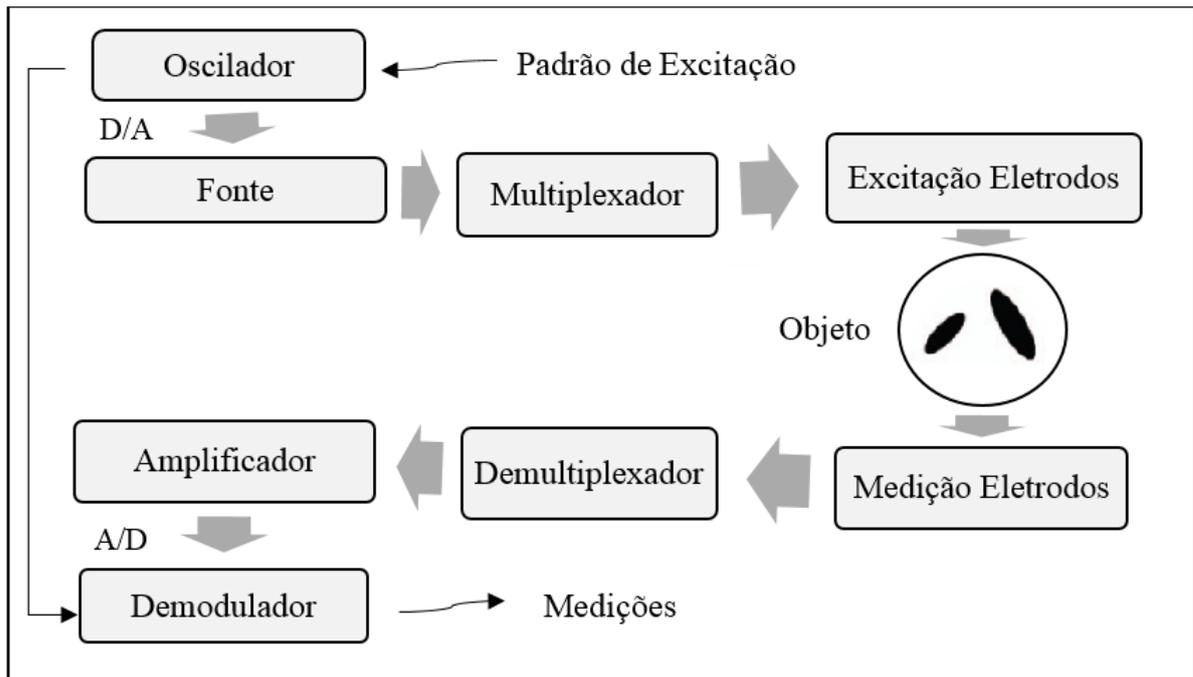


Fonte: Autor (2019).

2.1 PADRÕES DE EXCITAÇÃO E MEDIÇÃO

A Figura 4 mostra um diagrama de blocos do sistema de *hardware* envolvido em um sistema típico de TIE. Uma forma de onda é criada por um oscilador, que modula uma fonte variável (em amplitude e frequência) com uma saída de alta impedância. Esse sinal é multiplexado para os eletrodos no contorno do objeto. No objeto, os eletrodos de medição são conectados a um amplificador de instrumentação, e em seguida a saída amplificada é demodulada e convertida em valores digitais para posterior processamento.

Figura 4 – Diagrama em blocos do *hardware* da TIE.



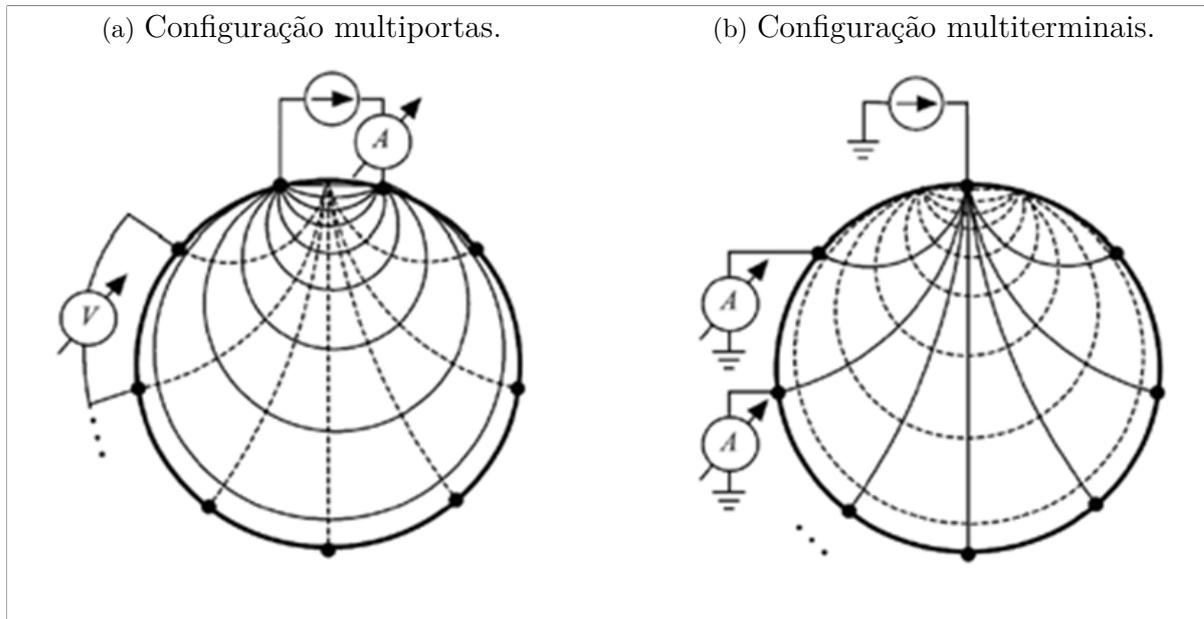
Fonte: Adaptado de ADLER; BOYLE (2017).

Na Figura 5, estão representadas duas possíveis configurações de excitação por corrente elétrica, multiportas e multiterminais, bem como um esboço do comportamento das linhas de campo elétrico e equipotenciais (pontos dentro de um campo elétrico que apresentam o mesmo potencial elétrico) no plano tomográfico. Alguns sistemas aplicam um potencial elétrico ao corpo em vez de corrente, o que é tecnicamente mais simples, mas mais sensível a ruído:

- Multiportas – uma corrente elétrica de excitação é aplicada a um par de eletrodos (porta) e as diferenças de potenciais elétricos resultantes são medidas nos outros pares de eletrodos (Figura 5-(a)). Esse tipo de medição reduz o ruído eletromagnético quando este ocorre simultaneamente nos dois condutores ligados aos eletrodos;
- Multiterminais – a corrente elétrica de excitação é injetada em um eletrodo (terminal) e as correntes elétricas de transferência são medidas nos demais eletrodos em relação a um referencial fixo, usualmente a “terra” (Figura 5-(b)).

A configuração mais comum é a multiportas com injeção de correntes aos pares não se utilizando pares de eletrodos adjacentes para medição ou injeção; o chamado padrão

Figura 5 – Plano resistivo: as linhas de campo estão representadas por linhas cheias e as equipotenciais por linhas tracejadas.



Fonte: Adaptado de GARCIA; SOUZA; PINO (2013).

pula- m (MALMIVUO; PLONSEY, 1995). Nesse padrão, o par de eletrodos ativos, que injetam corrente elétrica, é separado por m eletrodos (passivos) e a forma de onda é geralmente sinusoidal (utilizando um oscilador ou sintetizador digital) ou aproximada por uma onda quadrada.

Por exemplo, no padrão pula-3 a injeção de corrente é feita por dois eletrodos separados por três outros eletrodos. Mantém-se a injeção de corrente nos eletrodos ativos e mede-se os potenciais elétricos entre os outros pares de eletrodos, também separados por três eletrodos. Feitas estas medições, desloca-se o par de injeção em uma unidade e os potenciais elétricos são novamente medidos, e assim por diante.

Os outros padrões pula- m utilizados para injetar corrente e medir potenciais elétricos diferem do método descrito somente no número de eletrodos que são pulados, tanto para injetar corrente quanto para medir potencial.

O caso em que $m = 0$, chamado padrão de eletrodos adjacentes, tem a desvantagem de concentrar a maior parte da corrente elétrica na vizinhança do par de injeção. Isso torna as medidas de potencial menos sensíveis a variações de admitividade. Comparando os dois métodos, pula-0 e pula-3, pode-se dizer que no padrão pula-0 a distância entre os

eletrodos de injeção é menor, o que permite obter uma maior densidade de corrente perto da borda, que por sua vez se reflete numa maior resolução da imagem perto da borda e menor no centro do domínio, distante do par de injeção.

Ao considerar as características elétricas do contato do eletrodo com a superfície do domínio, existe um parâmetro relevante a ser considerado nas medições, a chamada impedância de contato do eletrodo. Essa impedância representa a resistência a ser superada pela fonte de corrente elétrica (HARTINGER; GAGNON; GUARDO, 2007).

Uma estratégia de medição adjacente (ou pula- θ) fornece L^2 medições, em que L é o número de eletrodos. No entanto, para evitar o problema da impedância de contato desconhecida, o potencial não é medido no eletrodo de injeção de corrente, assim, o número de medições é reduzido para $L(L - 3)$. Isso é muitas vezes referido como o esquema de medição de quatro eletrodos ou tetra polar (CLAY; FEREE, 2002).

O teorema da reciprocidade (LORENTZ, 1986), (GESELOWITZ, 1971) afirma que a sensibilidade não é alterada se os pares de injeção e medição forem trocados (impedância mútua). Com base nisso, apenas $L(L - 1)/2$ das medições são independentes. Por exemplo, um sistema com 16 eletrodos irá produzir 208 medições, das quais 120 são independentes.

2.2 PROBLEMA DIRETO

Para uma determinada distribuição de admitividade dentro do corpo, a previsão dos valores medidos nos eletrodos, dado um padrão de excitação, é o chamado “problema direto”, que também inclui a análise da sensibilidade destes valores às mudanças na admitividade (CHENEY; ISAACSON; NEWELL, 1999).

Um modelo matemático do problema é derivado das equações de Maxwell (ADLER, 1995), que governam a interação entre a eletricidade e o magnetismo em um problema físico. Um meio arbitrário $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d \geq 2$, submetido à estimulação elétrica, tem propriedades elétricas que variam em função da posição e do tempo. Essas propriedades são representadas pela função admitância $\gamma(\mathbf{x}, \omega)$ definida em um ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ para uma

certa frequência angular ω :

$$\gamma(\mathbf{x}, \omega) = \sigma(\mathbf{x}) + i\omega\varepsilon(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

onde $\sigma(\mathbf{x})$ é a condutividade elétrica, $\varepsilon(\mathbf{x})$ é a permissividade elétrica relativa, para um vetor posição $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_d]$ em d dimensões, e i é a unidade imaginária. Fora do domínio Ω não há fluxo de corrente, pois é assumida condutividade nula. Por definição, a impedância elétrica é a inversa da admitância, ou seja, mede a razão entre o potencial e a corrente elétrica em um ponto $\mathbf{x} \in \Omega$.

Quando a energia é aplicada ao contorno do domínio, na forma de injeção de corrente, se estabelece uma distribuição de potencial elétrico $u(\mathbf{x})$ e um padrão de fluxo de corrente $J(\mathbf{x})$ no domínio. O potencial elétrico no meio condutivo pode ser expresso por uma equação diferencial parcial elíptica conhecida como equação de Laplace, apresentada em (2.2), por simplicidade de notação, omitindo-se a dependência das variáveis:

$$\nabla(\sigma \nabla u) = 0 \text{ em } \Omega, \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_d]$, $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d]$ e ∇ é o vetor gradiente.

A densidade de corrente (\mathbf{J}) e campo elétrico (\mathbf{E}) no corpo são relacionados pela lei de Ohm (2.3):

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}, \quad (2.3)$$

onde a densidade de corrente $\mathbf{J} = \mathbf{J}_o + \mathbf{J}_s$ é a soma das correntes ôhmicas \mathbf{J}_o com as fontes de corrente internas \mathbf{J}_s . Contudo, em TIE, não há fontes ou sorvedores de corrente elétrica no volume ($\mathbf{J}_s = \mathbf{0}$) o que resulta em uma densidade de corrente ($\mathbf{J} = \mathbf{J}_o$) com propriedades resistivas e capacitivas (CHENEY; ISAACSON; NEWELL, 1999).

Usualmente, a literatura utiliza uma aproximação quase-estática¹ que assume a derivada do campo magnético, isto é, a variação do campo magnético sobre o campo elétrico (indução magnética) é nula:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \approx \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

onde \mathbf{B} é o campo magnético. Essa suposição é válida quando as escalas de comprimento de interesse são muito menores que o comprimento de onda eletromagnética (LARSSON, 2007), (NUNEZ; SRINIVASAN, 2006).

Nesse caso, o campo elétrico (\mathbf{E}) é obtido da função potencial escalar ao calcular o negativo do gradiente de \mathbf{u} , isto é, existe um potencial elétrico cujo gradiente é igual ao vetor campo elétrico:

$$\mathbf{E} = -\nabla\mathbf{u}. \quad (2.5)$$

Assume-se neste trabalho apenas o caso em que os materiais no domínio, incluindo o objeto de interesse, possuem uma condutividade linear e isotrópica², no qual a condutividade independe da direção de avaliação. Deste modo, no interior da região não são descritas fontes de corrente elétrica e o campo elétrico é invariante no tempo, ou seja, o gradiente da densidade de corrente \mathbf{J} é nulo no domínio:

$$\nabla\mathbf{J} = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

Uma outra simplificação realizada neste trabalho é a desconsideração do efeito capacitivo do meio. Esse efeito pode ser desprezado se a razão entre as corrente capacitiva e resistiva for pequena $\ll 1$ (NUNEZ; SRINIVASAN, 2006).

¹ Chama-se de processo quase-estático quando o sistema se encontra, em qualquer instante de tempo, em um estado de equilíbrio ou em um estado muito próximo ao equilíbrio.

² Isotropia é a propriedade que caracteriza os materiais que possuem as mesmas propriedades físicas independentemente da direção considerada.

Substituindo (2.5) em (2.3), tem-se:

$$\mathbf{J} = -\sigma \nabla \mathbf{u}. \quad (2.7)$$

Contudo, o gradiente da densidade de corrente é nulo no domínio, conforme (2.6). Então, ao substituir (2.7) em (2.6) resulta em (2.2): $\nabla (\sigma \nabla \mathbf{u}) = 0$ em Ω . O Nabla (∇) mais interno indica a direção do gradiente do potencial, na qual os elétrons tendem a fluir. Em um circuito elétrico, a condutância de um fio multiplicada pela mudança na tensão elétrica resulta na densidade de corrente elétrica que passa pelo fio. Ao passo que em TIE o objeto de interesse age como um resistor elétrico, então o mesmo princípio se aplica: σ multiplicado pelo gradiente de \mathbf{u} representa a corrente no ponto \mathbf{x} . E o Nabla mais externo calcula o gradiente da corrente, isto é, sua tendência de fluir para dentro ou para fora de um ponto (CHENEY; ISAACSON; NEWELL, 1999)

Para restringir a solução de (2.2), adiciona-se as condições de contorno, que para o problema de valor de contorno do tomógrafo por impedância elétrica correspondem aos valores elétricos injetados. As condições de contorno em Γ , o contorno de Ω , são formadas pela fixação da corrente normal ($\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}}$) em cada ponto de Γ :

$$\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \text{ em } \Gamma, \quad (2.8)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal a Γ . A presença dos eletrodos é considerada por meio das condições de contorno apropriadas, que aparecerão como modificações na equação (2.8).

As equações (2.2) e (2.8) compreendem o problema direto em TIE e são usadas para encontrar a distribuição de potencial elétrico dentro do domínio. A resolução analítica do problema direto somente é possível, na maioria dos casos, para domínios com geometrias regulares e condições de contorno simples. Métodos analíticos que usam séries foram utilizados para resolver o problema direto de modelos simplificados em (ISAACSON, 1986) e (CHEN; PAOLONI, 1992), para um único contraste em um domínio circular.

No entanto, a solução de problemas realísticos com geometrias arbitrárias requer

técnicas numéricas de discretização: Método das Diferenças Finitas (MDF) (MARTINS, 2012), Método dos Elementos Finitos (MEF) ou Método dos Elementos de Contorno (MEC) (ANG, 2007). Com tais métodos, o problema contínuo (2.2) e (2.8) é convertido em um problema discreto que pode ser resolvido com auxílio de um computador.

Cada uma dessas técnicas de discretização apresenta vantagens e desvantagens conforme as condições de contorno do problema. O Método dos Elementos Finitos tem sido a abordagem de escolha predominante da comunidade de TIE, pois permite refinamento numérico em regiões de alta densidade de corrente elétrica, como a área próxima aos eletrodos (GRYCHTOL; ADLER, 2013).

2.2.1 Método dos elementos finitos

Devido à sua capacidade de modelar geometrias arbitrárias e várias condições de contorno, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é o método mais comum atualmente utilizado para a solução numérica em TIE (MURAI; KAGAWA, 1985), (PILKINGTON; MORROW; STANLEY, 1985). A ideia do MEF é reduzir um problema contínuo de dimensão infinita para um problema discreto de dimensão finita, no qual os valores nodais da variável do campo, isto é, o potencial elétrico para o problema de TIE, e as funções de interpolação para os elementos definem completamente o comportamento da variável do campo dentro dos elementos. Ainda, os elementos individuais definem coletivamente o comportamento do campo no domínio de interesse.

Em um problema contínuo, a variável de campo, como o potencial elétrico para TIE, é definida sobre um número infinito de valores, porque é uma função de um número infinito de pontos no corpo. O MEF discretiza o domínio em análise em um número finito de elementos coletivamente chamados de malha de elementos finitos. Dentro de cada elemento, a variável de campo é aproximada por funções simples que são definidas apenas dentro do elemento individual. Os elementos finitos utilizados na discretização do domínio do problema são conectados entre si por meio de determinados pontos, denominados nós ou pontos nodais.

As funções de aproximação (ou funções de interpolação) são definidas em termos dos valores das variáveis de campo nos pontos nodais. A comunidade de TIE tem tradi-

onalmente utilizado formas lineares de primeira ordem, nas quais todos os pontos nodais estão nos limites do elemento onde os elementos adjacentes estão conectados.

A metodologia de solução de um problema contínuo pelo MEF segue a sequência de operações (GRAHAM, 2007):

- i. Discretizar – consiste em discretizar o domínio espacial em um número de elementos não uniformes (triângulos, retângulos, tetraedros, hexaedros ou uma mistura dessas), não sobrepostos e conectados entre si por meio de nós;
- ii. Selecionar funções de interpolação – aproxima-se a variável de campo, dentro de cada elemento, por uma função de interpolação que é definida pelos valores da variável de campo nos pontos nodais do elemento. As funções de interpolação podem ser qualquer função polinomial por partes, definida em um número de nós;
- iii. Calcular as propriedades de cada elemento – calcular uma matriz local para cada elemento da malha;
- iv. Agrupar as propriedades do sistema – para obter as equações do sistema, combinam-se as matrizes locais dos elementos em uma única matriz, a matriz global;
- v. Impor as condições de contorno – fixas (Tipo I, Dirichlet ou condições de contorno essenciais), derivadas (Tipo II, Neumann ou condições de contorno natural) ou uma combinação de ambas (Tipo III ou mista). Para condições de contorno Tipo I (Dirichlet) o valor da variável de campo é prescrito para os nós do contorno. Para o Tipo II (Neumann) o valor da derivada da variável de campo é prescrita para os nós do contorno;
- vi. Resolver o sistema de equações – resolver, por meio de *software* matemático, o sistema algébrico.

Segundo Graham (2007), as três abordagens mais utilizadas pela comunidade de TIE para formular problemas com o MEF são: abordagem direta, abordagem variacional e método dos resíduos ponderados. A abordagem direta é assim chamada por causa de

sua origem no método de rigidez para análises estruturais. O método é limitado, mas é o mais intuitivo, por isso o leitor é convidado a ler o Apêndice A.

A abordagem variacional se baseia no cálculo de variações e envolve a extração de um funcional. Essa abordagem é necessária para estender o método dos elementos finitos a uma classe de problemas que não podem ser tratados pelo método direto. Por exemplo, problemas envolvendo elementos com condutividade não constante, para problemas que usam funções de interpolação de ordem superior e para formas de elementos que não sejam triângulos e tetraedros. Em Hua et al. (1993), é desenvolvida a abordagem variacional para o caso da TIE.

Nesse trabalho, utilizou-se o método dos resíduos ponderados que é a abordagem mais versátil em comparação com as outras duas. O método inicia nas equações governantes do problema e segue sem depender de uma declaração variacional. Inclusive, esse método é amplamente utilizado para aplicações não estruturais, como transferência de calor e mecânica dos fluidos.

2.2.1.1 Método dos resíduos ponderados

O método dos resíduos ponderados pode ser desenvolvido utilizando diferentes metodologias (SILVESTER; FERRARI, 1996), (HOLDER, 2004): método de colocação, método dos momentos, método dos subdomínios e método Galerkin. Utiliza-se aqui o método Galerkin, que segundo Adler e Boyle (2017) é a metodologia mais amplamente utilizada para a TIE. O método Galerkin começa com uma discretização na qual a variável de campo (potencial elétrico) é representada como uma combinação linear de funções de interpolação polinomial por partes:

$$\tilde{u} \cong \sum_{i=1}^N u_i \phi_i, \quad (2.9)$$

onde

$$\phi_i = \begin{cases} 1, & \text{no vértice } i, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.10)$$

são as funções de interpolação para N nós da malha. Como \tilde{u} representa uma aproximação finita do potencial, a equação de Laplace não é, em geral, igual a zero devido ao erro introduzido pelo uso das funções de aproximação.

No método dos resíduos ponderados, multiplica-se a equação governante (2.2) por uma função de teste arbitrária v e se integra sobre o domínio Ω :

$$\int_{\Omega} v [\nabla (\sigma \nabla \tilde{u})] d\Omega = 0. \quad (2.11)$$

O método Galerkin difere dos outros métodos de resíduos ponderados na escolha dessa função de ponderação. A função v tem a mesma forma que a função \tilde{u} , na medida em que utiliza as mesmas funções de interpolação ϕ_i :

$$v \cong \sum_{i=1}^N \psi_i \phi_i, \quad (2.12)$$

onde ψ_i são os coeficientes que ponderam as funções de interpolação ϕ_i . Assim sendo, o problema é encontrar u_i , em (2.9), que resolve a equação (2.11).

Aplicando a identidade do cálculo vetorial, regra do produto (MARSDEN, 1976), em (2.11), tem-se:

$$\nabla (v \sigma \nabla \tilde{u}) = \sigma \nabla \tilde{u} \nabla v + v \nabla (\sigma \nabla \tilde{u}). \quad (2.13)$$

Teorema 2.2.1 (Teorema da Divergência) *Supondo que o espaço $\mathbf{G} \subset \mathbb{R}^n$ é uma função definida por partes nas suas arestas formadoras \mathbf{A} , isto é, $\partial \mathbf{G} = \mathbf{A}$. E se \mathbf{P} é um campo vetorial contínuo e diferenciável definido na vizinhança de \mathbf{G} , tem-se:*

$$\iiint_{\mathbf{G}} \nabla \mathbf{P} d\mathbf{G} = \oint_{\partial \mathbf{G}} \mathbf{P} d\mathbf{A}.$$

Substituindo (2.13) em (2.11):

$$\int_{\Omega} [\nabla (v\sigma\nabla\tilde{u}) - \sigma\nabla\tilde{u}\nabla v] d\Omega = 0 \iff \int_{\Omega} \nabla (v\sigma\nabla\tilde{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma\nabla\tilde{u}\nabla v d\Omega. \quad (2.14)$$

O Teorema 2.2.1 (Teorema da Divergência), permite introduzir as condições de contorno em (2.14):

$$\int_{\Omega} \sigma\nabla\tilde{u}\nabla v d\Omega = \oint_{\partial\Omega} v\sigma\nabla\tilde{u}\hat{n} d\Gamma, \quad (2.15)$$

onde $\nabla\tilde{u}\hat{n} = \partial\tilde{u}/\partial\hat{n}$. Reescrevendo (2.15):

$$\int_{\Omega} \sigma\nabla\tilde{u}\nabla v d\Omega = \oint_{\partial\Omega} v\sigma\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\hat{n}} d\Gamma. \quad (2.16)$$

Para um único elemento triangular “e” o lado esquerdo de (2.16) é definido por:

$$\int_{\Omega} \sigma\nabla\tilde{u}\nabla v d\Omega \stackrel{e}{\implies} \int_{\Omega_e} \sigma_e\nabla\tilde{u}\nabla v d\Omega_e. \quad (2.17)$$

Substituindo-se as definições de \tilde{u} e v em (2.17), chega-se em:

$$\int_{\Omega_e} \sigma_e\nabla\sum_{i=1}^3 u_i\phi_i\nabla\sum_{j=1}^3 \psi_j\phi_j d\Omega_e. \quad (2.18)$$

Se a condutividade σ_e for constante sobre o elemento, então os potenciais nodais u_i , os coeficientes para as funções peso ψ_j e as somatórias podem ser movidas para fora da integral:

$$\sigma_e\sum_{i=1}^3 u_i\sum_{j=1}^3 \psi_j\int_{\Omega_e} \nabla\phi_i\nabla\phi_j d\Omega_e. \quad (2.19)$$

Definindo:

$$S_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \nabla \phi_i \nabla \phi_j \, d\Omega_e, \quad (2.20)$$

é possível reescrever (2.19) conforme

$$\sigma_e \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 \psi_j S_{ij}^e. \quad (2.21)$$

Assim, cada elemento triangular da malha produz uma matriz quadrada de ordem três. O lado direito de (2.15) representa as condições de contorno. E em termos das funções de interpolação, as condições de contorno são:

$$\oint_{\partial\Omega} v \sigma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \hat{n}} \, d\Gamma = \sigma_e \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 \psi_j \oint_{\partial\Omega} \phi_i \nabla \phi_j \hat{n} \, d\Gamma. \quad (2.22)$$

A capacidade de formular soluções para elementos individuais antes de colocá-los juntos para representar todo o problema é uma vantagem importante do método dos elementos finitos. Para um único elemento da malha, (2.15) torna-se:

$$\sigma_e \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 \psi_j S_{ij}^e = \sigma_e \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 \psi_j \oint_{\partial\Omega} \phi_i \nabla \phi_j \hat{n} \, d\Gamma. \quad (2.23)$$

Ambos os lados podem ser divididos pelos coeficientes da função peso ψ_j para produzir:

$$\sigma_e \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 S_{ij}^e = \sigma_e \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 \oint_{\partial\Omega} \phi_i \nabla \phi_j \hat{n} \, d\Gamma. \quad (2.24)$$

Em termos de todo o domínio, o lado esquerdo de (2.15) será:

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla \tilde{u} \nabla v \, d\Omega = \sum_{e=1}^E \sigma_e \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_i S_{ij}^e. \quad (2.25)$$

Portanto, a integral de contorno no lado direito de (2.15) é calculada para os elementos do contorno, aqueles ligados aos eletrodos. Já a integral no lado esquerdo de (2.15) é aplicada a toda malha.

Construção das funções interpolação

O potencial elétrico dentro de um elemento triangular pode ser aproximado por uma função linear, onde a distribuição do potencial elétrico contínuo sobre o plano xy é modelada por uma função planar $\tilde{u}(x, y)$:

$$\tilde{u}(x, y) = a + bx + cy = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Para cada nó, o potencial elétrico deve assumir valores fixos (u_1, u_2, u_3 para os três nós de um elemento triangular), logo os coeficientes a, b e c são encontrados substituindo cada um desses três potenciais e suas posições geométricas nodais na equação (2.26), na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Define-se o inverso da matriz de coeficientes por Ξ :

$$\Xi = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_1x_3 - x_1y_3 & x_1y_2 - y_1x_2 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}}{\det(\Xi)}, \quad (2.28)$$

onde o determinante $\det(\Xi)$, para um elemento triangular, é igual a duas vezes a área do triângulo; isto é, $\det(\Xi) = x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 = 2A_e$. Substituindo (2.28) em (2.27), tem-se a função potencial sobre o elemento:

$$\tilde{u}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

onde ξ_{ij} são os elementos de Ξ . De forma compacta:

$$\tilde{u}(x, y) \cong \sum_{i=1}^3 u_i \phi_i(x, y), \quad (2.30)$$

onde $\phi_i(x, y)$ são as funções de interpolação dadas por

$$\phi_i = c_{1i} + c_{2i}x + c_{3i}y. \quad (2.31)$$

Na forma explícita:

$$\phi_1 = \frac{1}{2A_e} \{(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\}, \quad (2.32)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2A_e} \{(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\}, \quad (2.33)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2A_e} \{(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\}. \quad (2.34)$$

A função ϕ_i é zero em todos os vértices, exceto:

$$\phi_i(x_i, y_i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (2.35)$$

A equação (2.30) define completamente o potencial elétrico dentro do elemento como uma função dos valores do potencial elétrico nos três pontos nodais do elemento.

Cálculo das matrizes locais

O gradiente de potencial elétrico dentro do elemento pode ser encontrado nas equações de interpolação linear (2.30) como:

$$\nabla \tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^3 u_i \nabla \phi_i. \quad (2.36)$$

Aplicando o operador divergente em (2.36):

$$\nabla \nabla \tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 u_j \oint_{\partial \Omega} \nabla \phi_i \nabla \phi_j \, d\Gamma. \quad (2.37)$$

A equação (2.37) pode ser escrita, utilizando a definição (2.20) dos elementos da matriz (de rigidez) local, em forma quadrática de matriz como:

$$\nabla \nabla \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{S}^e \tilde{\mathbf{u}}, \quad (2.38)$$

onde e identifica o elemento. O gradiente das funções de interpolação linear (2.32), (2.33) e (2.34), torna-se o vetor:

$$\nabla \phi_i = \frac{1}{2A_e} (y_2 - y_3, x_3 - x_2), \quad (2.39)$$

que, em termos da matriz local para um elemento, é o mesmo que as matrizes derivadas da abordagem direta do Apêndice A: $S_{ij} = Y_{ij}$.

2.2.1.2 Condições de contorno

As condições de contorno especificam a corrente normal ($\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{n}}}$) nos eletrodos, dependendo do padrão de excitação e medição. Alguns modelos de fluxo de corrente em

eletrodos foram desenvolvidos, os mais simples são os modelos *gap* e contínuo que assumem fluxos de corrente com magnitude uniforme em cada eletrodo, mas, também existem outros dois modelos utilizados: *shunt* e modelo completo de eletrodo.

Modelo *gap*

As condições de contorno do modelo *gap* estão analiticamente contidas no lado direito de (2.16):

$$\oint_{\partial\Omega} v\sigma \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\hat{n}} d\Gamma. \quad (2.40)$$

Essa condição de contorno é válida longe dos eletrodos onde não há corrente fluindo: $\partial u/\partial\hat{n} = 0$. Esse problema de valor de contorno é bem posto e as correntes resultantes são: $i_i = \int_{\Gamma_1} \sigma \partial u/\partial\hat{n} d\Gamma$. Em um modelo *gap*, a corrente é injetada entre dois nós da malha e as condições de contorno são:

$$\oint_{\partial\Omega} v\sigma \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\hat{n}} d\Gamma = u_a i_a + u_b i_b, \quad (2.41)$$

onde i_a e i_b são as correntes injetadas, u_a e u_b são os potenciais nos eletrodos ativos (os que estão injetando corrente elétrica).

Modelo contínuo

O modelo contínuo pressupõe que não há eletrodos e a corrente injetada (i) é contínua no contorno do domínio e função do ângulo (θ), isto é:

$$i(\theta) = Q \cos(\theta), \quad (2.42)$$

onde Q é uma constante. Com dados experimentais, foi provado que este modelo substitua as condutividades em até 25%, devido ao fato de que a presença de eletrodos é ignorada (VAUHKONEN, 1997).

Modelo *shunt*

O modelo de eletrodo *shunt* (HOLDER, 2004) é um refinamento do modelo *gap*, no qual o efeito da condução perfeita de eletrodos de comprimento finito é adicionado. Essa modelagem segue as seguintes condições de contorno:

$$\int_{\Gamma_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} d\Gamma = i_l \text{ para } l = 1, \dots, L, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = 0 \text{ em } \Gamma', \quad (2.44)$$

$$u = u_l \text{ em } \Gamma, \quad (2.45)$$

onde Γ_l é a porção de Γ que corresponde ao eletrodo l , $\Gamma = \cup_l \Gamma_l$ e $\Gamma' = \partial\Omega - \Gamma$. A equação (2.43) afirma que o fluxo líquido da densidade de corrente através da superfície de contato do eletrodo é igual à corrente injetada. A equação (2.44) significa que, longe dos eletrodos, nenhuma corrente flui. A equação (2.45) significa que o potencial elétrico em cada eletrodo (u_l) é constante nos eletrodos.

Modelo completo de eletrodo

Em aplicações reais, existe uma camada de impedância de contato entre a superfície do domínio e o eletrodo, isso gera um efeito no qual o potencial elétrico no eletrodo não é mais constante, existe uma variação de potencial associada a uma impedância de contato. A impedância de contato (z_l) pode variar sob a área do eletrodo, mas geralmente é assumida como constante.

Esta impedância de contato eletrodo-superfície é alta para as frequências usadas na TIE, assim, a diferença de potencial na impedância de contato é grande (HUA; WOO; WEBSTER, 1991). Ignorar essa diferença de potencial introduz um expressivo erro de modelagem, que resulta em erros na admitividade reconstruída. O modelo completo de eletrodo inclui o efeito da impedância de contato e é, portanto, a descrição mais precisa da situação física (VAUHKONEN, 1997).

O modelo completo de eletrodo é definido pela equação de Laplace (2.2) e as seguintes condições de contorno (HOLDER, 2004):

$$\int_{\Gamma_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} d\Gamma = \mathbf{i}_l \text{ para } l = 1, \dots, L, \quad (2.46)$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = 0 \text{ em } d\Gamma \mid \bigcup_{l=1}^L \Gamma_l, \quad (2.47)$$

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = u_l \text{ em } \Gamma_l, l = 1, \dots, L, \quad (2.48)$$

onde \mathbf{i}_l é a corrente injetada pelo eletrodo l e u_l é o potencial constante no eletrodo l , para L eletrodos, Γ_l é a porção de Γ que corresponde ao eletrodo l . A equação (2.46) diz que a integral da densidade de corrente elétrica sobre o eletrodo é igual à corrente elétrica total que flui para aquele eletrodo. A equação (2.47) significa que não há corrente entrando ou saindo do contorno onde não há eletrodo (ou seja, no espaço entre os eletrodos). Finalmente, a equação (2.48) considera que o potencial elétrico medido consiste no potencial elétrico do contorno mais o potencial elétrico devido à impedância de contato do eletrodo (z_l).

O modelo completo de eletrodo consiste nas equações (2.2) e (2.46)-(2.48), juntamente com as condições para a conservação da carga (2.49) e uma escolha arbitrária de uma referência (2.50):

$$\sum_{l=1}^L \mathbf{i}_l = 0, \quad (2.49)$$

e

$$\sum_{l=1}^L u_l = 0. \quad (2.50)$$

O modelo das equações (2.46)-(2.48) pode ser formado numericamente como (HOLDER, 2004), (POLYDORIDES; LIONHEART, 2002) e (VAUHKONEN et al., 1998):

$$\mathbf{Y}\mathbf{u} = \mathbf{i}, \quad (2.51)$$

onde $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{(N+L) \times (N+L)}$ é a matriz de admitância (ou rigidez) global, $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^{(N+L) \times 1}$ contém as correntes elétricas injetadas e $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{(N+L) \times 1}$ é o vetor de potenciais elétricos em cada nó da malha, para N nós da malha e L eletrodos. Expandindo as matrizes de (2.51):

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{\mathbf{c1}} + \mathbf{Y}_{\mathbf{c2}} & \mathbf{Y}_{\mathbf{e}} \\ \mathbf{Y}_{\mathbf{e}}^T & \mathbf{Y}_{\mathbf{d}} \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathbf{c}} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{\mathbf{c}} \in \mathbb{C}^N, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{C}^L, \quad (2.53)$$

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{i}_{\mathbf{c}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} \in \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{i}_{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^L, \quad (2.54)$$

onde $[\mathbf{Y}_{\mathbf{c1}}]_{ij} = \int_{\Omega} \sigma \nabla \phi_i \nabla \phi_j d\Omega$ representa a equação (2.2). O efeito da impedância de contato é adicionado aos nós situados abaixo dos eletrodos por $\mathbf{Y}_{\mathbf{c2}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$:

$$[\mathbf{Y}_{\mathbf{c2}}]_{ij} = \sum_{l=1}^L \frac{1}{z_j} \int_{\Gamma_1} \phi_i \phi_j d\Gamma. \quad (2.55)$$

O efeito da impedância de contato é adicionado aos elementos situados sob os eletrodos por $\mathbf{Y}_{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^{N \times L}$:

$$[\mathbf{Y}_{\mathbf{e}}]_{ij} = -\frac{1}{z_j} \int_{\Gamma_1} \phi_i d\Gamma \quad i = 1, \dots, N \text{ e } j = 1, \dots, L. \quad (2.56)$$

A componente $\mathbf{Y}_{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^{L \times L}$ liga a camada de contato ao eletrodo:

$$[\mathbf{Y}_{\mathbf{d}}]_{ij} = \begin{cases} |\Gamma_1| \frac{1}{z_j}, & \text{para } i, j = 1, \dots, L, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.57)$$

onde $|\Gamma_1|$ é o comprimento do eletrodo.

A matriz \mathbf{Y} é construída como se estivesse resolvendo as condições de contorno do modelo de eletrodo de *gap* ou *shunt* e aumentada pelos blocos \mathbf{Y}_e e \mathbf{Y}_d para o modelo de eletrodo completo.

2.2.2 Matriz de sensibilidade

O Jacobiano \mathcal{J} , ou matriz de sensibilidade, representa a sensibilidade de cada medição para uma mudança de admitividade em cada região do domínio Ω . Para uma distribuição de admitividade conhecida γ_p , onde $F(\gamma_p)$ são as medidas de potencial elétrico no contorno em resposta a γ_p , o Jacobiano \mathcal{J}_{γ_p} é dado por:

$$\mathcal{J}_{\gamma_p}(\gamma - \gamma_p) = \mathbf{V} - F(\gamma_p), \quad (2.58)$$

onde γ é a distribuição de admitividade e \mathbf{V} as medidas de potencial elétrico no contorno em respeito a γ .

Definição 2.2.1 (Derivada de Fréchet) *Se \mathbf{X} e \mathbf{Y} são espaços lineares normados, que permite o mapeamento não linear $F : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$: para o qual $\delta F(x + h) = Gh$ para um h suficientemente pequeno, dado o operador linear limitado $G : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ e $\delta F(x + h) \in \mathbf{Y}$ é linear e contínuo em h . Além disso, se $B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ for o espaço linear normalizado de operadores lineares limitados de \mathbf{X} para \mathbf{Y} , então a melhor aproximação de primeira ordem do mapeamento não linear $DF : \mathbf{X} \rightarrow B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ satisfaz:*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\| F(x + h) - F(x) - DF(x)h \|}{\| h \|} = 0.$$

O mapeamento DF é referido como a Derivada de Fréchet do mapeamento F . Se F é considerado o operador integral direto, então a matriz de sensibilidade é a forma discreta da Derivada de Fréchet de F .

Portanto, segundo a Definição 2.2.1, a matriz de sensibilidade é a derivada discreta (Derivada de Fréchet) da função não linear que mapeia as perturbações na solução para

perturbações nos dados de contorno (sob um espaço de Hilbert, ou seja, não restrito a um número finito de dimensões), isto é:

$$DF : \Delta\boldsymbol{\gamma} \Big|_{\Omega} \rightarrow \Delta\mathbf{V} \Big|_{\partial\Omega}, \quad (2.59)$$

onde

$$\mathbf{V}(\mathbf{i}^d) = [V(\mathbf{i}_1^d) \quad V(\mathbf{i}_2^d) \quad \dots \quad V(\mathbf{i}_K^d)] \in \mathbb{R}^L, \quad (2.60)$$

é o vetor com L medidas dos eletrodos de contorno correspondentes a K padrões de correntes elétricas injetadas. Assim, a matriz de sensibilidade $\mathcal{J} \in \mathbb{R}^{L \times K}$ tem a forma:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(\mathbf{i}_1^d)}{\partial \gamma_1} & \cdots & \frac{\partial V(\mathbf{i}_1^d)}{\partial \gamma_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V(\mathbf{i}_3^d)}{\partial \gamma_1} & \cdots & \frac{\partial V(\mathbf{i}_3^d)}{\partial \gamma_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V(\mathbf{i}_L^d)}{\partial \gamma_1} & \cdots & \frac{\partial V(\mathbf{i}_L^d)}{\partial \gamma_K} \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

sendo K o número de graus de liberdade do modelo.

Cada linha da matriz corresponde à distribuição de sensibilidade dentro do modelo com relação à medida específica e ao padrão de corrente injetado no momento. Em geral, a sensibilidade é maior perto do par de medição, mas seu valor real aumenta quando os pares de medição e direção estão próximos uns dos outros.

O Jacobiano é um operador linear, autoadjunto³ e positivo em espaços de Hilbert de dimensão infinita. Além disso, sendo um operador compacto, ele tem um inverso ilimitado (descontínuo), fazendo com que \mathcal{J}^{-1} seja instável em relação a variações nos dados.

Antigamente, quando a maioria dos modelos eram grosseiros, o Jacobiano era calculado utilizando sua definição (2.61). No entanto, para modelos de elementos finitos com um grande número de graus de liberdade, esse método é extremamente ineficiente (POLYDORIDES; LIONHEART, 2002).

Atualmente, duas abordagens para o cálculo de \mathcal{J} têm sido utilizadas: diferenciação direta da formulação matricial (pelo MEF) do sistema (YORKEY; WEBSTER;

³ Um operador autoadjunto ou operador Hermitiano é um operador linear em um espaço vetorial com produto interno que é o adjunto de si mesmo.

TOMPKINS, 1987) e método do campo adjunto, nos quais o produto (interno) de campos produzidos por padrões de excitação e medição são integrados sobre cada um dos elementos da malha; descrição detalhada em (POLYDORIDES; LIONHEART, 2002). Também é possível aproximar \mathcal{J} fazendo pequenas mudanças em cada região da imagem e calculando o que se chama de “perturbação do Jacobiano” descrita em (YORKEY; WEBSTER; TOMPKINS, 1987).

2.2.3 Algoritmos para o problema direto

Dada uma malha de elementos finitos com distribuição de admitividades \mathbf{Y} conhecida e um conjunto de padrões de correntes elétricas injetadas \mathbf{i} , os potenciais elétricos \mathbf{u} nos pontos nodais do modelo e dos eletrodos no contorno pode ser calculado a partir de (2.51), reescrita abaixo:

$$\mathbf{Y}\mathbf{u} = \mathbf{i}, \quad (2.62)$$

onde $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_c \quad \mathbf{u}]^T \in \mathbb{C}^{(N+L) \times 1}$ e $\mathbf{i} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{i}_c]^T \in \mathbb{R}^{(N+L) \times 1}$, para N nós da malha e L eletrodos. Isolando-se \mathbf{u} , tem-se:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{i}. \quad (2.63)$$

No sistema (2.63), para o modelo completo de eletrodo, a matriz de admitância \mathbf{Y} possui dimensão $(N + L) \times (N + L)$ e tem as seguintes características:

- Esparsa, portanto mais fácil de armazenar e manipular, se usados os algoritmos adequados;
- Quadrada e de posto completo, portanto a solução é única;
- Simétrica e positiva-definida o que permite a decomposição em fatores menores.

Dependendo se a matriz \mathbf{Y} é real ou complexa, diferentes algoritmos podem ser empregados para o cálculo. Em geral, o problema direto pode ser resolvido diretamente ou iterativamente (HOLDER, 2004), (VAUHKONEN et al., 2001) (ver Tabela 2).

Tabela 2 – Algoritmos para o problema direto.

<i>Admitividade</i>	Algoritmos diretos	Algoritmos iterativos
<i>Real</i>	fatoração de Cholesky (Apêndice B)	Gradiente Conjugado
<i>Complexa</i>	fatoração LU	Gradiente Bi-Conjugado

Fonte: Adaptado de POLYDORIDES; LIONHEART (2002).

Os **algoritmos diretos** (para o problema direto) obtêm inicialmente o inverso da matriz de coeficientes \mathbf{Y}^{-1} que são então multiplicados pelos padrões de corrente para produzir a solução desejada. Em termos computacionais, a tarefa mais complexa é o cálculo do inverso da matriz \mathbf{Y} com um nível de tolerância baixo, na ordem de $tol < 10^{-12}$. Esse processo domina a complexidade dos métodos diretos (HOLDER, 2004), desafiando as calculadoras numéricas a encontrar um inverso “quase exato”, um processo que exige cálculos de refinamento intensos e demorados para refinar o inverso ao valor da tolerância.

Para sistemas grandes, malhas grandes, algoritmos diretos podem ser caros, computacionalmente, e **algoritmos iterativos** podem ser necessários. Em geral, um método iterativo procura um mínimo do funcional, tomando a direção de busca para cada passo de iteração, e requer apenas o cálculo do gradiente, em vez da segunda derivada completa (HOLDER, 2004).

2.3 RECONSTRUÇÃO

Reconstrução de imagem em TIE é por definição um problema inverso que calcula uma estimativa da distribuição das propriedades internas do domínio, que seja consistente com as medidas obtidas no contorno. Hadamard (HANSEN, 1998) classificou todos os problemas matemáticos como bem postos ou mal postos. Para que um problema seja bem posto, uma solução deve existir, a solução deve ser única e pequenas alterações nos dados não devem resultar em uma grande alteração na solução. Então, um problema é mal posto se pelo menos uma das três condições não for satisfeita:

- i. Existência da solução – a violação da existência de uma solução não é uma preocupação prática, pois pode-se forçar uma solução aproximada, por meio de regularização;

- ii. Unicidade da solução – a violação da exclusividade da solução é preocupante no sentido que a existência de várias soluções requer alguns outros critérios para selecionar uma das soluções;
- iii. Solução continuamente dependente das condições iniciais e de contorno – um problema cuja solução não depende continuamente dos dados levará a uma solução numérica instável, em termos da TIE isso significa que a solução inversa será dominada pelo ruído, a menos que condições adicionais sejam impostas.

Matematicamente, problemas mal postos só podem existir no domínio contínuo e que, sob a suposição de aritmética de precisão infinita, o problema discreto nunca é mal posto. Entretanto, com aritmética de precisão finita, a discretização de um problema mal posto leva a um problema numérico que é mal condicionado, os chamados *problemas mal postos discretos* (KAIPIO; SOMERSALO, 2004), (HANSEN, 1998), (HANSEN, 2008).

O mal condicionamento de um problema é definido pelo *número de condição* de sua matriz e esse comportamento pode ser visualizado utilizando a decomposição em valores singulares (do inglês, *Singular Value Decomposition* - SVD) de uma matriz. A decomposição em valores singulares é uma forma de fatorar uma matriz que não requer que a matriz seja simétrica ou tenha posto (*rank*) completo (HANKE, 1995).

Seja $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{C \times M}$ uma matriz retangular com $C \geq M$. Então a SVD de \mathbf{H} é uma decomposição da forma:

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\varpi} \boldsymbol{\nu}^T = \sum_{i=1}^M \rho_i \varpi_i \nu_i^T, \quad (2.64)$$

onde $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1, \dots, \rho_M]$ e $\boldsymbol{\nu} = [\nu_1, \dots, \nu_M]$ são vetores com colunas ortonormais em seus espaços e $\boldsymbol{\varpi} = \text{diag}(\varpi_1, \dots, \varpi_M)$ tem elementos diagonais não negativos que, por convenção, são organizados em ordem não crescente tal que $\varpi_1 \geq \dots \geq \varpi_M \geq 0$.

Os números ϖ_i são os valores singulares de \mathbf{H} enquanto que $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{\nu}$ são, respectivamente, os vetores singulares esquerdos e direitos de \mathbf{H} . O *número de condição* da matriz \mathbf{H} é igual à razão ϖ_1/ϖ_M .

O *número de condição* de uma matriz é relativo, pois está relacionado ao nível de precisão dos cálculos e é uma função do tamanho do problema (CHENEY; ISAACSON, 1995). Um problema com um baixo *número de condição* é considerado bem condicionado, enquanto um problema com um alto *número de condição* é considerado como sendo mal condicionado. Hansen (1997) discute observações a respeito dos valores singulares de matrizes mal condicionadas oriundas de aplicações práticas:

- Os valores singulares ϖ_i decaem gradualmente para zero sem lacunas no espectro;
- O aumento das dimensões de \mathbf{H} aumentará o número de pequenos valores singulares;
- Os vetores singulares $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{\nu}$ tendem a ter mais mudanças de sinais em seus elementos ρ_i e ν_i à medida que o índice i aumenta, isto é, quando ϖ_i diminui.

Para visualizar como o SVD dá uma indicação do mal condicionamento da matriz \mathbf{H} , considere as seguintes relações (HANKE, 1995):

$$\begin{cases} \mathbf{H}\boldsymbol{\nu}_i &= \varpi_i\rho_i, & i = 1, \dots, M, \\ \|\mathbf{H}\boldsymbol{\nu}_i\|_2 &= \varpi_i, & i = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (2.65)$$

Um pequeno valor singular ϖ_i , comparado a $\|\mathbf{H}\boldsymbol{\nu}_i\|_2 = \varpi_i$, significa que existe uma certa combinação linear das colunas de \mathbf{H} , caracterizada pelos elementos ν_i do vetor singular da direita, tal que $\|\mathbf{H}\boldsymbol{\nu}_i\|_2$ é pequeno. Em outras palavras, a existência de um ou mais valores pequenos de ϖ_i implica que a matriz \mathbf{H} é quase classificada como incompleta e os vetores $\boldsymbol{\nu}_i$ associados ao pequeno ϖ_i são vetores que mapeiam o espaço nulo de \mathbf{H} .

A partir disso, é possível concluir que a matriz \mathbf{H} em um *problema mal posto discreto* é sempre altamente mal condicionada e seu espaço nulo é medido por vetores com muitas mudanças de sinais. À medida que ϖ_i diminui, os vetores singulares $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{\nu}$ contêm componentes ρ_i e ν_i de frequência cada vez mais altos. Seja o vetor arbitrário \mathbf{z} :

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^M \nu_i^T \mathbf{z} \boldsymbol{\nu}_i, \quad (2.66)$$

o mapeamento \mathbf{Hz} usando o SVD é

$$\mathbf{Hz} = \sum_{i=1}^M \varpi_i (\nu_i^T \mathbf{z}) \rho_i. \quad (2.67)$$

Isso mostra que, devido à multiplicação com ϖ_i , os componentes de alta frequência de \mathbf{z} são mais amortecidos no \mathbf{Hz} que os componentes de baixa frequência. O problema inverso de \mathbf{z} na forma de $\mathbf{Hz} = \mathbf{b}$ tem a solução:

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{b} = \sum_{i=1}^M \frac{(\rho_i^T \mathbf{b}) \nu_i}{\varpi_i}, \quad (2.68)$$

o que mostra que as oscilações de alta frequência em \mathbf{b} serão amplificadas pelos pequenos valores singulares ϖ_i .

Em termos de reconstrução em TIE, o ruído nos dados será amplificado pela inversão dos pequenos valores singulares. Consequentemente, a solução do problema inverso será contaminada pelo ruído no sinal. Para superar esse mau condicionamento, utiliza-se técnicas de regularização. Essas técnicas geralmente envolvem truncar ou filtrar os valores singulares correspondentes aos vetores singulares com componentes de alta frequência.

Contudo, pode-se questionar por que em um problema com escassez de informações a matriz de sensibilidade deve ser truncada. A razão para defender o truncamento é que, entre os valores singulares do Jacobiano, os menores são os mais vulneráveis ao ruído e estes são, muitas vezes, extremamente pequenos. Quando perturbados pelo sinal de ruído e depois invertidos, eles crescem em sinais de ruído muito grandes, causando instabilidade na solução. Para evitar esta situação, a sua filtragem é essencial, mas há realmente uma perda de sensibilidade (POLYDORIDES, 2002).

2.3.1 Regularização

Um método de regularização é formalmente definido como um método de inversão dependente de um único parâmetro real $\lambda \geq 0$, que produz uma família de soluções aproximadas (KARL, 2000). Técnicas de regularização discretas incluem decomposição de valores singulares truncados (do inglês, *Truncated Singular Value Decomposition* -

TSVD), entropia máxima e um número de esquemas de mínimos quadrados generalizados, incluindo métodos de regularização de Twomey e Tikhonov, Noser (CHENEY et al., 1990), Laplace (POLYDORIDES; LIONHEART, 2002) e *Total Variation* (BORSIC; MCLEOD; LIONHEART, 2001). Todos esses métodos tentam reduzir os efeitos da solução de um sistema mal condicionado restaurando a continuidade da solução nos dados (CHENEY; ISAACSON, 1995).

O método de regularização mais amplamente referenciado é o método de Tikhonov ou Tikhonov-Phillips. Com a regularização de Tikhonov, informações adicionais sobre a solução, comumente referidas como informações prévias, são incorporadas à solução como um termo adicional na minimização por mínimos quadrados. Isto é, em vez de minimizar apenas $\mathbf{Hz} - \mathbf{b}$, minimiza-se uma expressão da forma:

$$\hat{\mathbf{z}} = \arg \min_{\mathbf{z}} \{ \|\mathbf{Hz} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{Rz}\|^2 \}, \quad (2.69)$$

onde \mathbf{R} é uma matriz de regularização de Tikhonov, frequentemente diagonal, e a expressão $\lambda^2 \|\mathbf{Rz}\|^2$ representa alguma informação prévia sobre a admitividade. Além disso, a minimização quadrática (2.69) garante uma solução única para $\lambda > 0$.

Os métodos de regularização de Tikhonov, de ordem- k , podem ser vistas em (TIKHONOV; ARSENIN, 1977). A regularização clássica de Tikhonov, ordem zero, se refere ao caso onde $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ (matriz identidade), entretanto o termo Tikhonov é frequentemente aplicado a qualquer solução independentemente da escolha de \mathbf{R} .

Considerando-se que a função custo em (2.69) é quadrática, derivando-a em relação a \mathbf{z} e igualando-se a solução a zero chega-se em:

$$\hat{\mathbf{z}}(\lambda) = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda^2 \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{b} = \mathbf{Tb}, \quad (2.70)$$

onde \mathbf{T} é o operador de reconstrução linearizado e regularizado. A equação (2.70) é a forma mais geral do modelo de reconstrução para TIE, no qual a maioria dos algoritmos de reconstrução podem ser construídos a partir deste *framework*. A estimativa do inverso regularizado $\hat{\mathbf{z}}(\lambda)$ tem duas propriedades importantes:

- Para um λ suficientemente “grande” a solução regularizada $\hat{\mathbf{z}}(\lambda)$ é estável diante de perturbações ou ruídos nos dados;
- Para valores de λ próximos a zero, a solução generalizada não regularizada, que é contaminada por ruído, é recuperada: $\hat{\mathbf{z}}(\lambda) \rightarrow \mathbf{z}$.

O parâmetro λ é chamado de “parâmetro de regularização” ou “hiperparâmetro” e controla o *trade-off* entre a solução regularizada $\hat{\mathbf{z}}(\lambda)$ e a não regularizada. O hiperparâmetro pode ser visto como uma aproximação entre o erro de medição e o ruído de discretização devido à aritmética de precisão finita (ADLER; GUARDO, 1996).

O parâmetro λ é frequentemente escolhido heurísticamente, mas isso significa que as comparações entre os algoritmos podem não ser justas e podem ser escolhidas de maneira a ocultar os detalhes da imagem. Existem abordagens para selecionar automaticamente λ (BORSIC; LIONHEART; MCLEOD, 2002), (POLYDORIDES; LIONHEART, 2002) e (BRAUN et al., 2017): NF (*Noise Figure*) sugerido por (ADLER; GUARDO, 1996), SNR (*Signal-to-Noise Ratio*) sugerido por (BRAUN et al., 2017), LCV (*L-Curve Criterion*) sugerido por (HANSEN; O’LEARY, 1993), GCV (*Generalized Cross-Validation*) sugerido por (GOLUB; HEATH; WAHBA, 1979).

Em termos de SVD, o efeito da regularização clássica de Tikhonov, com $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ (matriz identidade), é que os valores singulares são filtrados da seguinte forma (HANSEN, 1998):

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^M f_i \frac{\rho_i^T \mathbf{b} \nu_i}{\varpi_i}, \quad (2.71)$$

onde $f_i = \varpi_i^2 / (\varpi_i^2 + \lambda^2)$. Essa função de filtro decai suavemente de $f_1 \approx 1$ para $\varpi_i \gg \lambda$ a $f_1 \approx 0$ para $\varpi_i \ll \lambda$. Deste modo, os vetores singulares diretos com valores singulares menores que λ são efetivamente filtrados. A função do filtro Tikhonov é estruturalmente idêntica ao filtro Wiener (KARL, 2000).

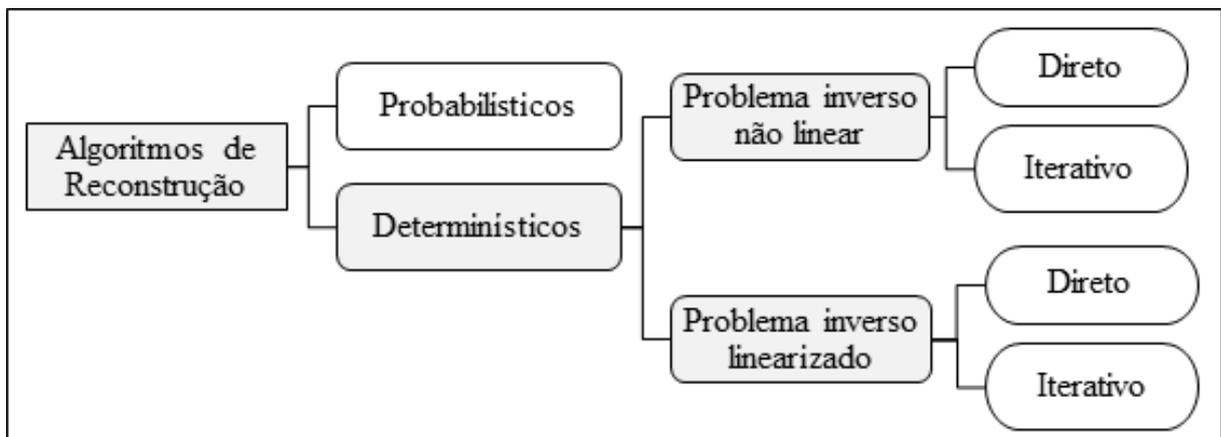
A regularização pode ser empregada de várias formas, no entanto, seus principais objetivos são impor as suposições prévias sobre a solução e, ao mesmo tempo, filtrar os

componentes de alta frequência da solução, ou seja, aqueles correspondentes aos menores valores singulares do Jacobiano.

2.3.2 Algoritmos para o problema inverso

A Figura 6 mostra um diagrama com os principais tipos de algoritmos de reconstrução disponíveis para o problema da TIE. Esses são geralmente divididos em métodos probabilísticos (KAPIO et al., 2000), (WILLIAMS; BECK, 1995), (VAUHKONEN, 1997), (KOLEHMAINEN et al., 1997), (NISSINEN; HEIKKINEN; KAPOIO, 2008), (MARTINS et al., 2012), (ROLNIK; SELECHIM, 2006), (MARTIN; CHOI, 2016); métodos determinísticos baseados em linearização (ALLERS; SANTOSA, 1991), (BLUE, 1997), (CHENEY; ISAACSON; NEWELL, 1999), (HERWANGER; PAIN; OLIVEIRA, 2002), (LOKE; BARKER, 1996), (LIMA et al., 2007), (CHOI; HARRACH; SEO, 2014), (HYVÖNEN; MUSTONEN, 2017) e os métodos determinísticos de inversão não linear (DORN et al., 1999), (WEBSTER, 1990), (WEXLER, 1988), (ADLER; GUARDO, 1996), (VAUHKONEN et al., 1998), (BORSIC; LIONHEART; MCLEOD, 2002), (DORN et al., 2002), (BORCEA; BERRYMAN; PAPANICOLAOU, 1999), (LIU et al., 2015), (LIU et al., 2016). Nesse trabalho, utiliza-se apenas métodos determinísticos que, segundo Adler e Boyle (2017), são as abordagens mais comuns da literatura atual em TIE.

Figura 6 – Principais tipos de algoritmos para reconstrução em TIE.



Fonte: Autor (2019).

Os algoritmos determinísticos para a reconstrução de imagens podem ser divididos em duas categorias principais: destinados ao **problema inverso linearizado** e ao

problema inverso não linear, sendo que, de certo modo, os algoritmos da segunda categoria englobam problemas da primeira.

Em relação à categoria de **problema inverso linearizado**, subdivide-se ainda mais: nos *métodos diretos*, que calculam um inverso “exato” do Jacobiano que é subsequentemente usado para obter a solução regularizada com a regularização de Tikhonov, por exemplo, em uma única etapa (TIKHONOV; ARSENIN, 1977); e nos *métodos iterativos*, nos quais as aproximações à solução inversa regularizada são calculadas a cada iteração (GOLUB; LOAN, 1996).

Os algoritmos determinísticos para o **problema inverso não linear** são principalmente *iterativos*, capazes de reconstituir heterogeneidades em alto contraste, tipicamente Newton-Raphson. Além disso, para problemas bidimensionais, existem também alguns algoritmos não lineares *diretos* (SILTANEN; MUELLER; ISAACSON, 2000), (SOMERSALO et al., 1991), (BRÜHL; HANKE, 2000), (BORCEA; BERRYMAN; PAPANICOLAOU, 1999) como: método de transformação de dispersão (SILTANEN; MUELLER; ISAACSON, 2000) e a abordagem *multigrid* (BORCEA; BERRYMAN; PAPANICOLAOU, 2001).

Em geral, a reconstrução de uma solução estável e única requer a implementação de um algoritmo iterativo não linear do tipo Newton (Newton-Raphson, Gauss-Newton) com um solucionador de passos regularizado (ISLAM; KIBER, 2014). Nessa abordagem, inicialmente, o modelo deve ser atualizado com base na estimativa da solução \mathbf{z}_k (2.69), que envolve principalmente a avaliação da matriz de sensibilidade e o cálculo do problema direto em \mathbf{z}_k , isto é, $F(\mathbf{z}_k)$. Em seguida, para a próxima estimativa da solução \mathbf{z}_{k+1} , lineariza-se o problema em torno de \mathbf{z}_k e então se adota alguma forma de regularização para resolver o problema. A aplicação da regularização evita, essencialmente, o cálculo dos componentes de alta frequência da solução, isto é, evita o processamento de dados que possam estar contaminados por ruído.

As iterações, lineares e não lineares, são frequentemente controladas pelo critério de parada ou princípio de discrepância de Morozov (MOROZOV, 1984) segundo o qual

as iterações devem progredir até:

$$\|F(\mathbf{z}_k) - \mathbf{V}\| \leq \epsilon, \quad (2.72)$$

onde \mathbf{V} são as medições de potencial elétrico, ϵ é a estimativa de erro nas medições.

2.3.2.1 Reconstrução do problema inverso linearizado

O processo de calcular a solução ótima \mathbf{z}^* para o problema não linear de TIE é equivalente ao de localizar um ponto mínimo local em um gráfico não linear. A partir de uma aproximação inicial \mathbf{z}_0 , lineariza-se o problema em torno de \mathbf{z}_0 , avalia-se o Jacobiano em \mathbf{z}_0 e depois o regulariza para resolver o problema linear, obtendo o próximo ponto para o qual deve se mover na busca. A repetição desse procedimento efetivamente cria uma sequência de soluções lineares $\{\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k\}$, para as quais $\|\mathbf{z}^* - \mathbf{z}_k\|_2$ diminui à medida que o índice de iterações k aumenta, aproximando-se cada vez mais da solução.

A parte com maior custo computacional dessa rotina é o cálculo do Jacobiano depois de cada atualização da solução. Portanto, uma boa aproximação inicial certamente acelerará todo o processo, uma vez que menos etapas lineares serão necessárias. Em princípio, pequenas perturbações na admitividade podem ser reconstruídas com precisão suficiente, considerando apenas o problema linearizado.

A partir de uma distribuição conhecida, \mathbf{z}_0 , geralmente homogênea, um conjunto de medições $F(\mathbf{z}_0)$ é calculado. Na sequência, ocorre uma perturbação $\delta\mathbf{z}$ causando um novo $\mathbf{z} \neq \mathbf{z}_0$ conseqüentemente um $\mathbf{V} \neq F(\mathbf{z}_0)$. Calculando \mathcal{J} , o Jacobiano baseado em \mathbf{z}_0 , a forma discreta do problema linear usado na imagem diferencial se torna:

$$\mathcal{J}\delta\mathbf{z} = \delta\mathbf{V} \iff \mathcal{J}(\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}) = F(\mathbf{z}_0) - \mathbf{V}. \quad (2.73)$$

A validade e, de fato, o sucesso da linearização depende crucialmente da magnitude da perturbação, que de certa forma implica que ou a aproximação inicial deve ser muito precisa, ou seja, próximo da solução exata, ou que o próprio valor da perturbação deve ser de alguma forma garantidamente pequeno. A questão crucial que surge é “quão pequena” essa mudança deve ser para que ela seja recuperada de uma formulação linearizada. Este

é um problema fortemente ligado ao modelo a ser usado para a reconstrução, pois em uma função não linear, é praticamente impossível com a técnica determinística adotada identificar a localização exata do mínimo exigido a partir de um ponto que esteja longe dele.

2.3.2.2 Reconstrução do problema inverso não-linear

Segundo Polydorides e Lionheart (2002), para resolver adequadamente o problema de reconstrução de imagem da TIE, deve-se optar pelo problema inverso não linear (SOMERSALO et al., 1991), (SILTANEN; MUELLER; ISAACSON, 2000). Na ausência de um método não linear direto, sem um passo linear intermediário, pode-se optar por eliminar os termos da segunda derivada da expansão de Taylor do problema não linear e assim, efetivamente, construir um inverso generalizado do Jacobiano, subsequentemente invertendo o problema utilizando uma técnica de minimização não linear convencional. Alternativamente, pode-se considerar inicialmente uma forma linearizada do problema inverso e, em seguida, adotar algum tipo de regularização para obter uma solução de passo estável dentro de um algoritmo não linear.

A primeira abordagem é muitas vezes referida como o método de Gauss-Newton, enquanto a segunda é mais semelhante a um método proposto por Levenberg (1944) e Marquardt (1963), no qual um parâmetro de regularização variável é empregado. A análise a seguir ilustra como o problema inverso não linear pode ser resolvido utilizando algum método do tipo Newton. Em princípio, a solução deve minimizar o erro residual:

$$f(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}(F(\mathbf{z}) - \mathbf{V})^T(F(\mathbf{z}) - \mathbf{V}) = \frac{1}{2}\|F(\mathbf{z}) - \mathbf{V}\|_2^2. \quad (2.74)$$

Se o operador de mapeamento direto não linear F tiver a primeira e a segunda derivadas contínuas nos espaços de Hilbert, e se sua linearização for continuamente inversível próximo de \mathbf{z} , então F^{-1} existirá localmente próximo de \mathbf{z} .

Introduzindo a variável auxiliar $\Theta(\mathbf{z}) = (F(\mathbf{z}) - \mathbf{V})$ e expandindo-a em série de

Taylor, tem-se:

$$\Theta(\mathbf{z} + h) = \Theta(\mathbf{z}) + \Theta'(\mathbf{z})h + \frac{1}{2}\Theta''(\mathbf{z})h^2 + \mathcal{O}(\|h^3\|). \quad (2.75)$$

Em uma tentativa inicial de minimizar $f(\mathbf{z})$, pode-se seguir uma abordagem via mínimos quadrados da qual a iteração de Newton-Raphson para problemas bem postos é derivada buscando-se um passo h para o qual se tenha $\Theta(\mathbf{z} + h) \approx \mathbf{0}$. Negligenciando termos de segunda ordem ou superior de (2.75), de forma a linearizar o problema, tem-se:

$$\Theta(\mathbf{z}) = -\Theta'(\mathbf{z})h, \quad (2.76)$$

$$h_{NR} = -(\Theta'(\mathbf{z}))^{-1}\Theta(\mathbf{z}) = F'(\mathbf{z})^{-1}(\mathbf{V} - F(\mathbf{z})). \quad (2.77)$$

Deste modo, pode-se chegar ao esquema iterativo de Newton-Raphson:

$$z_{k+1} = z_k + F'(\mathbf{z}_k)^{-1}(\mathbf{V} - F(\mathbf{z})). \quad (2.78)$$

Da equação (2.74), o gradiente ∇ e a matriz Hessiana Hf do resíduo $f(\mathbf{z})$ são:

$$\nabla = \Theta'(\mathbf{z})^T \Theta(\mathbf{z}) \quad (2.79)$$

$$= F'(\mathbf{z})^T (F(\mathbf{z}) - \mathbf{V}), \quad (2.80)$$

$$Hf = \Theta'(\mathbf{z})^T \Theta'(\mathbf{z}) + \Theta''(\mathbf{z})\Theta(\mathbf{z}) \quad (2.81)$$

$$= F'(\mathbf{z})^T F'(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^M F''_i(\mathbf{z})(F_i(\mathbf{z}) - V_i). \quad (2.82)$$

Quando o mínimo desejado é aproximado, os segundos termos derivados na equação (2.82) tornam-se insignificantes:

$$\sum_{i=1}^M F_i''(\mathbf{z})(F_i(\mathbf{z}) - V_i) \cong 0. \quad (2.83)$$

Sob esta hipótese e utilizando as equações (2.80) e (2.82), podemos reformular o erro residual (2.74) como:

$$f(\mathbf{z} + h) = f(\mathbf{z}) + f'(\mathbf{z})h + \frac{1}{2}f''(\mathbf{z})h^2 \quad (2.84)$$

$$= f(\mathbf{z}) + (\Theta'(\mathbf{z})^T \Theta(\mathbf{z}))h + \frac{1}{2}(\Theta'(\mathbf{z})^T \Theta'(\mathbf{z}))h^2 \quad (2.85)$$

$$= f(\mathbf{z}) + F'(\mathbf{z})^T (F(\mathbf{z}) - \mathbf{V})h + \frac{1}{2}F'(\mathbf{z})^T F'(\mathbf{z})h^2. \quad (2.86)$$

Definindo o gradiente da equação (2.86) e igualando a zero, produz:

$$h\nabla f = F'(\mathbf{z})^T (F(\mathbf{z}) - \mathbf{V}) + hF'(\mathbf{z})^T F'(\mathbf{z}) = 0, \quad (2.87)$$

onde o passo h é dado por

$$h = (F'(\mathbf{z})^T F'(\mathbf{z}))^{-1} F'(\mathbf{z})^T (\mathbf{V} - F(\mathbf{z})) \quad (2.88)$$

$$= F'(\mathbf{z})^\dagger (\mathbf{V} - F(\mathbf{z})), \quad (2.89)$$

onde $F'(\mathbf{z})^\dagger$ é a pseudo-inversa de $F'(\mathbf{z})$ (BJÖRCK, 1996). A equação (2.89) combinada com a fórmula de Newton-Raphson (2.77) fornece o conhecido algoritmo de Gauss-Newton (GOLUB; LOAN, 1996):

$$h_{GN} = F'(\mathbf{z})^\dagger (\mathbf{V} - F(\mathbf{z})), \quad (2.90)$$

$$z_{k+1} = z_k + h_{GN}. \quad (2.91)$$

O algoritmo de Gauss-Newton é utilizado para resolver problemas de mínimos quadrados não lineares. Esse é uma variação do método de Newton-Raphson, entretanto

o método Gauss-Newton (mGN) só pode ser utilizado para minimizar valores quadrados da função. A vantagem é que as derivadas segundas, que podem ser difíceis de calcular, não são mais necessárias.

No entanto, embora o método de Gauss-Newton para problemas bem postos seja conhecido por obter a convergência quadrática, neste caso o desempenho do algoritmo (2.90) e (2.91) depende da validade da suposição (2.83) e o tamanho do passo h . Alternativamente, pode-se optar por aproximar os termos da segunda derivada na equação (2.82) com o termo $\lambda \mathbf{I}$ como sugerido em (LEVENBERG, 1944), onde λ (ou hiperparâmetro) é um escalar positivo pequeno e \mathbf{I} é a matriz identidade com dimensões apropriadas. Isso efetivamente muda a suposição (2.83) para:

$$\sum_{i=1}^M F_i''(\mathbf{z})(F_i(\mathbf{z}) - V_i) \cong \lambda \mathbf{I}. \quad (2.92)$$

Portanto, ao reescrever o erro residual como:

$$f(\mathbf{z} + h) = f(\mathbf{z}) + f'(\mathbf{z})h + \frac{1}{2}f''(\mathbf{z})h^2 \quad (2.93)$$

$$= f(\mathbf{z}) + (\Theta'(\mathbf{z})^T \Theta(\mathbf{z}))h + \frac{1}{2}(\Theta'(\mathbf{z})^T \Theta'(\mathbf{z}) + \lambda \mathbf{I})h^2 \quad (2.94)$$

$$= f(\mathbf{z}) + F'(\mathbf{z})^T (F(\mathbf{z}) - V)h + \frac{1}{2}(F'(\mathbf{z})^T F'(\mathbf{z}) + \lambda \mathbf{I})h^2, \quad (2.95)$$

e definindo o gradiente

$$h \nabla \mathbf{f} = F'(\mathbf{z})^T (F(\mathbf{z}) - \mathbf{V}) + h(F'(\mathbf{z})^T F'(\mathbf{z}) + \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (2.96)$$

Resulta na solução regularizada de Tikhonov:

$$h = (F'(\mathbf{z})^T F'(\mathbf{z}) + \lambda \mathbf{I})^{-1} F'(\mathbf{z})^T (\mathbf{V} - F(\mathbf{z})). \quad (2.97)$$

Substituindo (2.97) na fórmula de Newton-Raphson (2.78) resulta no método de Levenberg-Marquardt (MARQUARDT, 1963):

$$h_{LM} = (F'(\mathbf{z})^T F'(\mathbf{z}) + \lambda \mathbf{I})^{-1} F'(\mathbf{z})^T (\mathbf{V} - F(\mathbf{z})), \quad (2.98)$$

$$z_{k+1} = z_k + h_{LM}. \quad (2.99)$$

No método de Levenberg-Marquardt, para problemas bem postos, à medida que a solução é aproximada o λ é reduzido a zero. Assim, a equação (2.98) é gradualmente transformada em um passo de Gauss-Newton. Este método também pode ser derivado por uma linearização de $f(\mathbf{z})$ em torno de \mathbf{z}_k dentro do funcional não linear de Tikhonov, isto é:

$$f(\mathbf{z}) = \|F(\mathbf{z}) - \mathbf{V}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{R}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_k)\|_2^2, \quad (2.100)$$

onde \mathbf{R} é a matriz de regularização. Linearizando-se F em torno de \mathbf{z} , chega-se no problema de minimização:

$$\arg \min_{\mathbf{h}} \{ \|F'(\mathbf{z})\mathbf{h} - \mathbf{V}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{R}(\mathbf{h} - \mathbf{z})\|_2^2 \}, \quad (2.101)$$

para o qual a solução linear generalizada de Tikhonov é

$$h_{GT} = (F'(\mathbf{z})^T F'(\mathbf{z}) + \lambda \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} (F'(\mathbf{z})^T \mathbf{V} + \lambda \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{z}). \quad (2.102)$$

Conseqüentemente, para a iteração $k + 1$, pode-se minimizar (2.101) como:

$$\arg \min_h \{ \|F(\mathbf{z}_k) - \mathbf{V} - F'(\mathbf{z}_k)(h - z_k)\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{R}(h - z_k)\|_2^2 \}, \quad (2.103)$$

que tem uma solução algébrica

$$h = (F'(\mathbf{z}_k)^T F'(\mathbf{z}_k) + \lambda \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} (F'(\mathbf{z}_k)^T (\mathbf{V} - F(\mathbf{z}_k)) + \lambda \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{z}_k), \quad (2.104)$$

$$z_{k+1} = z_k + h. \quad (2.105)$$

Ao contrário de (2.98)-(2.99), em (2.104)-(2.105) o parâmetro de regularização λ é mantido constante a cada iteração. Uma variação de (2.104) foi introduzida por Bakushinskii (1992), onde o termo de penalidade em (2.103) é modificado ao substituir \mathbf{z}_k por uma estimativa inicial da solução \mathbf{z}_o . Análises posteriores em (BAKUSHINSKII, 1992) mostraram que isso tem propriedades estabilizadoras na minimização do funcional, impedindo assim que as estimativas iterativas diverjam:

$$h = (F'(\mathbf{z}_k)^T F'(\mathbf{z}_k) + \lambda \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} (F'(\mathbf{z}_k)^T (\mathbf{V} - F(\mathbf{z}_k)) + \lambda \mathbf{R}^T \mathbf{R} (z_o - z_k)), \quad (2.106)$$

$$z_{k+1} = z_k + h. \quad (2.107)$$

A Figura 7 mostra um diagrama funcional (ADLER, 1995) no qual a solução não linear é resolvida iterativamente utilizando um passo linearizado em cada iteração. O diagrama funcional segue os seguintes passos (GRAHAM, 2007):

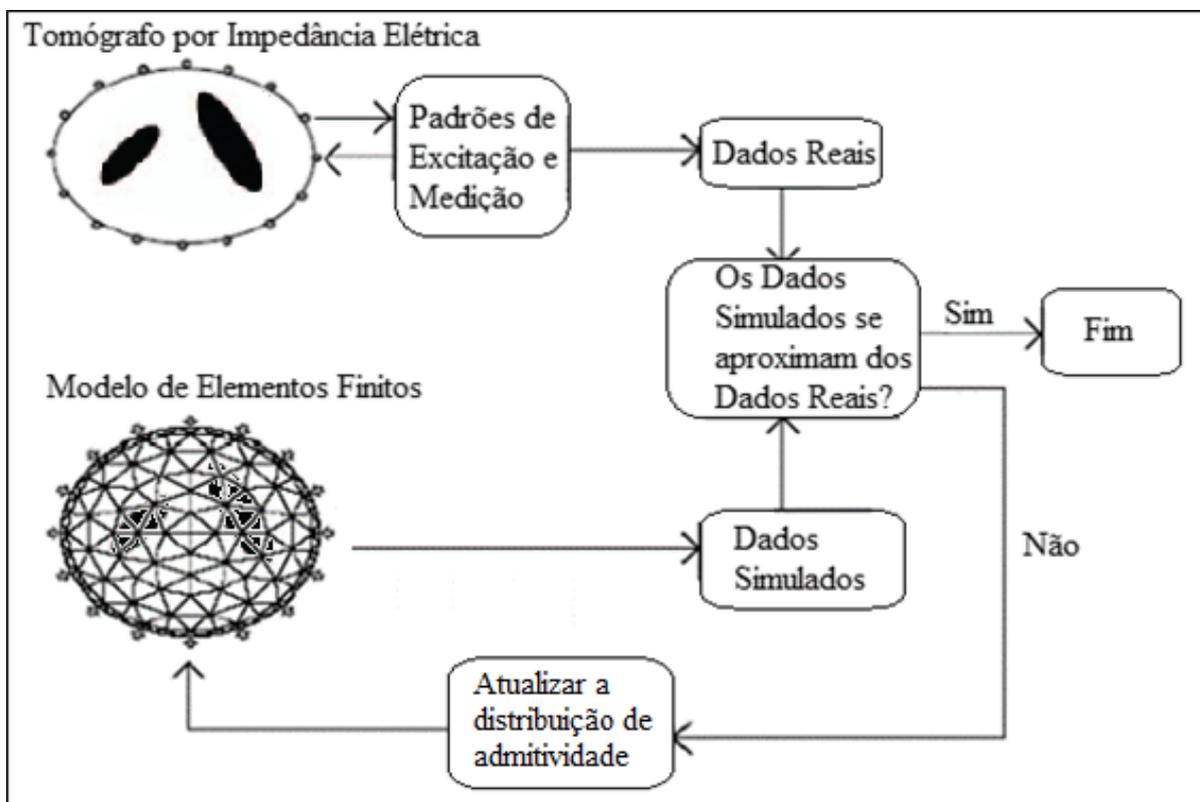
- P1 - Obter uma aproximação inicial, \mathbf{z}_o , para a distribuição de admitividade, que reflete uma suposição sobre a distribuição de admitividade do meio. Muitas vezes é uma estimativa grosseira da admitividade homogênea do meio;
- P2 - Resolver o problema direto $F(\mathbf{z}_k)$ para determinar as medições simuladas;
- P3 - Calcular a mudança na admitividade, como:

$$h = (F'(\mathbf{z}_k)^T F'(\mathbf{z}_k) + \lambda \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} (F'(\mathbf{z}_k)^T (\mathbf{V} - F(\mathbf{z}_k)) + \lambda \mathbf{R}^T \mathbf{R} (z_o - z_k)),$$

onde $\mathbf{V} - F(\mathbf{z}_k)$ é a diferença entre os valores medidos e simulados;

- P4 - Atualizar a admitividade: $z_{k+1} = z_k + h$;
- P5 - Atualizar a matriz de admitância com a estimativa atual da admitividade;
- P6 - Avaliar uma regra de parada. Por exemplo, parar depois de uma única iteração (CHENEY et al., 1990), parar após algum número fixo de iterações ou parar quando a diferença entre os dois conjuntos de medições cair abaixo de algum limiar de tolerância, como o critério de parada de Morozov (NASH; SOFER, 1996). Se a solução atual satisfizer a regra de parada, a estimativa estará concluída (fim do processo), caso contrário, continue no passo P7;
- P7 - Atualizar o Jacobiano com base na estimativa atual da admitividade (algumas abordagens atualizam o Jacobiano em cada iteração, outros não);
- P8 - Ir para o passo P2 para recalcular o problema direto.

Figura 7 – Abordagem não linear típica para TIE.



Fonte: Adaptado de ADLER (1995).

Além desses passos explícitos, existem parâmetros implícitos que estão em conformidade com algumas suposições e são importantes partes do problema:

- A admitividade inicial é tipicamente assumida como sendo homogênea;
- A admitividade usada para calcular o Jacobiano é assumida como sendo homogênea;
- A modelagem pelo MEF inclui as funções de interpolação, a isotropia da admitividade dentro do elemento e os parâmetros da malha;
- Os tipos de eletrodos, a localização e o tamanho são conhecidos;
- O padrão de injeção de corrente elétrica e o padrão de medição de potencial elétrico são escolhidos antes das reconstruções.

2.4 AVALIAÇÃO DAS IMAGENS

Segundo Adler e Boyle (2017), muitos parâmetros foram propostos para medir e comparar o desempenho dos resultados da reconstrução de imagens em TIE, entretanto não existe na literatura uma métrica (figura de mérito) amplamente aceita para quantificar a qualidade das imagens reconstruídas. Quando são utilizadas medições simuladas (ou fantasmas⁴), é possível quantificar as imagens em relação ao erro de posição, a resolução e deformação de forma (ADLER et al., 2009); pois, em teoria, tem-se as dimensões e formas do objeto a ser reconstruído. Já para dados experimentais (reais), onde não se tem com exatidão as formas, as imagens são comparadas com as formas aproximadas (GRYCHTOL et al., 2014).

Para avaliar as imagens deste trabalho, utilizou-se as métricas quantitativas que avaliam a proximidade das formas dos objetos, essas métricas se baseiam em algumas figuras de mérito, para imagens reconstruídas em meios homogêneos perturbados por um fantoma, propostas em (ADLER et al., 2009) e (ADLER; GUARDO, 1996).

⁴ Fantoma pode ser entendido como um objeto que simula uma situação real. Por exemplo, a forma de um círculo poderia se aproximar da forma de uma bolha de água ou gás dentro de uma tubulação.

O cálculo das métricas ocorre sobre um conjunto de *pixels*⁵, referente ao fantoma, obtido a partir da segmentação da imagem reconstruída. O subconjunto de *pixels* segmentados $[\hat{\mathbf{y}}_s]_{ij}$ é calculado para as formas que limitam os *pixels* $[\hat{\mathbf{y}}_r]_{ij}$ da imagem reconstruída a 25% da amplitude máxima, isto é:

$$[\hat{\mathbf{y}}_s]_{ij} \begin{cases} 1, & \text{se } [\hat{\mathbf{y}}_r]_{ij} \geq \frac{1}{4} \max(\mathbf{y}_r), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.108)$$

A variação máxima, $\max(\mathbf{y}_r)$, da admitividade da imagem reconstruída pode ser tanto positiva, para o caso de fantasmas mais condutivos que o meio, quanto negativa, para fantasmas menos condutivos. Para Adler et al. (2009), o limiar de um quarto representa um valor plausível que detecta a maioria dos efeitos visualmente significativos, no entanto, segundo os mesmos autores, o valor exato do limiar tem pouco efeito no desempenho final do algoritmo. A seguir, são descritas quatro figuras de mérito, segundo Adler et al. (2009):

- i. Erro de Posição (*Position Error* - PE) – mede o quanto a posição do objeto segmentado ($\hat{\mathbf{y}}_s$) aproxima-se da posição real do fantoma, tendo como referência o Centro de Gravidade (CG) de cada um. No caso de um fantoma circular, o CG é o ponto central do círculo, enquanto que para o objeto reconstruído a posição do CG é calculada pela média da posição dos *pixels* de $\hat{\mathbf{y}}_s$:

$$PE = r_f - r_s, \quad (2.109)$$

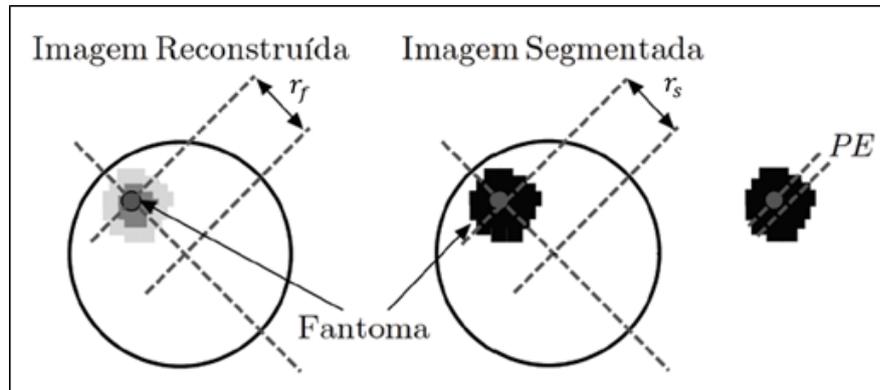
onde r_f e r_s são, respectivamente, as distâncias radiais do fantoma e do objeto reconstruído (imagem segmentada) em relação ao centro do plano tomográfico circular (Figura 8). Os valores devem ser pequenos e mostrar pequena variabilidade.

- ii. Oscilação (*Ringing* - RNG) – mede se as imagens reconstruídas mostram áreas de sinal oposto ao redor da área do objeto reconstruído, também chamado de *overshoot*.

Para esse cálculo, delimita-se um círculo C centrado no centro de gravidade de

⁵ *Pixel* é o menor ponto que forma uma imagem digital, sendo que o conjunto de *pixels* forma a imagem completa.

Figura 8 – Erro de posição calculado em função das distâncias do centro de gravidade da Imagem Reconstruída (r_f) e da Imagem Segmentada (r_s).



Fonte: Adaptado de ADLER et al. (2009).

\hat{y}_s (Figura 9). A relação entre a amplitude do sinal oposto fora do círculo C e a amplitude da imagem dentro de C é dada por:

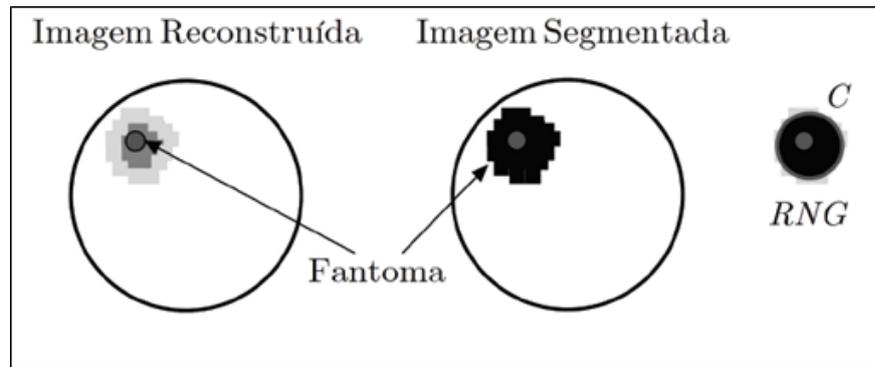
$$RNG = \frac{\sum_{(i \notin C) \wedge ([\hat{y}_r]_i < 0)} \sum_{(j \notin C) \wedge ([\hat{y}_r]_j < 0)} [\hat{y}_r]_{ij}}{\sum_{i \in C} \sum_{j \in C} [\hat{y}_r]_{ij}}, \quad (2.110)$$

onde o numerador é o somatório dos valores dos *pixels* em \hat{y}_r que estão fora da região do círculo C e com sinal oposto à amplitude do somatório dos valores *pixels* da imagem que estão dentro de C , que são representados pelo denominador. Os *pixels* dentro de C com sinal oposto ao somatório resultante não são contabilizados. O cálculo de RNG é realizado sobre a imagem reconstruída, antes de ser segmentada, no entanto a definição do círculo C é feita a partir do conjunto segmentado \hat{y}_s . Os termos $[\hat{y}_r]_i < 0$ e $[\hat{y}_r]_j < 0$ do numerador são utilizados para o caso em que a variação de admitividade do objeto reconstruído é positiva. O RNG deve ser baixo e uniforme, pois pode facilmente resultar em interpretações incorretas.

- iii. Resolução (*Resolution* - RES) – mede o tamanho dos artefatos reconstruídos em relação a todo meio:

$$RES = \sqrt{\frac{A_s}{A_o}}, \quad (2.111)$$

onde $A_s = \sum_i \sum_j [\hat{y}_s]_{ij}$ corresponde à área do conjunto \hat{y}_s e A_o é a área do plano tomográfico. A raiz quadrada é usada de modo que RES mede proporções de raio ao

Figura 9 – Oscilação dos *pixels* fora do círculo C .

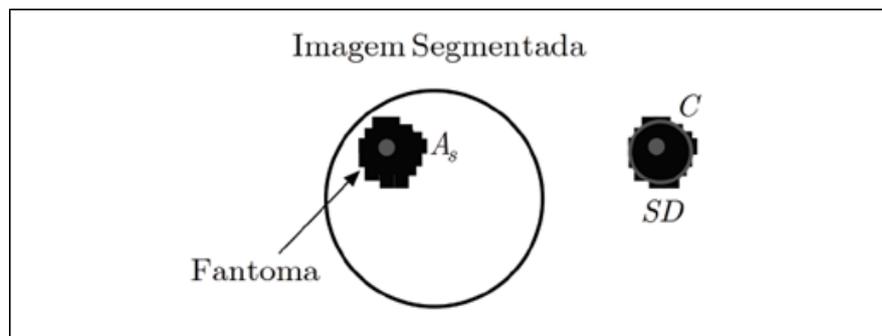
Fonte: Adaptado de ADLER et al. (2009).

invés de proporções de área inicialmente proposto por (WHEELER; WANG; TANG, 2002). O RES deve ser uniforme e pequeno, ao longo do domínio, para representar mais precisamente a forma da distribuição de admitividade do objeto.

- iv. Deformação de Forma (*Shape Deformation* - SD) – mede a fração do conjunto de amplitude de um objeto reconstruído que não cabe dentro de um círculo (Figura 10), sendo definido como:

$$SD = \frac{\sum_{(i \notin C)} \sum_{(j \notin C)} [\hat{y}_s]_{ij}}{\sum_i \sum_j [\hat{y}_s]_{ij}}, \quad (2.112)$$

onde C é um círculo centrado no CG de \hat{y}_s com uma área equivalente a A_s (OH; TANG; SADLEIR, 2007). A deformação de forma deve ser baixa e uniforme, ao contrário pode resultar em interpretação incorreta de imagens.

Figura 10 – Deformação de forma obtida pela quantidade de *pixels* fora do círculo C .

Fonte: Adaptado de ADLER et al. (2009).

3 ABORDAGEM PROPOSTA

Neste capítulo, é proposta a aplicação de Mínimos Quadrados Ponderados com Regularização (do inglês, *Regularized Weighted Least Square* - RWLS) que é uma generalização de Mínimos Quadrados com Regularização definida em (2.101). Sendo assim, a função custo do problema de otimização passa a assumir a forma:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \arg \min_{\boldsymbol{\sigma}} \{ \|\mathbf{W}[F(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{V}]\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{R}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_o)\|_2^2 \}, \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{LK \times 1}$ é o vetor de potenciais elétricos medidos em L eletrodos alocados no contorno para K padrões de corrente elétrica injetados, $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{E \times 1}$ é o vetor de condutividades considerado para uma malha com E elementos, $\boldsymbol{\sigma}_o \in \mathbb{R}^{E \times 1}$ é a estimativa inicial das condutividades, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{E \times E}$ é a matriz diagonal, ou diagonal banda, de regularização; $\lambda \in \mathbb{R}$ é o hiperparâmetro; e $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{L^2 \times L^2}$ é uma matriz diagonal de pesos cuja estrutura será proposta na Seção 3.2.

Os potenciais em cada nó $n \in \{1, \dots, N\}$ do elemento são denotados por $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_N]^T$, que são funções da injeção de correntes elétricas $\mathbf{i} = [i_1, \dots, i_K]^T$ em um meio com condutividade $\boldsymbol{\sigma}$. Esses potenciais são descritos pelo operador direto $F(\cdot)$ que, dada a corrente elétrica \mathbf{i} e a condutividade $\boldsymbol{\sigma}$, resulta em \mathbf{u} . Isso, na verdade, é o problema direto em TIE descrito como $F(\boldsymbol{\sigma}) \in \mathbb{R}^{LK \times 1}$.

A solução numérica para o problema direto é obtida utilizando uma malha, na qual o domínio é discretizada em elementos de condutividade constante. O potencial elétrico em cada nó n do elemento é calculado a partir de: $\mathbf{u} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{i}$, em que \mathbf{Y} é chamada de matriz de admitância global e é uma função da distribuição da condutividade $\boldsymbol{\sigma}$.

A estratégia de medição adjacente, que será utilizada neste trabalho, fornece $L(L - 3)$ medições, das quais, pelo teorema da reciprocidade e utilizando um esquema de medição tetra polar, fornece na verdade $L(L - 1)/2$ medições independentes. No entanto, é comum os algoritmos de reconstrução em TIE utilizarem todas as $L(L - 3)$ medições, e preencherem com valores nulos as medidas não realizadas até totalizar L^2 medidas. Visto isso, o número de padrões de injeção K é igualado ao número de eletrodos L , logo, as

dimensões dos vetores \mathbf{V} e $F(\boldsymbol{\sigma})$ são, respectivamente, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{L^2 \times 1}$ e $F(\boldsymbol{\sigma}) \in \mathbb{R}^{L^2 \times 1}$.

Pelo método Gauss-Newton, a solução não-linear de minimização de (3.1) é obtida iterativamente como:

$$\delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathcal{J}_k^T \mathbf{W}^2 \mathcal{J}_k + \lambda \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} (\mathcal{J}_k^T \mathbf{W}^2 \Delta \mathbf{V} + \lambda \mathbf{R}^T \mathbf{R} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_o)), \quad (3.2)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_k + \delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (3.3)$$

em que \mathcal{J}_k é a atualização da matriz de sensibilidade (Jacobiano), recalculada por (2.58), a cada iteração k e $\Delta \mathbf{V} = F(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{V}$.

Em processamento de imagens digitais, a forma mais simples de restaurar uma imagem é utilizando o filtro inverso, onde a função degradação é invertida e utilizada para restaurar a imagem (PRATT, 2001). Essa técnica, já estabelecida em sistemas ópticos, consiste na remoção ou redução da degradação da imagem ocorrida durante a aquisição como: borramento, movimento da imagem, ruído eletrônico. Para o problema da TIE, os modelos já estabelecidos em óptica para descrever essas degradações não podem ser utilizados, pois resultam em reconstruções de baixa qualidade. Um exemplo disso pode ser encontrado em (CHEREPENIN et al., 2002), que alcança resultados muito bons para tomógrafos de campo duro (Raio X), mas insatisfatório para a TIE (campo macio).

3.1 MODELAGEM ELETROSTÁTICA DO DOMÍNIO TOMOGRÁFICO

Nesta seção, é apresentada uma modelagem matemática para o tomógrafo por impedância elétrica. Este modelo serve como base para o algoritmo de reconstrução proposto na Seção 3.3. No domínio tomográfico, supõe-se um volume condutor e considera-se as seguintes hipóteses:

- i. Homogeneidade: a condutividade no volume é considerada homogênea. Não se tem informações do interior do domínio, o que se tem são medições adquiridas no contorno da seção transversal, assim, não é razoável determinar, analiticamente, a dis-

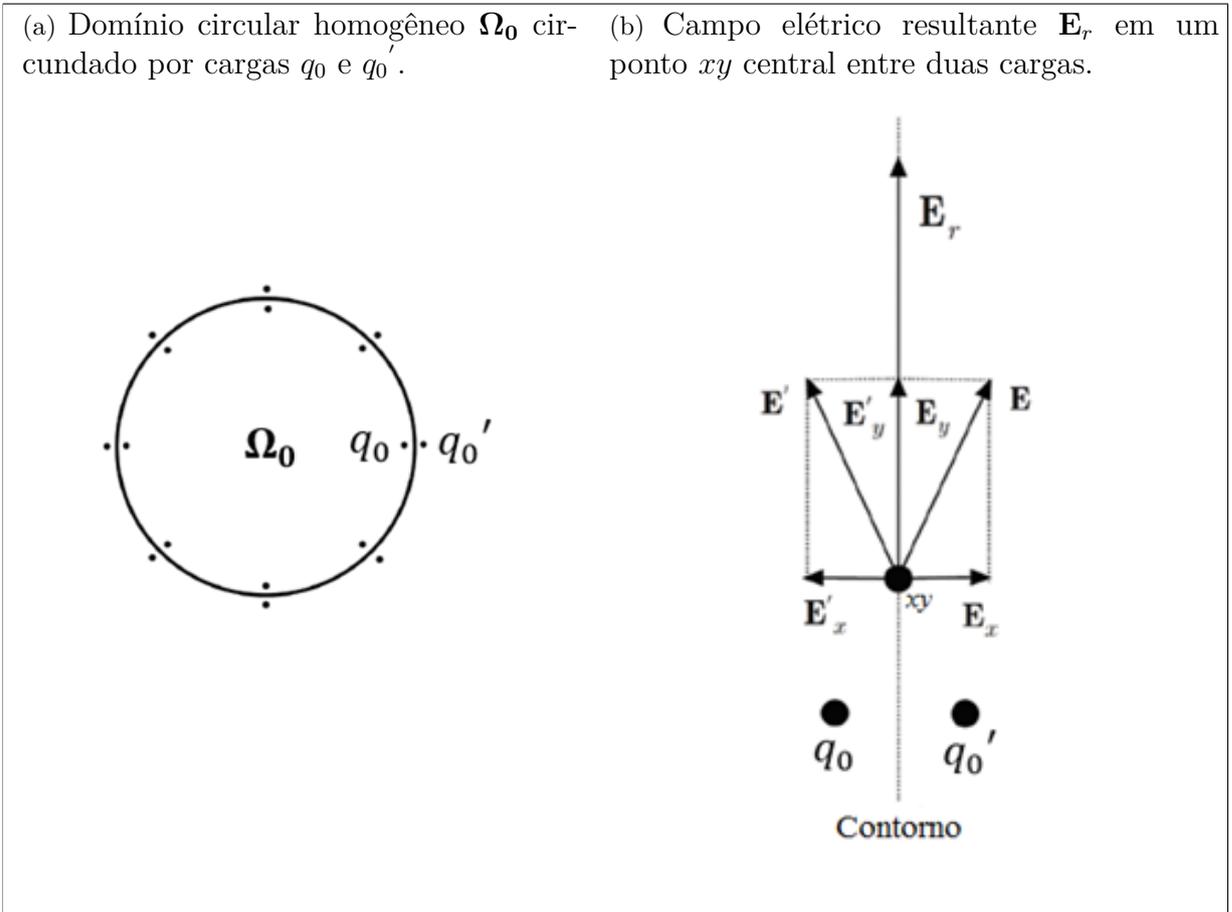
tribuição de condutividade e sua perturbação causada pelo objeto de interesse. Para contornar isso, assume-se uma condutividade homogênea;

- ii. Resistividade: é desconsiderado o efeito capacitivo. Esse efeito é geralmente negligenciado se a razão entre as correntes capacitiva e resistiva for pequena $\ll 1$. Essa suposição foi feita em (2.7), para que a equação de Laplace do problema da TIE (2.2) fosse válida;
- iii. Isotropia: o material é isotrópico, isto é, a condutividade independe da direção de avaliação, e a corrente flui apenas através da seção transversal do domínio. Deste modo, pode-se assumir que o produto entre a condutividade σ e o campo elétrico \mathbf{E} em (2.3) não modifica a direção da densidade de corrente \mathbf{J} , pois σ se comporta como um escalar. Assim, o caminho percorrido pela corrente injetada não tem componente normal ao plano formado pelos eletrodos, reduzindo o problema a duas dimensões;
- iv. Quase-estático: aproxima-se os fenômenos dentro do tomógrafo como sendo quase-estáticos. Essa suposição é válida quando as escalas de comprimento de interesse são muito menores que o comprimento de onda eletromagnética utilizada nas medições. Conseqüentemente, isso resulta que a derivada do campo magnético \mathbf{B} é nula (2.4) no domínio;
- v. Linearidade: os materiais no domínio, incluindo o objeto de interesse, possuem uma condutividade linear. Deste modo, o campo elétrico é invariante no tempo, ou seja, o gradiente da densidade de corrente \mathbf{J} é nulo no domínio, conforme (2.6). Além disso, dentro do domínio não deve haver fontes ou sorvedores de corrente elétrica. Isso permite representar o domínio apenas como circuitos resistivos.

Com a finalidade de providenciar um modelo fidedigno à realidade do tomógrafo por impedância elétrica, associa-se o domínio tomográfico a um problema eletrostático com condições de contorno equivalentes. Uma aproximação eletrostática do plano tomográfico é apresentada em (MARECHAL et al., 1987), (SOUZA, 1988). O modelo consiste em supor um domínio circular homogêneo Ω_0 , circundado por $2L$ (duas vezes o número de eletrodos L) linhas de densidade de carga posicionadas a uma distância d_0 em relação ao

contorno de Ω_0 , na posição onde estão os eletrodos. Cada carga imagem q_0' está localizada em posição simétrica a sua respectiva carga q_0 , todas com alinhamento perpendicular a Ω_0 (Figura 11-(a)).

Figura 11 – Representação do domínio tomográfico por um modelo eletrostático.



Fonte: Adaptado de GARCIA (2012).

Ao supor que as cargas q_0 e q_0' possuem o mesmo módulo e sinal, e se a posição de ambas for simétrica em relação ao contorno de Ω_0 , pelo método das imagens (DURAND, 1964), conclui-se que no ponto médio entre elas, que é o contorno de Ω_0 , haverá uma densidade de carga linear. Visto que o campo elétrico é sempre tangente às linhas de densidade de carga (JACKSON, 1975), não haverá componente do campo elétrico perpendicular ao contorno, como pode ser visto na Figura 11-(b).

A consequência das afirmações anteriores é que: as linhas de campo permanecem confinadas dentro do domínio Ω_0 , o que implica dizer que não há fluxo de corrente para fora do domínio tomográfico. Além disso, como as linhas equipotenciais (mesmo potencial

elétrico) são perpendiculares às linhas de campo elétrico (EDWARD, 1985), a derivada direcional do potencial elétrico em qualquer ponto do contorno de Ω_0 é nula.

Pode-se verificar que, para $2L$ linhas de densidade de carga, o potencial eletrostático u_e em cada ponto do contorno de Ω_0 , de raio unitário, é dado por (DURAND, 1964):

$$u_e = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{2L} [q_o \ln(|xy - xy_e^i|) + q_o' \ln(|xy - 1/xy_e^{i'}|)], \quad (3.4)$$

onde o ponto xy , para um sistema de coordenadas com origem no centro do círculo unitário Ω_0 , está na linha média entre as duas cargas; xy_e^i são as coordenadas da i -ésima linha de carga e $1/xy_e^{i'}$ são as coordenadas da i -ésima linha de carga imagem. A constante $\epsilon_0 \approx 8,854 \times 10^{-12}$ [F/m] é a permissividade do espaço livre.

Para $d_0 \rightarrow 0$, distância da carga q_0 , e pela simetria de q_0' , em relação ao contorno de Ω_0 , pode-se assumir que $xy_e^i \approx 1/xy_e^{i'}$ e como q_0 e q_0' possuem mesmo módulo e sinal, a equação (3.4) é reescrita como:

$$u_e = -\frac{1}{\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{2L} q_{oi} \ln(|xy - xy_e^i|). \quad (3.5)$$

Ao utilizar a lei de Gauss (2.5), que relaciona campo e potencial elétrico, o módulo do campo elétrico $|\mathbf{E}|$ em cada ponto em xy pode ser calculado por (PEREZ et al., 1997):

$$|\mathbf{E}| = \nabla u_e = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{2L} q_{oi} \left(\frac{xy - xy_e^i}{|xy - xy_e^i|^2} \right), \quad (3.6)$$

a porção $xy - xy_e^i$ representa a distância entre o ponto de avaliação, dentro do domínio Ω_e , e o eletrodo como ponto de observação, que daqui em diante será chamada de d_i . Também, como dito anteriormente, q_0 e q_0' possuem o mesmo módulo e sinal, e como forma de simplificação, passa-se a considerar que todas as cargas q_{oi} possuem o mesmo

módulo. Essas considerações, a respeito da equação (3.6), levam à seguinte simplificação:

$$|\mathbf{E}| = \frac{2Lq_o}{\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{2L} \left(\frac{d_i}{|d_i|^2} \right) = \frac{2Lq_o}{\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{2L} \frac{1}{d_i}. \quad (3.7)$$

Portanto, resumidamente, dentro do domínio da TIE as linhas de campo elétrico se propagam em todas as direções, de maneira variante no espaço, e pela lei de Gauss não existe campo fora do domínio. Estas propriedades das linhas de campo elétrico, produzidas por cargas, são utilizadas na Seção 3.2 para prever o que acontece dentro do domínio do tomógrafo e são utilizadas em uma função de degradação.

3.2 MODELO DE PESOS PONDERADOS ESPACIALMENTE VARIANTE

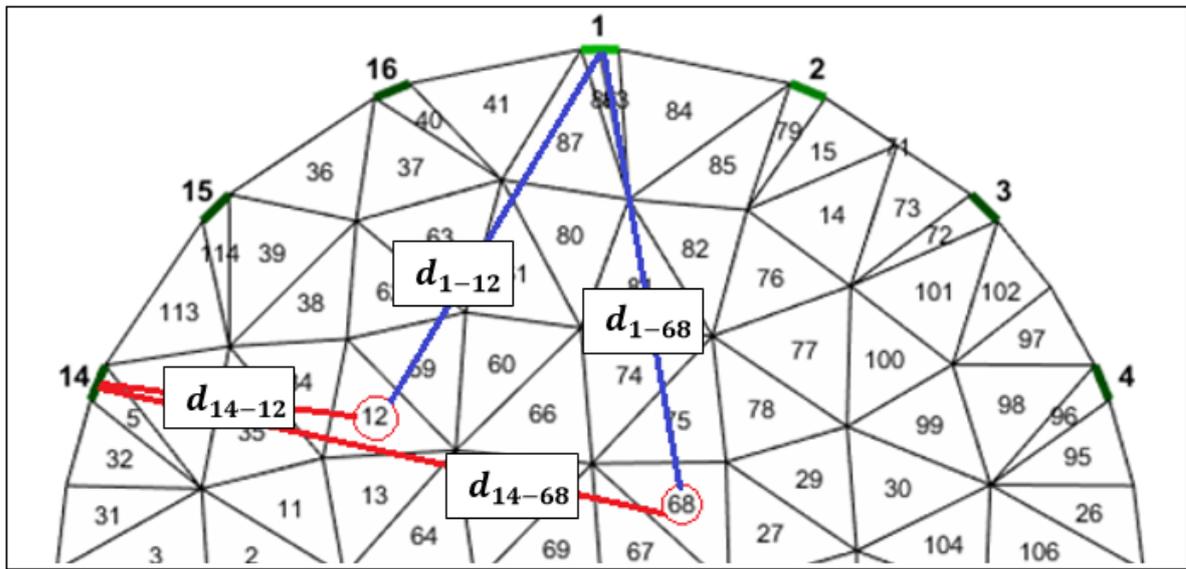
Em problemas mal condicionados, uma pequena perturbação nos dados de entrada pode levar a uma grande mudança no resultado, e mesmo se houver uma solução única, pode ser completamente corrompida por um pequeno erro nos dados ou pelo ruído. Segundo Mamatjan (2013), conhecida a confiabilidade de cada canal de medição do tomógrafo, a matriz \mathbf{W} pode ser utilizada para representar a confiabilidade da reconstrução. Além disso, os dados experimentais que muitas vezes são de baixa qualidade (devido a mau contato, por exemplo), podem ser gerenciados por meio de modificações na matriz \mathbf{W} . Neste sentido, a abordagem por RWLS se resume em encontrar \mathbf{W} que expresse a correlação entre as medições, de potencial elétrico, adquiridas do tomógrafo.

A proposta deste trabalho é que “pesos” sejam atribuídos à incerteza da medição realizada por um eletrodo/canal de medição. Segundo Holder (2004), a densidade de corrente elétrica é maior perto do eletrodo ativo (que injeta corrente elétrica), então é razoável pensar que perto desse eletrodo existe mais informações úteis do que longe dele. Isto é, quão mais longe do eletrodo fonte a medição for feita menor será a sua confiabilidade e, por consequência, o “peso” atribuído a essa medição será baixo, e vice-versa.

Para ilustrar o conceito, a Figura 12 mostra um domínio discretizado, por uma malha de elementos finitos, de um tomográfico com 16 eletrodos. Essa quantidade de eletrodos se deve ao fato que, em geral, os tomógrafos de TIE são projetados para funcionar

com 16 até 32 eletrodos (SINGH et al., 2019). Os números inscritos, dentro dos elementos triangulares, são as identidades dos elementos. Na Figura 12, tem-se representadas algumas distâncias entre o centro do eletrodo e o baricentro do elemento triangular. A fim de exemplificar, foram escolhidos aleatoriamente dois eletrodos (1 e 14) e dois elementos da malha (12 e 68). Denomina-se a distância entre o eletrodo 1 e o elemento 12 como d_{1-12} , a distância entre o eletrodo 1 e o elemento 68 como d_{1-68} ; e assim por diante.

Figura 12 – Domínio do tomógrafo discretizado por uma MEF com 16 eletrodos.



Fonte: Autor (2019).

Esse mapeamento de distâncias é feito para toda a malha gerada pelo MEF, considerando um eletrodo de injeção de cada vez. Essas medidas são ordenadas em um vetor linha que contém as distâncias entre o eletrodo ativo e os elementos da malha: $d_{1-1}, d_{1-2}, \dots, d_{1-E}$. Repetindo esse processo para todos os eletrodos e agrupando este vetor como linhas de uma matriz, tem-se:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{1-1} & \dots & d_{1-E} \\ & \ddots & \\ d_{L-1} & \dots & d_{L-E} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

onde $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{L \times E}$. Cada elemento da matriz \mathbf{D} representa uma distância entre um eletrodo e um elemento da malha (d_{l-e}). Note que a dimensão da matriz \mathbf{D} depende do tamanho

E da malha utilizada na reconstrução e do número total de eletrodos L , mas não depende do padrão de injeção utilizado. Isso se deve ao fato que todos os eletrodos são submetidos a injeção de corrente elétrica, independentemente do padrão de injeção.

Observando a ordenação da matriz \mathbf{D} , pode-se perceber que cada linha contém as distâncias entre um único eletrodo e todos os elementos da malha. Por exemplo, a linha 1 (um) contém a distância do eletrodo número 1 (um) com todos os elementos da malha $(d_{1-1}, d_{1-2}, \dots, d_{1-E})$; na linha 2 (dois) a distância do eletrodo número 2 (dois) com todos os elementos da malha $(d_{2-1}, d_{2-2}, \dots, d_{2-E})$; e assim sucessivamente.

Contudo, de maneira prática, não se tem medições de potenciais elétricos para cada elemento triangular da malha. Na verdade o que se tem, fisicamente, são medidas de potencial elétrico no contorno do domínio. As medições realizadas no contorno podem ser, por sua vez, interpretadas como uma superposição da contribuição de cada elemento da malha, na qual cada distância d_{l-e} é considerada no resultado final. Portanto, deve-se considerar a contribuição de cada canal de medição em relação a todos elementos da malha. Matematicamente, isto significa:

$$\mathbf{ds} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^E D_{1j} \\ \sum_{j=1}^E D_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^E D_{Lj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ds_1 \\ ds_2 \\ \vdots \\ ds_L \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

onde $\mathbf{ds} \in \mathbb{R}^{L \times 1}$ é o vetor coluna com a soma dos elementos das linhas da matriz \mathbf{D} (3.8).

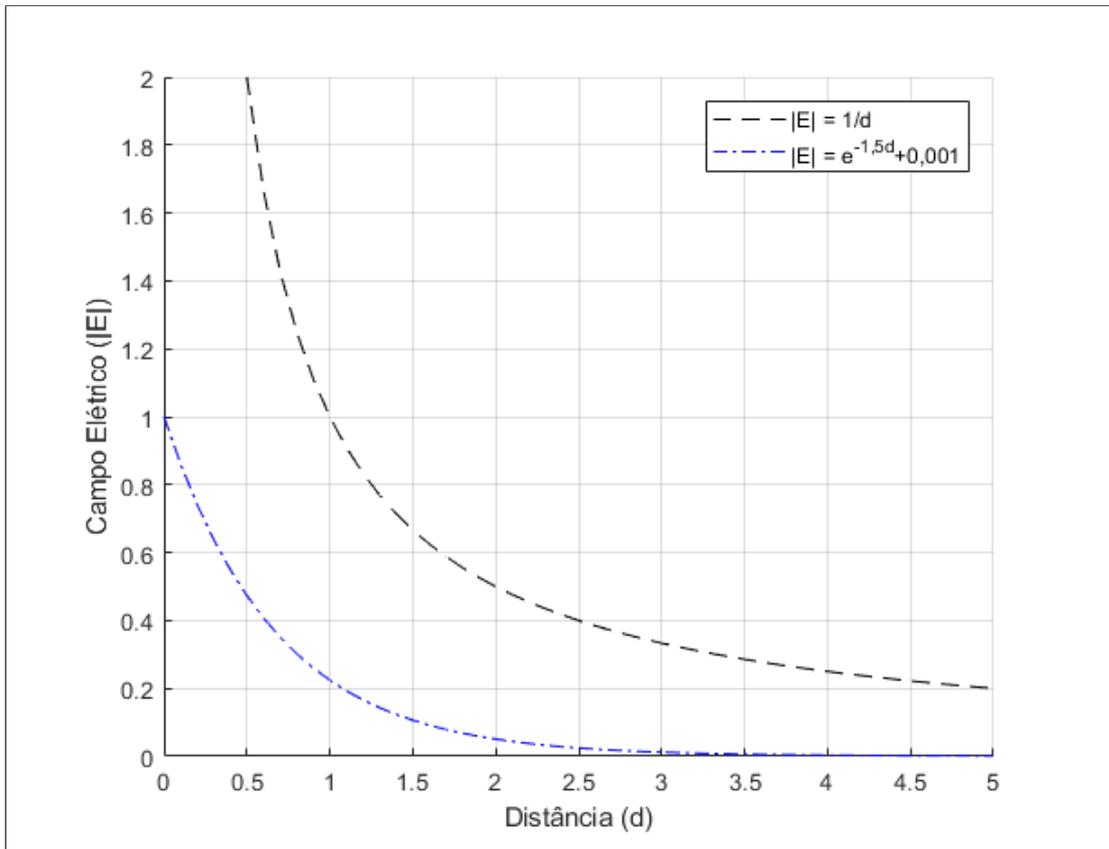
De acordo com (3.7), o decaimento do módulo do campo elétrico é inversamente proporcional a distância entre a carga elétrica (eletrodo ativo) e o ponto de observação. Matematicamente, quando a *distância* se aproximar de zero no eixo das abscissas, o *campo elétrico*, função (3.7), tende ao infinito, ver Figura 13. Isso significa que medições realizadas muito perto do eletrodo têm, de alguma forma, precisão infinita. Contudo, esse modelo carrega problemas de condicionamento numérico.

Em face disto, neste trabalho, é proposto um modelo exponencial que simula o comportamento das linhas de campo elétrico do plano tomográfico, com a forma genérica:

$f(r) = e^{\tau r} + \zeta$. Esse modelo se aproxima do padrão de linhas visto na Figura 5-(a), e ao utilizar uma função puramente exponencial, na qual para um $\tau < 0$ o valor em $r = 0$ é 1, resolve-se o problema da singularidade. A escolha de uma família de funções exponenciais se deve, também, a:

- i. Ao ajustar o valor de τ , pode-se aproximar a inclinação (negativa) da função $1/d$, equivalente a (3.7), por uma função exponencial (Figura 13);
- ii. O termo ζ força um valor mínimo para o “peso”, isto é, mesmo que a medição seja feita muito longe da fonte, deve-se levar em conta a contribuição física, mesmo que pequena, desse elemento distante. Também, pode-se pensar que o valor de ζ está ligado a um valor de ruído aditivo inerente a qualquer processo de aquisição.

Figura 13 – Módulo do campo elétrico $|\mathbf{E}|$ em função da distância d .



Fonte: Autor (2019).

Deste modo, utiliza-se as propriedades das linhas de campo produzidas por cargas para prever o que acontece dentro do domínio do tomógrafo. Neste trabalho, as dis-

tâncias em \mathbf{ds} (3.9), oriundas da discretização de um domínio tomográfico homogêneo, são substituídas no modelo eletrostático (exponencial). Este modelo resultante, espacialmente variante, é o mapa de “pesos” atribuídos à incerteza da medição realizada por um eletrodo, em forma vetorial:

$$\mathbf{dm} = e^{\tau \mathbf{ds}} + \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} e^{\tau ds_1} + \zeta \\ e^{\tau ds_2} + \zeta \\ \vdots \\ e^{\tau ds_L} + \zeta \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

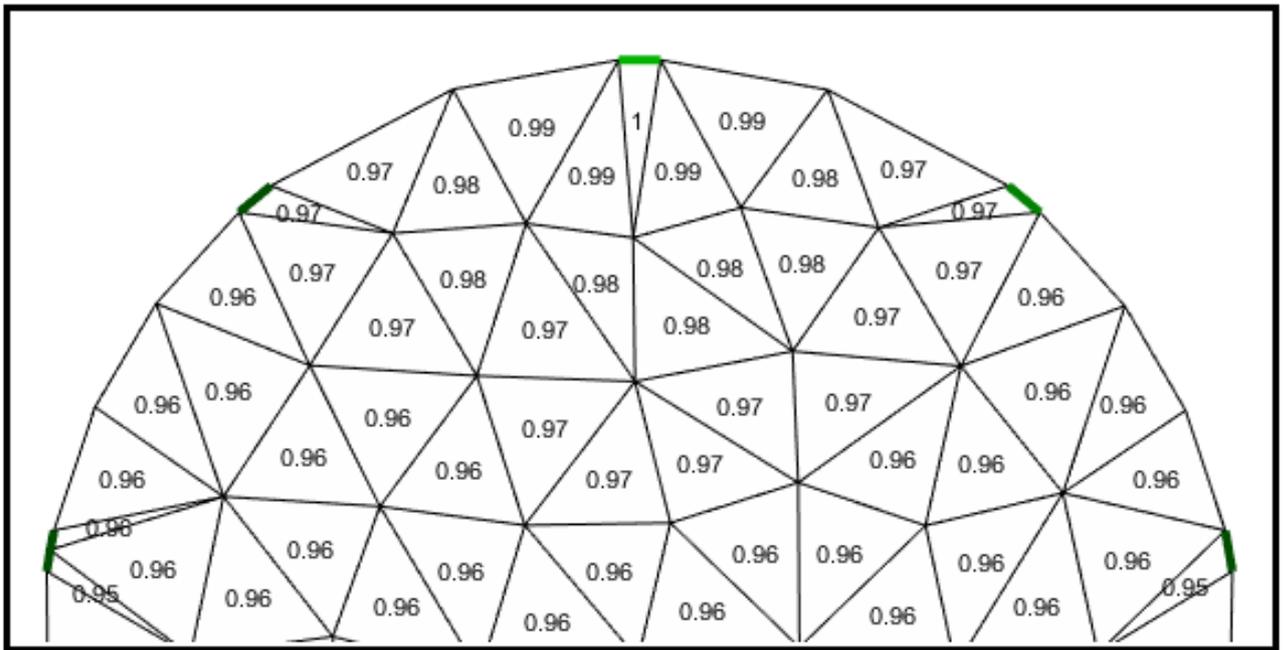
onde $\mathbf{dm} \in \mathbb{R}^{L \times 1}$ é o vetor com os pesos atribuídos a cada eletrodo; as constantes τ e ζ , para $\boldsymbol{\zeta} = [\zeta \ \zeta \ \dots \ \zeta]^T \in \mathbb{R}^{L \times 1}$, são os parâmetros do modelo de degradação. Assim, tem-se a matriz diagonal de pesos $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{L^2 \times L^2}$ descrita por:

$$\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{dm}) = \begin{bmatrix} e^{\tau ds_1} + \zeta & & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & e^{\tau ds_L} + \zeta & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & e^{\tau ds_1} + \zeta \\ & & & & \ddots \\ 0 & & \dots & & e^{\tau ds_L} + \zeta \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

A Figura 14 mostra um exemplo de pesos, valores inscritos dentro dos elementos triangulares, normalizados para o valor máximo unitário, atribuídos a cada elemento da malha. Neste caso, foi utilizado como eletrodo fonte o eletrodo mais superior do plano tomográfico. Pesos próximos ao valor “1” indicam medidas mais confiáveis (ou menor erro na medição) e vice-versa.

Na Figura 14, os pesos são uma função da distância entre os eletrodos e os elementos, seguindo um modelo variante no espaço que prediz as linhas de campo elétrico no plano tomográfico.

Figura 14 – Comportamento, por meio de pesos, das linhas de campo elétrico.



Fonte: Autor (2019).

3.3 ALGORITMO DE RECONSTRUÇÃO

Nesta seção, é apresentado um resumo do algoritmo utilizado nos experimentos. O Algoritmo 1, que é uma variação do algoritmo Gauss-Newton para problemas de mínimos quadrados não lineares, é utilizado neste trabalho para o problema de Tomografia por Impedância Elétrica. Os dados de entrada são:

- L é o número de eletrodos;
- E é o número de elementos da malha de elementos finitos;
- λ é o valor do hiperparâmetro;
- ϵ é o critério de parada;
- \mathbf{V} é o vetor com os dados de potencial elétrico obtido nas medições;
- \mathbf{W} é matriz de pesos que segue a sistemática proposta;
- \mathbf{R} é a matriz de regularização de Tikhonov;
- σ_o é a aproximação inicial para a distribuição de condutividade.

As variáveis:

- σ condutividade;
- \mathcal{J} é o Jacobiano ou matriz de sensibilidade.

E as funções:

- $Jacobiano(\cdot)$ retorna os valores do Jacobiano (matriz de sensibilidade), com base na malha de elementos finitos, e a condutividade. Essa função implementa a equação (2.58);
- $MEF(\cdot)$ função que gera uma malha pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) com base no número de eletrodos e elementos. Essa função segue a metodologia descrita na Seção 2.2.1;
- $Passo_{GN}(\cdot)$ realiza a operação da equação (3.2).

Como resultado, o algoritmo retorna o valor de condutividade σ que minimiza o funcional (3.1).

Algoritmo 1: retorna a matriz de condutividade σ , dado o vetor de potencial elétrico \mathbf{V} obtido nas medições, a matriz de pesos \mathbf{W} que segue a sistemática proposta, a matriz de regularização \mathbf{R} de Tikhonov, o vetor de aproximação inicial σ_o para a distribuição de condutividade, o número L de eletrodos, o número E de elementos da malha de elementos finitos, o valor λ do hiperparâmetro e o critério de parada ϵ .

Entrada: $L, E, \lambda, \epsilon, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{R}, \sigma_o$

Saída: σ

```

1 início
2    $mdl_{direta} \leftarrow MEF(L, E);$ 
3    $\mathcal{J} \leftarrow Jacobiano(mdl_{direta}, \sigma_o);$ 
4    $\sigma \leftarrow \sigma_o;$ 
5   enquanto  $|\mathcal{J}| > \epsilon$  faça
6      $\delta\sigma \leftarrow Passo_{GN}(\lambda, \mathcal{J}, \mathbf{W}, \mathbf{R});$ 
7      $\sigma \leftarrow \sigma + \delta\sigma;$ 
8      $\mathcal{J} \leftarrow Jacobiano(mdl_{direta}, \sigma);$ 
9   fim
10 fim
11 retorna  $\sigma;$ 

```

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, o algoritmo descrito no capítulo anterior é simulado sob distintas condições, a fim de provar a eficácia do método proposto. Para realizar os experimentos, foi utilizada a biblioteca EIDORS (acrônimo do inglês *Electrical Impedance Tomography and Diffuse Optical Tomography Reconstruction Software*), de código aberto, desenvolvida para as plataformas MatLab e GNU Octave (VAUHKONEN, 1997), (ADLER; LIONHEART, 2006), (ADLER; LIONHEART, 2005) e (POLYDORIDES; LIONHEART, 2002).

O pacote EIDORS possui funções incorporadas que não são triviais em TIE como: a resolução do problema direto, representação gráfica de uma distribuição de admitividade e geração de malhas. A estrutura do EIDORS consiste em quatro objetos principais: *data*, *image*, *fwd_model* e *inv_model*. Um objeto *data* representa um vetor de medições, reais ou simuladas, de potenciais elétricos nos eletrodos alocados no contorno. O objeto *image* representa graficamente os valores de admitividade. O *fwd_model* representa o modelo de elementos finitos, propriedades dos eletrodos e padrões de excitação, bem como as chamadas para funções de resolução do problema direto. O EIDORS incorpora o gerador de malhas NETGEN/NGSolve¹ (ARNOLD, 2013) para construir as malhas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Para o problema direto, a matriz de sensibilidade, em relação à admitividade real, é calculada pela função *calc_jacobian* que implementa a fatoração de Cholesky (ler Apêndice B). O objeto *inv_model* agrupa as informações necessárias à reconstrução de imagens. Os cálculos inversos não lineares são realizados dentro da função *inv_sol* que se baseia nos métodos de Newton-Raphson e encapsula a regularização de Tikhonov para calcular a solução. Essa função requer uma opção de hiperparâmetro, que neste trabalho foi definido, exceto quando indicado o contrário, o valor fixo de $\lambda = 0,03$ (GRAHAM, 2007). Esse valor foi escolhido heurísticamente, baseado na experiência das simulações realizadas ao longo do trabalho.

Em todas as simulações, utilizou-se o modelo de eletrodo completo para calcular as soluções dos problemas diretos. Para cada um dos eletrodos, existe um campo no EIDORS para a definição da impedância de contato e dos vértices aos quais o eletrodo

¹ NETGEN é uma ferramenta de geração de malha, de código aberto, vinculada ao NGSolve.

está conectado. O NETGEN calcula esses vértices ao gerar a malha de elementos finitos. Utilizou-se o valor típico de $0,01 \Omega$ para a impedância de contato em todos os eletrodos (WOO, 1992).

Nas seções seguintes, são apresentadas três simulações utilizando dados sintéticos (simulados) e um exemplo com dados reais. Em todas as simulações a abordagem proposta é confrontada com o método de Mínimos Quadrados sem ponderação. Para uma comparação justa, todos os parâmetros utilizados para resolver o problema inverso foram idênticos: valor do hiperparâmetro, matriz de regularização, malha de elementos finitos, número e posição dos eletrodos e condições iniciais.

Sem perda de generalidade, nos exemplos desse capítulo, quando não indicado, foi considerada uma condutividade de fundo de $1,0 \text{ S/m}$ e o(s) artefato(s) gerado(s) com condutividade de $0,5 \text{ S/m}$. Além disso, a aproximação inicial, para a distribuição de admitividade do meio, foi adotada como sendo homogênea.

Foram utilizados os algoritmos clássicos (inclusive a regularização clássica de Tikhonov de ordem zero, $\mathbf{R} = \mathbf{I}$) para a resolução do problema da TIE e valores sugeridos por autores que já os utilizaram (CHENEY et al., 1990), (ADLER et al., 2009), (BORSIC; ADLER, 2012). As condições de simulações foram definidas com o objetivo de reproduzir o melhor resultado que a literatura conseguiu até o momento, portanto, buscou-se uma parametrização ótima para o método Gauss-Newton (mGN). Logo, o objeto aqui é, a partir desse resultado, melhorar as imagens utilizando o modelo de pesos proposto.

O primeiro exemplo tem por objetivo avaliar o desempenho da abordagem proposta frente a diferentes tamanhos de malhas, reconstruindo a imagem de um único objeto com geometria circular. Essa geometria tende a ser mais facilmente reconstruída pelos algoritmos de TIE. No segundo exemplo, avalia-se o desempenho do método na presença de múltiplos objetos dentro do domínio. Para o terceiro exemplo, um artefato em forma de “T” é inserido no meio homogêneo, com o objetivo de reconstruir uma geometria com formas mais complexas que círculos. Finalmente, no quarto exemplo, reconstrói-se uma imagem proveniente de dados coletados de um tomógrafo por impedância elétrica real.

Fez-se as avaliações dos resultados da seguinte maneira: qualitativa, na forma de o quão as imagens geradas são parecidas com seu respectivo fantoma; quantitativa, com

base nas figuras de mérito apresentadas na Seção 2.4 e na análise do erro de estimação (diferença entre real e simulado). Para todos os casos, utilizou-se como critério de parada a estimativa de erro nas medições, com valor de $\epsilon \leq 10^{-15}$.

4.1 EXPERIMENTO A

Este experimento tem o objetivo de avaliar a sensibilidade da abordagem proposta em relação ao tamanho da malha utilizada. Para tanto, considerou-se três malhas na reconstrução: a primeira com 159 elementos e 100 nós (o pacote EIDORS denomina essa malha como “*a2d1c*”), a segunda com 488 elementos e 280 nós (ou “*b2d1c*”) e a terceira com 1237 elementos e 673 nós (ou “*c2d1c*”).

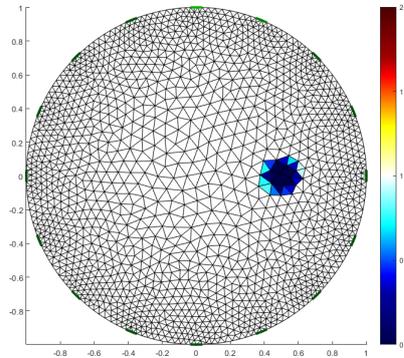
Como Região de Interesse (do inglês, *Region of Interest* - ROI) utilizou-se um objeto circular com raio $r = 0,1$ m e centro em $(0,5; 0,0)$ no modelo do problema direto. Para o problema direto, com dados experimentais sintéticos, utilizou-se uma malha com 2959 elementos e 1573 nós (ou “*d2d1c*”), ilustrada na Figura 15-(a). Os resultados associados a cada discretização são respectivamente mostrados nas Figuras 15-(b), (c) e (d). Para essas reconstruções, utilizou-se como parâmetros do modelo de pesos: $\tau = -1,7$ e $\zeta = 10^{-3}$.

Para fins de comparação, nas Figuras 15-(e), (f) e (g) são mostrados os resultados equivalentes aos das Figuras 15-(b) a (d), porém sem a matriz de pesos \mathbf{W} proposta neste trabalho, o que recai no método tradicional de Mínimos Quadrados. Como é possível observar, o método proposto leva a uma melhora na forma e nas dimensões do objeto no interior do domínio. A partir de uma inspeção visual dos resultados apresentados nas Figuras 15-(b) a (g), observa-se que, como é esperado, quanto mais refinada a malha, melhor é o resultado qualitativo de ambos os métodos.

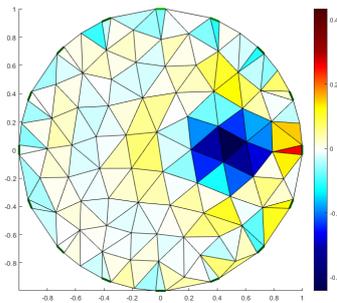
Para uma análise quantitativa das imagens reconstruídas de TIE, utilizou-se figuras de mérito propostas em (ADLER et al., 2009) e (ADLER; GUARDO, 1996), descritas na Seção 2.4. Os valores obtidos são mostrados na Tabela 3. Observa-se que a introdução da matriz \mathbf{W} , construída com a utilização da metodologia proposta, trouxe ganhos significativos. Quando utilizadas malhas menos refinadas, caso da “*a2d1c*”, o Erro de Posição melhorou 15 vezes e a Resolução teve um ganho de 39%, em relação ao Mínimos Quadra-

Figura 15 – Resultados de imagens em TIE para um artefato circular.

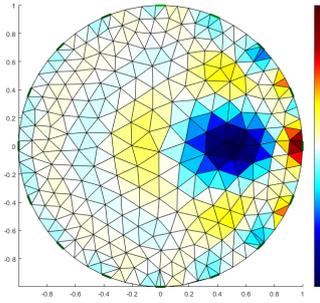
(a) Problema direto malha “ $d2d1$ ”



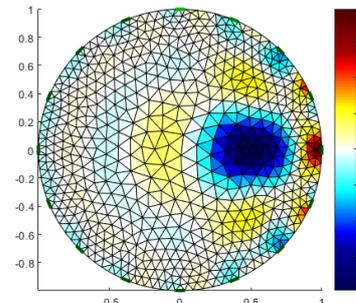
(b) Abordagem proposta malha “ $a2d1$ ”



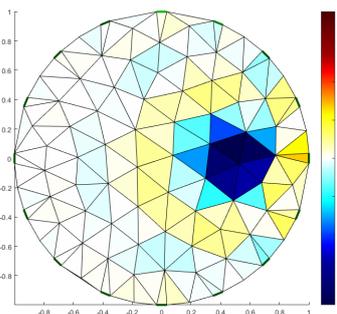
(c) Abordagem proposta malha “ $b2d1$ ”



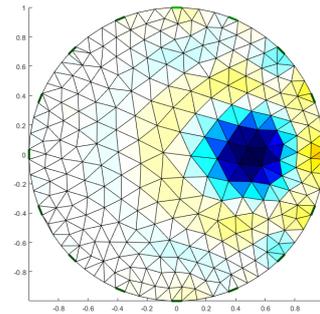
(d) Abordagem proposta malha “ $c2d1$ ”



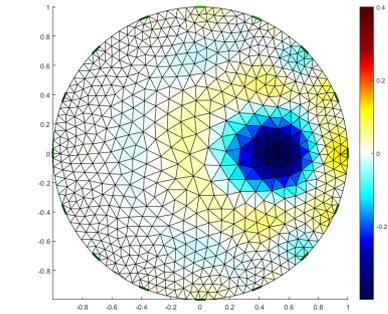
(e) Mínimos Quadrados malha “ $a2d1$ ”



(f) Mínimos Quadrados malha “ $b2d1$ ”



(g) Mínimos Quadrados malha “ $c2d1$ ”



Fonte: Autor (2019).

dos sem ponderação. A Oscilação e a Deformação de Forma tiveram uma perda de 6% e 25%, respectivamente.

No caso do uso da malha intermediária “ $b2d1c$ ”, foram melhoradas todas as métricas: Erro de Posição 36%, Oscilação 40%, Resolução 33% e Deformação de Forma 2%. Já para uma malha mais refinada, “ $c2d1c$ ”, teve-se uma perda na Oscilação de 40%, mas

Tabela 3 – Figuras de mérito do Experimento A.

	<i>Malha</i>	Erro de Posição	Oscilação	Resolução	Deformação de Forma
Abordagem Proposta	<i>“a2d1c”</i>	0,0098	3,3113	0,3128	1
	<i>“b2d1c”</i>	-0,0165	5,3028	0,2111	0,9783
	<i>“c2d1c”</i>	-0,0195	6,1391	0,1893	0,9730
Mínimos Quadrados	<i>“a2d1c”</i>	0,1522	3,1248	0,4372	0,7966
	<i>“b2d1c”</i>	0,0225	5,5146	0,2807	1
	<i>“c2d1c”</i>	0,0370	4,3609	0,3357	1

Fonte: Autor (2019).

obteve-se ganhos, com a abordagem proposta, de aproximados: Erro de Posição 90%, Resolução 77% e Deformação de Forma 3%.

Portanto, com este experimento, conclui-se que a abordagem proposta leva mais vantagem em malhas (problema inverso) mais refinadas. Em termos de Erro de Posição e Resolução, pode-se observar ganhos em todos os casos mesmo em malhas menos refinadas. Em particular, a posição do centro do círculo (Erro de Posição) foi melhorada substancialmente, mais de 15 vezes, no caso da malha *“a2d1c”*. E que apesar da perda em Oscilação, no caso da malha *“c2d1c”*, pode-se notar que as outras métricas melhoraram, até 90% para o Erro de Posição, com a utilização da abordagem proposta.

4.2 EXPERIMENTO B

Neste experimento, foram sintetizados três artefatos “A”, “B” e “C” circulares com diferentes tamanhos e posições dentro do domínio, como mostrado na Figura 16-(a): o Artefato “A” possui raio de $r = 0,1$ m e posição $x = 0,5$ m $y = 0,0$ m; Artefato “B” possui $r = 0,15$ m e posição $x = -0,5$ m $y = 0,5$ m; Artefato “C” possui $r = 0,2$ m e posição $x = 0,0$ m $y = -0,5$ m.

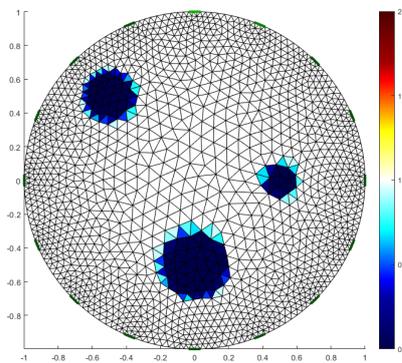
Os resultados, nas Figuras 16-(b) a (g) e Tabela 4, provam que tanto as localizações quanto os tamanhos são melhor estimados com a utilização da abordagem proposta. Para os exemplos foi utilizada uma malha *“c2d1c”* e para o modelo direto uma malha *“d2d1c”*. Os parâmetros do modelo de pesos são: $\tau = -1,4$ e $\zeta = 10^{-3}$.

Os critérios de qualidade (Erro de Posição, Oscilação, Resolução e Deformação de

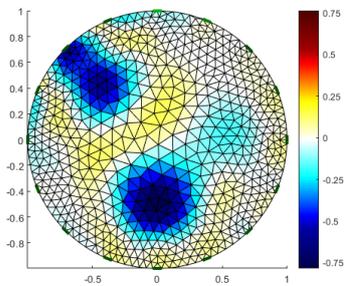
Forma), utilizados no Experimento A (Seção 4.1), não se aplicam a este experimento, pois as figuras de mérito propostas em (ADLER et al., 2009), (ADLER; GUARDO, 1996) são aplicadas apenas a um objeto circular. Por isso, para este experimento utiliza-se o Erro de Estimação da posição e do raio, diferença entre o real e o medido, para comparar a Abordagem proposta e o método de Mínimos Quadrados (Tabela 4).

Figura 16 – Resultados de imagens em TIE para três artefatos circulares.

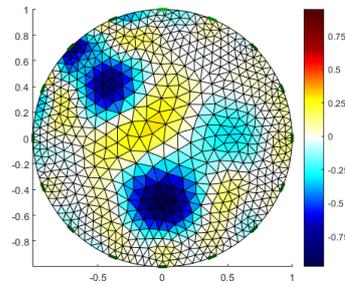
(a) Problema direto malha “ $d2d1$ ”



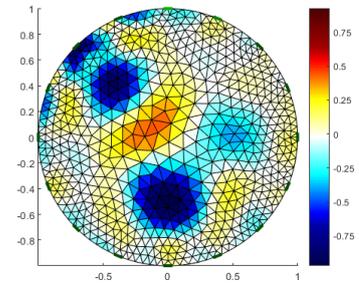
(b) Abordagem proposta 1ª iteração



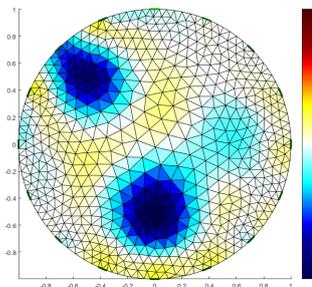
(c) Abordagem proposta 2ª iteração



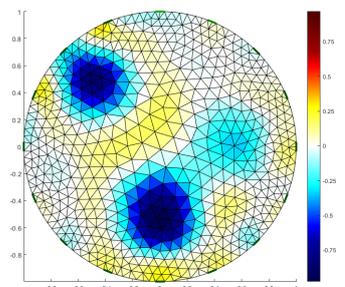
(d) Abordagem proposta 3ª iteração



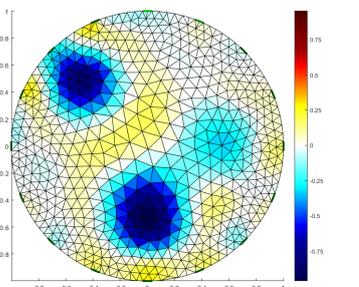
(e) Mínimos Quadrados 1ª iteração



(f) Mínimos Quadrados 2ª iteração



(g) Mínimos Quadrados 3ª iteração



Fonte: Autor (2019).

A abordagem proposta aproximou melhor os objetos, tanto em forma quanto em

Tabela 4 – Erro de estimação da localização e tamanho dos artefatos do Experimento B.

<i>Artefatos</i>		Erro de Estimação			
		1ª iteração	2ª iteração	3ª iteração	
Abordagem Proposta					
A	Posição	(0,5; 0,0)	(0,03; 0,12)	(-0,10; 0,05)	(0,01; 0,01)
	Raio	0,10	0,24	0,14	0,05
B	Posição	(-0,5; 0,5)	(-0,07; 0,16)	(-0,04; 0,10)	(-0,01; -0,06)
	Raio	0,15	0,21	0,09	0,01
C	Posição	(0,0; -0,5)	(0,07; -0,07)	(0,03; -0,01)	(0,01; -0,03)
	Raio	0,20	0,12	0,09	-0,01
Mínimos Quadrados					
A	Posição	(0,5; 0,0)	(-0,06; 0,16)	(-0,03; 0,13)	(-0,02; 0,02)
	Raio	0,10	0,34	0,31	0,29
B	Posição	(-0,5; 0,5)	(-0,08; 0,20)	(-0,07; 0,10)	(-0,05; -0,16)
	Raio	0,15	0,09	0,07	0,07
C	Posição	(0,0; -0,5)	(0,06; -0,14)	(0,05; -0,08)	(0,03; -0,01)
	Raio	0,20	0,16	0,14	0,11

Fonte: Autor (2019).

posição, do que o Mínimos Quadrados. Pode-se perceber que, para todos os Artefatos, o tamanho, isto é, o raio do artefato, já é mais próximo logo na 1ª iteração. Só em relação ao tamanho, se forem considerados os melhores resultados (3ª iteração), teve-se melhoras no: “Artefato A” de 6 vezes; “Artefato B” de 7 vezes e “Artefato C” de 11 vezes.

A estimativa das posições dos artefatos na 3ª iteração foi quase exata quando utilizada a abordagem proposta. No pior caso, com a abordagem proposta, a posição desviou 0,06, no eixo y , para a posição real do “Artefato B”. Para o “Artefato A”, a posição estimada do círculo se aproximou 2 vezes mais utilizando a proposta do que o Mínimos Quadrados. Para o “Artefato B” a posição estimada foi melhor aproximada em 5 vezes no eixo x e, aproximadamente, 2,7 vezes no eixo y . Contudo, ao utilizar a abordagem proposta, a estimativa de posição do “Artefato C” foi melhorada 3 vezes no eixo x , mas piorou 3 vezes no eixo y .

4.3 EXPERIMENTO C

O objetivo deste experimento é avaliar o desempenho da abordagem na obtenção de imagens de objetos com formas mais complexas. Para tanto, considerou-se um objeto na forma da letra “T”. A imagem sintética (problema direto) é apresentada na Figura 17-(a), com uma malha de 1116 elementos, 601 nós (“*d2d0c*”) com 16 eletrodos.

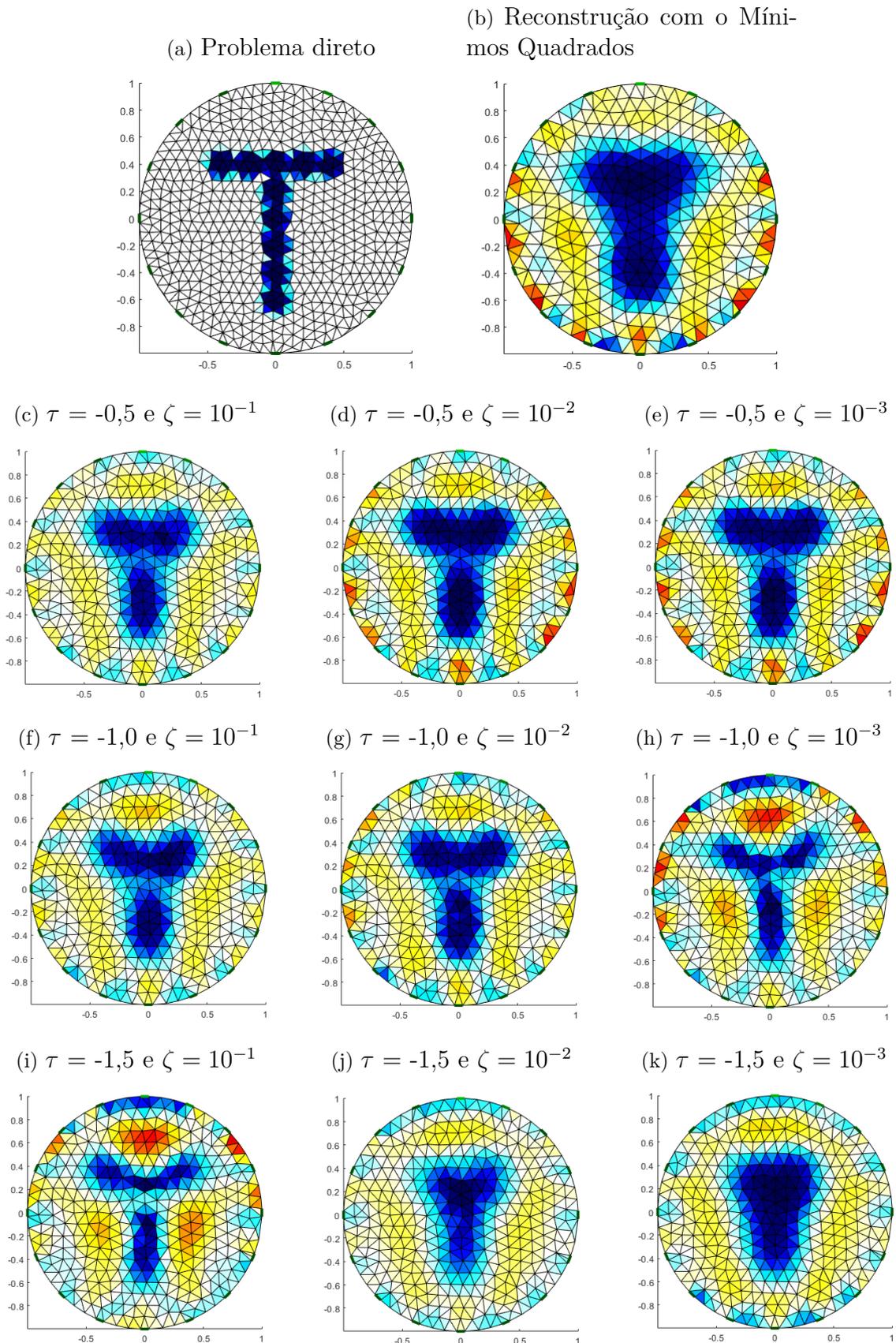
Primeiramente, o problema inverso foi resolvido com Mínimos Quadrados com regularização Tikhonov, com uma malha de 639 elementos e 353 nós (“*c2d0c*”), mostrado na Figura 17-(b) para a 4ª iteração (quando o critério de parada foi atingido). Também resolveu-se o problema de TIE com a abordagem proposta, mesma malha, no qual variou-se os parâmetros τ e ζ do modelo de pesos, Figura 17-(c) a (k), e parou o algoritmo na 4ª iteração para uma comparação entre as imagens.

Comparação qualitativa com a literatura atual

Uma abordagem para TIE foi recentemente publicada em (BORSOI et al., 2018). Esse artigo propõe um método de reconstrução com super-resolução (do inglês, *Super-Resolution Reconstruction - SRR*) baseado em reamostragem espacial, para melhorar a qualidade de imagens de TIE. O conceito das técnicas de super-resolução consiste, basicamente, na reconstrução de uma imagem, chamada de alta resolução (do inglês, *High Resolution - HR*), a partir da extração de informações, não redundantes, de imagens de baixa resolução (*Low Resolution - LR*) do mesmo objeto, as quais são adquiridas na presença de movimento. A ideia da técnica foi originalmente desenvolvida com o objetivo de transcender os limites dos sensores em sistemas ópticos.

Os resultados apresentados no artigo, com dados sintéticos e *in vivo*, indicaram que a técnica proposta pode levar a melhorias substanciais na resolução de imagens de TIE. Em um dos exemplos mostrados no artigo, foi gerada uma sequência de 20 imagens de um objeto em forma de “T”, sujeito a movimentos de translação aleatórios dentro de um tanque circular. As imagens sintéticas na Figura 18-(a), foram geradas utilizando uma malha “*d2d1c*”, com 32 eletrodos, e um ruído branco com intensidade de 3% foi adicionado às medidas de potencial elétrico.

Figura 17 – Resultados de imagens em TIE para a letra “T”.



O problema inverso foi resolvido utilizando uma MEF menos refinada (“*a2d3c*”) e o algoritmo Gauss-Newton (mGN) com três diferentes tipos de regularizações: NOSER (CHENEY et al., 1990), *Total Variation - TV* (BORSIC; MCLEOD; LIONHEART, 2001) e *temporal regularization - TS* (ADLER; DAI; LIONHEART, 2007); Figuras 18-(b), (c) e (d), respectivamente. Posteriormente, após a resolução do problema inverso, Borsoi et al. (2018) aplicaram o método da super-resolução às imagens obtidas de duas formas: considerando o movimento conhecido e estimando-o usando um algoritmo de registro (SUN; ROTH; BLACK, 2010). No entanto, devido a limitações de espaço, apenas as imagens super-resolvidas, considerando o movimento estimado das imagens do problema inverso, foram exibidas no artigo (e reproduzidas aqui).

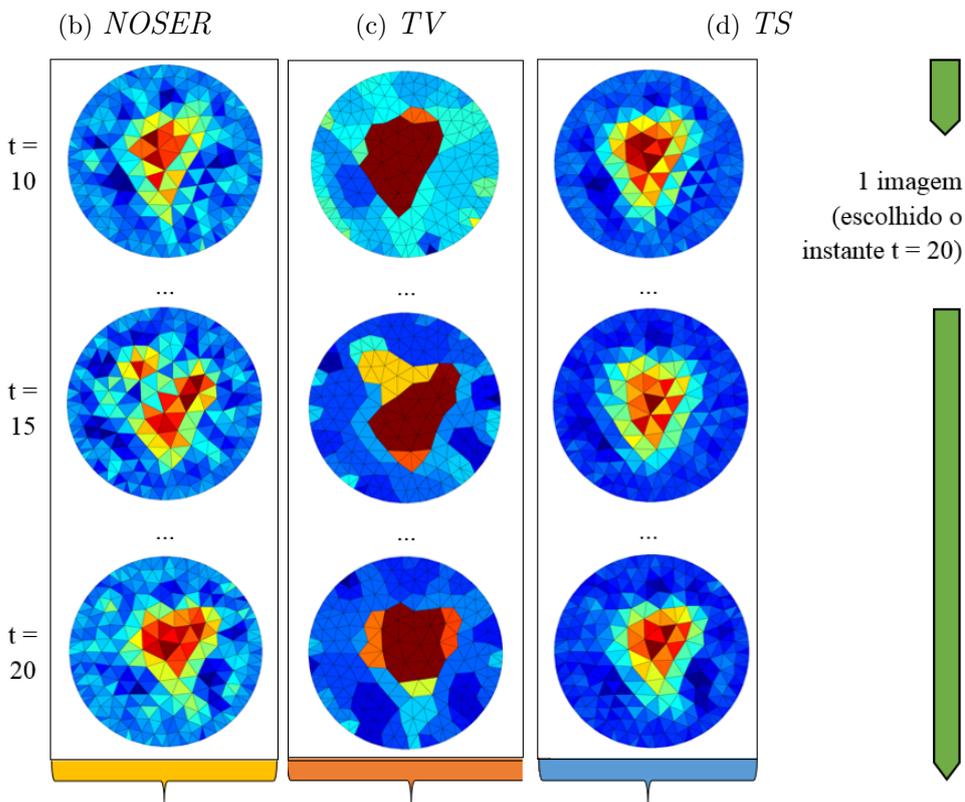
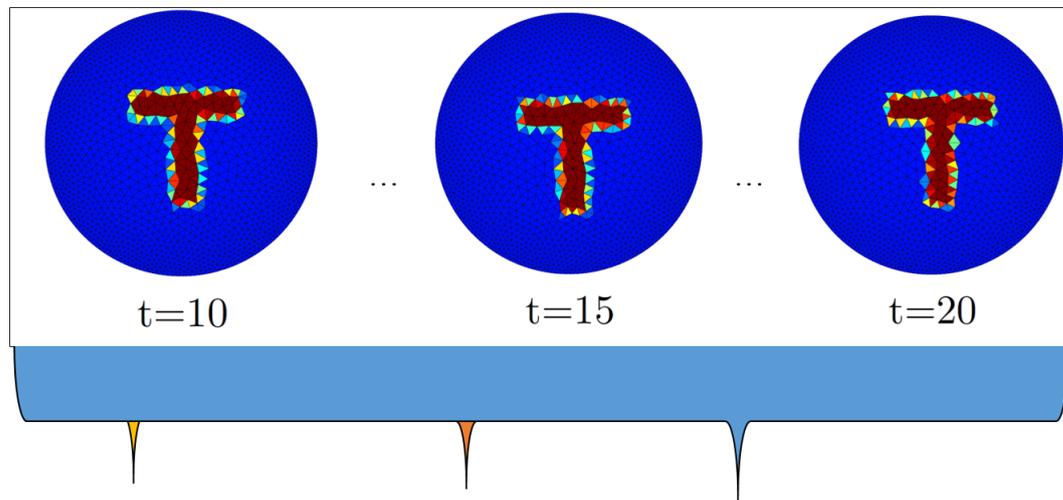
Para esta última etapa, de super-resolução, são utilizadas todas as imagens obtidas até o presente instante para realizar a reamostragem, isto é, no instante $t = 5$ tem-se 5 imagens, $t = 10$ tem-se 10 imagens e assim sucessivamente. Para fins de comparação com a abordagem proposta nesta dissertação, utilizou-se o instante $t = 20$ que por ter mais imagens associadas, segundo o autor, gerou melhor resultado ao fim do processo, ver Figuras 18-(e), (f) e (g).

A Figura 18 mostra o processo de reconstrução proposto em (BORSOI et al., 2018), as imagens apresentadas no artigo, e compara com a abordagem proposta nesta dissertação. Os exemplos foram gerados com uma condutividade de fundo de 1 S/m e o artefato de 2 S/m. Embora, não revelada quantas iterações foram utilizadas para alcançar as soluções apresentadas em (BORSOI et al., 2018), para a solução com a abordagem proposta nesta dissertação utilizou-se até a 3ª iteração, na qual foi atingido o critério de parada.

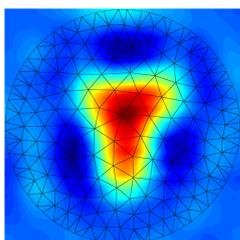
Os resultados das simulações, Figuras 18-(e), (f) e (g), mostram um aumento significativo na qualidade visual nas imagens de TIE em relação aos problemas inversos nas Figuras 18-(b), (c) e (d). A Figura 18-(h) mostra o resultado obtido com a abordagem proposta (regularização de Tikhonov), pode-se visualizar que o resultado obtido é melhor em relação as todas reconstruções mostradas no artigo que utilizaram o mGN para resolver a otimização de Mínimos Quadrados. Foram utilizados os parâmetros: $\lambda = 10^{-4}$ (igual ao artigo), $\tau = -1,7$ e $\zeta = 10^{-4}$.

Figura 18 – Comparação qualitativa do Experimento C com a literatura atual.

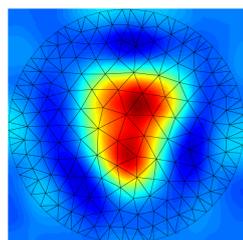
(a) Sequência de 20 imagens do problema direto com movimento, malha “ $d2d1c$ ”.



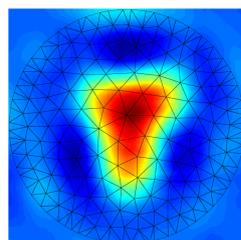
(e) *SSR* para *NOSE*, 20 imagens



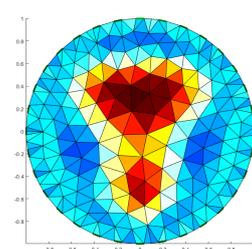
(f) *SSR* para *TV*, com 20 imagens



(g) *SSR* para *TS*, com 20 imagens



(h) Abordagem proposta, 3ª iteração



Especificamente, em relação aos resultados em alta resolução, Figuras 18-(e), (f) e (g), e o resultado da abordagem proposta, Figura 18-(h), pode-se visualizar que com a abordagem proposta obteve-se um resultado melhor, em relação a forma do objeto “T”. É importante notar que para os resultados das Figuras 18-(e), (f) e (g), o artigo sobrepõe às imagens uma MEF (“*a2d3c*”), pois as imagens resultantes da técnica de super-resolução utiliza uma grade de *pixels* uniforme, ao passo que a abordagem proposta neste trabalho utiliza uma MEF, isto é, uma malha não uniforme de elementos irregulares, cada qual apresentando um valor de admitividade.

Com a abordagem proposta, uma melhora significativa em tempo de processamento é conseguida, pois, em termos práticos, na abordagem proposta não é preciso resolver o problema inverso variadas vezes (com variados conjuntos de medidas de potencial elétrico) e após isso aplicar a técnica de super-resolução; a imagem em “alta resolução” é conseguida ao custo de uma etapa só (com n iterações) por meio de apenas um conjunto de medidas. Além disso, a reconstrução é conseguida ao custo de uma minimização quadrática que não depende de uma movimentação (translação) do objeto dentro do tanque para gerar inovações nos detalhes da imagem, isso sem mencionar a influência da informação imprecisa sobre o movimento quando este é estimado. Também dispensa-se o custo do algoritmo de registro.

4.4 EXPERIMENTO D

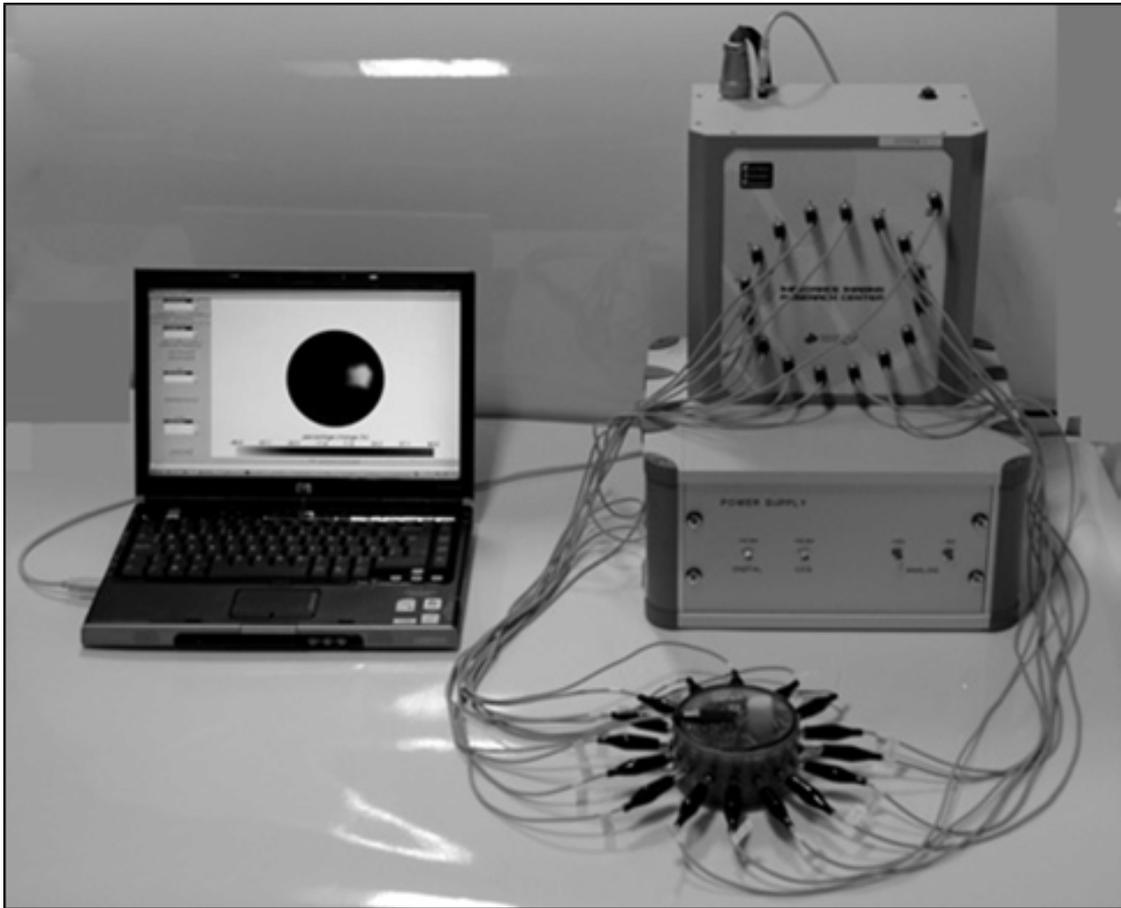
Nesta seção, utiliza-se o algoritmo proposto no conjunto de dados *iirc_data_2006*² medido pelo grupo de pesquisa em TIE do professor Eung Je Woo (WI et al., 2014), (OH et al., 2007), (OH; WOO; HOLDER, 2007) e (OH et al., 2011). O conjunto de dados *iirc_data_2006* está disponibilizado, publicamente, na biblioteca EIDORS.

O conjunto de dados *iirc_data_2006* foi coletado utilizando o sistema KHU Mark1 (OH et al., 2007) a partir de um tanque cilíndrico de acrílico preenchido com solução salina (Figura 19). O tanque possui 20 cm de diâmetro com 16 eletrodos presos em seu contorno. A solução salina foi preenchida a cerca de 6 cm de profundidade. Dentro do

² O acrônimo IIRC significa *Impedance Imaging Research Center*, um grupo de pesquisa de Seul, na Coreia do Sul, que desenvolve novos métodos de imagens para a TIE.

tanque, colocou-se uma haste cilíndrica de acrílico de 2 cm de diâmetro como objeto de interesse. A condutividade da solução salina foi de 0,15 S/m e a haste de acrílico foi basicamente não condutora (≈ 0 S/m).

Figura 19 – Foto do sistema KHU Mark1.



Fonte: OH et al. (2007).

O protocolo de aquisição de dados foi o padrão de eletrodos adjacentes, com dados adquiridos em todos os eletrodos. Os dados contêm as medições de potencial elétrico para o caso homogêneo e não homogêneos. A medição para o caso homogêneo foi obtida quando a haste de acrílico estava fora do tanque, neste caso tem-se a condutividade de referência. No caso não homogêneo, foram coletadas 100 medidas de potenciais elétricos diferentes, correspondentes a 100 posições diferentes da haste dentro do tanque.

No ambiente EIDORS, o tanque é por padrão um cilindro de 1 m de diâmetro e a condutividade de referência 1 S/m. No entanto, na experiência, o tanque era um cilindro de 0,2 m de diâmetro e a condutividade de 0,15 S/m. Portanto, um fator de

escala adequado deve ser aplicado às medições, para garantir que o modelo EIDORS se encaixe nessas medidas (HARRACH; MACH, 2016). Em Harrach e Mach (2016), as medidas foram escalonadas multiplicando-se por um fator de 10^4 , o mesmo utilizado neste trabalho.

A Figura 20 mostra as imagens reconstruídas, malha “*d2d1c*”, das medidas de variadas posições da haste no tanque, pela abordagem proposta. Os parâmetros utilizados foram: $\lambda = 0,03$, $\tau = -1,5$ e $\zeta = 10^{-2}$. A Tabela 5 mostra os resultados quantitativos do erro de estimação entre o diâmetro real da haste 20 cm e o medido nas imagens reconstruídas, já descontada a escala utilizada. As coordenadas (x, y) das 100 posições de inserção da haste dentro do tanque não são descritas pelo autor, por esse motivo fez-se apenas a avaliação de tamanho (diâmetro) da haste. Pode-se perceber que em todas as posições reconstruídas a abordagem proposta representa melhor o objeto.

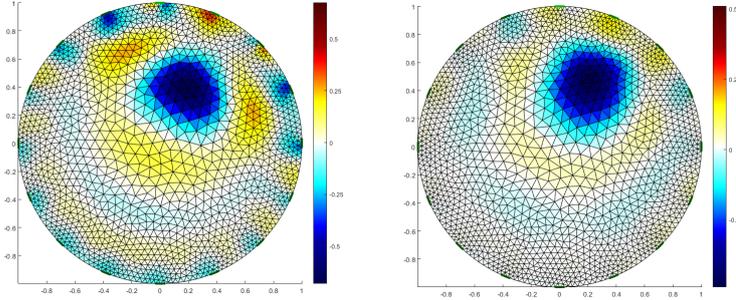
Tabela 5 – Erro de estimação do diâmetro da haste do Experimento D.

	<i>Posições</i>	Erro de Estimação (10^{-3})		<i>Posições</i>	Erro de Estimação (10^{-3})
Abordagem Proposta	“1”	3,635	Mínimos Quadrados	“1”	5,478
	“10”	2,708		“10”	4,942
	“50”	2,516		“50”	4,358
	“100”	4,482		“100”	5,646

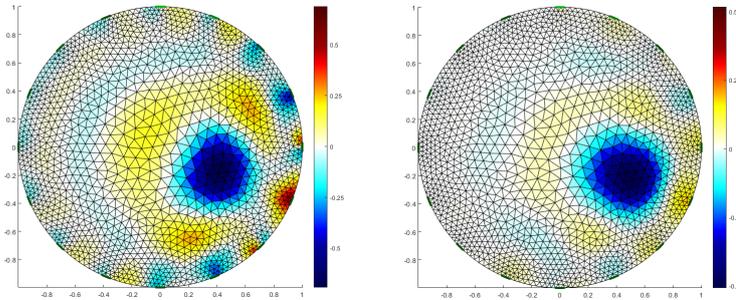
Fonte: Autor (2019).

Figura 20 – Resultados para o conjunto de dados *iirc_data_2006*.

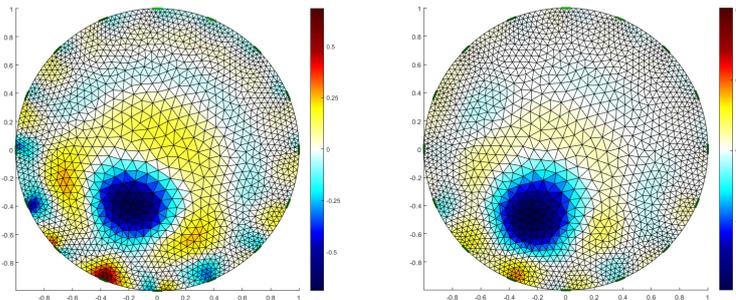
(a) Abordagem proposta, posição 1 (b) Mínimos Quadrados, posição 1



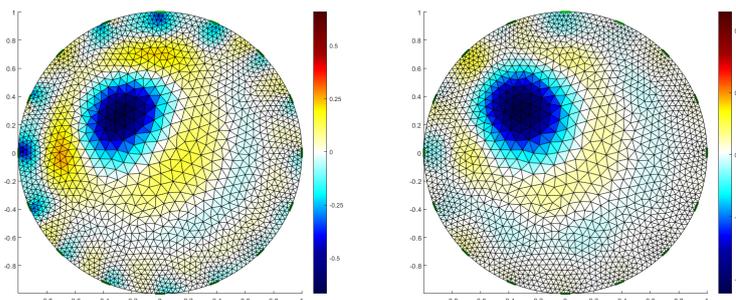
(c) Abordagem proposta, posição 10 (d) Mínimos Quadrados, posição 10



(e) Abordagem proposta, posição 50 (f) Mínimos Quadrados, posição 50



(g) Abordagem proposta, posição 100 (h) Mínimos Quadrados, posição 100



5 CONCLUSÃO E TRABALHO FUTURO

Nesta dissertação, foi proposta a obtenção de imagens oriundas da Tomografia por Impedância Elétrica (TIE) com melhor qualidade e, para tanto, sugeriu-se o método de Mínimos Quadrados Ponderados com Regularização, no qual minimiza-se o quadrado da energia do erro de reconstrução. O objeto principal foi um algoritmo capaz de melhorar a resolução espacial das imagens provenientes de tomógrafos por impedância elétrica.

A solução encontrada foi utilizar uma abordagem modificada do método Gauss-Newton com o uso de um modelo de pesos espacialmente variantes, que pondera o erro quadrático. Os resultados do Capítulo 4 permitem concluir que a abordagem proposta é capaz de aproximar a forma e posição de objetos, desde que os parâmetros τ e ζ sejam bem sintonizados. Além disso, obteve-se melhoras não só na resolução espacial das imagens, mas, de forma geral, no erro de posicionamento, deformação de forma e oscilação.

Em específico, a inovação do trabalho está na construção da matriz de pesos \mathbf{W} , ao propor que valores de impedância estimados, de cada elemento da malha de elementos finitos, sejam uma função da distância entre o elemento e o eletrodo. Essa função gera um modelo determinístico de pesos em toda malha, variante no espaço, que prediz as linhas de campo elétrico no plano tomográfico.

Portanto, em relação à baixa resolução das imagens, que é um dos principais problemas da técnica de TIE, esta abordagem é promissora na reconstrução de imagens, pois tem a capacidade de aumentar a qualidade das imagens sem a necessidade de se modificar o *hardware* de aquisição. Contudo, há sempre mais trabalho a fazer e os desenvolvimentos futuros que poderiam ser realizados, são elencados, em ordem de importância:

- Propor uma função de busca automática, dos parâmetros τ e ζ ótimos, para o modelo determinístico de ponderação utilizado neste trabalho;
- Investigar o desempenho da abordagem proposta, utilizando outros métodos de regularização, incorporados como um termo adicional na minimização;
- Estudar uma hibridização com técnicas de processamento mais complexas, para filtrar o ruído e/ou para introduzir critérios de parada mais elaborados.

REFERÊNCIAS

- ABBOUD, M. et al. Monitoring of peripheral edema using electrical bioimpedance measurements. *Conf IEEE EMBS*, p. 641–642, 1995.
- ADLER, A. *Measurement of Pulmonary Function with Electrical Impedance Tomography*. Tese (Doutorado) — Institut de Génie Biomedical Université de Montréal, 1995.
- ADLER, A.; BOYLE, A. Electrical impedance tomography: Tissue properties to image measures. *IEEE Trans on Biom Eng*, v. 64, n. 11, p. 2494–2504, 2017.
- ADLER, A.; GABURRO, R.; LIONHEART, W. R. B. *Electrical Impedance Tomography*. [S.l.]: Handbook of Mathematical Methods in Imaging Springer, 2016.
- ADLER, A.; GUARDO, R. Electrical impedance tomography: regularized imaging and contrast detection. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 15, n. 2, p. 170–179, 1996.
- ADLER, A.; LIONHEART, W. R. B. EIDORS: Towards a community-based extensible software base for EIT. *VI Conf. Electrical Impedance Tomography*, London, 2005.
- ADLER, A.; LIONHEART, W. R. B. Uses and abuses of EIDORS: An extensible software base for EIT. *Physiol Meas*, n. 27, p. 25–42, 2006.
- ADLER, A. et al. GREIT: a unified approach to 2d linear EIT reconstruction of lung images. *Physiol Meas*, v. 30, p. 35–55, 2009.
- ADLER, D.; DAI, T.; LIONHEART, W. R. Temporal image reconstruction in electrical impedance tomography. *Physiol Meas*, v. 7, n. 28, 2007.
- ALLAUD, L. A.; MARTIN, M. H. *Schlumberger, the history of a technique*. New York: John Wiley and Sons, 1977.
- ALLERS, A.; SANTOSA, F. Stability and resolution analysis of a linearized problem in electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, n. 7, p. 515–535, 1991.
- ANG, W. T. *A beginner's course in boundary element methods*. Boca Raton, Florida: Universal publishers, 2007.
- ARNOLD, N. *Numerische Lösungen elliptischer und parabolischer Differentialgleichungen in zwei und drei Dimensionen mit NETGEN/NGSolve*. Dissertação (Mestrado) — Institut für Mathematik, Universität Zürich, Zürich, 2013.
- ASSENHEIMER, M. et al. The t-scan technology: electrical impedance as a diagnostic tool for breast cancer detection. *Physiol Meas*, n. 22, p. 1–8, 2001.
- BAGSHAW, A. P. et al. Electrical impedance tomography of human brain function using reconstruction algorithms based on the finite element method. *NeuroImage*, v. 20, n. 2, p. 752–764, 2003.
- BAKUSHINSKII, A. B. The problem of the convergence of the iteratively regularized gauss-newton method. *Comp Math and Phys*, v. 32, p. 1353–1359, 1992.
- BATES, R. H. T.; MCKINNON, G. C.; SEAGAR, A. D. A limitation on systems for imaging electrical conductivity distributions. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, n. 27, p. 418–420, 1980.

- BJÖRCK, A. *Numerical methods for least squares problems*. Philadelphia: SIAM, 1996.
- BLUE, R. S. *A real-time three-dimensional linearized reconstruction algorithm generalized for multiple planes of electrodes*. Troy: Rensselaer Polytechnic Institute, 1997.
- BOONE, R.; BARBER, D.; BROWN, B. R. Review: imaging with electricity: report of the european concerted action on impedance tomography. *Journal of Medical Engineering and Technology*, n. 21, p. 201–232, 1997.
- BORCEA, L. Electrical impedance tomography. *Inverse Prob.*, n. 18, p. 99–136, 2002.
- BORCEA, L.; BERRYMAN, J. G.; PAPANICOLAOU, G. C. Matching pursuit for imaging high-contrast conductivity. *Inverse Problems*, v. 15, p. 811–849, 1999.
- BORCEA, L.; BERRYMAN, J. G.; PAPANICOLAOU, G. C. A non-linear multigrid for imaging electrical conductivity and permittivity at low frequency. *Inverse Problems*, v. 17, p. 329–359, 2001.
- BORSIC, A.; ADLER, A. A primal dual-interior point framework for using the l1-norm or the l2-norm on the data and regularization terms of inverse problems. *Inv Prob*, n. 28, 2012.
- BORSIC, A.; LIONHEART, W. B.; MCLEOD, C. N. Generation of anisotropic regularization filters for electrical impedance tomography. *IEEE Trans Med Imaging*, n. 21, p. 579–587, 2002.
- BORSIC, A.; MCLEOD, C. N.; LIONHEART, W. R. B. Total variation regularization in EIT reconstruction. *Proceedings of the 2nd World Congress on Industrial Process Tomography*, p. 433, 2001.
- BORSIC, A. et al. Sensitivity study and optimization of a 3d electric impedance tomography prostate probe. *Physiol Meas*, n. 30, p. 1–19, 2009.
- BORSOI, R. A. et al. Super-resolution reconstruction of electrical impedance tomography images. *Special Issue on Advanced Signal Processing in Biomedical Imaging*, 2018.
- BRADY, J. et al. Electromagnetic sounding for hydrocarbons. *Oilfield Review*, n. 21, p. 4–19, 2009.
- BRAUN, F. et al. A versatile noise performance metric for electrical impedance tomography algorithms. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 64, p. 2321–2330, 2017.
- BROWN, B. H. Electrical impedance tomography (EIT): a review. *Journal Medical Engineering and Technology*, n. 27, p. 97–108, 2003.
- BROWN, B. H.; BARBER, D. C. *Tomography*. UK: Patent No. GB2160323A, 1985.
- BROWN, B. H.; BARBER, D. C.; FREESTON, I. L. *Tomography*. UK: Patent No. GB2119520A, 1983.
- BROWN, B. H.; SEAGAR, A. D. The sheffield data collection system. *Clinical Physics and Physiological Measurement*, n. 8, p. 91–97, 1987.

- BROWN, B. H. et al. Multi-frequency imaging and modelling of respiratory related electrical impedance changes. *Physiol Meas*, n. 15, p. 1–12, 1994.
- BRÜHL, M.; HANKE, M. Numerical implementation of two non-iterative methods for locating inclusions by impedance tomography. *Inv Prob*, v. 16, p. 1029–1042, 2000.
- CALDERON, A. P. On an inverse boundary value problem. *Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics*, Rio de Janeiro, p. 65–73, 1980. Editors W.H. Meyer and M.A. Raupp, Sociedade Brasileira de Matematica.
- CHEN, Z. Q.; PAOLONI, P. J. An integral equation approach to electrical conductance tomography. *IEEE Trans on Med Imaging*, v. 11, n. 4, p. 570–576, 1992.
- CHENEY, M.; ISAACSON, D. Issues in electrical impedance imaging. *IEEE Computational Science and Engineering*, n. 2, p. 53–62, 1995.
- CHENEY, M.; ISAACSON, D.; NEWELL, J. C. Electrical impedance tomography. *SIAM Review*, n. 41, p. 85–101, 1999.
- CHENEY, M. et al. Noser: An algorithm for solving the inverse conductivity problem. *Journal Imaging Systems and Technology*, v. 2, p. 66–75, 1990.
- CHEREPENIN, V. et al. A 3d electrical impedance tomography (EIT) system for breast cancer detection. *Physiol Meas*, n. 22, p. 9–18, 2001.
- CHEREPENIN, V. et al. Preliminary static EIT images of the thorax in health and disease. *Physiol Meas*, v. 23, n. 1, p. 33, 2002.
- CHITTURI, V.; FARRUKH, N. Spatial resolution in electrical impedance tomography: A topical review. *Journal of Electrical Bioimpedance*, v. 8, p. 66–78, 2017.
- CHOI, M.; HARRACH, B.; SEO, J. Regularizing a linearized EIT reconstruction method using a sensitivity-based factorization method. *Inv Prob in Sci and Eng*, v. 22, 10 2014.
- CILLIERS, J. et al. Electrical resistance tomography using a bi-directional current pulse technique. *Measurement Science and Technology*, v. 12, n. 8, p. 997–1001, 2001.
- CLAY, M. T.; FEREE, T. Weighted regularization in electrical impedance tomography with applications to acute cerebral stroke. *IEEE Trans Med Imag*, v. 21, p. 629–637, 2002.
- COOK, R. D. et al. Act3-a high-speed, high-precision electrical-impedance tomograph. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, n. 41, p. 713–722, 1994.
- DEANGELO, M.; MUELLER, J. L. 2d d-bar reconstructions of human chest and tank data using an improved approximation to the scattering transform. *Physiol Meas*, v. 31, n. 2, p. 221, 2010.
- DIJKSTRA, A. M. et al. Review clinical applications of electrical impedance tomography. *Journal Medical Engineering and Technology*, n. 17, p. 89–98, 1993.
- DINES, K. A.; LYTLE, R. J. Analysis of electrical conductivity imaging. *Geophysics*, n. 46, p. 1025–1036, 1981.

- DOBSON, D. Convergence of a reconstruction method for the inverse conductivity problem. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 52, n. 2, p. 442–458, 1992.
- DORN, O. et al. A non-linear inversion method for 3d electromagnetic imaging using adjoint fields. *Inverse Problems*, v. 15, n. 6, p. 1523–1558, 1999.
- DORN, O. et al. Sensitivity analysis of a nonlinear inversion method for 3d electromagnetic imaging in anisotropic media. *Inv Prob*, v. 18, n. 2, p. 285–317, 2002.
- DURAND, E. *Eletrostaticque*. Tome I. Saint-Germain, Paris: Masson, 1964.
- EDIC, P. et al. An iterative newton-raphson method to solve the inverse admittivity problem. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 45, n. 7, p. 899–908, 1998.
- EDWARD, M. *Electricity and Magnetism*. New York: McGraw-Hill, 1985.
- GARCIA, D. F. *Algoritmo para Reconstrução de Imagens Bidimensionais para Sistema de Tomografia por Impedância Elétrica Baseado em Configuração Multiterminais*. Dissertação (Mestrado) — UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Biomédica, Rio de Janeiro, Brasil, 2012.
- GARCIA, F. D.; SOUZA, M. N.; PINO, A. V. Algoritmo de reconstrução de imagens para um sistema de tomografia por impedância elétrica (tie) baseado em configuração multiterminais. *Rev. Brasileira de Eng. Biomédica*, v. 29, n. 2, p. 133–143, 2013.
- GESELOWITZ, D. B. An application of electrocardiographic lead theory to impedance plethysmography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 1, p. 38–41, 1971.
- GISSER, D. G. et al. Analog electronics for a high-speed high-precision electrical impedance tomography. *Proceedings of the Annual International Conference of the IEEE EMBS (Engineering in Medicine and Biology Society)*, n. 13, p. 23–24, 1991.
- GOLUB, G. H.; HEATH, M.; WAHBA, G. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, v. 21, n. 2, p. 215–223, 1979.
- GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix computations*. 3. ed. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996.
- GRAHAM, B. M. *Enhancements in Electrical Impedance Tomography (EIT) image Reconstruction for 3D lung imaging*. Tese (Doutorado) — University of Ottawa, 2007.
- GREGOR, J.; FESSLER, J. A. Comparison of sirt and sqs for regularized weighted least squares image reconstruction. *IEEE Trans on Comp Imag*, v. 1, n. 1, p. 44–55, 2015.
- GRIFFITHS, H. Magnetic induction tomography. *Measurement Science and Technology*, n. 12, p. 1126–1131, 2001.
- GRYCHTOL, B.; ADLER, A. Fem electrode refinement for electrical impedance tomography. *Conf IEEE EMBS*, p. 6429–6432, 2013.
- GRYCHTOL, B. et al. Functional validation and comparison framework for EIT lung imaging. *PLoS ONE* 9, v. 10, p. 30–45, 2014.
- HAHN, G. et al. Changes in the thoracic impedance distribution under different ventilatory conditions. *Physiol Meas*, n. 16, p. 161–173, 1995.

- HANKE, M. *Conjugate gradient type methods for ill-posed problems*. Longman, Essex: Scientific and Technical, 1995.
- HANSEN, P. C. *Rank deficient and discrete ill-posed problems: Numerical aspects of linear inversion*. Philadelphia: SIAM, 1997.
- HANSEN, P. C. *Rank deficient and discrete ill-posed problems: Numerical aspects of linear inversion*. Philadelphia: SIAM, 1998.
- HANSEN, P. C. *Regularization tools: A matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems*. Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark: Technical report, Informatics and Mathematical Modelling, 2008.
- HANSEN, P. C.; O'LEARY, D. P. The use of the l-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM Journal on Scient. Comp.*, v. 14, n. 6, p. 1487–1503, 1993.
- HARRACH, B.; MACH, M. N. Monotonicity-based regularization for phantom experiment data in electrical impedance tomography. *New Trends in Parameter Identification for Mathematical Models*, 2016.
- HARTINGER, A. E.; GAGNON, H.; GUARDO, R. Accounting for hardware imperfections in EIT image reconstruction algorithms. *Physiol Meas*, v. 28, p. 13–27, 2007.
- HENDERSON, P. R.; WEBSTER, J. G.; SWANSON, D. K. A thoracic electrical impedance camera. *Proceedings of the 29th Annual Conference on Engineering in Medicine and Biology*, n. 18, p. 322, 1976.
- HENDERSON, R. P.; WEBSTER, J. G. An impedance camera for spatially specific measurements of the thorax. *IEEE Trans on Biom Eng*, n. 25, p. 250–254, 1978.
- HERWANGER, J. V.; PAIN, C. C.; OLIVEIRA, C. R. E. Electric and seismic inversion in anisotropic inhomogeneous media. *Fourth International Conference on Inverse Problems in Engineering*, 2002.
- HOLDER, D. S. *Electrical impedance tomography: methods, history and applications*. [S.l.]: CRC Press, 2004.
- HUA, P.; WOO, E. J.; WEBSTER, J. G. Iterative reconstruction methods using regularization and optimal current patterns in electrical impedance tomography. *IEEE Trans Med Imag*, v. 10, p. 621–628, 1991.
- HUA, P. et al. Finite element modeling of electrode-skin contact impedance in EIT. *IEEE Trans Biomed Eng*, v. 40, p. 335–343, 1993.
- HUANG, S. M. et al. Design of sensor electronics for electrical capacitance tomography. *IEEE Proceedings Circuits, Devices and Systems*, n. 139, p. 83–88, 1992.
- HYVÖNEN, N.; MUSTONEN, L. Generalized linearization techniques in electrical impedance tomography. *arXiv e-prints*, 2017.
- IEC60601-1. *Medical Electrical Equipment Part 1: General Requirements for Basic Safety and Essential Performance*. Brussels: International Electrotechnical Commission, 2015.

- ISAACSON, D. Distinguishability of conductivities by electric current computed tomography. *IEEE Trans Med Imag*, n. 5, p. 91–95, 1986.
- ISAACSON, D. et al. Reconstructions of chest phantoms by the d-bar method for electrical impedance tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2004.
- ISLAM, R.; KIBER, A. Electrical impedance tomography imaging using gauss-newton algorithm. In: *2014 International Conference on Informatics, Electronics Vision (ICIEV)*. [S.l.]: IEEE, 2014. p. 1–4.
- JACKSON, J. D. *Classical Eelectrodynamics*. 2. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1975.
- JIA, J. et al. A novel tomographic sensing system for high electrically conductive multiphase flow measurement. *Flow Measur. and Instr.*, n. 21, p. 184–190, 2010.
- KAIPPIO, J.; SOMERSALO, E. *Statistical and Computational Inverse Problems*. 1. ed. New York: Springer, 2004.
- KAIPPIO, J. P. et al. Statistical inversion in monte carlo sampling methods in electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, n. 16, p. 1487–1522, 2000.
- KALLMAN, J.; BERRYMAN, J. Weighted least-squares criteria for electrical impedance tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 11, n. 2, p. 284–292, 1992.
- KANTARCI, N.; BORAK, F.; ULGEN, K. O. Bubble column reactors. *Process Biochemistry*, n. 40, p. 2263–2283, 2005.
- KARL, W. C. Regularization in image restoration and reconstruction in handbook of image and video processing. *Academic Press*, p. 141–161, 2000.
- KIM, K. Y. et al. Regularized modified newton raphson algorithm for electrical impedance tomography based on the exponentially weighted least square criterion. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, p. 64–68, 2000.
- KOLEHMAINEN, V. et al. Assesment of errors in statical electrical impedance tomography with adjacent and trigonometric current patterns. *Physiol Meas*, n. 18, p. 289–303, 1997.
- LARSSON, J. Electromagnetics from a quasistatic perspective. *Am J Physics*, v. 75, p. 230–239, 2007.
- LEI, J. et al. Image reconstruction algorithm based on the extended regularised total least squares method for electrical capacitance tomography. *IET Science, Measurement and Technology*, v. 2, n. 5, p. 326–336, 2008.
- LEVENBERG, K. A method for the solution of certain problems in least squares. *Journal of Numerical Analysis*, v. 16, p. 588–604, 1944.
- LIDGEY, F. J. et al. Electrode current determination from programmable voltage sources. *Clinical Physics and Physiological Measurement*, n. 13, p. 43–46, 1992.
- LIMA, C. R. et al. Electrical impedance tomography through constrained sequential linear programming: a topology optimization approach. *Measurement Science and Technology*, v. 18, n. 9, p. 2847, 2007.

- LIU, D. et al. A nonlinear approach to difference imaging in EIT: assessment of the robustness in the presence of modelling errors. *Inverse Problems*, v. 31, n. 3, 2015.
- LIU, D. et al. Nonlinear difference imaging approach to three-dimensional electrical impedance tomography in the presence of geometric modeling errors. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 63, n. 9, p. 1956–1965, 2016.
- LOKE, M. H.; BARKER, R. D. Rapid least square inversion of apparent resistivity pseudosections by a quasi-newton method. *Geophys. Prosp.*, n. 44, p. 131–152, 1996.
- LORENTZ, H. A. The theorem of poynting concerning the energy in the electromagnetic field and two general propositions concerning the propagation of light. *Amsterdammer Akademie der Wetenschappen*, v. 4, p. 176–187, 1986.
- LYTLE, R. J.; DINES, K. A. *An impedance camera: A system for determining the spatial variation of electrical conductivity*. Livermore, CA: Lawrence Livermore Lab, 1978.
- MA, Y. et al. A high performance online data processing EIT system. *Proceedings of the 3rd World Congress on Industrial Process Tomography*, p. 27–32, 2003.
- MALMIVUO, J.; PLONSEY, R. *Bioelectromagnetism – principles and applications of bioelectric and biomagnetic fields*. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- MAMATJAN, Y. et al. Evaluation and real-time monitoring of data quality in electrical impedance tomography. *IEEE Trans Med Imaging*, n. 32, p. 1997–2005, 2013.
- MANGNALL, Y. F. et al. Applied potential tomography: a new noninvasive technique for assessing gastric function. *Clin Phys Physiol Meas*, n. 8, p. 119–129, 1987.
- MARECHAL, B. et al. Distortionless bidimensional localization on a resistive plane: A pure hardware way. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, v. 261, n. 3, p. 500–518, 1987.
- MARQUARDT, D. An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of Applied Mathematic*, v. 11, p. 431–441, 1963.
- MARSDEN, J. E. *Vector Calculus*. [S.l.]: Freeman and Company, 1976.
- MARTIN, S.; CHOI, M. Nonlinear electrical impedance tomography reconstruction using artificial neural networks and particle swarm optimization. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 52, n. 3, p. 1–4, 2016.
- MARTINS, J. S. *Desenvolvimento de um algoritmo para reconstrução de imagens utilizando a técnica de tomografia por impedância elétrica*. Dissertação (Mestrado) — Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia de Materiais (PGETEMA), Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 2012.
- MARTINS, T. et al. Image reconstruction using interval simulated annealing in electrical impedance tomography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 59, n. 7, p. 1861–1870, 2012.
- MENIN, O. H. *Método dos elementos de contorno para tomografia de impedância elétrica*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Física aplicada à Medicina, Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, Brasil, 2009.

- MOROZOV, V. A. *Methods for solving incorrectly posed problems*. New York: Springer-Verlag, 1984.
- MURAI, T.; KAGAWA, Y. Electrical impedance computed tomography based on finite element model. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 32, p. 177–184, 1985.
- NASH, S. G.; SOFER, A. *Linear and non-linear programming*. New York: McGraw-Hill International editions, 1996.
- NEWELL, J. C.; GISSER, D. G.; ISAACSON, D. An electric current tomography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, n. 35, p. 828–833, 1988.
- NISSINEN, A.; HEIKKINEN, L. M.; KAIPIO, J. P. The bayesian approximation error approach for electrical impedance tomography experimental results. *Measurement Science and Technology*, v. 19, n. 1, 2008.
- NORTON, S. J.; BOWLER, J. R. Theory of eddy current inversion. *Journal of Applied Physics*, n. 73, p. 501–510, 1993.
- NUNEZ, P. L.; SRINIVASAN, R. *Electric fields of the brain: the neurophysics of EEG*. 2. ed. [S.l.]: University Press, 2006.
- OH, S.; TANG, T.; SADLEIR, R. Quantitative analysis of shape change in electrical impedance tomography (EIT). *IFMBE Proc.*, n. 17, p. 424–427, 2007.
- OH, T. I. et al. Calibration methods for a multi-channel multi-frequency EIT system. *Physiol Meas*, v. 28, n. 10, p. 1175–1188, 2007.
- OH, T. I. et al. A fully parallel multi-frequency EIT system with exible electrode configuration: Khu mark2. *Physiol Meas*, v. 32, n. 7, p. 835–849, 2011.
- OH, T. I.; WOO, E. J.; HOLDER, D. Multi-frequency EIT system with radially symmetric architecture: Khu mark1. *Physiol Meas*, v. 28, n. 7, p. 183–196, 2007.
- PEREZ, J. P. et al. *Électromagnétisme: Fondements et applications*. Paris: Masson, 1997.
- PILKINGTON, T. C.; MORROW, M. N.; STANLEY, P. C. A comparison of finite element and integral equation formulations for the calculation of electrocardiographic potentials. *IEEE Trans Biomed Eng*, v. 32, p. 166–173, 1985.
- POLYDORIDES, N. *Image reconstruction algorithms for soft-field tomography*. Tese (Doutorado) — Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade de Manchester, Manchester, 2002.
- POLYDORIDES, N.; LIONHEART, W. R. B. A matlab toolkit for three-dimensional electrical impedance tomography: a contribution to the electrical impedance and diffuse optical reconstruction software project. *Meas Sci and Tech*, v. 13, n. 12, p. 1871–1883, 2002.
- PRATT, W. K. *Digital Image Processing*. 3. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2001.
- RADON, J. On the determination of functions from their integral values along certain manifolds. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, n. 5, p. 170–176, 1917.

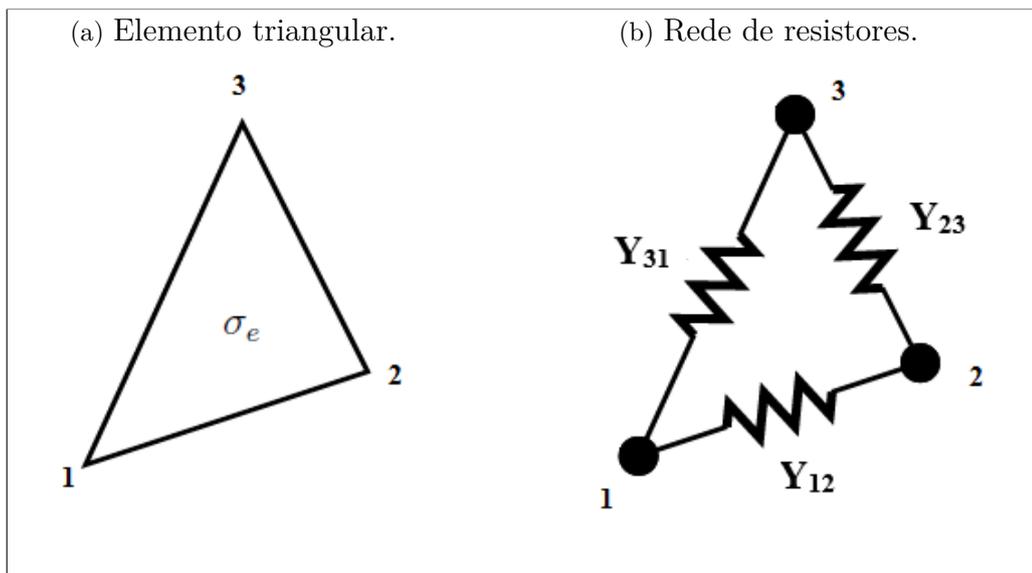
- ROLNIK, V. P.; SELECHIM, P. J. A specialized genetic algorithm for the electrical impedance tomography of two-phase flows. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 28, p. 378–389, 2006.
- SCHLABERG, H. I. et al. Development and application of the fast impedance camera - a high performance dual-plane electrical impedance tomography system. *Proceedings of 5th International Symposium on Process Tomography*, Zakopane, Poland, August 2008.
- SILTANEN, S.; MUELLER, J.; ISAACSON, D. An implementation of the reconstruction algorithm of a nachman for the 2d inverse conductivity problem. *Inverse Problems*, v. 16, n. 3, p. 681–699, 2000.
- SILVESTER, P. P.; FERRARI, R. L. *Finite Elements for Electrical Engineers*. 3. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- SINGH, G. et al. A low-cost portable wireless multi-frequency electrical impedance tomography system. *Arabian Journal for Science and Engineering*, v. 44, n. 3, p. 2305–2320, 2019.
- SOMERSALO, E. et al. Layer stripping: a direct numerical method for impedance imaging. *Inverse Problems*, v. 7, p. 899–926, 1991.
- SOUZA, M. N. *Localização Bidimensional em Plano Resistivo*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 1988.
- SUN, D.; ROTH, S.; BLACK, M. J. Secrets of optical flow estimation and their principles. In: *IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. [S.l.]: IEEE, 2010. p. 2432–2439.
- TIKHONOV, A. N.; ARSEININ, V. Y. *Solutions of ill-posed problems*. Washington DC: Winston, 1977.
- UHLMANN, G. Electrical impedance tomography and calderón's problem. *Inverse Prob.*, n. 25, p. 12–30, 2009.
- VALLEJO, M. F. M. *Reconstrução não-linear completa de imagens de Tomografia por Impedância Elétrica utilizando o método D-bar 2D*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2013.
- VAUHKONEN, M. *Electrical Impedance Tomography and Prior Information*. Tese (Doutorado) — Department of Applied Physics, Kuopio University, Finland, 1997.
- VAUHKONEN, M. et al. A matlab package for the eidors project to reconstruct two-dimensional EIT images. *Physiol Meas*, v. 22, p. 107–111, 2001.
- VAUHKONEN, M. et al. Tikhonov regularization and prior information in electrical impedance tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, p. 285–293, 1998.
- VILHUNEN. Detection of faults in resistive coatings with an impedance-tomography-related approach. *Measurement Science and Technology*, v. 13, p. 865–872, 2002.
- VONK-NOORDEGRAAF, A. et al. Determination of stroke volume by means of electrical impedance tomography. *Physiol Meas*, n. 21, p. 285–293, 2000.

- WANG, B. et al. A novel electrical resistance tomography system based on c4dtechnique. *Proceedings of 17th IEEE Instrumentation and Measurement Technology*, n. 62, p. 1017–1024, 2012.
- WANG, M. Seeing a new dimension - the past decade's developments on electrical impedance tomography. *Progress in Natural Science*, n. 15, p. 1–13, 2005.
- WANG, M.; DICKIN, F. J.; BECK, M. S. *Improved electrical impedance tomography data collection system and measurement protocols*. Manchester: Computational Mechanics Publications, 1993.
- WEBSTER, J. G. *Electric impedance tomography*. Bristol: Adam Hilger, 1990.
- WEXLER, A. Electrical impedance imaging in two and three dimensions. *Clinical Physics and Physiological Measurement*, n. 9, p. 23–29, 1988.
- WHEELER, J. L.; WANG, W.; TANG, M. A comparison of methods for measurement of spatial resolution in two dimensional circular EIT images. *Physiol Meas*, n. 23, p. 76–169, 2002.
- WI, H. et al. Multi-frequency electrical impedance tomography system with automatic self-calibration for long-term monitoring. *IEEE Transactions on Biomedical Circuits and Systems*, v. 8, n. 1, p. 119–128, 2014.
- WILKINSON, A. J. et al. A 1000-measurement frames/second ert data capture system with real-time visualization. *IEEE Sensors Journal*, n. 5, p. 300–307, 2005.
- WILLIAMS, R. A.; BECK, M. S. *Process tomography: principles, techniques and applications*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1995.
- WILSON, A. J. et al. Mk3.5: a modular, multi-frequency successor to the mk3a EIS/EIT system. *Physiol Meas*, n. 22, p. 49–54, 2001.
- WOO, E. Skin impedance measurements using simple and compound electrodes. *Med. Biol. Eng. Comput.*, v. 30, p. 97–102, 1992.
- XIE, C. G.; ATKINSON, I.; LENN, C. Multiphase flow measurement in oil and gas production. *World congress on industrial process tomography*, Bergen, Norway, n. 21, p. 723–736, 2007.
- XIE, C. G. et al. Electrical capacitance tomography for flow imaging: system model for development of image reconstruction algorithms and design of primary sensor. *IEEE Proceedings Circuits, Devices Systems*, n. 139, p. 89–98, 1992.
- YORKEY, T. J.; WEBSTER, J. G.; TOMPKINS, W. J. Comparing reconstruction algorithms for electrical impedance tomography. *IEEE Trans Biomed Eng*, v. 11, p. 843–852, 1987.
- ZHU, Q. S. et al. Electrical impedance tomography. electrode current determination from programmable voltage sources. *Clinical Physics and Physiological Measurement*, n. 15, p. 37–43, 1994.

APÊNDICE A – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS: ABORDAGEM DIRETA

A aplicação da abordagem direta é restrita a problemas que utilizam formas geométricas simples para os elementos da malha construída pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Para o problema da Tomografia por Impedância Elétrica (TIE), isso significa que essa abordagem só pode ser utilizada para elementos finitos com admitividade constante, ou seja, o elemento pode ser visto como equivalente a um circuito elétrico de resistores (Figura 21) (SILVESTER; FERRARI, 1996), (MURAI; KAGAWA, 1985) e (HOLDER, 2004).

Figura 21 – Circuito equivalente.



Fonte: Autor (2018).

Na projeção da Figura 21, cada lado do triângulo do elemento (Figura 21-(a)) é substituída por um resistor cuja admitância é dada por $\sigma_e \cot(\theta_j)$ (Figura 21-(b)) onde o resistor j é o resistor oposto ao ângulo θ_j . Em termos de coordenadas nodais, a admitância Y_{ij} , entre o nó i e o nó j , é determinada pela conversão da geometria triangular para uma rede de resistores:

$$Y_{ij} = \frac{\sigma_e}{2A_e} (b_i b_j + c_i c_j), \quad \text{para } i \neq j, \quad (\text{A.1})$$

onde $b_1 = y_2 - y_3$, $b_2 = y_3 - y_1$, $b_3 = y_1 - y_2$, $c_1 = x_3 - x_2$, $c_2 = x_1 - x_3$, $c_3 = x_2 - x_1$ para as coordenadas (x_i, y_i) de cada nó, A_e é a área do elemento e σ_e é a condutividade do elemento (constante sobre o elemento).

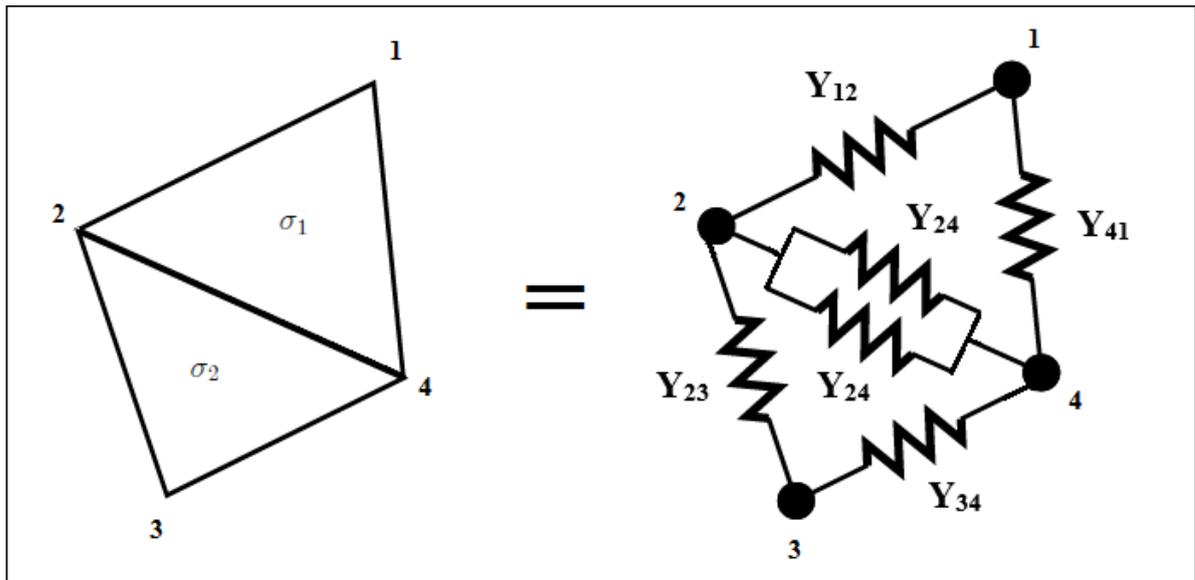
Aplicando a lei de Kirchhoff para as correntes no circuito, tem-se $Y_e u_e = \mathbf{i}_e$, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

onde $Y_{11} = -Y_{12} - Y_{13}$, $Y_{22} = -Y_{21} - Y_{23}$, $Y_{33} = -Y_{31} - Y_{32}$, $Y_{ij} = Y_{ji}$ para $i, j = 1, 2, 3$; u_i é o potencial elétrico nodal e \mathbf{i}_i é a corrente elétrica prescrita no nó i .

A matriz de admitância global \mathbf{Y} é construída a partir das admitâncias entre os elementos adjacentes. Na Figura 22, é mostrada uma malha com dois elementos (σ_1 e σ_2) que compartilham os nós 2 e 4, no entanto as matrizes locais (Y_{24}) serão diferentes para cada elemento, uma vez que a condutividade e a geometria são diferentes em cada elemento.

Figura 22 – Malha com dois elementos.



Fonte: Autor (2018).

Para a malha da Figura 22, as matrizes locais são:

$$\mathbf{Y}_{ij}^1 = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{24} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{44} \end{bmatrix} \quad i, j \in [1, 2, 4] \quad \text{para o elemento 1,} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{Y}_{ij}^2 = \begin{bmatrix} Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \quad i, j \in [2, 3, 4] \quad \text{para o elemento 2.} \quad (\text{A.4})$$

A matriz de admitância global é:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} + Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} + Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} + Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} + Y_{44} \end{bmatrix} \quad i, j \in [1, 2, 3, 4]. \quad (\text{A.5})$$

No entanto, falta impor as condições de contorno, que para a TIE são os modelos de eletrodos: contínuo, *gap*, *shunt* e completo (VAUHKONEN, 1997). Para a abordagem direta, utilizou-se o modelo de eletrodo *gap*. Nesse modelo, os eletrodos são conectados diretamente aos nós do contorno da malha. A corrente elétrica de excitação é aplicada entre dois nós do contorno, que representam um par de eletrodos, enquanto que as correntes entre os nós restantes são definidas como nulas. O potencial resultante é calculado resolvendo o seguinte sistema algébrico de equações:

$$\mathbf{Y}\mathbf{u} = \mathbf{i}, \quad (\text{A.6})$$

onde \mathbf{Y} é a matriz de admitância global, $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$ é um vetor de potenciais elétricos nodais e $\mathbf{i} = [0, 0, \dots, -1, 1, \dots, 0]^T$ é o vetor de correntes elétricas. Os valores não nulos no vetor \mathbf{i} representam a corrente de excitação entre um par de eletrodos, enquanto os zeros representam a corrente em cada nó restante. A partir de (A.6), pode-se

encontrar os potenciais elétricos nodais, ao resolver: $\mathbf{u} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{i}$. Deste modo, a abordagem direta com o modelo *gap* se resume em resolver um grande circuito de resistores com um conjunto de equações lineares simultâneas:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N1} & \dots & u_{NK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_{22} & \dots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & Y_{N2} & \dots & Y_{NN} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{11} & \dots & \mathbf{i}_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{i}_{N1} & \dots & \mathbf{i}_{NK} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

onde u_{ij} é o potencial elétrico nodal em i devido ao padrão j de injeção de corrente.

A solução da equação (A.7) fornece os valores dos potenciais nodais. Como os eletrodos no modelo de *gap* mapeiam um único nó, cada um dos potenciais medidos entre um par de eletrodos é determinado pela diferença entre dois valores nodais, em que os nós específicos são aqueles correspondentes aos eletrodos.

Resolver a equação (A.6) para \mathbf{u} requer a inversão da matriz \mathbf{Y} , que embora seja quadrada e esparsa, também é singular. Para tornar o sistema não singular, um nó de referência é selecionado, o que significa escolher uma referência (terra) arbitrária, que geralmente é referida como o nó “1”. Para implementar isso na equação linear (A.6), todas as entradas na linha 1 e coluna 1 da matriz de admitância são definidas como 0 e os elementos diagonais são definidos como 1. Para garantir que o potencial elétrico permanecerá zero nesse nó, durante cada padrão de injeção, o elemento correspondente no vetor de correntes elétricas \mathbf{i} é definido como zero.

APÊNDICE B – ALGORITMOS PARA O PROBLEMA DIRETO: FATORAÇÃO DE CHOLESKY

Para o caso em que a matriz de admitância \mathbf{Y} é real (efeito da condutância predominante), esta é positiva-definida e isso permite que essa matriz seja decomposta usando a fatoração de Cholesky. A solução da equação (2.63) é calculada pela fatoração de Cholesky, com substituições posteriores:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{L}^T \mathbf{L} \text{ tal que } \|\mathbf{Y}\mathbf{u} - \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{i}\|_2 \leq tol, \quad (\text{B.1})$$

onde \mathbf{Y} é decomposta em duas matrizes triangulares \mathbf{L} menores, sendo uma delas a transposição da outra. Deste modo, o inverso de \mathbf{Y} é construído utilizando duas matrizes \mathbf{L} com a seguinte propriedade:

$$(\mathbf{L}^T)^{-1} = (\mathbf{L}^{-1})^T. \quad (\text{B.2})$$

Isso implica que apenas o inverso de \mathbf{L} deve ser calculado. Para o sistema (2.63), a solução obtida pela fatoração de Cholesky é:

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{i} \text{ tal que } \|\mathbf{u} - \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{u}\|_2 \leq tol, \quad (\text{B.3})$$

onde o processo de fatoração é essencialmente de eliminação gaussiana.

É importante notar que se deve procurar resolver o problema com uma precisão (tol) definida pela estimativa de erro nas medições, evitando efetivamente compilar sinais de ruído na reconstrução. Conseqüentemente, tentar resolver o problema de forma exata ($tol \rightarrow 0$) não tem impacto sobre a qualidade do resultado, já que não tem significado tentar reproduzir os dados com mais precisão do que eles realmente podem ser medidos.