

**UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL**

RAFAELA REGINA FABRO

**UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS PARA A
APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA**

CAXIAS DO SUL

2018

UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS PARA A
APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Caxias do Sul, sob a orientação da Profa. Dra. Laurete Zanol Sauer, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

CAXIAS DO SUL
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Universidade de Caxias do Sul
Sistema de Bibliotecas UCS - Processamento Técnico

F131u Fabro, Rafaela Regina

Unidades de ensino potencialmente significativas para a
aprendizagem de geometria analítica / Rafaela Regina Fabro. – 2018.
206 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade de Caxias do Sul, Programa
de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, 2018.

Orientação: Laurete Teresinha Zanol Sauer.

1. Aprendizagem. 2. Geometria analítica (Ensino médio) - Estudo e
ensino. I. Sauer, Laurete Teresinha Zanol, orient. II. Título.

CDU 2. ed.: 514.12:37

Catalogação na fonte elaborada pela(o) bibliotecária(o)
Michele Fernanda Silveira da Silveira - CRB 10/2334

**UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS PARA A
APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA.**

Rafaela Regina Fabro

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Caxias do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Caxias do Sul, 19 de dezembro de 2018.

Orientadores:

Prof^a. Dr^a. Laurete Zanol Sauer

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Prof. Dr. Odilon Giovannini Junior

AGRADECIMENTOS

No decorrer de nossa vida, deparamo-nos com situações, nas quais é fundamental poder contar com o apoio de algumas pessoas. Ao final desta dissertação de Mestrado, presto, através de poucas palavras, os mais sinceros agradecimentos a estas pessoas:

A minha mãe, *Véra Regina Fabro*, gostaria de agradecer todos os momentos dedicados a mim, as palavras, os conselhos, o amor, a honestidade, o afeto, o incentivo, a amizade e o exemplo de professora atuante há mais de 35 anos. A você não apenas meu amor, minha admiração pela mulher forte que é!

O meu amigo, irmão e companheiro, *Vinicius Roberto Fabro*, que, embora tenha aversão aos estudos sempre me incentivou a seguir em frente; entendeu minha ausência em muitos momentos; acreditou nos meus objetivos e comemorou comigo todas as vitórias. A você minha eterna gratidão!

O meu amor, *Fabricio Werner Rosanelli*, por ter compreendido minha ausência em diversos momentos e ter entendido a importância desta etapa na minha vida. Agradeço, pois foram inúmeros momentos que seu apoio, um gesto, um carinho, uma atenção motivaram-me a seguir sempre em frente. Obrigada pela compreensão e por compartilhar meus sonhos...

A minha amiga e companheira de longas jornadas, *Kelly Pastorello*, que esteve presente em muitos momentos desta pesquisa; me apoiou, corrigiu, deu forças e aplaudiu! A você meu carinho e admiração!

Agradeço a minha orientadora, *Profa. Dra. Laurete Zanol Sauer*, pela condução, orientação, pelo apoio, pela dedicação e, principalmente, pela humanidade demonstrada em momentos delicados. Muito obrigada pela paciência e pelo profissionalismo. Não esquecerei as marcações “coloridas” em meus textos, que indicavam pontos a serem melhorados.

Agradeço à *Profa. Dra. Isolda Gianni de Lima* pela orientação ao longo de diversas disciplinas do mestrado, e aos professores: *Dr. Odilon Giovannini* e *Dr. Marcus Basso* pela inestimável contribuição na banca de qualificação. A atenção cuidadosa, os comentários e as sugestões enriqueceram não só este trabalho, mas a mim como pessoa.

Os diretores, funcionários e pais do Colégio Estadual Farroupilha pela cordialidade e receptividade com que acolheram esta proposta. E, em especial, aos estudantes pelo empenho e pela prestação das valiosas informações, que serviram de instrumento de estudo para esta dissertação.

A vocês todos, muito obrigada!

RESUMO

Este trabalho de pesquisa apresenta uma proposta que surgiu de uma inquietação da pesquisadora, que buscava uma metodologia diferente para a sua prática pedagógica, e com isso, identificar quais efeitos podem ser observados na aprendizagem, com o planejamento e a utilização de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS), integradas a recursos digitais e não digitais. A proposta teve por objetivo avaliar as contribuições de tais UEPS, elaboradas para potencializar a ocorrência da aprendizagem significativa de Geometria Analítica, em uma turma de 3º ano do Ensino Médio, de uma escola pública de Farroupilha/RS. A pesquisa possui embasamento teórico em Ausubel (2003) com sua Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) e em Dewey (1959), que explica a Aprendizagem por Interesse. Com tal fundamentação, busca-se que o estudante seja estimulado a construir o próprio conhecimento, partindo de seus conhecimentos prévios, incentivado pelo professor e com os recursos de apoio necessários, partindo da própria realidade, possa dar significado ao que aprende. Para promover a aprendizagem significativa, Moreira (2011) propõe as UEPS, sequências didáticas compostas por oito etapas inter-relacionadas. No início da pesquisa, aplicou-se uma UEPS-piloto, que serviu como avaliação da proposta e de suas etapas e posteriormente foram aplicadas cinco UEPS que contemplam: Plano Cartesiano, Estudo do Ponto, Estudo da Reta, Estudo da Circunferência e Geometria Analítica, com a utilização de *softwares* matemáticos. Para a análise dos resultados, utilizaram-se os dados registrados no diário de bordo da pesquisadora, bem como os trabalhos escritos, produções, avaliações e a própria fala dos estudantes, descritas ao longo da aplicação de cada UEPS, como subsídios para identificar a ocorrência da aprendizagem significativa. As atividades foram organizadas e planejadas de forma a utilizar diferentes recursos, digitais e não digitais e com eles contemplar abordagem algébrica e geométrica na resolução de problemas. Ao término da aplicação das UEPS, foi possível verificar que esse é um método com potencial para a ocorrência da aprendizagem significativa e será divulgado em um *site*, no qual todas as atividades e os recursos pedagógicos serão detalhados, para que outros educadores tenham acesso e possam utilizá-los. A pesquisa realizada para esta dissertação apresentou resultados importantes no que se refere à aprendizagem, pois os estudantes que participaram da aplicação das UEPS mostraram não só uma predisposição para assimilar os conceitos trabalhados, como também a capacidade de transferi-los e de aplicá-los, em outros contextos de aprendizagem.

Palavras-chaves: Geometria Analítica. UEPS. Aprendizagem significativa. Aprendizagem por interesse.

ABSTRACT

This research presents a proposal which emerged from the researcher's eagerness to seek a different methodology for its pedagogical practices. With that, identify what effects can be observed in the learning through planning and the use of potentially meaningful teaching units (PMTU) integrated with digital and non-digital resources. The purpose of the proposal was to evaluate the contributions of the potentially meaningful teaching units. Which were developed to improve the occurrence of compelling Analytical Geometry learning in a 11th grade (16-17 Years of age) class of a public school in Farroupilha / RS. The research has theoretical basis in Ausubel's Theory of Meaningful Learning and in Dewey's theory which explains learning by interest. With this fundamentation, we seek that the students to build their own knowledge by connecting to their prior knowledge. Through encouragement given by the teacher and with the necessary support resources, using the students' own reality and seeking to give meaning to what's learned. In order to promote the meaningful learning, Moreira (2011) proposes a didactic sequence denominated Potentially Meaningful Teaching Unit, composed of 8 interrelated stages based on the Theory of Meaningful Learning. At the beginning of the search, we applied a pilot Potentially Meaningful Teaching Unit which was used to evaluate the proposal and its stages. Afterwards, five Potentially Meaningful Teaching Units were applied. They included: Cartesian Plane, Point Study, Line Study, Circumference Study and Analytical Geometry with the use of mathematical software. For the analysis of the results, it was used the data recorded in researcher's logbook as well as the written assignments, productions, evaluations and the student's own words. Which were described through out the application of each Potentially Meaningful Teaching Units as means to evidence the occurrence of meaningful learning. The activities were organized and planned in such way to contemplate the different resources. Being digital and non-digital, these sources contemplate the algebraic and geometric resolution as well as problem solving. At the end of the implementation of the Potentially Meaningful Teaching Units, was possible to verify that this is a likely facilitating method of meaningful learning. This method will be disseminated through a website in which all activities and pedagogical resources will be detailed so that other educators have access and can utilize it. The research carried out presented important results regarding learning. Students who participated in the application of the Potentially Meaningful Teaching Units, showed not only a predisposition to assimilate the demonstrated concepts, but also the capacity to transfer and apply them in other learning contexts.

Keywords: Analytical Geometry. Potentially Significant Teaching Units. Meaningful learning. Learning by interest.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURAS

Figura 1 – Destaque da resposta do estudante E5 ao questionário	54
Figura 2 – Destaque da resposta do estudante E3 ao questionário	55
Figura 3 – Estudantes resolvendo a situação-problema	59
Figura 4 – Resolução feita pelo estudante E12 para o exercício 1	60
Figura 5 – Resolução apresentada pelo Estudante E5 para o exercício 2	61
Figura 6 – Estudantes respondendo às perguntas do questionário prévio	74
Figura 7 – Resposta do estudante E3 para a questão 1 dos conhecimentos prévios	77
Figura 8 – Estudantes resolvendo a situação-problema introdutória	78
Figura 9 – Resolução apresentada por uma estudante para a situação-problema introdutória.	79
Figura 10 – Resposta da estudante para a situação-problema introdutória	79
Figura 11 – Plano Cartesiano – “prancha” – construída pelos estudantes	80
Figura 12 – Estudantes resolvendo atividades na “prancha”	81
Figura 13 – Situações-problema elaboradas pela estudante E9	83
Figura 14 – Situação-problema elaborada pela estudante E13	84
Figura 15 – Estudante E14 respondendo o questionário sobre os conhecimentos prévios	94
Figura 16 – Resposta da estudante E7 para o item a	96
Figura 17 – Resposta do estudante E22 para o item b.....	96
Figura 18 – Resposta do estudante E9 para o item c.....	97
Figura 19 – Resposta do estudante E11 para o item d.....	97
Figura 20 – Estudantes realizando as atividades propostas no manual	100
Figura 21 – Estudantes realizando as atividades propostas.....	100
Figura 22 – Dedução da fórmula da distância entre dois pontos apresentada por E1	102
Figura 23 – Estudantes construindo as medianas do triângulo dado.....	104
Figura 24 – Identificação do baricentro do triângulo no Plano Cartesiano	105
Figura 25 – Atividade referente à condição de alinhamento de três pontos pelo estudante E4	106
Figura 26 – Situação-problema elaborada pelo estudante E25	110
Figura 27 – Situação-problema elaborada pelo estudante E11	111
Figura 28 – Situação-problema elaborada pelo estudante E21	112
Figura 29 – Situação-problema elaborada pelo estudante E7	112
Figura 30 – Resolução do estudante E4 para a questão 2	114
Figura 31 – Resolução do estudante E19 para a questão 7	115
Figura 32 – Resolução do estudante E15 para a questão 9	116
Figura 33 – Resolução do estudante E9 para a questão 1 dos conhecimentos prévios	118

Figura 34 – Resolução das questões 1 e 2 pelo estudante E19	119
Figura 35 – Resolução da questão 3 pelo estudante E15	119
Figura 36 – Exercício 1: Conclusão dos estudantes sobre coeficiente linear	120
Figura 37 – Exercício 2: Conclusão dos estudantes sobre o coeficiente angular	120
Figura 38 – Atividade desenvolvida pela estudante E9 e seu grupo para encontrar a equação geral e reduzida da reta.....	122
Figura 39 – Equação geral e equação reduzida da reta	123
Figura 40 – Resolução de atividades na forma algébrica e geométrica	124
Figura 41 – Resolução da questão 1 e 2 na atividade com o GeoGebra	124
Figura 42 – Resolução do estudante E21 na atividade da reconciliação integradora	125
Figura 43 – Resolução do estudante E26 para a questão 13 da avaliação somativa	127
Figura 44 – Resolução do estudante E21 para a questão 3 da avaliação somativa	127
Figura 45 – Resolução do estudante E18 para a questão 9 da avaliação somativa 1	128
Figura 46 – Resolução do estudante E3 para a questão 16 da avaliação somativa	128
Figura 47 – Resposta do estudante E7 à questão 5.....	133
Figura 48 – Destaque da resposta do estudante E8 ao questionário	134
Figura 49 – Respostas apresentadas pelos estudantes à questão 8	134
Figura 50 – Destaque da resposta do estudante E11 à questão 9	135
Figura 51 – Resolução apresentada pelo estudante E12 para a situação-problema	137
Figura 52 – Resolução apresentada pelo estudante E12 para a situação-problema	138
Figura 53 – Mensagem enviada pelo estudante E11 para a pesquisadora	139
Figura 54 – Resolução de um grupo de estudantes para a equação geral da reta	141
Figura 55 – Estudantes realizando a avaliação	141
Figura 56 – Resolução do estudante E14 para a questão 1 da avaliação somativa	143
Figura 57 – Resolução do estudante E11 para a questão 4 da avaliação somativa	144
Figura 58 – Resolução do estudante E17 para a questão 6 da avaliação somativa.....	146
Figura 59 – Resolução de alguns estudantes para a questão dos conhecimentos prévios.....	148
Figura 60 – Estudante E24 representando a bandeira da Bahia no Plano Cartesiano	149
Figura 61 – Resolução do estudante E17 para a construção da bandeira da Bahia	150
Figura 62 – Bandeira da Bahia finalizada por um grupo	150
Figura 63 – Estudantes construindo a bandeira da República Democrática do Congo	151
Figura 64 – Representação da bandeira da República Democrática do Congo.....	152
Figura 65 – Representação de algumas das bandeiras construídas	153
Figura 66 – Releituras construídas pelos estudantes	153
Figura 67 – Site do Produto Educacional	155

QUADROS

Quadro 1 – Comparativo das ideias de Ausubel e Dewey	31
Quadro 2 – Método e forma de coleta de dados	45
Quadro 3 – Definição dos temas das UEPS	47
Quadro 4 – UEPS-Piloto: equação da circunferência.....	49
Quadro 5 – Análise dos conhecimentos prévios por questão da UEPS-piloto	53
Quadro 6 – Diálogos sobre o GPS I	56
Quadro 7 – Diálogo sobre o GPS II	56
Quadro 8 – Situação-problema proposta na etapa da diferenciação progressiva	57
Quadro 9 – Diálogo gerado sobre o significado de escala	60
Quadro 10 – Resultado da avaliação somativa realizada pelos estudantes na UEPS-piloto ...	63
Quadro 11 – UEPS 1: Plano Cartesiano	65
Quadro 12 – UEPS 2: Estudo do Ponto	66
Quadro 13 – UEPS 3: Estudo da Reta	68
Quadro 14 – UEPS 4: Equação da Circunferência.....	70
Quadro 15 – UEPS 5: Geometria Analítica com <i>softwares</i> matemáticos	71
Quadro 16 – Análise quantitativa dos conhecimentos prévios dos estudantes (UEPS 1)	76
Quadro 17 – Comentários sobre o mapa da cidade (UEPS 1)	78
Quadro 18 – Discussões sobre a trajetória apresentada na situação-problema (UEPS 1)	81
Quadro 19 – Diálogo ocorrido em função de uma atividade (UEPS 1)	82
Quadro 20 – Etapa da reconciliação integradora – Questões 1 e 5 (UEPS 1)	85
Quadro 21 – Etapa da reconciliação integradora – Questão 8 (UEPS 1)	87
Quadro 22 – Etapa da reconciliação integradora – Questões 9 e 10 (UEPS 1)	87
Quadro 23 – Avaliação quantitativa das respostas aos exercícios propostos (UEPS 1)	89
Quadro 24 – Potencialidades e fragilidades da UEPS, na visão dos estudantes (UEPS 1)	92
Quadro 25 – Avaliação quantitativa sobre os conhecimentos prévios dos estudantes (UEPS 2)	95
Quadro 26 – Recorte da situação-problema introdutória – distância entre dois pontos (UEPS 2)	98
Quadro 27 – Discussões sobre o triângulo-retângulo (UEPS 2).	101
Quadro 28 – Discussão sobre a dedução da fórmula da distância entre dois pontos(UEPS 2)	102
Quadro 29 – Discussões sobre o conceito e o cálculo do ponto médio entre dois pontos (UEPS 2)	103
Quadro 30 – Discussões que levaram ao conceito de baricentro de um triângulo (UEPS 2) ...	104

Quadro 31 – Discussões sobre a identificação da mediana e do baricentro do triângulo (UEPS 2)	105
Quadro 32 – Condição de alinhamento de três pontos (UEPS 2).....	107
Quadro 33 – Atividade desenvolvida na etapa da complexidade (UEPS 2).	108
Quadro 34 – Potencialidades e fragilidades na aplicação da UEPS 2 na visão dos estudantes (UEPS 2)	116
Quadro 35 – Diálogo dos estudantes com relação à equação da reta (UEPS 3)	121
Quadro 36 – Potencialidades e fragilidades na aplicação da UEPS 3 na visão dos estudantes (UEPS 3).....	129
Quadro 37 – Avaliação quantitativa sobre os conhecimentos prévios dos estudantes (UEPS 4)	132
Quadro 38 – Discussão acerca do vídeo apresentado (UEPS 4)	136
Quadro 39 – Comentários com base no exercício proposto a partir da fotografia da previsão do tempo enviada pelo estudante E11 (UEPS 4)	140
Quadro 40 – Avaliação quantitativa da somativa realizada pelos estudantes (UEPS 4)	142
Quadro 42 – Avaliação da UEPS 5 na visão dos estudantes (UEPS 4)	146

GRÁFICOS

Gráfico 1 – Situações-problema elaboradas pelos estudantes	113
Gráfico 2 – Avaliação individual realizada pelos estudantes	114
Gráfico 3 – Gráfico do rendimento por questão na avaliação somativa	126
Gráfico 4 – Resultados da avaliação dos estudantes no final do processo	129
Tabela 1 – Avaliação dos estudantes (UEPS 1)	91

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDBTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEF	Colégio Estadual Farroupilha
CPM	Círculo de Pais e Mestres
ENEM	Exame Nacional de Ensino Médio
EUA	Estados Unidos da América
GPS	Sistema de Posicionamento Global
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
SENAC	Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial
SENAI	Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial
SOE	Serviço de Orientação Escolar
SSE	Serviço de Supervisão Escolar
TAS	Teoria da Aprendizagem Significativa
TDICs	Tecnologias Digitais de Informação e de Comunicação
UEPS	Unidades de Ensino Potencialmente Significativas

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	REFERENCIAL TEÓRICO	22
2.1	A TEORIA DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE AUSUBEL	22
2.2	A NOÇÃO DE INTERESSE NA APRENDIZAGEM PARA JOHN DEWEY	26
2.3	A VISÃO DE APRENDIZAGEM: AUSUBEL X DEWEY	30
2.4	UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA (UEPS)	32
2.5	A IMPORTÂNCIA DA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO	34
2.6	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	36
3	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	40
3.1	CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA	40
3.2	CONTEXTO DA ESCOLA	41
3.3	SUJEITOS DA PESQUISA	41
3.3.1	Sujeitos da UEPS piloto	42
3.3.2	Sujeitos da pesquisa com as demais UEPS.....	42
3.4	INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS	43
3.5	ANÁLISE DE DADOS	43
3.6	A AVALIAÇÃO	45
4	O PLANEJAMENTO DAS UEPS	47
4.1	A UEPS-PILOTO – PLANEJAMENTO E ORGANIZAÇÃO, APLICAÇÃO, DISCUSSÃO E ANÁLISE.....	49
4.2	PLANEJAMENTO E ORGANIZAÇÃO DA UEPS 1 – PLANO CARTESIANO	65
4.3	PLANEJAMENTO E ORGANIZAÇÃO DA UEPS 2 – ESTUDO DO PONTO.....	66
4.4	PLANEJAMENTO E ORGANIZAÇÃO DA UEPS 3 – ESTUDO DA RETA.....	68
4.5	PLANEJAMENTO E ORGANIZAÇÃO DA UEPS 4 – ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA	69
4.6	PLANEJAMENTO E ORGANIZAÇÃO DA UEPS 5 – GEOMETRIA ANALÍTICA COM SOFTWARES MATEMÁTICOS.....	71

5	ANÁLISE DOS DADOS E DISCUSSÃO DE RESULTADOS	74
5.1	ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA UEPS 1 – PLANO CARTESIANO	74
5.2	ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA UEPS 2 – ESTUDO DO PONTO	93
5.3	ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA UEPS 3 – ESTUDO DA RETA	117
5.4	ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA UEPS 4 – EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA	130
5.5	ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA UEPS 5 – GEOMETRIA ANALÍTICA COM SOFTWARES MATEMÁTICOS.....	147
6	PRODUTO EDUCACIONAL	155
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	156
	REFERÊNCIAS	159
	APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	165
	APÊNDICE B – FICHA DE OBSERVAÇÃO – UEPS 1.....	166
	APÊNDICE C – FICHA DE OBSERVAÇÃO – UEPS 2	167
	APÊNDICE D – FICHA DE OBSERVAÇÃO – UEPS 3	168
	APÊNDICE E – FICHA DE OBSERVAÇÃO – UEPS 4.....	169
	APÊNDICE F – FICHA DE OBSERVAÇÃO – UEPS 5.....	170
	APÊNDICE G – ORGANIZAÇÃO E PLANEJAMENTO DA UEPS-PILOTO	171
	APÊNDICE H – PRODUTO EDUCACIONAL	190

1 INTRODUÇÃO

A cada início de ano, recebe-se, nas escolas, uma lista de conteúdos para serem trabalhados no decorrer do ano letivo. Observa-se que os mesmos não mencionam considerações sobre a aprendizagem dos estudantes, bem como, o tempo de aprendizagem e o interesse dos mesmos. Sendo assim, muitas vezes, o professor prioriza dar conta de listas enormes de conteúdos e a aprendizagem acaba sendo prejudicada.

Para planejar e executar suas aulas, a fim de abordar todos os conteúdos, alguns professores utilizam os mesmos recursos pedagógicos durante muitos anos: o quadro branco, os mesmos livros didáticos e as mesmas listas de exercícios, ainda que elaboradas pelo professor, da melhor forma possível.

Pensando nessa metodologia de ensino, por repetição de exercícios e de forma descontextualizada, pode-se inferir que a aprendizagem pode deixar lacunas ou não ocorrer de fato. Segundo Dewey (1959), as escolas falham, quando não promovem que os estudantes resolvam situações que exijam que eles pensem:

[...] ensinam-se os alunos a decorar trechos e, destarte, somente se formam associações verbais de um único sulco, em lugar de conexões variadas e flexíveis com as próprias coisas de que falam os trechos; não se organizam planos e projetos que façam o estudante olhar para a frente, prever, e na execução dos quais, cada coisa terminada levante novas questões, sugira novas empresas. (DEWEY, 1959, p. 63).

Dewey, nesse contexto, compara a escola com uma empresa, pois os estudantes permanecem nela com a mesma lógica de “ensino-aprendizagem” oriunda de empresas, não param nem questionam o que vivem na formação, apenas seguem um currículo para cumprir a carga horária.

Buscando romper essa forma de ensino por repetição e memorização de exercícios, sugere-se neste trabalho metodologias para auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem, valorizando a utilização de diversos recursos didáticos, além do protagonismo dos estudantes. Para Castoldi (2006, p. 985), “[...] com a utilização de recursos didático-pedagógicos pensa-se em preencher as lacunas que o ensino tradicional geralmente deixa, e com isso, além de expor o conteúdo de uma forma diferenciada, faz os alunos participantes do processo de aprendizagem”.

No método tradicional de conduzir os processos de ensino e de aprendizagem, o professor é o único sujeito ativo, acreditando que, ao repassar seu conhecimento aos

estudantes, passivos, normalmente por meio de aula expositiva, estão promovendo aprendizagem.

Entretanto, no dia a dia, os estudantes possuem acesso rápido à informação através da internet. A televisão também apresenta uma infinidade de atrativos, e muitos professores continuam na sala de aula de forma tradicional.

O uso de tecnologias está cada vez mais presente no dia a dia, seja em pequenos afazeres, no estudo e principalmente no trabalho. De fato, a integração de novas mídias pode ser uma aliada, também na sala de aula, pois poderá contribuir para a criação de estratégias de ensino e de aprendizagem, conforme sugere Valente (1999). Nesse contexto, esta pesquisa também considera o interesse do estudante, com a hipótese de que, com o uso de Tecnologias Digitais de Informação e de Comunicação (TDICs), se possa ter maior probabilidade de êxito no ensino, levando em consideração a possibilidade de maior motivação dos estudantes, no contexto atual.

Dewey¹, um dos autores que embasa esta pesquisa, afirma que “se a ninguém se pode dizer como deverá respirar ou fazer o sangue circular, também não se pode lhe dizer, de maneira exata, como deverá pensar”. (DEWEY, 1959, p.13). Entende-se, pois, que cabe a nós, professores, considerar as várias formas de pensar dos estudantes e buscar alternativas para torná-las mais eficientes. Dessa forma, segundo o autor, pode-se proporcionar aos estudantes materiais atrativos para eles, contextualizados e que favoreçam e estimulem o pensamento. Acredita-se que se pode estimular, também, o interesse em aprender. Sendo assim, uma vez interessados em alguma coisa, os estudantes poderão participar com perguntas e sugestões impulsionando os próprios atos de pensar.

Dewey (1959) assume a existência do interesse direto ou imediato e o interesse indireto e mediato, sobre os quais se comentará no capítulo 2. Nesta pesquisa, os dois tipos de interesses são considerados. Primeiramente, o direto e imediato, pelas atividades em si e, posteriormente, o indireto e mediato, a partir das situações que irão se desenvolvendo e despertando a curiosidade do estudante. Ainda para esse autor, um dos problemas da Educação é não proporcionar um ambiente no qual as atividades educativas possam se desenvolver naturalmente, ou seja, o de saber como fazer para que, a partir do seu interesse, o estudante tenha condições de ampliar seus estudos, sem a dependência do professor, vindo, então, ao encontro desta pesquisa, que visa a construir um material que seja atrativo ao estudante e contribua na construção da própria aprendizagem. Assim, ele pode ser estimulado

¹ John Dewey é um filósofo norte-americano, que viveu de 1859 a 1952. Dewey, que foi psicólogo e educador, considerava haver uma relação forte entre educação e interesse.

a construir o próprio conhecimento, incentivado pelo professor e com os recursos de apoio necessários, partindo da própria realidade e buscando dar significado ao que aprende.

Esta proposta está de acordo, também, com as ideias de Ausubel² que, em sua Teoria de Aprendizagem Significativa (TAS), defende que a aprendizagem, além de estar baseada no interesse, pode ser realizada por descoberta: “[...] por outro lado, na aprendizagem pela descoberta, o aprendiz deve, em primeiro lugar, descobrir este conteúdo, criando proposições que representem soluções para os problemas suscitados, ou passos sucessivos para a resolução dos mesmos”. (AUSUBEL, 2003, p. 5).

Para promover a aprendizagem significativa, Moreira (2011) propõe uma sequência didática fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa. Essa sequência didática, denominada Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), é composta por fases inter-relacionadas, que visam à promoção da aprendizagem significativa, sendo o estudante levado a construir o seu próprio conhecimento. Com base em material elaborado e organizado, de acordo com as etapas propostas pelo autor, o mesmo pode avançar nas etapas e construir sua própria caminhada rumo à aprendizagem significativa.

Na literatura, encontram-se diversos trabalhos relacionados às aplicações de UEPS. Por exemplo, Nunes (2015) desenvolveu uma UEPS para o ensino de estatística na Educação Básica; já Ribeiro (2014) buscou estudos no desenvolvimento e na aplicação de uma UEPS baseada em Tópicos de Mecânica Vetorial. Com relação à Geometria Analítica, encontra-se em Silva (2013) uma abordagem de Aprendizagem Significativa e, em Correia (2011), que promoveu a Aprendizagem Significativa explorando alguns conceitos relacionados a pontos e retas. Porém, no período em que esta pesquisa foi desenvolvida, não se encontraram trabalhos que contemplem a aplicação de UEPS para a aprendizagem de Geometria Analítica.

Ao longo da pesquisa, são propostas cinco UEPS, que juntas contemplam a Geometria Analítica para o Ensino Médio, proposta nos Planos de Trabalho e de Estudos sugeridos pela escola, em que a pesquisa foi aplicada e que possibilitam integrar o conteúdo de forma contextualizada, buscando abranger uma leitura de mundo e aplicação de conceitos. Com base no conceito de aprendizagem significativa, que pode ser promovido com a aplicação de tais UEPS, buscou-se uma proposta para o ensino de Geometria Analítica, que se entende estar de acordo com o que sugerem os PCNs:

² Ausubel foi um psicólogo da educação, que viveu de 1918 a 2008.

O trabalho com a geometria analítica permite a articulação entre geometria e álgebra. Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. A simples apresentação de equações sem explicações fundadas em raciocínios lógicos deve ser abandonada pelo professor. Memorizações excessivas devem ser evitadas [...] (BRASIL, 2006, p. 77).

A falta de articulação entre a Geometria e a Álgebra, no ensino da Geometria Analítica, não só no contexto da Matemática, mas também no contexto do cotidiano do estudante, pode ser considerada como um dos principais motivos da aprendizagem deficiente da Geometria Analítica. Observa-se que os próprios livros didáticos, nos exercícios propostos, apresentam principalmente a parte algébrica da Geometria Analítica e poucas vezes a sua interpretação geométrica, tão fundamental para a construção de conceitos, como visto em Souza (2013) e Ribeiro (2010). Diante desse contexto, o papel do professor se transforma, pois necessita interligar esses conceitos e, a partir disso, despertar o interesse do estudante através de diferentes recursos, buscando promover a aprendizagem significativa.

Da mesma forma, documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) definem algumas competências a serem desenvolvidas pelos estudantes, ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Com relação à Matemática no Ensino Médio, a BNCC aponta que a aprendizagem dos conceitos e procedimentos matemáticos deve incluir, quando possível, pelo menos dois registros de representação, como sugerimos anteriormente, o algébrico e o geométrico.

Quanto à Geometria Analítica, a BNCC (2018) propõe o desenvolvimento da seguinte competência:

Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. (BRASIL, 2017, p. 530).

Além disso, Oliveira e Trivelato (2006) destacam o quão importante é valorizar o contato do estudante com o material didático. Justificam que, através dessa interação com o material, torna-se possível gerar o interesse, a participação, a aprendizagem e maior integração entre os estudantes, que podem discutir suas ideias e expô-las ao grupo, proporcionando interação social.

Assim sendo, a pesquisa aqui proposta visa à elaboração de uma metodologia que proporcione ao professor uma alternativa para o planejamento de suas aulas e com isso propicie a motivação do estudante para aprender Matemática. A expectativa é que, com a

inclusão de TDICs, que podem ser acessadas em outros ambientes, e de materiais não digitais para a utilização em sala de aula, a metodologia que se propõe poderá proporcionar bons resultados no que diz respeito à aprendizagem de Geometria Analítica.

O interesse nesse estudo vem ao encontro de uma inquietação relacionada com uma trajetória profissional da professora pesquisadora, em que se tem visto estudantes chegarem ao Ensino Médio com deficiências conceituais e descontentes em relação à disciplina de Matemática.

Tem-se acompanhado estudantes desmotivados para aprender, que procuram resolver as atividades de forma mecânica, apenas memorizando fórmulas e repetindo uma série de exercícios, para se “saírem bem” nas provas. Percebe-se essa memorização quando são realizadas as avaliações diagnósticas, nas quais os estudantes apresentam dificuldades com relação à interpretação e resolução de atividades, e, quando desenvolvidas pelo professor, exprimem frases como: “Eu já fiz isso, mas não lembrava!” Segundo Carrocino (2014), não há mais espaço, na escola atual, para que o estudante simplesmente decore ou memorize fórmulas, ou para aquele que repete mecanismos de resolução de exercícios, ou mesmo para o estudante que é um excelente “algebrista”. A escola atual deve dar subsídios para que os estudantes sejam questionadores, entendam significados e sejam sujeitos ativos nos processos de ensino e de aprendizagem.

Diante deste cenário, com base em Moreira (2001), buscou-se construir cinco UEPS, sobre Geometria Analítica, conteúdo este escolhido por integrar representações geométricas e algébricas, na resolução de problemas. Percebeu-se, ao longo dos anos como professora, que são poucos os estudantes que conseguem relacionar a Geometria com a Álgebra. Muitos estudantes pensam que não têm utilidade os vários algoritmos que lhes são apresentados, além de demonstrarem dificuldades no desenvolvimento algébrico dos cálculos necessários, nas resoluções de problemas e em outras atividades de aprendizagem.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais,

tem-se buscado, sem sucesso, uma aprendizagem em Matemática pelo caminho da reprodução de procedimentos e da acumulação de informações; nem mesmo a exploração de materiais didáticos tem contribuído para uma aprendizagem mais eficaz, por ser realizada em contextos pouco significativos e de forma muitas vezes artificial. (BRASIL, 1998, p. 38).

Se há a pretensão de aprimorar os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, é necessário aprimorar a prática pedagógica de um modo que essa permeie

situações que possam gerar significados ao que se ensina. Com base nesta problemática, esta pesquisa busca, através de atividades práticas que envolvam a resolução de problemas, promover a integração entre a geometria e a álgebra na construção de conceitos. Segundo Araújo,

as atuais exigências sociais têm desencadeado a necessidade de uma visão de mundo construída a partir de uma nova concepção de educação. Essa nova forma de ver a educação deve aproximar a prática pedagógica, processo de construção do conhecimento e formação de personalidades à aceção de ambiente como espaço geográfico, acervo natural do ecossistema e acervo construído ao longo da história humana através das relações culturais, sociais, políticas e ecológicas. (ARAÚJO, 2004, p. 92).

Assim sendo, o aprendizado deve possibilitar uma formação mais ampla, que permita ao estudante desenvolver meios para interpretar problemas de diferentes áreas do conhecimento; para compreender o seu cotidiano, como também para ampliar sua visão de mundo. Para isso, as práticas interdisciplinares têm sugerido a implementação de atividades que promovam a compreensão, por parte do estudante, de diferentes contextos, durante o estudo das diversas disciplinas.

Com essa preocupação, foram elaboradas cinco UEPS que contemplam: Plano Cartesiano, estudo do Ponto, estudo da Reta, aplicação e análise geométrica e algébrica, com *software* matemático e, por fim, o estudo da Circunferência.

As atividades propostas nas UEPS foram organizadas de forma que o estudante possa interagir com o material de estudo, sendo o protagonista da própria aprendizagem, realizando tarefas, construindo conceitos, manipulando materiais, incluindo *softwares* matemáticos, deduzindo fórmulas, entre outras habilidades, que possibilitam aprender e compreender os conceitos necessários.

Ainda, com relação à utilização de tecnologias ou recursos computacionais (*softwares*) no ensino da Matemática, a BNCC aponta:

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes aprofundar sua participação ativa nesse processo de resolução de problemas. São alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. (BRASIL, 2018, p. 528).

Nesta pesquisa, tem-se como base partir da contextualização e da resolução de situações-problema que envolvam a cidade de Farroupilha, onde a maioria dos estudantes

reside. Assim sendo, foi escolhida uma turma de 3º ano do Ensino Médio, no Município de Farroupilha, na qual a pesquisadora é a professora titular de Matemática. A pesquisa busca construir uma metodologia baseada em UEPS para a aprendizagem de Geometria Analítica, com o uso de materiais digitais e não digitais como: internet, GPS, vídeos e *softwares* matemáticos, dentre outros recursos de apoio.

Com a intenção de colaborar no processo permanente de aprender a aprender, esta pesquisa procura elaborar, aplicar e analisar uma prática voltada à utilização das UEPS para a aprendizagem de Geometria Analítica, respondendo à seguinte problemática: *Que efeitos podem ser observados na aprendizagem de Geometria Analítica, com o planejamento e a utilização de unidades de ensino potencialmente significativas integradas a recursos digitais e não digitais?*

Nesta perspectiva de aprendizagem, utilizando diferentes recursos para promover a aprendizagem significativa, com base na resolução de situações-problema, o objetivo geral da pesquisa é *avaliar as contribuições de UEPS elaboradas para potencializar a ocorrência da aprendizagem significativa de Geometria Analítica.*

Para tanto, os objetivos específicos são:

- planejar, elaborar, aplicar e avaliar UEPS que envolvam tópicos selecionados de Geometria Analítica, abordando-os na forma de situações-problema da realidade dos estudantes;
- buscar evidências da ocorrência de aprendizagem significativa de Geometria Analítica, por meio de avaliações das atividades desenvolvidas pelos estudantes, com instrumentos diversificados;
- elaborar, como produto educacional, um *site* em que serão apresentadas as cinco UEPS produzidas, para que auxiliem outros professores a trabalharem conceitos de Geometria Analítica.

Este documento está organizado em sete capítulos, apresentados brevemente a seguir.

O próximo capítulo é dedicado ao referencial teórico da pesquisa, com base nas Teorias de Aprendizagem de John Dewey e David Ausubel, bem como da contribuição de Moreira, idealizador das UEPS, além de produções importantes sobre a Geometria Analítica no Ensino Médio, tema desta pesquisa. A última seção do capítulo 2 é destinada a uma revisão bibliográfica sobre os temas de interesse relacionados a este estudo.

No terceiro capítulo, apresenta-se e justifica-se os procedimentos metodológicos para o planejamento, a produção e análise de dados. No capítulo quatro, relata-se a experiência de elaboração e aplicação das UEPS, considerando suas respectivas etapas. No capítulo cinco, são apresentadas as cinco UEPS planejadas e analisadas. O capítulo seis é dedicado à descrição do produto educacional, composto pelas cinco UEPS. No capítulo sete, apresentam-se considerações sobre o trabalho realizado, seguidas das referências que embasam esta pesquisa, além de Apêndices.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico desta pesquisa está apresentado em cinco seções: a primeira se relaciona à construção do conhecimento, fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa, de David Ausubel (2003). Nessa teoria, é destacada a importância da aprendizagem significativa para a construção do conhecimento.

A segunda seção aborda a aprendizagem baseada no interesse do estudante, de acordo com John Dewey (2010), que afirma que o indivíduo só aprende o que lhe interessa, e que a qualidade dos materiais pode influenciar nessa aprendizagem.

Com base na análise das duas teorias, de interesse nesta dissertação, procura-se extrair e organizar os principais aspectos que justificam a possibilidade de diálogo entre os dois autores.

A proposta didática de elaboração de UEPS, conforme Moreira (2011), que se utiliza nesta pesquisa, também é apresentada e seguida de considerações, que justificam a relevância do estudo da Geometria Analítica, tema das referidas UEPS.

A quinta seção é destinada a considerações sobre a importância dada ao estudo da Geometria Analítica, considerando recomendações apresentadas em documentos oficiais, também quanto ao que deve ser priorizado neste estudo.

Finalmente, considera-se importante incluir, neste capítulo, a apresentação e uma breve análise de alguns trabalhos realizados sobre a problemática de interesse nesta pesquisa, com especial atenção aos procedimentos e resultados obtidos.

2.1 A TEORIA DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE AUSUBEL

Ausubel (2003) foi um psicólogo e pesquisador norte-americano, que nasceu no Estado de Nova York, EUA, em 1918 e faleceu em 2008. Teve formação em Medicina, Psicologia e Psiquiatria, mas sua vida acadêmica foi dedicada à psicologia educacional. Após sua formação acadêmica, resolveu dedicar-se à educação, no intuito de buscar as condições necessárias para a ocorrência da aprendizagem. Como resultado de seus estudos e pesquisas, o autor explica que a aprendizagem é uma construção individual e coletiva de conhecimentos acumulados, das experiências e situações vividas no dia a dia. Estas afirmações integram a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS).

A TAS visa a fazer com que o sujeito compreenda o processo de aprendizagem como uma construção e participe ativamente dela, correlacionando conhecimentos prévios e a construção de novos conhecimentos.

Desta forma, almeja-se que o estudante passe a compreender a aprendizagem como um processo que vai além dos conteúdos da sala de aula; que o conhecimento adquirido tenha significados e que estes colaborem para o desenvolvimento da sua autonomia e emancipação, ou, como afirma Dewey (1959), que o estudante seja capaz de adquirir uma aprendizagem para a vida, com significado.

Para que essa aprendizagem ocorra, Ausubel (2003) infere que o conhecimento a ser estudado deve relacionar-se a algum aspecto ou informação existente, especificamente, relevante na estrutura cognitiva do aprendiz, o que ele chama de subsunçores. Sendo assim, quanto mais experiências relevantes o estudante tiver, maiores são as chances de ocorrer aprendizagem significativa.

A aprendizagem significativa para Ausubel (2003) é aquela que acontece de forma a levar o indivíduo a buscar os subsunçores e, a partir destes, fazer conexões cada vez mais elaboradas com os novos conhecimentos, o que, de acordo com os estudos de Dewey (1959), significa que a compreensão de uma situação ou objeto está vinculada à atribuição de significados produzidos pelos estudantes.

A TAS pode explicar um questionamento dos estudantes de Ensino Médio, que frequentemente não atribuem sentido para o que estão aprendendo, consideram desinteressante e demonstram-se incapazes de compreender o significado de certos conceitos. Isso também é apontado por Dewey (1959), quando destaca a importância do interesse para o desenvolvimento da aprendizagem.

Segundo Novak (2000), a TAS valoriza a mobilização dos processos mentais com vistas à aprendizagem. Para que ocorra a aprendizagem, é necessário que os estudantes aproveitem ao máximo o conhecimento adquirido, integrando o mesmo ao mundo em geral e buscando atribuir um significado para tal.

Em contraste com a aprendizagem significativa, Ausubel (2003) refere-se à aprendizagem mecânica, também chamada aprendizagem por memorização. Neste caso, explica, o assunto abordado não leva em consideração o conhecimento já existente na estrutura cognitiva do aprendiz, ou seja, seus conhecimentos prévios. Dessa forma, os conhecimentos são abordados de modo aleatório, e os estudantes não apresentam um envolvimento cognitivo, visto que não encontram sentido para o que é apresentado.

A aprendizagem significativa apresenta diversas vantagens com relação à aprendizagem mecânica, conforme Pelizzari:

- 1 – A aprendizagem, por ser construída a partir de um processo de modificação da estrutura cognitiva do estudante através de rearranjos torna-se mais duradoura.
- 2 – Por partir de conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva, facilita a aquisição, compreensão e relação de novos conceitos.
- 3 – Por construir e relacionar as novas informações baseados num conhecimento já existente, o conhecimento é preservado, ou seja, tem-se uma memória de longa duração.
- 4 – A aprendizagem acontece de forma individual, pois depende de cada indivíduo e sua bagagem de experiências para essa significação. (PELIZZARI et al., 2002, p. 38-39).

Para tanto, Ausubel (2003) aponta duas condições essenciais. A primeira refere-se ao material a ser aprendido, que deve estar relacionado à estrutura cognitiva do aprendiz, de maneira não arbitrária e não literal. Ou seja, o material exposto deve ter uma estrutura organizada, com conceitos seguindo uma sequência lógica, a fim de favorecer ao estudante condições de construir significados.

A outra condição é que o aprendiz manifeste disposição para relacionar, de maneira adequada, o novo material, potencialmente significativo, à sua estrutura cognitiva. De fato, segundo Ausubel (2003), não importa o quão potencialmente significativo seja o material a ser aprendido, pois se a intenção do aprendiz for simplesmente a de memorizá-lo, tanto o processo de aprendizagem como o seu produto serão mecânicos.

Para a construção da aprendizagem significativa, Ausubel (2003) recomenda o uso de organizadores prévios, que são definidos por ele como materiais introdutórios apresentados antes do material a ser aprendido, fazendo com que o estudante tenha condições de estabelecer relações entre o conteúdo a ser aprendido e o que já conhece. Com relação aos conhecimentos prévios, Moreira e Masini, baseados nas ideias de Ausubel, afirmam:

A principal função do organizador prévio é a de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber, a fim de que o material possa ser aprendido de forma significativa, ou seja, organizadores prévios são úteis para facilitar a aprendizagem na medida em que funcionam como “pontes cognitivas”. (2001, p. 21).

Os referidos organizadores prévios são considerados mais eficientes quando apresentados no início das tarefas de aprendizagem, do que se introduzidos juntamente com o material aprendido. Moreira e Masini (2001) destacam que os mesmos precisam ser formulados em termos familiares aos estudantes, com uma linguagem clara, boa organização, coerência e sequência lógica, tendo assim uma composição pedagógica.

Após acontecer a interação entre os novos conceitos e os subsunçores dos estudantes, é necessário ir progressivamente avançando, ou seja, buscando maiores especificidades. Esta fase é chamada de diferenciação progressiva, que é definida como parte do processo educativo, quando o educador aponta os conceitos mais gerais e inclusos e, aos poucos, segue para as especificações e os detalhamentos do conteúdo. Esta fase é justificada em Moreira e Masini por duas hipóteses:

a) É mais fácil para todo o ser humano captar aspectos diferenciados de um todo mais inclusivo previamente aprendido, do que chegar ao todo a partir de suas partes diferenciadas; b) a organização do conteúdo de uma determinada disciplina, na mente de um indivíduo, é uma estrutura hierárquica na qual as ideias mais inclusivas estão no topo da estrutura e, progressivamente, incorporam proposições, conceitos e fatos menos inclusivos e mais diferenciados. (2001, p. 29-30).

Juntamente a essa construção progressiva de significados de diferentes graus, deve-se explorar as relações entre proposições e conceitos, apontando similaridades e destacando as diferenças, o que deve ser feito para atingir o que Ausubel (2003) chama de reconciliação integradora. Esta ocorre quando dois ou mais conceitos, relacionando-se em termos de seus significados, de forma significativa, integram-se formando assim um novo conceito de maior significado.

Os dois processos, reconciliação e diferenciação, ocorrem simultaneamente na construção cognitiva, porém parecem ocorrer com intensidades diferentes. A diferenciação progressiva está mais relacionada à aprendizagem significativa subordinada (quando um conceito é assimilado sobre a ideia mais inclusiva dele), que é mais comum, e a reconciliação integradora tem mais a ver com a aprendizagem significativa superordenada (quando um conceito mais geral ou mais incluso é abordado, buscando a assimilação de ideias já estabelecidas na estrutura), que ocorre com menos frequência.

Para promover a aprendizagem significativa, é preciso que o professor atue como mediador neste processo, tomando a postura de questionador e gerando situações e oportunidades que transcendam a sala de aula. Dessa forma, docente e estudante envolvem-se em um processo de interação, que deve incluir o objeto de conhecimento, visando assim a atribuir significados e desenvolver aprendizagem com compreensão de conceitos.

Além disso, para encontrar evidências de aprendizagem significativa do estudante, faz-se necessário utilizar situações novas, diferenciando-as daquelas encontradas no material que lhe foi apresentado e que exijam transformação do conhecimento existente.

Ao longo desta pesquisa, os conteúdos gerais e específicos são considerados em uma perspectiva de diferenciação e integração, buscando maior compreensão e envolvimento do

estudante, com relação aos conceitos abordados, e uma interpretação de mundo para a resolução de situações-problema, buscando favorecer a aprendizagem significativa.

2.2 A NOÇÃO DE INTERESSE NA TEORIA DE JOHN DEWEY

Dewey foi um filósofo americano que nasceu no Estado de Vermont, EUA, em 1859 e faleceu em Nova York em 1952. Em 1884, na Universidade de Chicago, Dewey fundou uma escola experimental que ficou conhecida como *Laboratory School*. A partir das observações de estudantes, realizadas nessa escola, é que surgiram as ideias que constituem a base da filosofia educacional deweyana: o pensamento reflexivo e a experiência.

A partir dos estudos que realizou, Dewey concluiu que não havia nenhuma diferença na forma como crianças e adultos aprendem, pois “ambos são seres ativos que aprendem mediante o enfrentamento de situações problemáticas que surgem no curso das atividades que merecem seu interesse” (DEWEY apud WESTBROOK; TEIXEIRA, 2010, p.15). Ou seja, ao longo da vida aprende-se de forma relevante o que se considera ser importante e desafiador.

Ainda, Dewey (apud WESTBROOK; TEIXEIRA, 2010) afirma que ninguém chega à escola como uma lousa limpa, na qual os professores podem escrever as lições, o que vem ao encontro das ideias de Ausubel (2003), quanto à importância dos conhecimentos prévios na aprendizagem. Com efeito,

O único meio de fazer com que os alunos aprendam mais é ensinar, verdadeiramente, mais e melhor. Aprender é próprio do aluno: só ele aprende, e por si; portanto, a iniciativa lhe cabe. O professor é um guia, um diretor; pilota a embarcação, mas a energia propulsora deve partir dos que aprendem. Quanto mais conhecer o professor as experiências passadas dos estudantes, suas esperanças, desejos, principais interesses, melhor compreenderá as forças em ação que lhe cabe dirigir e utilizar, para formar hábitos de reflexão. (DEWEY, 1959, p. 43-44).

Entende-se, assim que, para aprender mais e melhor, Dewey (1959) destaca que a compreensão de uma situação ou objeto está vinculada à atribuição de significados produzidos pelos estudantes. Ou seja, é fundamental considerar que o estudante somente compreenderá um conceito, quando este estiver envolto em coisas cujos significados lhe foram atribuídos.

Outra relação que está ancorada na ideia de Dewey (apud WESTBROOK; TEIXEIRA, 2010) é que a aprendizagem só poderá gerar interesse, se apresentada de forma que os estudantes sejam desafiados a resolver situações-problema que exijam conhecimentos

teóricos e práticos, na esfera científica, histórica e artística. Ausubel (2003), por sua vez, afirma que se aprende a partir do que já se sabe.

O que se pretende, nesta pesquisa, é que os problemas sejam elaborados de forma a despertar a curiosidade e a promover reflexão no estudante, buscando a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa, como sugere Ausubel (2003), ao contrário do que se vê em algumas salas de aula, e que, segundo Dewey (1959), favorece o desenvolvimento de tais hábitos. Pretende-se, através da aplicação das UEPS, desenvolver um ambiente que estimule a criação de diferentes contextos, por meio dos quais os estudantes sejam envolvidos e compelidos à reflexão.

Para Dewey, a maioria dos educadores não possui os conhecimentos teóricos e práticos necessários para ensinar dessa maneira, mas considera que todos podem aprendê-la. De acordo com Dewey:

[...] a criação de condições favoráveis para a formação no sentido democrático na aula não é fácil, já que os professores não podem impor esse sentimento aos alunos; têm de criar um entorno social em que as crianças assumam por si mesmas as responsabilidades. (Apud WESTBROOK; TEIXEIRA, 2010, p. 20).

Dessa forma, nesta pesquisa, o interesse do estudante é considerado essencial na aprendizagem, o que na atualidade pode estar relacionado, também, com o uso de tecnologias, cada vez mais presentes no cotidiano do educando. Com efeito, a fim de ter maior probabilidade de êxito no ensino, é preciso levar em consideração o “interesse” e a “realidade” dos estudantes. Ainda, deve-se buscar diferentes alternativas para despertar o interesse dos estudantes, e estes devem se dispor a aprender, o que está de acordo com as ideias de Ausubel (2003).

Ainda em relação ao interesse do estudante, Westbrook (2010), em sua obra sobre John Dewey, assume a existência do interesse direto e imediato e do interesse indireto e mediato. Com base no autor, o interesse direto é aquele cuja experiência que se realiza é suficiente por si mesma; sendo assim, a atividade em si é um meio e não um fim. Já o interesse indireto ou mediato aparece quando uma atividade se torna interessante, a partir do momento em que suas relações e ligações tornam-se conscientes. Assim, ao longo da pesquisa, os dois tipos de interesses são considerados. Primeiramente, o direto e imediato pela atividade em si e posteriormente, o indireto e mediato, a partir das situações que irão se desenvolvendo e da curiosidade do estudante.

A teoria de Dewey está centrada na responsabilidade do educador, enquanto organizador das ações da aprendizagem dos educandos. O autor afirma:

Obtém-se interesse, exatamente, não se pensando e não se buscando conscientemente consegui-lo; mas, ao invés disto, promovendo as condições que o produzem. Se descobirmos as necessidades e as forças vivas da criança e se lhe pudermos dar um ambiente constituído de materiais, aparelhos e recursos – físicos sociais e intelectuais – para dirigir a operação adequada daqueles impulsos e forças, não temos que pensar em interesse. Ele surgirá naturalmente. (DEWEY apud QUARTIERI, 2011, p. 92).

Nessa direção, o estudante deve ser estimulado a construir o próprio conhecimento; incentivado pelo professor, com os recursos necessários, parte da sua realidade e busca dar significado à própria aprendizagem. Desta forma, ao organizar as aulas, deve-se levar em consideração as experiências do estudante, além de observar que o interesse está ligado ao esforço que ele apresenta em determinada atividade.

Com relação à experiência, Dewey (apud WESTBROOK; TEIXEIRA, 2010) a define como uma fase da natureza, ou ainda, uma forma de interação, pela qual se relacionam dois elementos: situação e agente. Sendo assim, pode-se definir o conceito de educação, na teoria de Dewey (apud WESTBROOK, 2010, p. 37), como: “O processo de reconstrução e reorganização da experiência, pelo qual lhe percebemos mais agudamente o sentido, e com isso nos habilitamos a melhor dirigir o nosso curso de nossas experiências futuras”.

A base da teoria de Dewey propõe que os processos de ensino e de aprendizagem dos estudantes sejam organizados em torno de suas experiências de vida, ou seja, de atividades presentes em seus cotidianos. Ainda, a ação educativa deve restringir-se à orientação do educando, para possibilitar-lhe que trilhe, necessariamente, o caminho do conhecimento, que equivale à reconstrução da sua experiência e construção da sua aprendizagem. Sendo assim, a sala de aula é o lugar em que as experiências podem ser analisadas e transformadas por meio da cooperação entre educandos e educadores, favorecendo a construção da aprendizagem.

Para Dewey a construção do conhecimento é o resultado inevitável das experiências desenvolvidas ao longo da vida. Ou seja, o fim (resultado) da educação se identifica com os seus meios (o processo), da mesma forma como que os fins da vida se identificam com o processo de viver. Com isso, o autor procura esclarecer que aprender para a vida significa que a pessoa não somente poderá agir, mas agirá do novo modo aprendido, assim que a ocasião exija que este saber apareça. Afirma:

Aprender a significação de uma coisa, de um acontecimento ou de uma situação é ver a coisa, acontecimento ou situação, em suas relações com outras coisas: notar como opera ou funciona, que consequências traz, qual a sua causa e possíveis aplicações. Contrariamente, aquilo a que chamamos coisa bruta, a coisa sem sentido para nós, é algo cujas relações não foram apreendidas. (DEWEY, 1959, p. 140).

Entende-se que a importância da aprendizagem para a vida, conforme Dewey, tem relação com a aprendizagem significativa de Ausubel (2003), pois, a partir do momento em que se aprende significativamente, esse conhecimento torna-se fundamental e poderá ser usado ao longo dos anos.

Para que a aprendizagem para a vida ocorra, Westbrook e Teixeira (2010, p. 57-61), em sua biografia sobre Dewey, citam cinco condições necessárias, conforme segue:

- 1- *só se aprende o que se pratica* – por isso a necessidade de se conseguir oportunizar aos educandos situações de aprendizagem reais, partindo da contextualização e que possam ser utilizadas pelos estudantes fora da sala de aula. A Geometria Analítica proporciona essa relação, através da localização de pontos (locais), distância entre dois pontos (duas localizações), utilizando-se como, por exemplo, o mapa da cidade e escalas;
- 2- *não basta praticar – a intenção de quem vai aprender tem singular importância* – verifica-se nessa condição que não adianta propor uma nova metodologia para a aprendizagem, se o estudante não tem a intenção de adquiri-la, ou seja, ele deve estar pré-disposto a aprender e a praticar. Essa ideia está de acordo com Ausubel (2003), que apresenta como fator essencial à aprendizagem a predisposição para aprender;
- 3- *aprende-se por associação* – não se aprende somente o que se tem em vista; por trás de um determinado conteúdo/aprendizagem existem muitas coisas associadas, que favorecem a construção do conhecimento, o que Ausubel (2003) chama de condições prévias;
- 4- *não se aprende nunca uma coisa só* – à medida que se aprende uma coisa, várias outras são concomitantemente aprendidas;
- 5- *toda a aprendizagem deve ser interligada à vida* – de acordo com a ideia de escola, como preparação para as situações-problema enfrentadas ao longo dos anos.

Pensando na importância da aprendizagem para a vida, Dewey afirma que o que se aprende auxilia a refazer e a reorganizar a própria vida, ou seja:

Há dois modos de aprendizagem para a vida: aquele pelo qual aprendemos a fazer alguma coisa que antes não sabíamos (aprendizagem motora); e aquele pelo qual resolvemos uma dificuldade ou um problema (aprendizagem intelectual). Geralmente, o que aprendemos encerra uma combinação desses dois tipos. (DEWEY apud WESTBROOK; TEIXEIRA, 2010, p. 61).

Com base nisso, busca-se ao longo da elaboração e da aplicação das UEPS, favorecer os dois modos de aprendizagem. Primeiramente, apresentando situações com as quais o estudante não saiba lidar e possa, através da interação com diferentes materiais, construir e, por conseguinte, sentir-se desafiado a resolver situações-problema que favoreçam a construção de novos conceitos.

Diante dessas considerações, as UEPS foram idealizadas, nesta pesquisa, com base em reflexões sobre “como despertar o interesse do estudante para as atividades de sala de aula e relacionar essa aprendizagem com situações reais da vida”. Para tanto, integrou-se, além de materiais não digitais, usualmente utilizados no estudo de Geometria Analítica, como régua, transferidor, compasso, dentre outros, a utilização do GPS como recurso tecnológico nas aulas de Matemática, buscando valorizar o fascínio pela tecnologia, demonstrado por muitos estudantes, para promover o estudo de Geometria Analítica. Nas palavras de Hermínio e Borba (HERMINIO, BORBA apud QUARTIERI, 2011, p. 87), quando um aluno decide investigar certo tema, inicialmente pensando em satisfazer o professor e acaba percebendo que tem ~~mu~~to prazer e interesse em estudar aquele assunto, volta a sua atenção totalmente para o trabalho e não mais para o professor.

Com efeito, buscou-se, ao longo da pesquisa, a elaboração de estratégias que propiciem ao estudante sentir-se estimulado a construir seu conhecimento, considerando situações presentes no seu dia a dia, e que por diversas vezes são deixadas de lado pelos professores. Entende-se que, cada vez mais, faz-se necessária essa ligação entre o interesse dos estudantes e a aprendizagem. Por isso justifica-se a elaboração desta proposta, com a consciência da importância do papel do professor, que busca promover o interesse do estudante, como proposto por Dewey (1959), na execução das atividades.

2.3 A VISÃO DE APRENDIZAGEM: AUSUBEL *VERSUS* DEWEY

Os dois principais autores, considerados nesta investigação, apresentam diversas características em comum e que foram levadas em conta ao longo da pesquisa, tanto na elaboração como no planejamento dos materiais, para promover a ocorrência da aprendizagem significativa.

Para auxiliar, apresenta-se o Quadro 1, com o comparativo das concepções de aprendizagem desses autores.

Quadro 1 – Comparativo das ideias de Ausubel e Dewey

Teórico	Ausubel	Dewey
Palavra-chave	Aprendizagem Significativa	Aprendizagem para a vida
Teoria	Cognitivista	Progressiva
Condições para a aprendizagem	<ul style="list-style-type: none"> • O conteúdo a ser ensinado deve ser potencialmente revelador; • O estudante precisa estar disposto a relacionar o material de maneira consistente e não arbitrária. 	<ul style="list-style-type: none"> • O estudante deve estar numa verdadeira situação de experimentação, em que haja um problema a resolver. • O estudante deve ter os conhecimentos necessários para agir diante da situação-problema apresentada e que tenha a chance de testar suas ideias
Conteúdos	<ul style="list-style-type: none"> • Devem levar em conta os conhecimentos prévios dos estudantes – avaliação diagnóstica; • Utiliza organizadores prévios como recurso para potencializar a aprendizagem. 	<ul style="list-style-type: none"> • São estabelecidos a partir das experiências vividas pelos estudantes – conhecer a realidade do estudante; • Acredita que o currículo deva ser constantemente redefinido e avaliado pelo professor;
Como pensavam o processo de aprendizagem	Aprendizagem deve ter um significado.	Aprendizagem para a vida. A educação tem como finalidade proporcionar ao estudante condições para que resolva por si próprio os seus problemas.
Papel da escola	Desafio diário de tornar a escola um ambiente motivador, preparando o estudante para viver no mundo.	
Papel do professor	<ul style="list-style-type: none"> • Professor é o facilitador do processo; • A responsabilidade pela aquisição de conhecimentos não depende apenas do professor; • Ensinar utilizando recursos que facilitem a passagem da estrutura conceitual para a estrutura cognitiva de forma significativa. 	<ul style="list-style-type: none"> • Professor é o mediador do processo; • Professor deve apresentar os conteúdos escolares na forma de questões ou problemas e jamais dar de antemão respostas ou soluções prontas.
Papel do estudante	O aprendiz precisa ser um participante ativo, para que ocorra a aprendizagem.	O princípio é que os alunos aprendem melhor realizando tarefas associadas aos conteúdos ensinados.

Fonte: Elaboração da autora (2018).

Diante dessas considerações, a pesquisa se desenvolveu com o propósito de construir materiais potencialmente significativos, que possam levar em consideração as especificidades apontadas por Ausubel e Dewey. Para tanto, utilizou-se sequência didática proposta por Moreira (2011a), que sugere a utilização de unidades de ensino potencialmente significativas, descritas a seguir.

2.4 UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS (UEPS)

As UEPS propostas por Moreira (2011) são orientadas para a construção de materiais potencialmente significativos, que devem primeiramente fazer sentido ao estudante (auxiliar na compreensão do conteúdo), além de serem bem-organizados e possuir um desencadeamento lógico.

Moreira (2011b) afirma que o material, se bem-elaborado, deve estar de acordo com os conhecimentos prévios dos estudantes. Somente dessa forma ele será “relacionável” à estrutura cognitiva do sujeito que aprende e, assim, possibilitará a construção de significados por parte do mesmo.

A aquisição de novos conhecimentos envolve, principalmente, a apresentação de materiais potencialmente significativos para o aprendiz. Para que um material seja considerado potencialmente significativo, deve satisfazer duas condições, quais sejam:

(1) que o próprio material de aprendizagem possa estar relacionado de forma não arbitrária (plausível, sensível e não aleatória) e não literal com qualquer estrutura cognitiva apropriada e relevante (i.e., que possui significado “lógico”) e (2) que a estrutura cognitiva particular do aprendiz contenha ideias ancoradas relevantes, com as quais se possa relacionar o novo material. (AUSUBEL, 2003, p. 01).

Sendo assim, um dos principais requisitos na elaboração de uma UEPS é a qualidade dos materiais que a constituem, de modo que contribuam para um aprendizado de maior qualidade, que se distancie do aprendizado mecânico.

Segundo Moreira (2011), UEPS são sequências de ensino fundamentadas teoricamente, voltadas para a aprendizagem significativa, não mecânica, que podem estimular a pesquisa aplicada em ensino, aquela voltada diretamente à sala de aula.

Para a elaboração de uma UEPS são propostas oito etapas, definidas por Moreira (2011). São elas:

1. *definição do tema*: fase inicial que define o assunto específico a ser abordado. Nesta etapa é importante identificar os aspectos fundamentais do assunto abordado e todo o

contexto do conteúdo em estudo. Nesta pesquisa, a escolha do tema Geometria Analítica foi realizada pela pesquisadora a partir de um trabalho realizado em uma disciplina do mestrado. Ao longo do trabalho, foram elaboradas situações com base nas quais foi possível refletir sobre a forma com que este conteúdo vem sendo abordado na escola, que demandaram estudos e discussões, culminando com a definição do tema;

2. *investigação de conhecimento*: nesta etapa deve-se criar e/ou propor situações que possam oportunizar a identificação dos conhecimentos prévios já existentes na estrutura cognitiva dos estudantes, requisito fundamental para a ocorrência de aprendizagem significativa. Para isso, pode-se utilizar diferentes mecanismos, tais como: produções textuais, discussões, questionários, mapas conceituais e situações-problema, que levem o estudante a manifestar seus conhecimentos prévios;

3. *situação-problema introdutória*: a partir do assunto específico definido na etapa 1, é importante partir de situações-problema iniciais, ou organizadores prévios, para retomar e revisar o que foi estudado até o momento, utilizando estratégias diversificadas. A utilização dos conhecimentos prévios é fundamental para o novo assunto, e o professor deve abrir espaço para discussões e perguntas dos estudantes, a fim de que esses estabeleçam as relações necessárias para a aprendizagem de novos conceitos;

4. *diferenciação progressiva*: após a realização da etapa 3, deve-se apresentar o conhecimento a ser ensinado/aprendido, utilizando aspectos mais gerais, dando uma visão inicial do todo, para posteriormente exemplificar e abordar aspectos específicos do assunto. Nesta fase, ao longo da aplicação das UEPS em Geometria Analítica, abordam-se situações-problema contextualizadas, baseadas no mapa da cidade de Farroupilha, para localizações, distâncias, orientações, dentre outras;

5. *complexidade*: nesta etapa, as situações-problema devem ser propostas em níveis crescentes de complexidade e devem ser dados novos exemplos, destacando semelhanças e diferenças entre as situações-problema e os exemplos já estudados, avançando para promover a reconciliação integradora;

6. *reconciliação integradora*: retomar as características mais relevantes do conteúdo em questão, porém de uma perspectiva integradora, buscando a reconciliação integradora. Nesta fase, é importante propor algumas atividades colaborativas, que levem os estudantes a interagir socialmente, negociando significados, tendo o professor como mediador. Para isso, sugere-se que os estudantes criem situações-problema, buscando a aplicação dos conceitos aprendidos na fase da diferenciação progressiva, quando o estudante parte de uma situação geral, formulada por ele, para interagir com colocações/conceitos específicos;

7. *avaliação da aprendizagem na UEPS*: esta avaliação pode ser formativa, ocorrendo ao longo do desenvolvimento da UEPS, aproveitando todas as oportunidades para o tratamento dos acertos e também dos erros, visando à aprendizagem. É fundamental que o professor registre tudo o que possa ser considerado evidência de aprendizagem significativa do conteúdo trabalhado. Por fim, deve realizar uma avaliação somativa individual, com situações-problema, cuja resolução requeira compreensão e que evidencie a construção de significados. A avaliação final do desempenho do estudante, na UEPS, deverá estar baseada tanto na avaliação formativa (observações realizadas, situações, tarefas resolvidas de forma colaborativa e registros do professor) como na avaliação somativa;

8. *avaliação da própria UEPS*: partindo dos resultados encontrados na avaliação do desempenho dos estudantes, deve-se avaliar o êxito da implementação da UEPS, buscando evidências de aprendizagem significativa, como captação de significados, compreensão, capacidade de explicar e de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema.

E importante salientar que a busca de evidências de aprendizagem significativa, por meio das UEPS, deve ocorrer ao longo de sua implementação e não somente na avaliação somativa, pois a aprendizagem significativa é progressiva; promover aprendizagem significativa consiste em proporcionar ao estudante condições para que ele pense e compreenda o conteúdo que está sendo ministrado. Sendo assim, se o professor busca auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem, deve também organizar o planejamento das aulas, levando em conta a elaboração de situações de aprendizagem que instiguem o estudante a vivenciar a busca, a exercitar as possibilidades de resposta e, principalmente, a desenvolver seu pensamento.

Ou seja, entende-se, como importante finalidade da UEPS, promover a aprendizagem significativa, utilizando distintas estratégias de ensino, para garantir a participação ativa do estudante.

Na próxima seção, apresentam-se destaques relevantes, em relação ao tema das UEPS a serem planejadas, aplicadas e avaliadas nesta pesquisa: a Geometria Analítica.

2.5 A IMPORTÂNCIA DA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

A Geometria Analítica é o tema a ser abordado nesta pesquisa, com o desenvolvimento de UEPS. Inicia-se procurando apresentar um breve apanhado histórico sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria Analítica, para situar a importância deste trabalho e compreender um pouco mais sobre a importância deste conteúdo.

Segundo os PCNs (BRASIL, 1998), muitos conceitos que integram os programas de Geometria Analítica são abordados antes do 3º ano do Ensino Médio. Este é o caso da localização de pontos no Plano Cartesiano, abordada no 7º ano do Ensino Fundamental; da representação de retas no plano, no 9º ano do Ensino Fundamental, continuando no 1º ano do Ensino Médio e, ainda, da resolução de sistemas de equações lineares no 2º ano do Ensino Médio. Ou seja, no 3º ano, todos esses tópicos são retomados, para proporcionar uma visão integrada dos conceitos abordados.

A importância da Geometria Analítica no Ensino Médio está citada em diversos documentos que norteiam os processos de ensino e de aprendizagem.

Uma das recomendações consideradas de maior relevância, nesta pesquisa, já foi mencionada na Introdução deste trabalho. (BRASIL, 2006). A mesma é retomada, neste ponto, a fim de dar destaque à importância de trabalhar Geometria e Álgebra, concomitantemente, por entender-se que, através dessa articulação entre os conceitos algébricos e geométricos (equações e respectivos gráficos), os estudantes possam compreender melhor a relação entre as soluções encontradas algébrica e geometricamente. A construção desses conceitos de forma prática, utilizando régua, compasso, dentre outros recursos, auxilia no entendimento e possibilita a compreensão de suas aplicações práticas.

Os PCNs (BRASIL, 1998), quando abordam a Geometria Analítica, apontam que compete ao professor reorganizar os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, introduzindo novas tecnologias que promovam o interesse do estudante, permitam diferentes estratégias de abordagem de situações-problema e o desenvolvimento do pensamento matemático, o que se pretende com esta pesquisa, que visa a utilizar a tecnologia como aliada do professor, na busca da construção do conhecimento e na compreensão dos conceitos envolvidos, em diversas situações acerca da Geometria Analítica.

A BNCC (2017) prevê habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Médio, fundamentais para que o letramento matemático dos estudantes se torne mais denso e eficiente, aprofundando e aplicando as habilidades propostas no Ensino Fundamental, através de ferramentas que auxiliem a compreender a realidade e desenvolver tais habilidades. Assim sendo, é papel do professor propor as intervenções necessárias, para desenvolver o processo investigativo do estudante e possibilitar descobertas e aprendizagens previstas.

Com relação às habilidades a serem desenvolvidas, a BNCC propõe:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. Compreender e utilizar, com

flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2017, p. 99).

Os PCNs também sugerem que a Geometria Analítica deve ser aprendida em duas vias: “o entendimento de figuras geométricas, via equações e o entendimento de equações, via figuras geométricas”. (BRASIL, 2000, p. 77). Entende-se, assim, que os documentos norteadores mostram a importância de utilizar as duas representações matemáticas e algébricas e a geométrica, de forma articulada.

De fato, a revisão bibliográfica realizada, que se apresenta a seguir, aponta algumas preocupações com relação ao ensino de Geometria Analítica, principalmente, com relação às metodologias que proporcionem não apenas a construção de conceitos, mas, principalmente, a manipulação de objetos ou recursos computacionais que colaborem, para que os estudantes possam melhor compreender a Matemática.

2.6 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Com o objetivo de discutir e analisar aspectos relacionados ao ensino e à aprendizagem de Geometria Analítica, no Ensino Médio, apresenta-se, nesta seção, uma síntese de outras pesquisas acadêmicas disponíveis no banco de dados da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDBTD) com palavras-chave relacionadas à Geometria Analítica e à Aprendizagem Significativa, cujos resultados têm interesse nesta pesquisa. Após a leitura de diversos trabalhos, selecionaram-se para apresentação, nesta seção, as pesquisas comentadas brevemente, a seguir.

Correia (2011), em sua dissertação de mestrado aborda a Aprendizagem Significativa através da exploração de conceitos relacionados a pontos e retas, utilizando o *software* matemático GeoGebra. Como referencial teórico, utilizou estudos de João Pedro da Ponte, que utiliza atividades investigativas e exploratórias e a Teoria de Ausubel que, assim como nesta pesquisa, aponta benefícios da Aprendizagem Significativa.

Ao longo da pesquisa, o autor destaca a importância de uma metodologia de ensino baseada no “entendimento de figuras geométricas, via equações e o entendimento de equações, via figuras geométricas”. (BRASIL, 2000, p. 77). Através dessa citação, Correia

(2011) justifica a importância de atividades investigativas no ensino da Geometria Analítica, como sobre a utilização de *softwares* matemáticos para sua aprendizagem e destaca a necessidade de mudanças nos cursos de formação de professores.

Através de uma pesquisa de campo realizada com professores, que teve duração de oito semanas e dos dados coletados, o autor concluiu que a utilização do *software* GeoGebra, nos processos de ensino e de aprendizagem de Geometria Analítica, possibilitou a realização de atividades investigativas e exploratórias e contribuiu para a construção de conceitos e interpretação de resultados, e que este tipo de atividade, além de qualificar a formação de professores, auxilia e proporciona mudanças frente à forma de ensinar.

A utilização do *software*, nessa pesquisa, vem ao encontro das atividades propostas nas UEPS, que buscam construir os conceitos envolvendo o Estudo da Reta com o apoio do *software*, através de manuais com atividades investigativas e exploratórias, que aliem interpretação geométrica e algébrica, favorecendo a construção do conhecimento.

Já Pereira (2013) apresentou uma prática de construção de conceitos, baseando-se na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (2003). Utilizou uma maquete de um campo de futebol representada em Plano Cartesiano e através desta temática, buscou que os estudantes descobrissem como realizar cálculos básicos de Geometria Analítica, calculando, por exemplo, a distância entre dois jogadores posicionados no campo e até a equação da reta do passe da bola de um ao outro. Além disso, baseada no modelo apresentado e em suas medidas, a pesquisadora apresentou uma situação prática, visando à construção do conhecimento e à compreensão dos conceitos envolvidos. O principal resultado encontrado com a pesquisa estava relacionado à participação ativa dos estudantes na construção de conhecimentos, através da experimentação e visualização das atividades propostas, que partiram de atividades com material concreto (campo de futebol), para a construção de conceitos abstratos. De fato, é o que também se espera como o resultado desta pesquisa, com as atividades promovidas nas UEPS aplicadas.

Halberstadt (2015) realizou uma pesquisa de cunho qualitativo, cuja metodologia de ensino foi a Engenharia Didática, que possibilita sistematizar a realização da pesquisa no âmbito teórico e experimental. Como aporte teórico adotou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, devido à importância da compreensão dos conceitos matemáticos.

Na sua pesquisa, apresenta possibilidades de aprendizagem de Geometria Analítica com o auxílio de *softwares* matemáticos, através da representação semiótica de diferentes conceitos, ao utilizar o Grafec para a construção de objetos geométricos (pontos, retas,

circunferência, dentre outros), a partir das representações algébricas construídas no GeoGebra, o que está de acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), já citadas anteriormente e também com a proposta da UEPS cinco, que aborda a Geometria Analítica com *softwares* matemáticos utilizando os mesmos aplicativos desta pesquisa.

Os resultados apontam para a consolidação do reconhecimento dos objetos abordados, nos seus diferentes registros de representação semiótica, e destacam ainda o engajamento dos estudantes na resolução de atividades e uma melhoria na compreensão dos objetos matemáticos estudados.

Buscando uma metodologia que forneça subsídios conceituais para a construção das UEPS propostas, em especial a UEPS relacionada ao Estudo da Circunferência, encontrou-se em Alves (2004) um interessante trabalho interdisciplinar entre a Matemática e a Geografia, no qual apresenta a geometria do globo terrestre e a aplicação do GPS para a construção de conceitos. Ainda, apresenta o estudo da posição relativa de duas ou mais esferas e a relação entre coordenadas geográficas e cartesianas, que constituem a fundamentação matemática necessária para o entendimento de alguns modernos sistemas de navegação por satélites, em especial do GPS, recurso utilizado nesta pesquisa.

Santos (2016) apresenta uma revisão bibliográfica do estado da arte das pesquisas brasileiras, no período de 1991 a 2004, sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria Analítica no Brasil. A autora utiliza os pressupostos da Análise de Conteúdo, para realizar os procedimentos metodológicos. Para analisar os dados, fez uso das ideias teóricas de Dreyfus (1991) sobre como os processos do Pensamento Matemático Avançado emergem das estratégias pedagógicas abordadas nas produções acadêmicas do período.

A autora organizou sua pesquisa com base em quarenta e uma produções acadêmicas sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria Analítica no País e as separou em dois grupos: as que fizeram o uso das Tecnologias de Informação (*softwares* matemáticos, planilhas eletrônicas, ambientes virtuais de aprendizagem, dentre outras) e as que não utilizaram essas tecnologias, mas se basearam na resolução de problemas, utilização de régua e compasso e construção de figuras. Nessa perspectiva, a pesquisa aqui desenvolvida se enquadra nos dois grupos, pois foram utilizados como recursos, materiais de construção, como citado anteriormente, além de *softwares* matemáticos.

Santos (2016) concluiu que os temas da Geometria Analítica abordados na sua pesquisa não mudaram ao longo do período estudado, porém, as estratégias de ensino e de aprendizagem alteraram, pois estão mais centradas no estudante, possibilitando que o mesmo

adote uma postura mais ativa no processo de aprendizagem, sem depender unicamente do professor.

Com efeito, entende-se, também, como de grande importância para a aprendizagem da Geometria Analítica a abordagem de distintas estratégias de ensino, para garantir a compreensão dos conceitos e a participação ativa do estudante.

No próximo capítulo apresentam-se os procedimentos metodológicos, que compreendem a caracterização da pesquisa, o contexto da escola em que a mesma foi aplicada, os sujeitos, os instrumentos de coleta de dados, as técnicas de análise e a avaliação. Ainda, como parte integrante deste capítulo, está o planejamento, a aplicação e avaliação da UEPS-piloto, seguido do planejamento das demais cinco UEPS, levando em consideração os resultados obtidos quando da aplicação da UEPS-piloto.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo são apresentadas as principais considerações sobre a pesquisa, no contexto do tema escolhido, incluindo o planejamento da UEPS-piloto e das demais, além do planejamento da análise dos dados construídos.

3.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Com base nos objetivos da pesquisa, e considerando as UEPS como estratégia de aprendizagem ativa, que não é de transferência de conhecimento, mas, sim, de mediação visando ao desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem, esta pesquisa se enquadra em uma abordagem do tipo qualitativa que, segundo Gerhardt e Silveira (2009, p. 31), “não se preocupa com representatividade numérica, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização”. Ou seja, busca-se um aprofundamento e uma qualificação nos processos de ensino e aprendizagem significativa, dos conceitos de Geometria Analítica.

Na pesquisa qualitativa é levado em conta, conforme Gerhardt e Silveira (2009, p. 32), que “o cientista é ao mesmo tempo o sujeito e o objeto de suas pesquisas”, sendo a pesquisadora parte integrante desse processo.

Quanto à sua natureza, esta pesquisa é do tipo aplicada, a qual, conforme Gerhardt e Silveira (2009, p. 35), “objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática, dirigidos à solução de problemas específicos”. E, quanto aos objetivos, trata-se de uma pesquisa exploratória, pois se baseia em uma pesquisa de campo, na qual produziram-se e foram coletados dados de um determinado grupo de estudantes, com respaldo na fundamentação teórica, selecionada através de pesquisa bibliográfica. Com relação à pesquisa bibliográfica, Fonseca afirma:

A pesquisa bibliográfica é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem, porém pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta. (FONSECA, 2002, p. 32).

Com relação aos procedimentos técnicos, essa é uma pesquisa participante. A pesquisa participante caracteriza-se por envolvimento e identificação do pesquisador com as

peças investigadas; sendo assim, é um processo que se modifica continuamente, pois diagnostica uma situação prática; formula e desenvolve estratégias de ação, avaliando sua eficiência e ampliando a compreensão da nova situação.

Desta forma, a pesquisa participante inclui um momento de investigação, um de tematização e, por último, o de programação/ação, o que está de acordo com as etapas de desenvolvimento das UEPS.

3.2 CONTEXTO DA ESCOLA

A pesquisa foi desenvolvida no Colégio Estadual Farroupilha (CEF), localizado no centro do Município de Farroupilha – RS. A Escola pertence à 4ª Coordenadoria de Educação do estado e conta com aproximadamente 840 estudantes, todos de Ensino Médio, distribuídos nos turnos da manhã, da tarde e da noite. Atualmente, a Escola conta com uma diretora e uma equipe de 55 professores e 12 funcionários.

Por se tratar de uma escola somente de Ensino Médio e se localizar no centro da cidade, a mesma recebe estudantes de todos os bairros e comunidades do município. Assim, pode-se dizer que há uma grande heterogeneidade nessa comunidade escolar.

A Escola possui serviços de apoio pedagógico, como supervisão escolar (SSE), orientação escolar (SOE) e serviço de apoio administrativo (secretaria). Alguns serviços de organização complementar também são oferecidos pela escola, como Conselho Escolar, Círculo de Pais e Mestres (CPM), Biblioteca Estudantil, Grêmios Estudantis, Videoteca, duas quadras de esportes, sendo uma delas descoberta e a outra semicoberta, Laboratório de Informática e Laboratório de Ciências.

3.3 SUJEITOS DA PESQUISA

Iniciou-se o planejamento da pesquisa propriamente dita, com a intenção de vivenciar as etapas de aplicação de uma UEPS.

Com o auxílio de uma colega e parceira de trabalho, construiu-se uma proposta didática, para a qual elaborou-se pequenos “manuais” na disciplina de Tópicos de Geometria, do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Estes manuais foram aplicados aos colegas da disciplina que, juntamente com as professoras ministrantes, colaboraram com sugestões de melhorias para a sua aplicação.

Partindo dessa construção inicial, deu-se início à aplicação de uma parte da pesquisa, em sala de aula, na forma de experimentação, com estudantes do 3º ano do Ensino Médio. A mesma se desenvolveu no Colégio Estadual Farroupilha, escola na qual esta professora atua e, nesse caso, também como pesquisadora. Para tanto, a pesquisa foi organizada em dois momentos diferentes e, conseqüentemente, com sujeitos distintos.

Em um primeiro momento, em 2017, realizou-se a aplicação de uma UEPS-piloto, buscando analisar todas as etapas da sua execução, a interação entre os estudantes e com as atividades promovidas na mesma, e as adaptações necessárias visando à obtenção de subsídios para a construção das demais UEPS. Posteriormente, em 2018, foram aplicadas as outras UEPS propostas, em nova turma de estudantes.

3.3.1 Sujeitos da UEPS-piloto

Considerando a oportunidade que se apresentava em maio de 2017, a pesquisadora e também professora titular da turma aproveitou os estudos acerca da Geometria Analítica que estavam desenvolvendo, para a aplicação de uma UEPS-piloto, somente para o estudo da Equação da Circunferência, relacionando o conteúdo com utilização do GPS.

A UEPS-piloto foi aplicada em uma turma de 3º ano do Ensino Médio, do Colégio Estadual Farroupilha, do Município de Farroupilha, e contou com 15 estudantes, sendo que, desse total, uma estudante foi afastada em licença gestante, durante a realização da UEPS. Os participantes foram informados da realização da pesquisa e assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice A).

3.3.2 Sujeitos da pesquisa com as demais UEPS

Partindo da análise dos dados da aplicação da UEPS-piloto e das construções realizadas ao longo da disciplina de Tópicos de Geometria, no Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, com as contribuições de colegas e professoras, planejaram-se as cinco UEPS que passaram a integrar a pesquisa. Esta foi aplicada no Colégio Estadual Farroupilha, em uma turma de 3º, ano do Ensino Médio, no município de Farroupilha, com 30 estudantes, sendo que, ao longo da aplicação, dois estudantes cancelaram a matrícula por completarem a maioria (18 anos) e dois foram transferidos para outras escolas, tendo então apenas 26 estudantes para a análise de resultados.

A turma, da qual a pesquisadora é a titular, tem como característica a amizade e o envolvimento entre os estudantes, visto que estão juntos desde o 1º ano. Além disso, dos 26 estudantes devidamente matriculados, 14 trabalham no turno oposto à escola, nove são menores aprendizes (cursistas ou estagiários), através do Senai ou Senac, em empresas da cidade; dois estudam em cursinho pré-vestibular no turno da tarde, e apenas um não trabalha, mas auxilia os pais em casa.

Os mesmos foram informados da pesquisa e assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice A), concordando em participar de sua realização.

3.4 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Para a coleta de dados foram utilizados os manuais elaborados, pois nos mesmos constam exercícios de aprendizagem que podem ser verificados; um diário de campo (caderno) com anotações diárias das observações realizadas e fotografias das atividades.

Ainda, a análise dos processos de aprendizagem foi realizada na sequência das tarefas, durante o seu desenvolvimento, incluindo os materiais produzidos pelos estudantes, tais como: avaliações, questionários, autoavaliações, gravações, entre outros.

3.5 ANÁLISE DE DADOS

Por se tratar de uma pesquisa qualitativa, optou-se pela análise textual de respostas a questionários e pelo registro de produções dos estudantes em atividades e/ou observações que, conforme Moraes (2003), serviram como subsídios para aprofundar a “[...] compreensão dos fenômenos que investiga a partir de uma análise rigorosa e criteriosa desse tipo de informação, isto é, não pretende testar hipóteses para comprová-las ou refutá-las ao final da pesquisa; a intenção é a compreensão”. (2003, p. 191).

Primeiramente, através de um questionário foram verificados os conhecimentos prévios dos estudantes, categorizando-os em três grupos: os que possuem o conhecimento necessário, os que o possuem em parte e os que não possuem conhecimentos requeridos, como apoio à aprendizagem dos novos conceitos. Essa categorização é adequada, segundo Moraes (2003, p. 197), que explica que “além de reunir elementos semelhantes, também implica nomear e definir as categorias, cada vez com maior precisão, na medida em que vão sendo construídas”. Concorda-se com o autor, entendendo que, para investigar o desenvolvimento das aprendizagens dos estudantes utilizando as UEPS é necessário observar

parâmetros importantes, visando à identificação da evolução cognitiva dos estudantes. Assim sendo, entende-se que tais procedimentos foram de grande valia na análise das respostas ao questionário de verificação de conhecimentos prévios, com base na qual as UEPS foram construídas.

Para descrever os resultados obtidos ao longo da pesquisa e preservar a identidade dos estudantes, utilizou-se o seguinte código: **En**, no qual **E** representa “estudante”, e **n** corresponde ao seu número no diário de classe.

Ainda, com relação às observações e anotações das atividades realizadas pelos estudantes, foram levadas em consideração algumas ações, avaliadas no decorrer de todas as aulas e anotadas na ficha de avaliação elaborada pela pesquisadora e no diário de bordo. São elas:

- 1- participação durante as atividades propostas;
- 2- demonstração de interesse em aprender;
- 3- interação com os colegas de grupo;
- 4- organização e capricho no desenvolvimento das atividades;
- 5- utilização de diferentes recursos pedagógicos e tecnológicos;
- 6- indícios de autonomia e pré disposição em aprender;
- 7- desenvolvimento de raciocínio lógico;
- 8- utilização de diferentes recursos digitais e não digitais.

Com efeito, trata-se de uma abordagem qualitativa nos seguintes momentos: análise prévia, atividades na UEPS (principalmente nas fases da diferenciação progressiva e reconciliação integradora) e avaliação final.

No Quadro 2 apresentam-se, de maneira sucinta, os momentos e os instrumentos de coleta de dados, utilizados na realização da pesquisa, por meio das aplicações das UEPS.

Quadro 2 – Método e forma de coleta de dados

Momentos	Instrumentos
Análise prévia	1. Questionário inicial para análise do conhecimento prévio dos estudantes
Atividades na UEPS	2. Participação e envolvimento dos estudantes nas atividades 3. Observações e anotações realizadas pela professora pesquisadora 4. Registro das respostas dos estudantes às atividades contidas na UEPS 5. Comparação das atividades realizadas na fase da diferenciação progressiva e reconciliação integradora
Avaliação	6. Avaliação formativa, durante o desenvolvimento das UEPS 7. Avaliação somativa para análise da evolução conceitual 8. Avaliação das UEPS pelos estudantes; 9. Autoavaliação dos estudantes

Fonte: Elaboração da autora (2017).

3.6 A AVALIAÇÃO

Avaliar é uma função essencial nos processos de ensino e de aprendizagem, pois a mesma deve permear todo o trabalho escolar, sendo parte integrante no planejamento e na organização do trabalho pedagógico, levando em consideração os objetivos propostos, os conteúdos e a metodologia utilizada. De acordo com essa concepção de avaliação, entende-se que o estudante pode ser avaliado, considerando aspectos cognitivos, afetivos e psicomotores.

Para avaliar se houve aprendizagem, foram utilizados diferentes instrumentos, tais como: autoavaliação do estudante, observação diária e constante da professora, anotações no material organizado para os estudos, interações e discussões com os colegas, entrega das tarefas solicitadas, avaliação somativa e avaliação da UEPS. Espera-se que, desta forma, o próprio estudante também seja capaz de identificar e definir a sua evolução no processo.

Desta forma, buscaram-se instrumentos de avaliação e de autoavaliação em que professor e estudante sejam responsáveis pela avaliação do processo, identificando o avanço da aprendizagem, suas fraquezas, deficiências e falhas. A autoavaliação teve papel fundamental nesse processo, sendo o estudante convidado a avaliar a sua trajetória e a identificar os aspectos a serem retomados e ampliados, abrindo a possibilidade de desenvolver sua autonomia, participar ativamente do seu processo de aprendizagem de forma responsável.

Para tanto, apresentaram-se os objetivos claramente, de forma que o estudante fosse capaz de compreendê-los e alcançá-los, tendo como consequência a aprendizagem significativa.

Através da avaliação diagnóstica, foram verificados os conhecimentos prévios dos estudantes e as condições de interpretação para a resolução das tarefas propostas. Na avaliação formativa, considerou-se: a participação no grupo, os progressos no desenvolvimento das atividades, buscando os ajustes necessários para que o estudante continuasse progredindo, por meio de atividades diferenciadas ou com propostas através dos materiais elaborados. Quanto à avaliação somativa, a mesma visou ao conhecimento dos resultados das aprendizagens, fornecendo informações sintetizadas destinadas ao registro e à publicação do que parecia ter sido assimilado pelos estudantes. Ou seja, segundo Santos (2005), seus resultados serviram para verificar, classificar, situar, informar e certificar. Para tanto, considerou-se o resultado final do processo como se desenvolveu a aprendizagem e a compreensão do conteúdo estudado, neste caso, Geometria Analítica.

Assim sendo, os resultados apresentados pelos estudantes nas avaliações (formativa e somativa) foram registrados em pontos, com base nos critérios estabelecidos pela escola, em uma escala de 0 (zero) a 30 (trinta) pontos para o primeiro e segundo trimestres e de 0 (zero) a 40 (quarenta) para o terceiro trimestre. O resultado final do aproveitamento escolar constituiu da soma dos pontos obtidos pelo estudante nos três trimestres e, para aprovação, o mínimo de 60 pontos.

Levou-se em conta que a avaliação é um processo que busca mudar o ambiente pedagógico, e é papel do professor procurar fazer as escolhas certas, tanto na forma de avaliar, como na metodologia escolhida e, principalmente, nas formas de abordagem dos conteúdos, para proporcionar atividades em que os estudantes pudessem expor atitudes, valores e habilidades. Desta forma poder-se-ia conhecer o estudante além do seu intelecto, conforme afirma Zabala:

As atitudes são tendências ou predisposições relativamente estáveis das pessoas para atuar de certa maneira. É a forma como cada pessoa realiza sua conduta de acordo com valores determinados. Assim, é exemplo de atitudes: cooperar com o grupo, respeitar o ambiente, participar de tarefas escolares, etc. (ZABALA, 1998, p. 46).

A seguir, passa-se à descrição do planejamento de cada uma das UEPS, iniciando pela UEPS-piloto, considerada uma atividade que deu origem à pesquisa propriamente dita. Com base nos estudos realizados, a mesma foi idealizada, planejada, aplicada e avaliada, fornecendo os principais indicadores para a aplicação das cinco UEPS, que constituíram a pesquisa, abordadas na sequência do próximo capítulo.

4 O PLANEJAMENTO DAS UEPS

As UEPS propostas foram programadas de acordo com o tema a ser abordado. Sendo assim, apresenta-se, no Quadro 3, os temas definidos para cada uma delas.

Quadro 3– Definição dos temas das UEPS

	UEPS-PILOTO EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA	UEPS 1 PLANO CARTESIANO	UEPS 2 ESTUDO DO PONTO
PASSO 1 – DEFINIÇÃO DO TEMA	<ul style="list-style-type: none"> • Equação da circunferência • Circunferência – raio e diâmetro • Equação reduzida da circunferência • Equação geral da circunferência • Problemas envolvendo situações práticas 	<ul style="list-style-type: none"> • História da Geometria Analítica • Plano cartesiano: identificação de eixos Ortogonais no plano (abscissas e ordenadas) • Identificar pares ordenados no plano cartesiano, bem como os seus respectivos quadrantes • Problemas envolvendo situações práticas 	<ul style="list-style-type: none"> • Estudo do ponto • Distância entre dois pontos • Ponto médio • Baricentro • Mediana • Condição de Alinhamento de três pontos
	UEPS 3 ESTUDO DA RETA	UEPS 4 EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA	UEPS 5 UTILIZAÇÃO DE <i>SOFTWARES</i> MATEMÁTICOS
PASSO 1 – DEFINIÇÃO DO TEMA	<ul style="list-style-type: none"> • Estudo da Reta • Coeficiente angular e linear • Equação Reduzida da Reta • Equação geral da reta • Pertinência de um ponto à reta • Posições relativas de duas retas no plano • Ângulo formado entre duas retas • Ponto de intersecção entre duas retas • Distância do ponto a reta • Área de um triângulo 	<ul style="list-style-type: none"> • Equação da circunferência • Circunferência – raio e diâmetro • Equação reduzida da circunferência • Equação geral da circunferência • Posições relativas entre ponto e circunferência • Problemas envolvendo situações práticas 	<ul style="list-style-type: none"> • Geometria Analítica; • Coeficiente angular e linear • Equação reduzida da Reta • Equação geral da reta; • Pertinência de um ponto a reta • Posições relativas de duas retas no plano • Ângulo formado entre duas retas • Ponto de intersecção entre duas retas • Distância do ponto à reta • Área de um triângulo • Intervalos de variação

Fonte: Elaboração da autora (2017).

Com base nesses temas, iniciou-se a elaboração de cada uma dessas UEPS, obedecendo às etapas propostas por Moreira (2011), que descreve-se novamente aqui, de forma breve, a fim de facilitar o acompanhamento por parte do leitor. Assim sendo:

- A segunda etapa foi destinada à programação da avaliação diagnóstica, com o objetivo de identificar os conhecimentos prévios dos estudantes acerca dos assuntos a serem abordados em cada uma das UEPS.
- Com base nos conhecimentos prévios dos estudantes, a etapa seguinte foi destinada à programação da apresentação do conteúdo a ser ensinado/aprendido, levando em conta os subsunçores evidenciados. Foram planejadas situações-problema, para introduzir o tema, na forma de preparação para a aprendizagem dos novos conceitos. A intenção era de que servissem como organizadores prévios.
- A quarta etapa foi planejada, levando em conta a diferenciação progressiva e considerando aspectos mais gerais e estruturantes, com a apresentação de exemplos específicos: aula expositivo-dialogada com a apresentação dos “manuais elaborados” e das situações-problema. Nesse contexto, as etapas foram organizadas para serem propostas em níveis crescentes de complexidade, para promover a reconciliação integradora. Em todas as UEPS, foram propostas atividades visando a levar os estudantes a interagirem e construir o próprio conhecimento, tendo o professor como mediador.
- A etapa seguinte consistiu na retomada dos aspectos mais gerais e estruturantes, mas em nível mais alto de complexidade, em relação à etapa anterior.
- Na etapa seis, a reconciliação integradora, etapa mais relevante, sob a perspectiva de continuar o processo de diferenciação progressiva, foi organizada com o objetivo de reconhecer a presença de conhecimentos científicos no cotidiano e no desenvolvimento tecnológico. Através das atividades propostas nessa etapa, propôs-se a retomada de todos os passos anteriores, identificando os conhecimentos adquiridos e aprimorando-os, sempre que possível.
- Na sétima etapa, foi programada a aplicação de uma avaliação somativa individual, com questões/situações que exigiram a compreensão dos tópicos estudados, a evidência da captação de significados e da aprendizagem significativa.
- A avaliação da aprendizagem por meio da UEPS foi realizada ao longo de sua aplicação, registrando as informações consideradas como evidências da ocorrência de Aprendizagem Significativa dos conteúdos trabalhados. No processo de avaliação das UEPS, foram promovidas as avaliações recomendadas por Moreira (2011a), quais sejam: avaliação formativa desenvolvida ao longo do processo, e a avaliação somativa.

Com base no esclarecimento de cada uma das etapas, foi programada a UEPS-piloto, visando à construção do conhecimento da pesquisadora, em relação ao planejamento, já prevendo a possibilidade de ajustes necessários, o que de fato ocorreu.

Assim sendo, inicia-se a seção 4.1 apresentando o referido planejamento, no Quadro 4, para depois comentar sobre sua análise.

4.1 A UEPS-PILOTO – PLANEJAMENTO E ORGANIZAÇÃO, APLICAÇÃO, DISCUSSÃO E ANÁLISE

Quadro 4 – UEPS-piloto: equação da circunferência

(Continua)

Etapa 1	Definição do tema	Equação da circunferência
Etapa 2	Conhecimentos prévios	Situação inicial
Objetivo	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar os conhecimentos prévios dos estudantes, através de um questionário 	
Atividade	1. Questionário para verificação dos conhecimentos prévios buscando identificar conhecimentos básicos estudados no Ensino Fundamental (raio, diâmetro, centro da circunferência, produto notável, latitude e longitude), e que relaciona o conteúdo (equação da circunferência) com a aplicação do uso do GPS	
Tempo previsto	½ período de aula (30 minutos)	
Etapa 3	Situação-problema introdutória	
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer a equação da circunferência em situações do dia a dia • Transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos necessários para a construção de circunferência, para localizar pontos com o GPS • Gerenciar o tempo, respeitando o ritmo de aprendizagem dos estudantes 	
Atividade	1- Leitura do texto “ <i>Onde estamos? Através de um GPS é possível encontrarmos a nossa localização. Como isso é feito? Como funciona um GPS?</i> ” e construção de conceitos envolvendo raio e diâmetro de uma circunferência, através do material disponibilizado aos estudantes: “ <i>Onde estamos? Através de um GPS é possível encontrarmos a nossa localização. Como isso é feito? Como funciona um GPS?</i> ”	
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)	
Etapa 4	Diferenciação progressiva	
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Conceituar e representar graficamente uma circunferência, utilizando o compasso • Diferenciar raio e diâmetro de uma circunferência • Reconhecer as coordenadas do centro e a medida do raio na equação de uma circunferência e vice-versa • Reconhecer a circunferência em situações do dia a dia 	
Atividades	1) Atividade prática com o uso de compasso, buscando a utilização da aplicação de circunferência utilizada pelo GPS, para localizar o ponto onde uma pessoa se encontra. Para esta atividade, utiliza-se o conceito de circunferência (centro e raio), a utilização de compasso e os conceitos de velocidade, distância e tempo da física 2) Construção de conceitos envolvendo circunferência (centro e raio), através do material disponibilizado aos estudantes	
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)	
Etapa 5	Complexidade	
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Conceituar e representar graficamente uma circunferência, utilizando o compasso. Diferenciar raio e diâmetro de uma circunferência • Reconhecer as coordenadas do centro e a medida do raio na equação de uma circunferência e vice-versa • Saber identificar as equações da circunferência na forma reduzida e geral 	
Atividades	1) Atividade prática de escrita das equações da circunferência, buscando utilizar a aplicação do GPS para localizar o ponto onde uma pessoa se encontra, com diferentes escalas	

	2) Construção de conceitos envolvendo circunferência (centro e raio), através do material disponibilizado aos estudantes
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)
Etapa 6	Reconciliação integradora
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Conceituar e representar graficamente a circunferência, utilizando o compasso. Diferenciar raio e diâmetro de uma circunferência • Reconhecer as coordenadas do centro e a medida do raio na equação de uma circunferência e vice-versa • Reconhecer circunferência em situações do dia a dia
Atividade	1- Resolução de exercícios que envolvam a circunferência: centro, raio, diâmetro, equação geral e equação reduzida, com atividades que possam ser resolvidas algébrica e geometricamente
Tempo previsto	2 períodos de aula (57 minutos cada)
Etapa 7	Avaliação da aprendizagem na UEPS
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer as coordenadas do centro e a medida do raio na equação de uma circunferência e vice-versa • Saber identificar as equações da circunferência na forma reduzida e geral • Reconhecer a circunferência em situações do dia a dia • Gerenciar o tempo, respeitando o ritmo de aprendizagem dos educandos • Identificar, através de avaliação somativa, se houve aprendizagem significativa
Atividade	1- Avaliação individual escrita
Tempo previsto	2 períodos de aula (57 minutos cada)
Etapa 8	Avaliação da UEPS
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Gerenciar o tempo, respeitando o ritmo de aprendizagem dos educandos • Identificar se as atividades promovidas foram potencialmente significativas, buscando evidências de aprendizagem significativa • Avaliar as potencialidades e fragilidades da UEPS
Atividades	<ol style="list-style-type: none"> 1- Análise de todas as etapas da UEPS, complementando a avaliação formativa e autoavaliação, destacando-se alguns aspectos atitudinais que foram observados, tais como: capricho na entrega do material, respeito aos prazos da entrega ou realização das atividades, comportamento e comprometimento na realização das atividades em sala de aula 2- Análise da avaliação somativa: realizada de forma individual escrita na etapa anterior 3- Avaliação da UEPS, através de discussão em grupo, das potencialidades e fragilidades da UEPS aplicada
Tempo previsto	Para esta etapa destina-se 1/2 período de aula (30 minutos), lembrando que a avaliação formativa é realizada em todas as etapas, conforme abordado no capítulo 3, seção 3.6.

Fonte: Elaboração da pesquisadora (2018).

Conforme o planejamento apresentado acima, foi elaborada a UEPS sobre Circunferência. Para a aplicação da mesma, foi proposta a problemática do funcionamento do GPS, um aplicativo muito utilizado para locomoção e que muitos estudantes possuem em seus celulares. A ideia inicial foi partir de uma situação-problema, considerada simples, que pudesse ser utilizada como âncora para a compreensão de ideias e/ou conceitos novos, o que Ausubel (2003) chama de organizadores prévios.

Sua realização ocorreu ao longo do mês de junho de 2017, demandou oito períodos de aula para a sua aplicação e teve papel norteador no desenvolvimento da pesquisa, pois os resultados obtidos serviram como base para a construção das demais UEPS.

O detalhamento de todas as atividades desenvolvidas será disponibilizado como parte do Produto Educacional, a ser detalhado no capítulo 6 desta dissertação. Neste capítulo, selecionaram-se para descrição algumas atividades, cujos dados foram considerados suficientemente representativos, sendo apresentados os recortes considerados significativos, em relação ao objetivo da pesquisa.

Para o desenvolvimento da UEPS, os objetivos foram:

- *conceituar e representar graficamente uma circunferência, utilizando o compasso;*
- *diferenciar raio e diâmetro de uma circunferência;*
- *reconhecer as coordenadas do centro e a medida do raio, a partir da equação de uma circunferência e vice-versa;*
- *identificar, corretamente, as equações da circunferência na forma reduzida e geral e conhecer as propriedades características de tais formas de apresentação;*
- *reconhecer a circunferência em situações do dia a dia;*
- *transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos para localizar pontos com o GPS;*
- *gerenciar o tempo, respeitando o próprio ritmo de aprendizagem;*
- *identificar, através das atividades promovidas, os indícios de aprendizagem significativa.*

Com base nos objetivos propostos, no primeiro encontro foi aplicado um questionário individual escrito, com o apoio da teoria de Ausubel (2003), a fim de identificar os conhecimentos prévios dos estudantes, relacionados à problemática a ser utilizada (uso do GPS) e noções básicas de Matemática, que, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), integram os programas de Matemática no Ensino Fundamental. Entretanto, observou-se que, frequentemente, nem todos os conceitos programados são abordados, deixando, pois, lacunas que precisam ser consideradas pelo professor, ao trabalhar com os conceitos relacionados.

Para tanto, foi solicitado que os estudantes respondessem um questionário inicial, que buscava identificar conhecimentos de conceitos básicos estudados no Ensino Fundamental (raio, diâmetro, produto notável, construções com o compasso, raio, diâmetro, centro da circunferência, produto notável, latitude e longitude) e que relacionam o conteúdo (equação da circunferência) com o uso do GPS. As questões formuladas foram as seguintes:

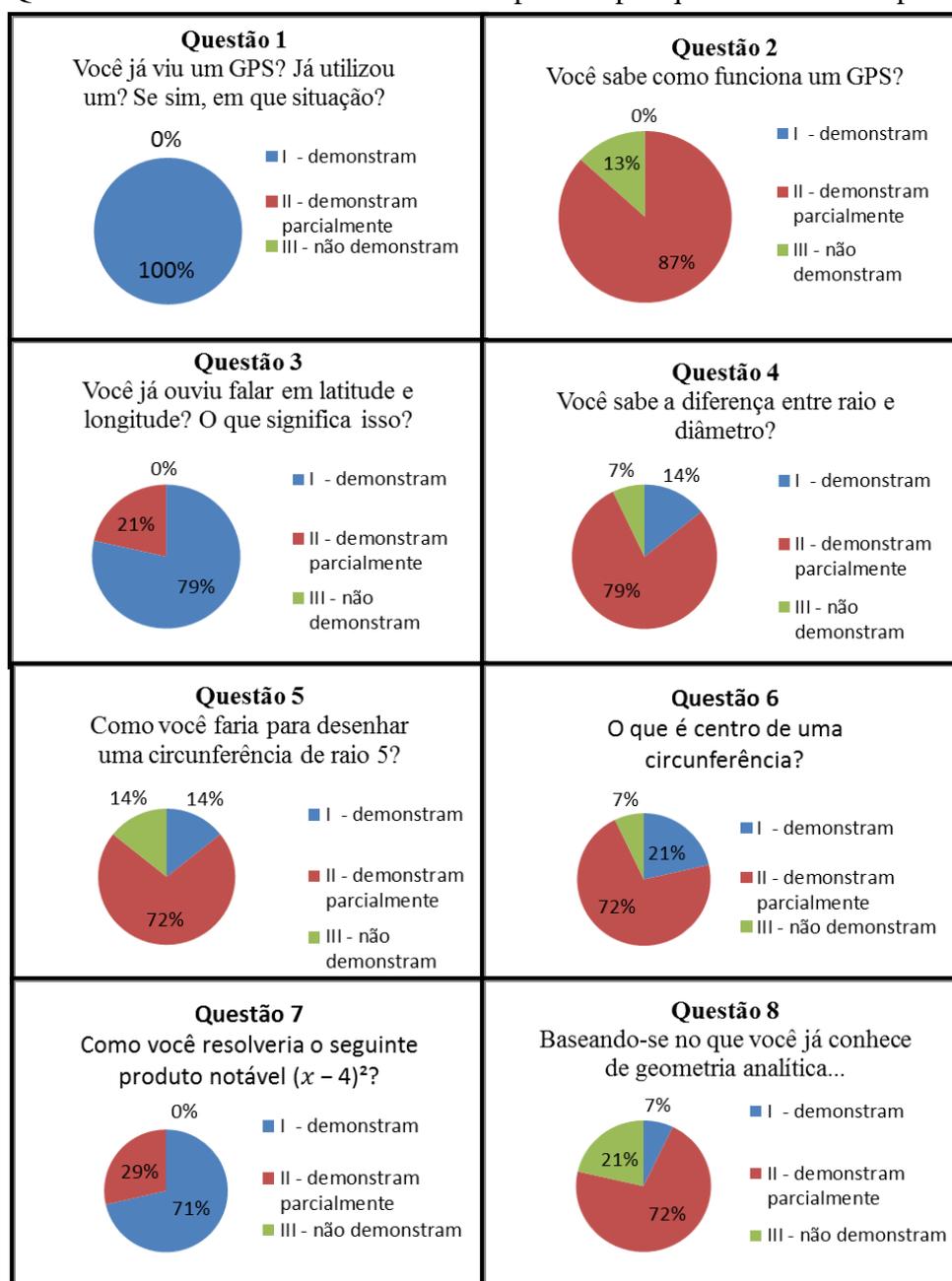
- 1- Você já viu um GPS? Já utilizou um? Se sim, em que situação?
- 2- Você sabe como funciona um GPS?

- 3- Você já ouviu falar em latitude e longitude? O que significa isso?
- 4- Você sabe a diferença entre raio e diâmetro?
- 5- Como você faria para desenhar uma circunferência de raio 5?
- 6- O que é centro de uma circunferência?
- 7- Como você resolveria o seguinte produto notável $(x - 4)^2$?
- 8- Baseando-se no que você já conhece de geometria analítica, se $A(-1,3)$ e $B(3,5)$ são os pontos extremos de um diâmetro da circunferência, qual é o centro dessa circunferência? E qual a medida do raio da mesma?

Os questionários foram recolhidos e analisados quanti-qualitativamente. Para tanto, optou-se, primeiramente, categorizar os resultados obtidos, em três grupos: (I) os que demonstraram o conhecimento necessário; (II) os que demonstraram parcialmente; e (III) os que não demonstraram. Essa categorização foi fundamental, pois, segundo Moraes (2011, p. 197), “além de reunir elementos semelhantes, também implica nomear e definir as categorias, cada vez com maior precisão, na medida em que vão sendo determinadas”, o que auxiliou na análise dos resultados e, através dela, na elaboração da própria UEPS.

No Quadro 5, apresenta-se os gráficos referentes à análise quantitativa, por questão, do que pode ser constatado quanto aos conhecimentos prévios dos estudantes.

Quadro 5 – Análise dos conhecimentos prévios por questão da UEPS-piloto



Fonte: Elaboração da autora (2017).

Percebe-se, através desta análise, que 100% dos estudantes conhecem GPS ou já utilizaram em seu celular algum aplicativo similar, que identifica localizações. Com relação ao seu funcionamento, os estudantes apontam que utilizam satélites para o seu desempenho, mas que não sabem como isso se realiza.

De forma geral, a maioria dos estudantes possui um conhecimento prévio com relação aos conceitos matemáticos (raio, diâmetro, produto notável, centro da circunferência, distância entre pontos) e da geografia (latitude e longitude). Assim sendo, em busca de melhor

compreensão, visando ao tratamento do que foi observado, passa-se à análise textual, selecionando respostas consideradas esclarecedoras, em relação ao que se procurou demonstrar.

Nesse sentido, entende-se que, muitas vezes, alguns conhecimentos demonstrados, aparentemente, não estão consolidados, como, por exemplo, na resposta do estudante **E5** para a questão 6.

Figura 1 – Destaque da resposta do estudante **E5** ao questionário



Fonte: Acervo da autora (2017).

Pode-se dizer que o estudante possui um dos conhecimentos necessários, visto que consegue, com suas palavras, apresentar o significado de centro de uma circunferência, porém o fato de não ter utilizado a definição propriamente dita, leva a entender que pode-se partir daí para o estudo da equação da circunferência, considerando que uma definição matemática do centro de uma circunferência é indispensável para a boa compreensão e dedução da própria equação deste ente geométrico. Com efeito, “uma circunferência é um conjunto de todos os pontos em um plano, equidistantes de um ponto fixo. O ponto fixo é chamado de centro, e a distância fixa é chamada de raio da circunferência”. (LEITHOLD, 1994, p. 25). A partir disso, cabe aos professores, levar em consideração tal conhecimento prévio e promover a retomada de conceitos necessária, dando ao estudante as condições para a aprendizagem de novos conceitos. Para Ausubel (2003), o que o estudante já sabe é a ponte para a construção de um novo conhecimento, por meio da reconfiguração das estruturas mentais existentes ou da elaboração de outras novas.

Ainda com relação ao questionário, foram consideradas todas as respostas apresentadas, pois elas são fundamentais para o processo de aprendizagem e de construção de conceitos, tendo mostrado que conhecimentos prévios existem, mas devem ser considerados na continuação. Ausubel (2003, p. 17) afirma: “O fator isolado mais importante influenciando a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Descubra isso e ensine-o de acordo.” Com efeito, é o que se busca com a proposta da pesquisa, que visa a identificar o que o estudante sabe para construir o conhecimento a partir de seus subsunçores. A Figura 2 apresenta a resposta do estudante **E3** para a questão 7.

Figura 2 – Destaque da resposta do estudante E3 ao questionário

7- Como você resolveria o seguinte produto notável $(x - 4)^2$?

$$(x-4) + (x-4) \quad x=4$$

$$x^2 = 16$$

Fonte: Acervo da autora (2017).

Analisando a resposta do estudante E3 à questão apresentada na Figura 2, constata-se que o mesmo consegue identificar o produto notável como uma potência, mas a escreve como uma soma ao invés de uma multiplicação. Ainda, ao realizar o produto notável, realiza a potência apenas do primeiro e segundo termos, não aplicando a propriedade distributiva da multiplicação. A partir do resultado encontrado pelo estudante, ele conclui ser uma equação de segundo grau e a resolve.

Ainda, com relação à questão 8, constata-se que 58% dos estudantes possuem parcialmente o conhecimento necessário, pois responderam que, para definir o centro da circunferência, deveriam encontrar o ponto localizado no meio dos pontos A e B e que o raio seria a medida desse ponto a um dos pontos dados. Embora tenham apresentado o entendimento necessário para a resolução da questão, mesmo sem se referirem à distância, percebe-se que não fizeram relação com o conteúdo estudado anteriormente, que envolvia o cálculo das coordenadas do ponto médio, e a distância entre dois pontos no Plano Cartesiano.

Assim sendo, antes de passar à próxima etapa, como forma de utilizar os conhecimentos prévios demonstrados, para a reconstrução dos conceitos necessários para avançar, devolveram-se recortes das respostas apresentadas no questionário e solicitou-se que formassem duplas, organizadas de forma a juntar os estudantes que apresentavam o conhecimento necessário com os que apresentavam alguma dificuldade. Os estudantes deveriam realizar as correções necessárias, tanto conceituais como de cálculo, com o auxílio de livros e/ou pesquisas na internet, apontando onde estava o erro nessas respostas. Entende-se, assim como Dewey (1959), que o estudante deve ter condições de ampliar seus estudos, sem a dependência do professor. Isso também vai ao encontro da teoria de Novak (2000), quando afirma que é papel do professor orientar o estudante, para que possa superar sua condição inicial no processo de aprendizagem e “aprender a aprender”, expressão bastante explorada pelo autor.

Feito isto, a professora abriu espaço para comentários, discutindo as respostas apresentadas. Em continuação apresentou um questionamento: *Onde estamos? Através de um*

GPS é possível encontrarmos a nossa localização. Como isso é feito? Como funciona um GPS?. No Quadro 6 apresentam-se as respostas destacadas para análise.

Quadro 6 – Diálogos sobre o GPS I

E1: – *Profe, a gente está na escola, mas se tivéssemos o GPS aqui ele marca a gente como um ponto na cidade de Farroupilha.*

E2: – *Isso, ele dá até a rua que estamos localizados!*

Professora: – *E como ele faz para identificar a nossa localização? (os estudantes se olharam, parecendo fazer o mesmo questionamento).*

E3: – *Como ele faz eu não sei professora. Mas eu usei o UBER para ir para casa outro dia e ele também funciona com o GPS, o motorista sabia onde eu estava e pelo celular eu sabia por que rua o carro estava vindo. Isso é bem legal!*

E4: – *Então o GPS sabe onde a gente está pela internet.*

Professora: – *Vamos juntos descobrir então!*

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Em seguida a esta conversa, foi entregue aos estudantes o material que fundamenta essa situação-problema inicial, ou seja, um texto explicativo adaptado pela pesquisadora e com base em Lima (2013) sobre o funcionamento do GPS e a localização de coordenadas geográficas conforme Apêndice G. Durante e após a leitura do mesmo continuaram indagações apresentadas no Quadro 7.

Quadro 7– Diálogos sobre o GPS II

E1: – *Profe, precisa saber Matemática e geografia para entender o GPS.*

E2: – *Sim, e está certo, porque aqui no texto fala em ponto de origem que é onde a gente está ou no plano cartesiano que estudamos é um ponto e o ponto de chegada, é onde queremos ir, outro ponto, tipo quando a gente estudou a distância entre dois pontos então?*

Professora: – *Perfeita colocação! No plano cartesiano isso seria exatamente a distância entre dois pontos em linha reta, mas será que conseguimos nos locomover sempre em linha reta?*

E3: – *Professora, mas os satélites dão conta de encontrar qualquer localização? Quantos satélites têm ao redor da Terra?*

Professora: *Vamos ver?*

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Para ampliar conhecimentos e responder aos questionamentos apresentados, os estudantes assistiram ao vídeo “As aventuras do Geodetitive”³, que relata a curiosidade de um

³ Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=2jEgSZwm-nk>>. Acesso em: 12 mar. 2017.

estudante com relação ao funcionamento do GPS e a programação matemática realizada por ele, para localizar um ponto/pessoa.

Percebeu-se que os estudantes se mostraram muito curiosos com tal situação e ressaltaram que não sabiam que, por trás de um simples GPS, ou de aplicativos de celular que eles utilizam para calcular a distância percorrida quando andam de bicicleta ou do próprio Uber, existe tanta matemática. Exemplo disso é a manifestação do Estudante **E5**: *“Professora, eu não sabia que por trás de tudo tinha Matemática. Com certeza tem muita conta que pode ser feita aqui. Eu uso o Strava (aplicativo de celular) quando ando de bicicleta e ele fica mostrando onde eu estou, então faz essa conta o tempo inteiro! Tem como a gente testar isso?”* A professora respondeu: *“Tem sim, vamos tentar?”*

Assim, para verificar a trilateração apresentada pelo GPS, foi proposta aos estudantes uma atividade prática, visando, conforme sugere Ausubel (2003), a proporcionar a diferenciação progressiva, pois partia de uma situação geral para uma maior especificidade, de forma que os estudantes, através da geometria, conseguiram identificar uma localização mediante uma situação-problema e utilizando-se dos mesmos conceitos do GPS. No Quadro 8, descreve-se a situação-problema proposta.

Quadro 8 – Situação-problema proposta na etapa da diferenciação progressiva

ATIVIDADE 1 – É perto do meio-dia e você está perdido no interior de Sergipe entre Malhador e Divina Pastora. Você dispõe de um mapa, conforme a figura abaixo, e material de desenho geométrico, e sabe que em Divina Pastora, Riachuelo e Santa Rosa de Lima (cidades próximas) existem igrejas onde os sinos soam precisamente a cada hora, sendo ouvidos a grandes distâncias. Identifique no mapa essas cidades.



Mapa da região

FIGURA 6: Disponível em: https://bdt.ufs.br/bitstream/tede/303/1/DAVI_DANTAS_LIMA.pdf. (Acesso em 11 de junho de 2016)

Digamos que o seu relógio e o relógio das igrejas estejam sincronizados e que cada sino tenha um timbre diferente, o que permite identificá-los. Suponha que:

- 12,5 segundos após o meio dia você ouve o sino de Riachuelo;
- O sino de Divina Pastora você ouve 17,3 segundos após o meio-dia;
- E por fim, o sino de Santa Rosa de Lima em 19,8 segundos.

Para tentar se localizar, você precisa saber a que distância se encontra de cada cidade, certo? Como você faz para calcular essa distância? Vamos lembrar as aulas de física!

E qual a velocidade com que o som se propaga no ar? _____

Sabendo disso, você pode, então, calcular as distâncias r_1 , r_2 e r_3 em relação a Riachuelo, Divina Pastora e Santa Rosa de Lima, respectivamente.

$$r_1 = \text{___} \times \text{___} = \text{___} \text{ m}$$

$$r_2 = \text{___} \times \text{___} = \text{___} \text{ m}$$

$$r_3 = \text{___} \times \text{___} = \text{___} \text{ m}$$

Assim, você traça no mapa uma circunferência centrada em Riachuelo, de raio r_1 e outra, centrada em Divina Pastora, de raio r_2 . As circunferências se intersectam? Em quantos pontos?

Agora, trace uma terceira circunferência centrada em Santa Rosa de Lima, de raio r_3 . As circunferências agora se intersectam? Em quantos pontos? _____

Em qual ponto você está? Conseguiu descobrir? Justifique.

É importante considerar que, nesse exemplo o som não sofre interferências do vento, relevo, ou de outra, e que você tem conhecimento de desenho geométrico, proporção, velocidade e escalas. O exemplo considera a região como um plano, logo admitiu-se uma altitude constante.

De modo geral, *conhecendo as distâncias de onde estamos até três pontos bem localizados, em um sistema de coordenadas, a nossa localização é dada por um único ponto.*

Fonte: Situação-problema adaptada pela pesquisadora, a partir de Lima (2013).

Para resolvê-la, além de conceitos relacionados à Matemática, como a localização de pontos no Plano Cartesiano, neste caso, no mapa, precisavam lembrar do significado de velocidade, distância e tempo, conceitos da física, pois através do cálculo da distância, que corresponde ao raio da circunferência, conseguiriam desenhar a mesma no mapa. Com isso, poderiam fazer a trilateração necessária para localizar onde a pessoa está.

Durante a atividade, percebeu-se muita dificuldade dos estudantes no manuseio do compasso, e alguns chegaram a comentar que nunca haviam utilizado. A atividade foi realizada em duplas, visto que a turma era pequena e nem todos tinham o material necessário. Desta forma, poderiam emprestar e auxiliar os colegas quando necessário.

Figura 3 – Estudantes resolvendo a situação-problema



Fonte: Acervo da pesquisadora (2017).

Primeiramente, os estudantes foram desafiados a resolver a situação-problema e identificar a medida correspondente ao raio de cada circunferência. Após desenharem as três circunferências com os respectivos raios, ficaram empolgados, quando perceberam que tinham encontrado o ponto de intersecção entre as três circunferências, ou seja, o ponto onde a pessoa estava localizada. A partir desta atividade, realizaram a etapa de maior complexidade, em que, baseados em informações do Município de Farroupilha, deveriam localizar onde uma pessoa está.

Percebeu-se os estudantes bastante empolgados para realizar a atividade e acredita-se que um dos fatores responsável por tal entusiasmo pode ser atribuído ao fato de estarem tratando de uma situação envolvendo a própria cidade em que residem ou estudam. Primeiramente, calcularam o raio correspondente a cada equação e, após encontrar a solução, não ficaram satisfeitos com o resultado encontrado e investigaram no Google Maps a localização exata, ou seja, o que se encontrava nesse local.

Para a próxima tarefa, na etapa da reconciliação integradora, os estudantes deveriam criar uma situação envolvendo a trilateração e precisariam ter a noção de escala. Como essa noção passou despercebida na análise dos conhecimentos prévios, os estudantes foram questionados sobre o que é escala. No Quadro 9, apresenta-se uma parte do diálogo ocorrido sobre o que é escala e em que situações depara-se com ela.

Quadro 9 – Diálogo gerado sobre o significado de escala

E5: – Escala é aquilo que usam num mapa. O desenho do mapa não é do tamanho real, é em escala.

E6: – Isso, a mesma coisa quando tiramos uma foto, sai em escala, não sai do nosso tamanho real.

Professora: – E o que significa a escala mostrada aí no mapa que vocês receberam?

E1: – Que cada 1 cm que está desenhado no mapa equivale na verdade a 4 km, isso porque aqui tem um pedaço só de um mapa. Quando se tem um mapa de uma cidade inteira, a escala que é utilizada tem que ser muito maior.

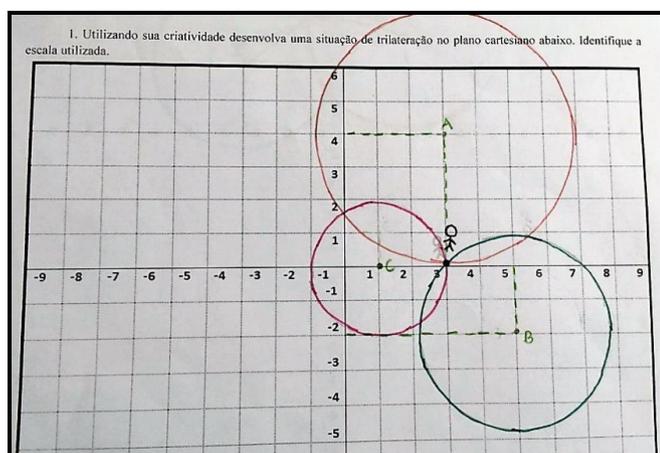
Professora: – Será que podemos utilizar qualquer escala?

E3: – Acho que sim professora. Desde que seja escrito a escala que foi utilizada.

Fonte: Acervo da pesquisadora (2017).

Os estudantes foram questionados sobre os diferentes tipos de escala que poderiam ser utilizados na atividade. As respostas foram registradas no quadro e após foi proposto o exercício 1, utilizando uma escala escolhida. Nesse exercício, solicitou-se que, utilizando a própria criatividade, desenvolvessem uma situação de trilateração no plano cartesiano. A Figura 4 mostra a resolução apresentada pelo estudante **E12** para o exercício 1.

Figura 4 – Resolução apresentada pelo estudante **E12** para o exercício 1



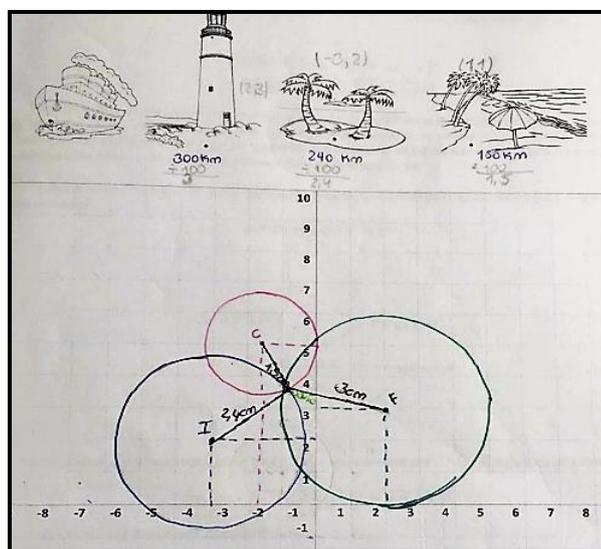
Fonte: Acervo da pesquisadora (2017).

Nesta atividade, a pesquisadora não solicitou que os estudantes descrevessem como chegaram ao resultado, o que foi adaptado para a UEPS a ser aplicada posteriormente, na pesquisa. Conforme pode ser observado na Figura 4, o estudante realizou o processo contrário do GPS, ou seja, não partiu das localizações para o ponto em comum entre as circunferências. Primeiramente ele definiu um ponto de intersecção entre as três circunferências, ou seja, o ponto em que a pessoa estaria localizada; neste caso, o ponto (3,0) representado pelo boneco

na figura. Após essa marcação, escolheu algumas medidas aleatórias para os raios e, com o auxílio do compasso, desenhou as circunferências, de modo que passassem pelo ponto (3,0) escolhido.

Já no exercício 2, solicitou-se que encontrassem a localização exata de um navio, partindo de algumas distâncias definidas e, com base na escala que escolhessem, calculassem o raio da circunferência a ser desenhada. Na Figura 5 apresenta-se a resolução do estudante **E5**, que realizou o mesmo processo utilizado pelo GPS, para encontrar o ponto de intersecção das circunferências.

Figura 5 – Resolução apresentada pelo estudante **E5** para o exercício 2



Fonte: Acervo da pesquisadora (2017).

Na resolução apresentada pela estudante, na Figura 5, observa-se que, primeiramente, a mesma definiu as três localizações iniciais. Definiu o raio de duas circunferências (uma com 2 cm e a outra com 4 cm), escolhidos por ela e com uma das escalas sugeridas pelos estudantes. Para a localização da terceira circunferência, ela partiu do ponto de intersecção das figuras já desenhadas, definiu novamente o raio e, com o auxílio do compasso, construiu a circunferência que faltava.

Após a resolução geométrica, foram utilizadas novamente as ideias de Ausubel (2003), sobre reconciliação integrativa, para apontar similaridades e diferenças importantes nas construções efetuadas pelos estudantes, associando as diferentes representações com as relações realizadas pelo GPS para cada localização.

Os estudantes foram questionados baseando-se no exercício resolvido anteriormente sobre como é possível encontrar a equação da circunferência, conhecendo apenas a distância

entre dois pontos já estudada anteriormente. Buscando conceitos anteriores, mostrou-se que é possível escrever uma equação geral e uma equação reduzida da circunferência, assim como feito com a reta. Para verificar a aprendizagem, os estudantes foram incentivados a resolver os exercícios propostos. Naquele momento, buscou-se promover a compreensão de novos significados, fazendo relação entre a prática (GPS e construção de circunferências de forma geométrica) e as novas ideias (representação algébrica).

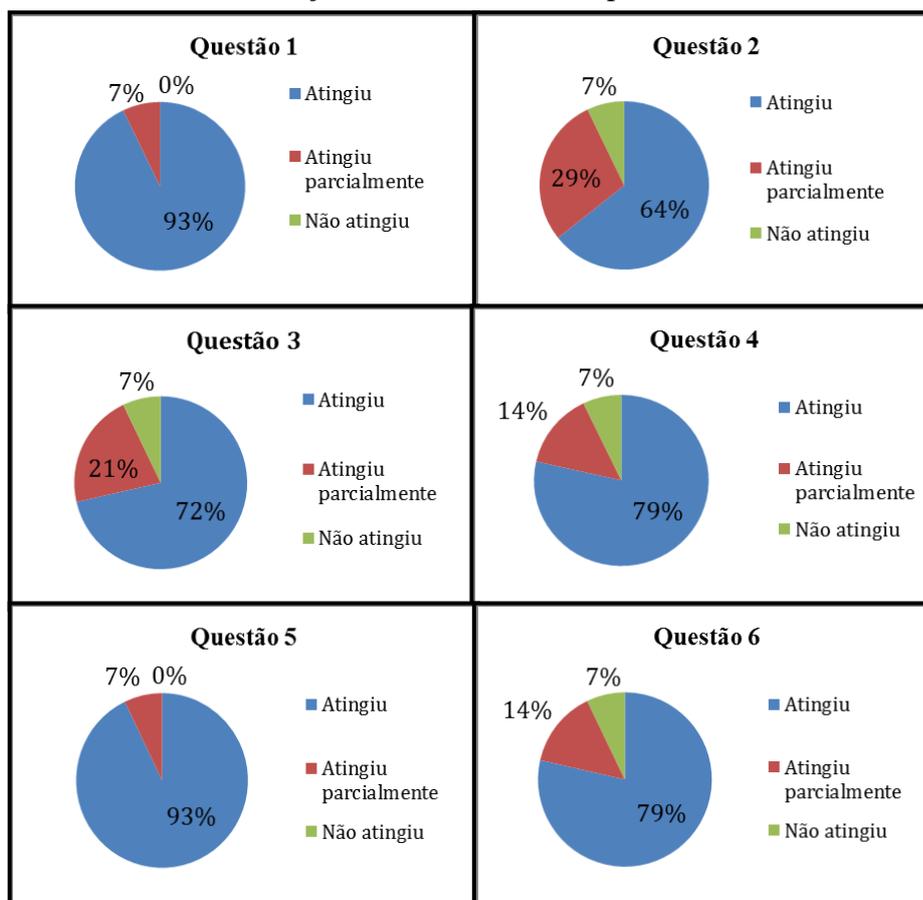
Na resolução dos exercícios propostos, percebeu-se que os estudantes resolveram com facilidade os exercícios que solicitavam a equação geral e a equação reduzida da circunferência, bem como os exercícios para calcular o centro e o raio da circunferência, a partir de sua equação reduzida.

A maior dificuldade apresentou-se quando foi solicitado que, partindo da equação geral da circunferência, escrevessem a equação reduzida da mesma. Para que se possa reduzir a equação geral da reta, os quadrados devem ser completados, obtendo trinômios quadrados perfeitos que, fatorados, resultam em quadrados da soma ou da diferença de dois termos, conceitos abordados no Ensino Fundamental.

Após a revisão, com as explicações necessárias, os estudantes conseguiram realizar a atividade, cujo êxito pode ser verificado na avaliação somativa realizada. Dos 15 estudantes participantes, 12 acertaram a questão que solicitava, a partir da equação geral da circunferência, determinar o raio e o centro da mesma.

No Quadro 10 apresenta-se uma análise quantitativa, complementando a análise qualitativa realizada.

Quadro 10 – Resultado da avaliação somativa realizada pelos estudantes na UEPS-piloto



Fonte: Elaboração da pesquisadora (2017).

Com base na análise quantitativa dos resultados, pode-se afirmar que todas as questões apresentaram altos índices de acerto.

Durante a realização da avaliação somativa, verificou-se interesse, organização e apropriação de conhecimentos referentes à Equação da Circunferência. De maneira geral, foi possível identificar que muitos conseguiram integrar novos conceitos, se comparado com os conhecimentos prévios identificados e descritos no início dessa seção. Acredita-se que a utilização de recursos digitais (o GPS através do celular), a linguagem com que a UEPS foi apresentada e as atividades realizadas, mostrando a aplicação do conteúdo, auxiliaram na construção da aprendizagem.

Nesse sentido, realizando uma comparação das respostas do questionário inicial, com as que foram apresentadas na avaliação somativa, foi possível considerar o material utilizado como potencialmente significativo e que há indícios de aprendizagem significativa, uma vez que os estudantes demonstraram ter ampliado o conhecimento, conseguindo relacionar novos conceitos com o cotidiano. Com efeito, segundo Moreira (2001), um material é considerado potencialmente significativo quando a relação entre a estrutura lógica do conhecimento em si

e a estrutura psicológica do conhecimento do estudante é levada em consideração na sua elaboração.

Para Ausubel (2003) a compreensão de conceitos é progressiva e possível dentro de um currículo coerente. Ela não é a substituição de um conceito por outro e, sim, a mudança de uma estrutura para outra. De fato, com base nos conhecimentos prévios, discutidos na análise das respostas ao questionário inicial, todas as demais atividades práticas foram organizadas, levando em consideração a necessidade de que o estudante pudesse estabelecer relações entre elas e seus conhecimentos prévios.

No final da aplicação, como oitava etapa da UEPS, realizou-se com os estudantes a avaliação da UEPS. A mesma foi realizada na forma de conversa com a turma, organizada em forma de semicírculo. Os estudantes foram questionados quanto à aplicação da UEPS, quais os pontos positivos, negativos e aspectos a melhorar. Durante a conversa, a pesquisadora registrou no diário de bordo todos os apontamentos realizados. Todos os estudantes apontaram o GPS, utilizado como organizador prévio, como uma forma atrativa de identificar, no dia a dia, a aplicação do conteúdo. Ainda, mostraram satisfação com o trabalho em duplas e destacaram a participação e o envolvimento de todos nas atividades. Em contrapartida, como aspectos negativos, apontaram a ausência de colegas em algumas aulas. É prejudicial ao andamento do trabalho, visto que não tinham com quem discutir e acabavam se juntando a outro grupo. Como aspecto a ser melhorado, indicaram a necessidade de mais exercícios, principalmente dos que envolviam a identificação do raio e do centro da circunferência, a partir da sua equação geral, o que foi levado em consideração na reelaboração da UEPS sobre esse mesmo tema, no planejamento da pesquisa.

Com base nessa experiência, a pesquisa evoluiu com a programação de cinco UEPS, levando em consideração as contribuições e a análise da UEPS-piloto. Uma das UEPS, a de número 4, tem como tema o que foi trabalhado na UEPS-piloto com as devidas adaptações, reconhecidas com base na análise.

O planejamento de cada uma das demais UEPS é apresentado nas próximas seções, com os objetivos de aprendizagem, as atividades programadas, bem como o tempo previsto para cada uma das etapas.

4.2 PLANEJAMENTO E ORGANIZAÇÃO DA UEPS1 – PLANO CARTESIANO

Quadro 11 – UEPS 1: Plano Cartesiano

(Continua)

Etapa 1	Definição do tema	Plano Cartesiano
Etapa 2	Conhecimentos prévios	Situação inicial
Objetivo	<ul style="list-style-type: none"> • Verificar os conhecimentos prévios dos estudantes com relação ao Plano Cartesiano • Resolver uma situação problema envolvendo o conceito de localização de pontos no plano cartesiano 	
Atividade	1- Questionário para verificação dos conhecimentos prévios a partir da situação problema: “Como localizar o seu lugar dentro de uma sala de cinema?”	
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)	
Etapa 3	Situação-problema introdutória	
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer o Plano Cartesiano em situações do dia a dia • Transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos aprendidos sobre Plano Cartesiano para localizar pontos em mapas 	
Atividades	1- Resolução da situação-problema “Onde estamos? Através de um mapa da cidade de Farroupilha é possível encontrar a nossa localização. Identifique no mapa o local exato onde a escola está localizada. Você consegue identificar no mapa a sua casa?” 2- Localização de alguns pontos principais no mapa da cidade 3- Construção de conceitos envolvendo o plano cartesiano através do material disponibilizado aos estudantes	
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)	
Etapa 4	Diferenciação progressiva	
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar as características de um Plano Cartesiano e trabalhar as nomenclaturas referentes ao Plano Cartesiano (eixo, abscissa, ponto de origem, quadrantes) • Localizar um ponto no plano cartesiano através de suas coordenadas • Identificar as coordenadas de um ponto no plano • Representar pares ordenados no Plano Cartesiano • Reconhecer o Plano Cartesiano em situações do dia a dia • Transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos aprendidos sobre plano cartesiano para localizar pontos em mapas 	
Atividades	1- Leitura do texto explicativo sobre a história do Plano Cartesiano e discussões 2- Identificação dos quadrantes no Plano Cartesiano 3- Construção de um Plano cartesiano – prancha – atividade para casa 4- Construção de conceitos envolvendo o Plano Cartesiano, através do material disponibilizado aos estudantes	
Tempo previsto	2 períodos de aula (57 minutos cada)	
Etapa 5	Complexidade	
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar as características de um Plano Cartesiano e trabalhar as nomenclaturas referentes ao estudo do Plano Cartesiano (eixo, abscissa, ponto de origem, quadrantes) • Localizar um ponto no Plano Cartesiano através de suas coordenadas • Representar pares ordenados no Plano Cartesiano • Reconhecer o Plano Cartesiano em situações do dia a dia • Transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos aprendidos sobre Plano Cartesiano, para localizar pontos em mapas 	
Atividades	1- Elaboração de uma situação-problema envolvendo deslocamento e localização de pontos (pares ordenados) na cidade de Farroupilha, utilizando-se dos conceitos de: eixo, abscissa, ponto de origem e quadrantes	
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)	
Etapa 6	Reconciliação integradora	
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar as características de um Plano Cartesiano e trabalhar as nomenclaturas referentes ao estudo do Plano Cartesiano (eixo, abscissa, ponto de origem, quadrantes) • Localizar um ponto no Plano Cartesiano através de suas coordenadas • Reconhecer o Plano Cartesiano em situações do dia a dia 	

	<ul style="list-style-type: none"> • Transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos aprendidos sobre Plano Cartesiano, para localizar pontos em mapas
Atividades	<ol style="list-style-type: none"> 1- Problemas de localização de pontos na prancha 2- Exercícios
Tempo previsto	2 períodos de aula (57 minutos cada)
Etapa 7	Avaliação da aprendizagem na UEPS
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar as características de um Plano Cartesiano e trabalhar as nomenclaturas referentes ao estudo do Plano Cartesiano (eixo, abscissa, ponto de origem, quadrantes) • Localizar um ponto no Plano Cartesiano através de suas coordenadas • Reconhecer o Plano Cartesiano em situações do dia a dia • Transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos aprendidos sobre Plano Cartesiano, para localizar pontos em mapas
Atividade	1- Avaliação individual escrita.
Tempo previsto	2 períodos de aula (57 minutos cada)
Etapa 8	Avaliação da UEPS
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Gerenciar o tempo, respeitando o ritmo de aprendizagem dos educandos • Identificar se as atividades promovidas foram potencialmente significativas, buscando evidências de aprendizagem significativa • Avaliar as potencialidades e fragilidades da UEPS
Atividades	<ol style="list-style-type: none"> 1- Análise de todas as etapas da UEPS, complementando a avaliação formativa e a autoavaliação, destacando-se alguns aspectos atitudinais que foram observados, tais como: capricho na entrega do material, espreito aos prazos da entrega ou realização das atividades, comportamento e comprometimento na realização das atividades em sala de aula 2- Análise da avaliação somativa: realizada de forma individual escrita na etapa anterior 3- Avaliação da UEPS com o levantamento, através de discussão em grupo, das potencialidades e fragilidades da UEPS aplicada
Tempo previsto	Para a autoavaliação e levantamento das potencialidades e fragilidades, destina-se um período de aula (57 minutos), e a avaliação formativa será realizada durante a aplicação da UEPS, em todos os períodos anteriores

Fonte: Elaboração da pesquisadora (2018).

4.3 PLANEJAMENTO E ORGANIZAÇÃO DA UEPS 2 – ESTUDO DO PONTO

Quadro 12 – UEPS 2: Estudo do Ponto

(Continua)

Etapa 1	Definição do tema	Estudo do Ponto
Etapa 2	Conhecimentos prévios	Situação inicial
Objetivo	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre a localização de pontos no Plano Cartesiano, cálculo e conceito de distância entre dois pontos, ponto médio e alinhamento partindo de situações práticas 	
Atividade	1- Questionário para verificação dos conhecimentos prévios, a partir da situação problema: “A trajetória desenvolvida pela empresa Ecofar, empresa farroupilhense responsável pelo recolhimento do lixo orgânico e seletivo na cidade para dar conta do recolhimento”.	
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)	
Etapa 3	Situação-problema introdutória	
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Ser capaz de trabalhar no Plano Cartesiano com diferentes pontos • Calcular a distância de dois pontos usando suas coordenadas • Calcular o ponto médio entre dois pontos usando suas coordenadas • Realizar os cálculos corretos para identificar pontos colineares e não colineares • Identificar geometricamente o baricentro de um triângulo e calculá-lo algebricamente 	

	<ul style="list-style-type: none"> Compreender e utilizar o pensamento geométrico para resolver situações-problema da Geometria Analítica Articular o conhecimento entre a álgebra e a geometria numa perspectiva interdisciplinar Transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos aprendidos sobre plano cartesiano para calcular distâncias ou ponto médio no mapa de Farroupilha
Atividades	<ol style="list-style-type: none"> Leitura do texto disponibilizado com a resolução de atividades no Plano Cartesiano construído na UEPS Construção de conceitos envolvendo o plano cartesiano através do material disponibilizado aos estudantes
Tempo previsto	4 períodos de aula (57 minutos cada)
Etapa 4	Diferenciação progressiva
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> Resolver problemas que envolvam a distância entre dois pontos, ponto médio, baricentro, localizações de pontos no plano e alinhamento de pontos Confirmar geometricamente a solução encontrada algebricamente para uma situação.
Atividades	<ol style="list-style-type: none"> Resolução de exercícios utilizando a prancha e a resolução algébrica Construção de conceitos envolvendo o Plano Cartesiano através do material disponibilizado aos estudantes
Tempo previsto	3 períodos de aula (57 minutos cada)
Etapa 5	Complexidade
Objetivo	<ul style="list-style-type: none"> Resolver problemas que envolvam a distância entre dois pontos, ponto médio, baricentro, localizações de pontos no plano e alinhamento de pontos
Atividade	1- Resolver uma situação-problema envolvendo distância, ponto médio e alinhamento de pontos, a partir de uma situação-problema envolvendo a cidade de Farroupilha
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)
Etapa 6	Reconciliação integradora
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> Representar os pontos no plano cartesiano em pares ordenados e resolver situações-problemas envolvendo deslocamento no plano Reconhecer o Plano Cartesiano em situações do dia a dia Construir situações-problema envolvendo os conceitos de: distância, ponto médio, baricentro e alinhamento de pontos Transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos aprendidos sobre Plano Cartesiano para localizar pontos em mapas Gerenciar o tempo, respeitando o ritmo de aprendizagem dos educandos Identificar, através de atividades da UEPS, se houve aprendizagem significativa
Atividade	1- Elaboração de uma situação-problema baseada no mapa da cidade, envolvendo os conceitos de: distância, ponto médio, baricentro e alinhamento de pontos
Tempo previsto	2 períodos de aula (57 minutos cada)
Etapa 7	Avaliação da aprendizagem na UEPS
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> Identificar pares ordenados no Plano Cartesiano, bem como o seu respectivo quadrante; Ser capaz de trabalhar no Plano Cartesiano com diferentes pontos Calcular a distância de dois pontos, ponto médio, mediana e baricentro usando suas coordenadas; Realizar os cálculos corretos para identificar pontos colineares e não colineares Compreender e utilizar o pensamento geométrico para resolver situações-problema da Geometria Analítica Transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos aprendidos sobre Plano Cartesiano, para calcular distâncias ou ponto médio no mapa de Farroupilha Identificar, através de atividades da UEPS, se houve aprendizagem significativa
Atividade	1- Avaliação individual escrita
Tempo previsto	2 períodos de aula (57 minutos cada).
Etapa 8	Avaliação da UEPS
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> Gerenciar o tempo, respeitando o ritmo de aprendizagem dos educandos Identificar se as atividades promovidas foram potencialmente significativas, buscando evidências de aprendizagem significativa Avaliar as potencialidades e fragilidades da UEPS

(Conclusão)

Atividades	1- Análise de todas as etapas da UEPS, complementando a avaliação formativa e autoavaliação, destacando-se alguns aspectos atitudinais que foram observados, tais como: capricho na entrega do material, respeito aos prazos da entrega ou realização das atividades, comportamento e comprometimento na realização das atividades em sala de aula 2- Análise da avaliação somativa: realizada de forma individual, descrita na etapa anterior 3- Avaliação da UEPS, através de discussão em grupo, das potencialidades e fragilidades da UEPS aplicada
Tempo previsto	Para esta etapa destina-se 1/2 período de aula (30 minutos), lembrando que a avaliação formativa é realizada em todas as etapas, conforme abordado no capítulo 3, seção 3.6

Fonte: Elaboração da pesquisadora (2018).

4.4 PLANEJAMENTO E ORGANIZAÇÃO DA UEPS 3 – ESTUDO DA RETA

Quadro 13 – UEPS 3: Estudo da Reta

(Continua)

Etapa 1	Definição do tema	Estudo da Reta
Etapa 2	Conhecimentos prévios	Situação inicial
Objetivo	<ul style="list-style-type: none"> Identificar os conhecimentos prévios dos estudantes através de resolução de uma situação-problema, proposta a partir do mapa da cidade 	
Atividade	1- Questionário para verificação dos conhecimentos prévios, a partir da situação-problema que envolve a identificação de ruas paralelas, concorrentes, coincidentes e perpendiculares no mapa da cidade, além da escrita algébrica da equação de uma reta	
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)	
Etapa 3	Situação-problema introdutória	
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> Identificar corretamente o coeficiente angular e linear diferenciando o significado dos mesmos Utilizar o <i>software</i> GeoGebra, para analisar paralelismo, perpendicularismo ou outra posição entre retas, e também se o comportamento de uma reta altera o coeficiente angular e linear da mesma 	
Atividade	1- Construção de conceitos envolvendo o coeficiente angular e linear de uma reta, a partir do GeoGebra, através do material disponibilizado aos estudantes	
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)	
Etapa 4	Diferenciação progressiva	
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> Identificar corretamente o coeficiente angular e linear de uma reta Ser capaz de determinar a equação geral e reduzida de uma reta; Diferenciar as condições para retas paralelas, perpendiculares, coincidentes e concorrentes. Ser capaz de calcular a distância entre ponto e reta Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas Calcular corretamente o ângulo formado por duas retas que se interceptam no Plano Cartesiano Identificar o ponto de intersecção entre duas retas Calcular a área de um triângulo sabendo os seus vértices Articular o conhecimento entre a Álgebra e a Geometria, utilizando o <i>software</i> GeoGebra 	
Atividades	1- Leitura do texto e resolução de exercícios utilizando o <i>software</i> GeoGebra 2- Construção de conceitos envolvendo o Plano Cartesiano, através do material disponibilizado aos estudantes	
Tempo previsto	4 períodos de aula (57 minutos cada)	
Etapa 5	Complexidade	
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> Compreender e utilizar o pensamento geométrico para resolver situações-problema da Geometria Analítica Articular o conhecimento entre a Álgebra e a Geometria, numa perspectiva 	

	interdisciplinar
Atividades	1- Resolver uma situação-problema envolvendo retas identificadas em figuras, através do <i>software</i> GeoGebra
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)
Etapa 6	Reconciliação integradora
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender e utilizar o pensamento geométrico para resolver situações-problema da Geometria Analítica • Articular o conhecimento entre a Álgebra e a Geometria, numa perspectiva interdisciplinar
Atividade	1- Elaboração de uma situação-problema baseada no mapa da cidade, envolvendo os conceitos de: equação da reta, ângulo entre retas, distância entre o ponto e a reta e tipos de reta
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)
Etapa 7	Avaliação da aprendizagem na UEPS
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar corretamente o coeficiente angular e linear, diferenciando os significados dos mesmos • Ser capaz de determinar a equação geral e reduzida de uma reta • Diferenciar as condições para retas paralelas, perpendiculares, coincidentes e concorrentes • Ser capaz de calcular a distância entre ponto e reta • Calcular corretamente o ângulo formado por duas retas que se interceptam no Plano Cartesiano • Identificar o ponto de intersecção entre duas retas • Articular o conhecimento entre a Álgebra e a Geometria numa perspectiva interdisciplinar • Identificar, através de atividades da UEPS, se houve aprendizagem significativa
Atividade	1- Avaliação individual escrita
Tempo previsto	2 períodos de aula (57 minutos cada)
Etapa 8	Avaliação da UEPS
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Gerenciar o tempo, respeitando o ritmo de aprendizagem dos educandos • Identificar, se as atividades promovidas foram potencialmente significativas, buscando evidências de aprendizagem significativa • Avaliar as potencialidades e fragilidades da UEPS
Atividades	<ol style="list-style-type: none"> 1- Análise de todas as etapas da UEPS, complementando a avaliação formativa e autoavaliação destacando-se alguns aspectos atitudinais que foram observados, tais como: capricho na entrega do material, respeito aos prazos da entrega ou realização das atividades, comportamento e comprometimento na realização das atividades em sala de aula 2- Análise da avaliação somativa: realizada de forma individual, descrita na etapa anterior 3- Avaliação da UEPS, através de discussão em grupo, das potencialidades e fragilidades da UEPS aplicada
Tempo previsto	Para esta etapa, destina-se 1/2 período de aula (30 minutos), lembrando que a avaliação formativa é realizada em todas as etapas, conforme abordado no capítulo 3, seção 3.6

Fonte: Elaboração da pesquisadora (2018).

4.5 PLANEJAMENTO E ORGANIZAÇÃO DA UEPS 4 – ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

Levando em consideração a UEPS-piloto, aplicada e analisada na seção 4.1 deste capítulo, realizou-se um novo planejamento desta, que envolve a Equação da Circunferência, primeiro adaptando as atividades ao conhecimento prévio dos novos sujeitos da pesquisa. Todos os apontamentos feitos pelos estudantes, na avaliação da atividade-piloto, foram levados em consideração para a reelaboração dessa UEPS e são descritos detalhadamente na

análise da mesma, na seção 5.4. O Quadro 14 apresenta a UEPS 4 com suas devidas alterações, em relação à UEPS-piloto, apresentada na seção 4.1 deste capítulo.

Quadro 14 – UEPS 4: Equação da Circunferência

(continua)

Etapa 1	Definição do tema	Estudo da Circunferência
Etapa 2	Conhecimentos prévios	
Objetivo	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar os conhecimentos prévios dos estudantes através de um questionário 	
Atividade	1- Questionário para verificação dos conhecimentos prévios, buscando identificar conhecimentos básicos estudados no Ensino Fundamental (raio, diâmetro, centro da circunferência, produto notável, latitude e longitude), e que relaciona o conteúdo (equação da circunferência) com a aplicação do uso do GPS	
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)	
Etapa 3	Situação-problema introdutória	
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer a importância da equação da circunferência em situações do dia a dia • Transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos de construção de circunferência para localizar pontos com o GPS • Gerenciar o tempo, respeitando o ritmo de aprendizagem dos educandos • Identificar, através de atividades da UEPS, se houve aprendizagem significativa 	
Atividade	1- Leitura do texto <i>“Onde estamos? Através de um GPS é possível encontrarmos a nossa localização. Como isso é feito? Como funciona um GPS?”</i> e construção de conceitos envolvendo raio e diâmetro de uma circunferência, através do material aos estudantes: <i>“Onde estamos? Através de um GPS é possível encontrarmos a nossa localização. Como isso é feito? Como funciona um GPS?”</i>	
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)	
Etapa 4	Diferenciação progressiva	
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Conceituar e representar graficamente, utilizando o compasso, uma circunferência • Diferenciar raio e diâmetro de uma circunferência • Reconhecer as coordenadas do centro e a medida do raio na equação de uma circunferência e vice-versa • Reconhecer a importância da equação da circunferência em situações do dia a dia 	
Atividades	1- Atividade prática com o uso de compasso, buscando a utilização da aplicação de circunferência utilizada pelo GPS, para localizar o ponto onde uma pessoa se encontra. Para esta atividade, utiliza-se o conceito de circunferência (centro e raio), o compasso e os conceitos de velocidade, distância e tempo da física 2- Construção de conceitos envolvendo circunferência (centro e raio), através do material potencialmente significativo disponibilizado aos estudantes 3- Exercícios	
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)	
Etapa 5	Complexidade	
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Conceituar e representar graficamente, utilizando o compasso, uma circunferência • Diferenciar raio e diâmetro de uma circunferência • Reconhecer as coordenadas do centro e a medida do raio na equação de uma circunferência e vice-versa • Saber identificar as equações da circunferência na forma reduzida e geral • Reconhecer a importância da equação da circunferência em situações do dia a dia 	
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)	

(Conclusão)

Etapa 6	Reconciliação integradora
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Conceituar e representar graficamente, utilizando o compasso, uma circunferência • Diferenciar raio e diâmetro de uma circunferência • Reconhecer as coordenadas do centro e a medida do raio na equação de uma circunferência e vice-versa • Reconhecer a importância da equação da circunferência em situações do dia a dia
Atividade	1- Resolução de exercícios que envolvam a circunferência: centro, raio, diâmetro, equação geral e equação reduzida, com atividades que possam ser resolvidas algébrica e geometricamente
Tempo previsto	2 períodos de aula (57 minutos cada)
Etapa 7	Avaliação da aprendizagem na UEPS
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer as coordenadas do centro e a medida do raio na equação de uma circunferência e vice-versa • Saber identificar as equações da circunferência na forma reduzida e geral • Reconhecer a importância da equação da circunferência em situações do dia a dia; • Gerenciar o tempo, respeitando o ritmo de aprendizagem dos educandos • Identificar, através de atividades da UEPS, se houve aprendizagem significativa
Atividade	1- Avaliação individual escrita
Tempo previsto	2 períodos de aula (57 minutos cada)
Etapa 8	Avaliação da UEPS
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Gerenciar o tempo, respeitando o ritmo de aprendizagem dos educandos • Identificar se as atividades promovidas foram potencialmente significativas, buscando evidências de aprendizagem significativa • Avaliar as potencialidades e fragilidades da UEPS
Atividades	<p>1- Análise de todas as etapas da UEPS, complementando a avaliação formativa e autoavaliação, destacando-se alguns aspectos atitudinais que foram observados, tais como: capricho na entrega do material, respeito aos prazos da entrega ou realização das atividades, comportamento e comprometimento na realização das atividades em sala de aula</p> <p>2- Análise da avaliação somativa: realizada de forma individual escrita na etapa anterior</p> <p>3- Avaliação da UEPS, através de discussão em grupo, das potencialidades e fragilidades da UEPS aplicada</p>
Tempo previsto	Para esta etapa destina-se 1/2 período de aula (30 minutos), lembrando que a avaliação formativa é realizada em todas as etapas, conforme abordado no capítulo 3, seção 3.6

Fonte: Elaboração da pesquisadora (2018).

4.6 PLANEJAMENTO E ORGANIZAÇÃO DA UEPS 5 – GEOMETRIA ANALÍTICA COM *SOFTWARES* MATEMÁTICOS

Quadro 15 – UEPS 5: Geometria Analítica com *softwares* matemáticos

(continua)

Etapa 1	Definição do tema	Geometria Analítica com <i>softwares</i> matemáticos
Etapa 2	Conhecimentos prévios	Situação inicial
Objetivo	<ul style="list-style-type: none"> • Verificar os conhecimentos prévios dos estudantes com relação aos conceitos matemáticos presentes em algumas bandeiras oficiais 	
Atividade	1- Questionário para verificação dos conhecimentos prévios dos estudantes, buscando identificar: “Em cada uma das bandeiras, escreva a maior quantidade possível de conceitos matemáticos que você conhece. Algum deles faz referência ao que estudamos em Geometria Analítica?”	
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender a origem das bandeiras e para que são utilizadas • Traçar um paralelo da Geometria Analítica com o cotidiano, envolvendo a construção de Bandeiras Oficiais 	
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)	

(continua)	
Etapa 3	Situação-problema introdutória
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Compreender a origem das bandeiras e para que são utilizadas • Traçar um paralelo da Geometria Analítica com o cotidiano, envolvendo a construção de Bandeiras Oficiais
Atividade	1- Leitura do texto sobre: “Como surgiram as bandeiras? O que elas representam? Apenas países e estados a utilizam? Onde mais podem ser encontradas?”, disponibilizado através do material elaborado pela autora desta pesquisa
Tempo previsto	1 período de aula (57 minutos)
Etapa 4	Diferenciação progressiva
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Ser capaz de determinar a equação geral e reduzida de uma reta; • Diferenciar as condições para retas paralelas, perpendiculares, coincidentes e concorrentes • Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas • Desenhar a bandeira da Bahia no Plano Cartesiano, com seus respectivos pontos e equações • Traçar um paralelo da Geometria Analítica com o cotidiano, envolvendo a construção de bandeiras oficiais • Articular o conhecimento entre a Álgebra e a Geometria numa perspectiva interdisciplinar
Atividades	1- Construção da bandeira da Bahia no Plano Cartesiano, utilizando folha quadriculada, com seus respectivos pontos e equações de reta 2- Retomada de conceitos envolvendo o Plano Cartesiano, estudo do ponto, estudo da reta e equação da circunferência através do material disponibilizado aos estudantes
Tempo previsto	2 períodos de aula (57 minutos cada)
Etapa 5	Complexidade
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Desenhar a bandeira da Bahia utilizando os <i>softwares</i> matemáticos GeoGebra e GraFeq; • Compreender os diversos intervalos de tempo entre dois extremos indicados, podendo ou não conter os próprios extremo • Compreender e utilizar o pensamento geométrico, para resolver situações-problema da Geometria Analítica • Traçar um paralelo da Geometria Analítica com o cotidiano, envolvendo a construção de bandeiras oficiais • Articular o conhecimento entre a Álgebra e a Geometria, numa perspectiva interdisciplinar
Atividade	1- Construir a bandeira da Bahia utilizando os <i>softwares</i> matemáticos GeoGebra e GraFeq, a partir do material disponibilizado aos estudantes
Tempo previsto	2 períodos de aula (57 minutos cada)
Etapa 6	Reconciliação Integradora
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Desenhar a bandeira de algum país utilizando <i>softwares</i> matemáticos GeoGebra e GraFeq • Compreender os limites entre dois extremos indicados, podendo ou não conter os próprios extremos • Traçar um paralelo da Geometria Analítica com o cotidiano, envolvendo a construção de bandeiras oficiais • Articular o conhecimento entre a Álgebra e a Geometria, numa perspectiva interdisciplinar
Atividade	1- Partindo do passo a passo da construção da bandeira da Bahia, os estudantes serão desafiados a construir e pesquisar sobre as bandeiras, de alguns países, fazendo um trabalho interdisciplinar com a disciplina de Geografia, pesquisando as principais características desses países
Tempo previsto	2 períodos de aula (57 minutos cada)
Etapa 7	Avaliação da aprendizagem na UEPS
Objetivo	• Transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos estudados em Geometria Analítica, para realizar a releitura de obras de arte
Atividade	1- Avaliação individual escrita.
Tempo previsto	3 períodos de aula (57 minutos cada)

(Conclusão)

Etapa 8	Avaliação da UEPS
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Gerenciar o tempo, respeitando o ritmo de aprendizagem dos educandos • Identificar se as atividades promovidas foram potencialmente significativas, buscando evidências de aprendizagem significativa • Avaliar as potencialidades e fragilidades da UEPS
Atividades	<p>1 – Análise de todas as etapas da UEPS, complementando a avaliação formativa e autoavaliação, destacando-se alguns aspectos atitudinais que foram observados, tais como: capricho na entrega do material, respeito aos prazos da entrega ou realização das atividades, comportamento e comprometimento na realização das atividades em sala de aula</p> <p>2 – Análise da avaliação somativa: realizada de forma individual, descrita na etapa anterior</p> <p>3 – Avaliação da UEPS, através de discussão em grupo das potencialidades e fragilidades da UEPS aplicada</p>
Tempo previsto	Para esta etapa destina-se 1/2 período de aula (30 minutos), lembrando que a avaliação formativa é realizada em todas as etapas, conforme abordado no capítulo 3, seção 3.6

Fonte: Elaboração da pesquisadora (2018).

5 ANÁLISE DOS DADOS E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

5.1 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA UEPS 1 – PLANO CARTESIANO

De acordo com o planejamento apresentado na seção 4.2, iniciou-se com a aplicação de um questionário individual, com o objetivo de identificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o Plano Cartesiano. O questionário é composto de uma situação-problema envolvendo localização de cadeiras em um cinema, e se divide em cinco questões abertas e objetivas. As questões formuladas buscavam verificar se o estudante:

- 1- identifica como estão organizadas as cadeiras de um cinema;
- 2- com base na imagem das poltronas marcadas como vagas e das poltronas onde os estudantes compraram ingresso:
 - a. identifica os estudantes que ficaram na mesma fileira;
 - b. identifica os estudantes que ficaram na mesma coluna;
 - c. identifica o estudante que ficou mais afastado de um dos integrantes;
 - d. identifica opções de cadeiras disponíveis próximas a um colega;
 - e. identifica quais estudantes estão a 2 unidades de distância um do outro;
 - f. identifica em que fila um cadeirante deveria comprar o ingresso;
- 3- identifica a localização de pessoas a partir de um par ordenado;
- 4- circula corretamente a imagem de um ponto dado;
- 5- identifica o conteúdo matemático correspondente a essa situação.

Na Figura 6 apresentam-se algumas imagens obtidas durante a realização desta atividade.

Figura 6 – Estudantes respondendo as perguntas do questionário prévio

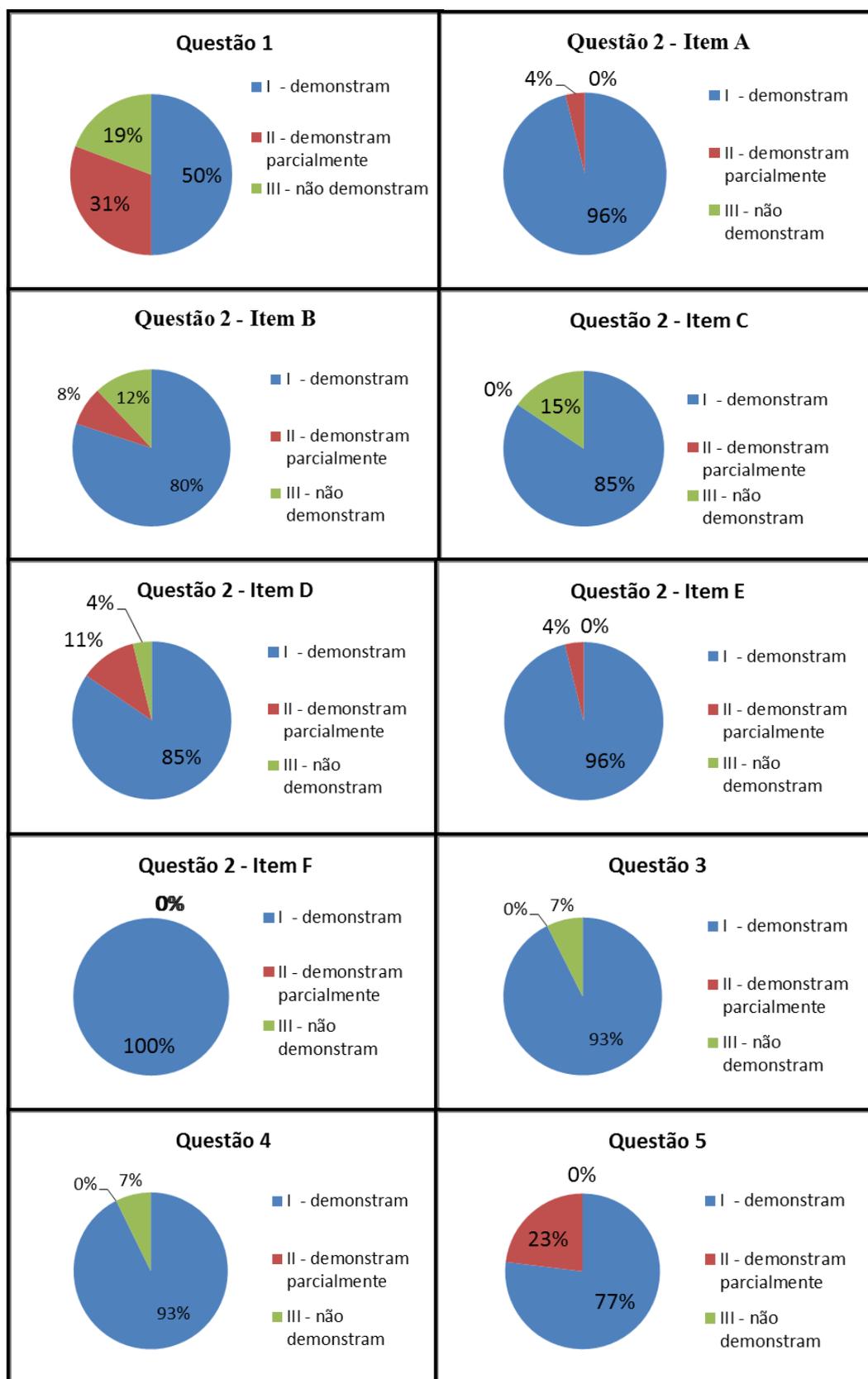


Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Após a aplicação do questionário, foi realizada a análise das respostas dos estudantes. A primeira questão introduzia o assunto através de uma situação-problema e buscava identificar se os mesmos conheciam e relacionavam a situação-problema apresentada com o Plano Cartesiano ou com algum outro conteúdo matemático.

Os questionários foram recolhidos e analisados quanti-qualitativamente. Para tanto, optou-se, como sugere Moraes (2003), por categorizar os resultados obtidos em três grupos: (I) os que demonstraram o conhecimento necessário; (II) os que demonstraram parcialmente e (III) os que não demonstraram. No Quadro 16, apresentam-se os gráficos com uma análise quantitativa das respostas a cada questão, do que pode ser constatado quanto aos conhecimentos prévios dos estudantes.

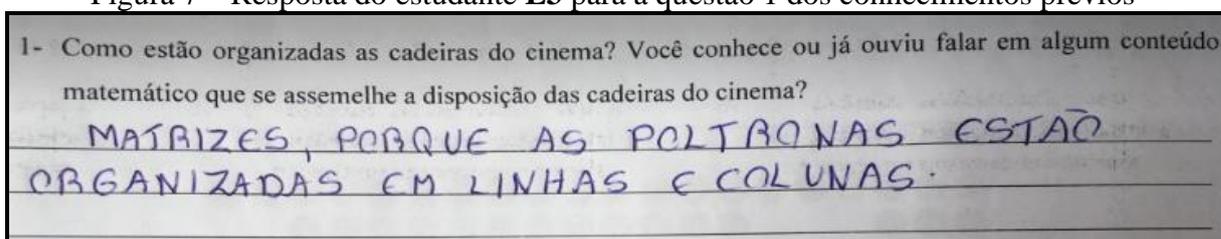
Quadro 16 – Análise quantitativa dos conhecimentos prévios dos estudantes (UEPS1)



Fonte: Elaboração da autora (2018).

Com base nesta análise quantitativa, constatou-se que 50% dos estudantes apontaram o Plano Cartesiano como resposta à questão 1, como era esperado. Dos demais, 19% não relacionaram a situação-problema apresentada com nenhum conhecimento matemático e 31% mencionaram matrizes. A essa relação atribuiu-se o fato de ter sido o último conteúdo estudado no ano anterior, de acordo com o Plano de Estudos da escola de aplicação da pesquisa. A Figura 7 mostra a resposta do estudante **E3** para a questão, representativa, também, das respostas de outros estudantes que fizeram a mesma relação.

Figura 7 – Resposta do estudante **E3** para a questão 1 dos conhecimentos prévios



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Assim sendo, para a realização da etapa 3, foi proposta uma situação-problema introdutória que envolvia a localização de pontos principais da cidade, no seu mapa. Nesse momento, aproveitou-se a resposta da questão 1, comentada no parágrafo anterior, para fazer a devida associação com a localização de pontos no mapa da cidade. Quando questionados sobre o conteúdo a ser estudado, todos apontaram o Plano Cartesiano. Moreira (2011) recomenda que, neste momento, sejam propostas situações-problema, em nível bem-introdutório, mostrando aos estudantes, de forma geral, a importância e a aplicação do conteúdo a ser estudado, servindo como organizadores prévios ou âncoras para novas aprendizagens.

Ao entregar os mapas da cidade de Farroupilha, percebeu-se os estudantes bastante motivados; muitos deles afirmavam nunca terem visto o mapa da cidade e logo foram tentar localizar a sua casa, mesmo a professora não tendo solicitado. Alguns dos comentários foram registrados no diário de campo e são apresentadas no Quadro 17.

Quadro 17 – Comentários sobre o mapa da cidade (UEPS1)

E1 – *Profª, minha casa fica no interior, não aparece aqui!*

Professora – *E como será que uma pessoa que não conhece nossa cidade conseguiria se deslocar até a tua casa?*

E1 – *Tem como usar o GPS do celular!*

E2 – *Depende! Tem lugar no interior que a internet não funciona, então não conseguiria se deslocar com o GPS.*

Professora – *E qual alternativa essa pessoa teria?*

E2 – *Ela pode ver o caminho próximo aqui no mapa e após isso eu teria que informar a distância e algumas localizações ou direções próximas.*

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Sem perceber, a estudante **E2** já introduzia a utilização do GPS, abordagem e conceito a serem desenvolvidos posteriormente em outra UEPS. Partindo da ideia de que a casa dessa estudante, em específico, não aparecia no mapa, a pesquisadora solicitou que os mesmos identificassem outros pontos, como a escola, o hospital e o Parque dos Pinheiros. A atividade serviu como organizador prévio, pois trata-se de um material introdutório que tem a função de mostrar aos mesmos, de forma geral, o que será estudado. (MOREIRA, 2011). Na Figura 8, apresentam-se imagens obtidas durante a realização desta atividade.

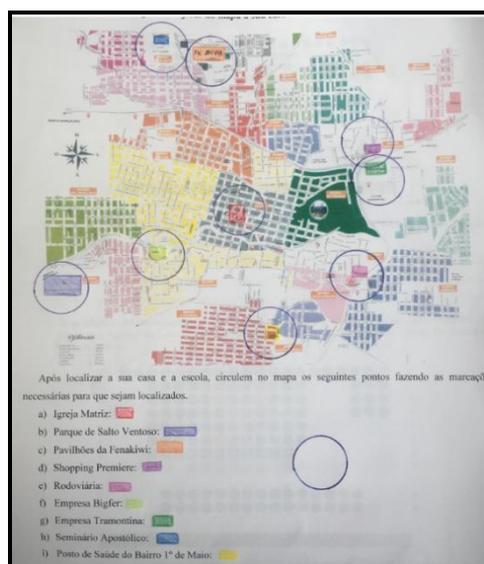
Figura 8 – Estudantes resolvendo a situação-problema introdutória



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Foi solicitado que os estudantes identificassem, no mapa apresentado, a localização de pontos importantes da cidade, tendo como referência bairros e/ou parques e que, a partir disso, construíssem legendas para esses pontos. Na Figura 9, apresenta-se a resolução de uma estudante para a localização de pontos solicitada e a legenda a ela proposta.

Figura 9 – Resolução apresentada por uma estudante para a situação-problema introdutória



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Os dados obtidos mostraram-se bastante satisfatórios, visto que os únicos pontos/locais que não foram identificados pelos estudantes são de localidades do interior, como observa-se na resposta apresentada na Figura 10.

Figura 10 – Resposta da estudante para a situação-problema introdutória

Minha casa não aparece
 pois moro no interior -
 Linha Raes 3º distrito

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Após a realização da atividade de localização no mapa, os estudantes receberam um texto explicativo sobre a história/origem do Plano Cartesiano (disponível no Apêndice H). Procurando resgatar conhecimentos, através de questionamentos, buscou-se reconstruir os conceitos de retas perpendiculares, eixos, ponto de origem, quadrantes e o Plano.

Em continuação, foi proposto aos estudantes como tarefa de casa a construção desse Plano Cartesiano – “prancha”, com os devidos eixos marcados, o ponto de origem e os quadrantes e que a mesma fosse colada em algum material mais maleável. Salientou-se a

importância de que todas as unidades de medidas corresponderem exatamente a 1 cm, pois, para cálculos futuros, essa escala seria fundamental.

Todas as “pranchas” foram entregues, feitas com muito capricho e com os conceitos solicitados. A Figura 11 ilustra os planos construídos pelos estudantes.

Figura 11 – Plano Cartesiano – “pranchas” – construídas pelos estudantes



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Após a análise das “pranchas”, foram fornecidos alfinetes, para verificar se os estudantes conseguiriam identificar pares ordenados no Plano, o respectivo quadrante e os eixos. Ainda nesta atividade, os estudantes identificaram o par ordenado correspondente ao vértice de um triângulo equilátero; partindo de outros dois vértices, identificaram pontos cujos vértices formam quadriláteros com uma determinada área ou perímetro e construíram retas bissetrizes, a partir de um ponto dado.

Durante todo o desenvolvimento da atividade, percebeu-se que os estudantes estavam bastante interessados, o que se justifica, como Dewey (2010), que afirma que para a aprendizagem ter maior probabilidade de êxito, deve levar em consideração o “interesse” e a “realidade” dos estudantes. Primeiramente, levou-se em consideração o interesse direto e imediato pela atividade em si e, posteriormente, o indireto e mediato, a partir das situações que foram se desenvolvendo, da curiosidade e dos questionamentos dos estudantes, o que se pode observar nas cenas apresentadas na Figura 12.

Figura 12 – Estudantes resolvendo atividades nas “pranchas”



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Na etapa seguinte, a da diferenciação progressiva, deu-se continuidade à etapa anterior, mas exemplificando e abordando também aspectos específicos. Foram fornecidas aos estudantes as atividades/exercícios em material impresso, solicitando que respondessem e discutissem as soluções em duplas. Uma das atividades que gerou muita discussão nas duplas foi a resolução de uma situação-problema envolvendo trajetórias e deslocamentos de um ponto a outro da cidade no mapa de Farroupilha, projetado no Plano Cartesiano. As discussões realizadas foram registradas no diário de campo da pesquisadora e algumas são destacadas no Quadro 18.

Quadro 18 – Discussões sobre a trajetória apresentada na situação-problema (UEPS1)

E11 – *Olha só, ele sai da Igreja Matriz e vai até o Centro Administrativo da Colombo que aparece aqui, aí depois de andar o que está pedindo para nesse ponto.*

E12 – *Tá, mas nesse ponto não tem nada. É só uma rua aqui no centro!*

Professora – *Será que tem uma rua aqui no centro sem nada?*

E11 – *Não né! Mas eu não sei que rua é essa!*

Professora – *É próxima à escola né? Quem sabe imagina esse trajeto e tenta descobrir o que tem nesse ponto!*

E11 – *Sim profe, tá certo! Olha só, ele foi levar o currículo no Centro Administrativo da Colombo, mas não era lá, era nas lojas Colombo aqui no centro, que fica bem nesse ponto! Que legal!*

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Outra situação-problema que gerou boas discussões solicitava aos estudantes que identificassem a distância entre a Prefeitura da cidade e a Rua Tomazzo Radaelli em linha reta, sabendo que cada unidade no Plano Cartesiano corresponde a 200 metros. Registra-se um diálogo com a estudante **E1**, no Quadro 19.

Quadro 19 – Diálogo ocorrido em função de uma atividade (UEPS1)

E1 – *Olha só dá para contar 11 quadradinhos! Então é $11 \times 200 = 2200$ metros. É isso profe?*

Professora – *Qual é a dúvida?*

E1 – *É que aqui no mapa parece tão pequenininho e a distância é mais de 2 km.*

E5 – *Claro! Não tem como fazer no papel essa distância! No mapa de geografia também é assim!*

Professora – *Isso mesmo, e como é o nome disso?*

E1 – *Verdade, é escala! Tem nos mapas e naquele mapa grande da cidade que a profe mostrou outro dia tinha também. Mas profe, por que esse é de 200 metros?*

Professora – *Porque quando utilizamos o Google Maps, conforme vamos aproximando o mapa, para ver melhor uma localização essa escala vai alterando, ela pode ser maior ou menor, olha no teu celular! (Nesse momento aproveitei para mostrar que o uso de tecnologias pode ser um grande aliado nas aulas.)*

E1 – *Que show. Adorei profe!*

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Percebeu-se nessa atividade muito envolvimento dos estudantes, talvez porque as situações-problema envolviam locais da cidade e, principalmente, pontos que eles conheciam, bem diferente de trabalhar com situações de livros didáticos, sem conexão com a realidade.

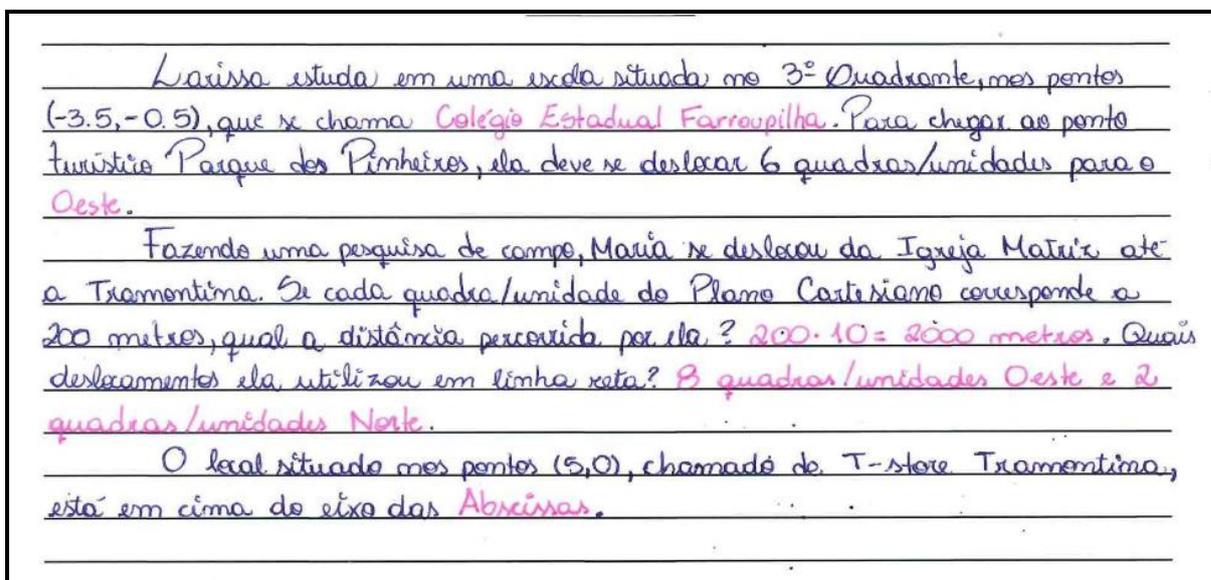
A etapa correspondente à da complexidade consistiu na retomada dos aspectos mais gerais e estruturantes. Nesse contexto, a atividade foi organizada em nível crescente de complexidade, comparada com as atividades anteriores, buscando promover a reconciliação integradora. Como organizador prévio, os estudantes foram questionados sobre os diferentes tipos de escala que poderiam ser utilizados. As respostas foram registradas no quadro e, após, utilizando uma escala escolhida, deveriam construir uma situação-problema envolvendo deslocamento no Plano Cartesiano, mas utilizando os seguintes conceitos obrigatórios: abscissas e/ou ordenadas, Norte e/ou Sul, Leste e/ou Oeste, quadrantes, unidades, distância, par ordenado e escala.

A fim de investigar o processo de construção de conceitos, as dificuldades encontradas e os erros cometidos pelos estudantes nos problemas desenvolvidos, foi necessário um estudo particular para cada caso, pois, como as elaborações eram particulares, as resoluções não seguiram o mesmo caminho.

Segundo Smole e Diniz (2001, p. 139), “quando os alunos são incentivados a expressar livremente seu modo de pensar, é natural que surjam algumas soluções incorretas”. Com base nesse raciocínio, fez-se a análise individual das situações e, posteriormente, a devolução individual da atividade com as correções necessárias.

Na Figura 13, há a análise de duas situações-problema, elaboradas pela estudante **E9**, com as palavras solicitadas e as devidas resoluções, mostrando a compreensão e/ou a dificuldade na aplicação dos conceitos solicitados.

Figura 13 – Situações-problema elaboradas pela estudante **E9**



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Nesta atividade constatou-se, primeiramente, que a estudante não conseguiu construir uma situação-problema contemplando todos os conceitos solicitados, dividindo-a em três momentos. No primeiro “momento”, destaca-se o par ordenado escolhido pela estudante, com valores decimais muito bem localizados no plano. No “momento 2”, a mesma não utilizou a escala escolhida pela turma para cada estudante, que, neste caso, era de 350 metros. Além disso, a estudante inverteu a situação-problema, questionando primeiramente a distância entre a igreja e a Tramontina, e somente após definiu o deslocamento a ser realizado. Com relação à longitude, faltou uma unidade a Oeste para chegar no ponto definido e, assim, o cálculo da distância não está correto. Percebeu-se nessa situação-problema uma falta de atenção com relação à construção, pois quando a estudante foi chamada pela pesquisadora para o retorno da atividade, ao ler e ir desenvolvendo, a mesma identificou os pontos onde ocorreram as falhas.

Já, a situação-problema descrita na Figura 14, elaborada pela estudante **E13** revela a compreensão dos conceitos estudados e a criatividade na estruturação da mesma.

Figura 14 – Situação-problema elaborada pela estudante **E13**

Isadora e seus colegas de aula resolveram almoçar juntos hoje. Saindo juntos do ponto $(-3, -1)$ andaram 3 quadras/unidades a leste parando no eixo das ordenadas. Ali se encontraram na Rua Marechal Deodoro da Fonseca, onde tomaram um café e comeram torta de mousse na Kidelizz, localizado no ponto $(0, 0)$. Depois do almoço, já estufados, eles queriam descansar, pois logo mais, Isadora e alguns de seus colegas precisariam trabalhar, por isso, saíram do ponto $(0, 0)$ e foram em direção a 2 quadras/unidades a leste no ponto $(2, 0)$ e descansaram no Parque dos Pinheiros. Por volta das 12:45, alguns colegas de Isadora precisariam pegar ônibus para voltar para casa: se deslocaram 4 quadras a oeste e 1 unidade a sul, no ponto $(-2, -1)$ para pegar ônibus na Igreja Matriz, no 3º quadrante. Sendo que cada quadra/unidade representa 200m, que distância eles percorreram do Parque dos Pinheiros até a Igreja Matriz? 5 quadras \times 200m = 1000m

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

É importante considerar o desenvolvimento que a estudante **E13** utilizou para elaborar a situação-problema, pois uma das estratégias utilizadas foi contextualizá-la, propondo a identificação de locais importantes da cidade. A escala foi utilizada corretamente, de 200 metros, de acordo com sua escolha, e as respostas foram destacadas. Ainda, todos os conceitos solicitados estão presentes no texto. Observou-se o seu interesse e envolvimento na atividade realizada.

Verificou-se, a partir da análise das situações-problema elaboradas, que a maioria dos estudantes obteve êxito na atividade, e os principais erros apresentados estão relacionados à dificuldade de localização com os pontos cardiais. Considera-se importante salientar que, através da construção das situações-problema apresentadas, saiu-se da prática mecânica de reprodução de exercícios, procurando levar o estudante a aplicar os conceitos em outras situações, partindo de diferentes estratégias. Pode-se, aqui, destacar o interesse demonstrado, conforme refere Dewey (1959), quando afirma que, com maior envolvimento e motivação dos estudantes, é possível identificar indícios da ocorrência de aprendizagem significativa. Isto pode ser verificado pela curiosidade demonstrada pelos estudantes, no final da atividade, de conhecer cada uma das situações-problema elaboradas pelos colegas.

Posteriormente, buscou-se promover a reconciliação integradora, que é o passo mais relevante sob uma perspectiva de continuar o processo anterior, da diferenciação progressiva. Para Moreira (2001), a reconciliação integradora é o princípio pelo qual a programação do

material instrucional deve ser feita para explorar relações entre ideias; apontar similaridades e diferenças significativas, reconciliando discrepâncias reais ou aparentes. Assim sendo, esta etapa foi organizada com o objetivo de reconhecer a presença de conhecimentos científicos no cotidiano e no desenvolvimento tecnológico. Nesta etapa, os estudantes resolveram diferentes situações-problema com aplicações no Plano Cartesiano propostas, a fim de verificar a aprendizagem e a aplicabilidade do conteúdo em questão.

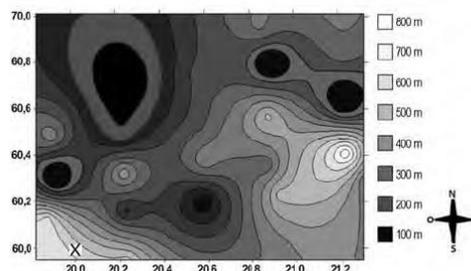
Buscou-se, na etapa da reconciliação integradora, ampliar o grau de complexidade, trabalhando com questões do Enem e de Vestibulares, a respeito do Plano Cartesiano. As questões foram escolhidas por utilizarem diferentes abordagens, exigindo dos estudantes a habilidade de interpretação de situações-problema e a localização de pares ordenados. Foram propostas para serem realizadas em duplas, para que pudessem discutir e posteriormente conferir.

As questões de 1 a 7 tinham por objetivo verificar se o estudante identificava corretamente pares ordenados no Plano Cartesiano, partindo da interpretação de uma situação-problema, o que se confirmou na análise realizada. O Quadro 20 apresenta um recorte de duas dessas questões.

Quadro 20 – Etapa da reconciliação integradora – Questões 1 e 5 (UEPS1)

(continua)

- 1-** Enem 2010 – A figura a seguir é a representação de uma região por meio de curvas de nível, que são curvas fechadas representando a altitude da região, com relação ao nível do mar. As coordenadas estão expressas em graus, de acordo com a longitude, no eixo horizontal, e a latitude, no eixo vertical. A escala em tons de cinza desenhada à direita está associada à altitude da região. Um pequeno helicóptero usado para reconhecimento sobrevoa a região, a partir do ponto $X = (20; 60)$. O helicóptero segue o percurso:



$0,8^\circ \text{ L} \rightarrow 0,5^\circ \text{ N} \rightarrow 0,2^\circ \text{ O} \rightarrow 0,1^\circ \text{ S} \rightarrow 0,4^\circ \text{ N} \rightarrow 0,3^\circ \text{ L}$.

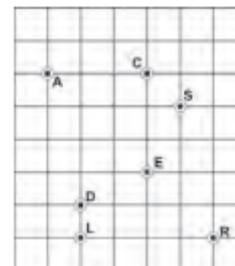
No final, desce verticalmente até pousar no solo. De acordo com as orientações, o helicóptero pousou em um local cuja altitude é:

- menor ou igual a 200 m.
- maior que 200 m e menor ou igual a 400 m
- maior que 400 m e menor ou igual a 600 m.
- maior que 600 m e menor ou igual a 800 m.
- maior que 800 m.

(conclusão)

5- No labirinto em um parque de diversões, representado pela malha quadriculada, encontram-se sete crianças: Ana, Carol, Samanta, Denise, Roberta, Eliana e Larissa, representadas por pontos, identificados pela letra inicial do nome de cada uma delas. A malha é formada por quadrados, cujos lados medem 1 cm. Considere que cada criança pode se deslocar apenas na direção vertical ou horizontal dentro do labirinto. Desse modo, Ana encontra-se equidistante de Samanta e de:

- a) Carol
- b) Denise
- c) Eliana
- d) Larissa
- e) Roberta



Fonte: Material adaptado⁴ pela pesquisadora (2018).

A escolha dessas questões foi feita, buscando similaridade com as situações-problema elaboradas pelos estudantes na etapa anterior. Com relação à questão 1, observou-se que 100% dos estudantes resolveram com êxito, o que se atribui às construções das situações-problema elaboradas anteriormente, nas quais utilizaram os pontos cardeais para encontrar determinadas localizações

Na questão 5, os estudantes identificaram o par ordenado correspondente a cada criança e calcularam corretamente a distância entre Ana e Samanta como sendo de cinco unidades, porém não entenderam o significado da palavra equidistante apresentada no enunciado. Durante as discussões nos grupos, promovidas posteriormente, a pesquisadora orientou para a busca no dicionário (disponível nas salas de aula), o que lhes permitiu entender o que estava sendo solicitado. Esse tipo de atividade mostra que os estudantes, muitas vezes, possuem conhecimentos matemáticos necessários para certas resoluções, porém apresentam deficiências na interpretação de uma palavra ou conceito, o que é fundamental para ser considerado pelo professor.

O que ocorreu na questão 5, também houve na questão 8, cuja resolução chamou a atenção, devido à quantidade de estudantes que não a resolveram corretamente, por não entenderem uma operação matemática apresentada. O enunciado da questão segue descrito no Quadro 21.

⁴ **Questão 1.** Disponível em: <<https://enem.estuda.com/questoes/?resolver=482909&acao=imprimir>>. Acesso em: 13 out. 2018.

Questão 5. Disponível em: <<https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2011-segunda-aplicacao/segundo-dia/no-labirinto-em-um-parque-de-diversoes-representado-pela-malha-quadriculada-encontram-se-sete/>>. Acesso em: 13 out. 2018.

Quadro 21 – Etapa da reconciliação integradora – Questão 8 (UEPS1)

- 8 (FUVEST – SP) Se $(m+2n, m-4)$ e $(2-m, 2n)$ representam o mesmo ponto do plano cartesiano, então m^n é igual a:
- a) -2
 - b) 0
 - c) $\sqrt{2}$
 - d) 1
 - e) $\frac{1}{2}$

Fonte: Material adaptado⁵ pela pesquisadora (2018).

Para resolver a questão 8, a maior parte dos estudantes valeu-se de um sistema de duas equações, resolvendo-o corretamente, demonstrando terem conhecimento prévio necessário para calcular $m = 2$ e $n = -1$. A dificuldade encontrada foi no cálculo da expressão “ m^n ”, por se tratar de uma potência com expoente negativo, o que muitos não lembravam como resolver.

Dando sequência à análise das questões propostas nesta etapa, merecem ser comentadas as resoluções apresentadas para as questões 9 e 10. As mesmas foram escolhidas por abordarem representações algébricas de pontos do Plano Cartesiano e de correspondentes localizações, mediante condições relacionadas a conceitos que integram programas de Matemática do Ensino Fundamental. Os enunciados dessas questões seguem descritos no Quadro 22.

Quadro 22 – Etapa da reconciliação integradora – Questões 9 e 10 (UEPS1)

- 9- (UNISINOS – 2009) Se o ponto $P(2m-8, m)$ pertence ao eixo dos y , então:
- a) $m = 0$
 - b) $m < 4$
 - c) m é um número primo
 - d) m é primo e ímpar
 - e) m é um quadrado perfeito
- 10- (UCS-2011) Se o ponto $P(r-12, 4r-6)$ pertence à primeira bissetriz (reta $y = x$), então podemos afirmar que:
- a) r é um número natural
 - b) r é um número inteiro menor do que -3
 - c) não existe r nestas condições
 - d) $r = -3$
 - e) r é raiz da equação $x^2 + 4x + 4 = 0$

Fonte: Material adaptado⁶ pela pesquisadora (2018).

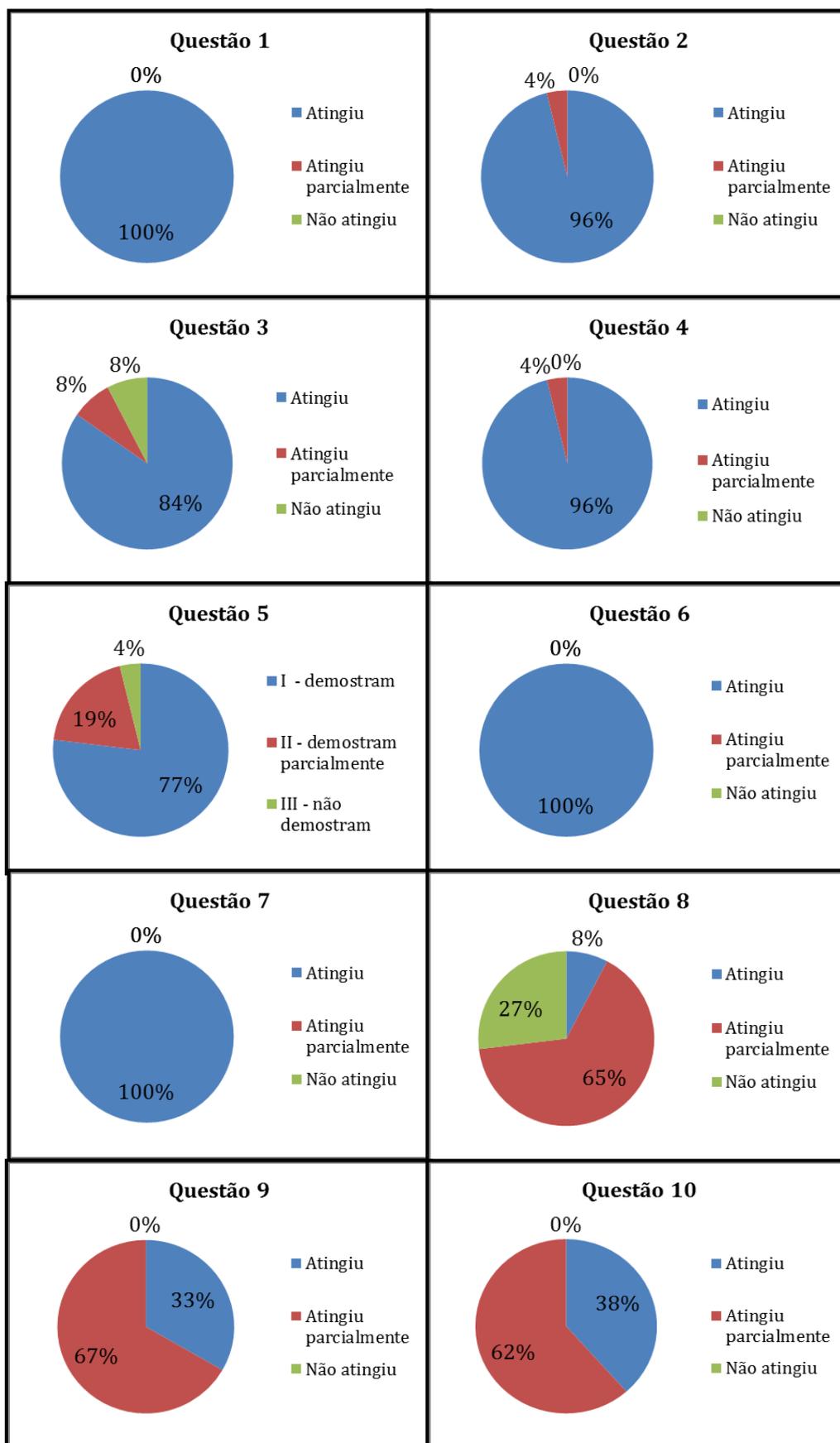
⁵ **Questão 8.** Disponível em: <<https://exercicios.brasilecola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-geometria-analitica.htm>>. Acesso em: 13 out. 2018.

⁶ **Questões 9 e 10.** Disponível em: <<http://profjanilsoncordeiro.blogspot.com/2010/01/exercicios-resolvidos-geometria.html>>. Acesso em: 13 out. 2018.

Tais questões foram acertadas parcialmente, visto que encontraram a resposta, porém tiveram dificuldade de apontar a alternativa correta, que dependia de conceitos básicos, tais como: conceito de número primo, quadrado perfeito, números naturais, maior e menor, que se constituem, também, como conhecimentos prévios necessários para essa atividade. Porém, a falta desses conhecimentos não foi identificada na etapa inicial. Com efeito, muitos desses conceitos vão aparecendo durante o desenvolvimento do conteúdo e é preciso tratá-los no momento em que aparecem, esclarecendo dúvidas e/ou construindo com o estudante os conceitos necessários. Para Moreira (2011), à medida que um subsunçor não é frequentemente utilizado, ocorre essa inevitável obliteração, essa perda de discriminação entre significados. É um processo normal do funcionamento cognitivo, é um esquecimento, mas, tratando-se de aprendizagem significativa, a reaprendizagem é possível e relativamente rápida. Além disso, como recomenda Santos (2008, p. 65), é necessário “provocar a sede” de aprender, problematizando o conteúdo, tornando-o interessante e não tirar o sabor da descoberta, dando respostas prontas.

A análise quantitativa, cujos resultados também foram utilizados para encaminhamentos posteriores, foi realizada e é apresentada no Quadro 23.

Quadro 23 – Avaliação quantitativa das respostas aos exercícios propostos (UEPS1)



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Na sétima etapa da UEPS, foi realizada a aplicação da avaliação somativa, individual e com questões/situações – que exigiram a compreensão dos tópicos estudados, para a verificação de conceitos, com o objetivo de encontrar indícios de aprendizagem significativa. Nesta atividade, foi utilizado como recurso, para identificar tais indícios, a comparação das respostas apresentadas no questionário-diagnóstico, com o que foi apresentado nas resoluções das demais atividades desenvolvidas ao longo da UEPS e a avaliação somativa realizada.

É importante salientar que, durante todo o desenvolvimento da UEPS, a avaliação foi contínua, o que caracteriza a avaliação formativa, que levou em consideração aspectos atitudinais, tais como: capricho na entrega das tarefas propostas, respeito aos prazos da entrega ou realização das atividades, comportamento e comprometimento na realização das atividades em sala de aula.

Por fim, os estudantes realizaram a avaliação somativa, que também serviu para verificar o potencial da UEPS, auxiliando para nortear a construção da próxima UEPS. Ou seja, através do resultado encontrado foi avaliada não apenas a aprendizagem dos estudantes, mas também o trabalho docente realizado.

A avaliação somativa foi composta de 10 questões, algumas de múltipla escolha e outras descritivas, com peso cinco. As demais atividades desenvolvidas, como o plano cartesiano construído e as situações-problema elaboradas, também foram avaliadas. A Tabela 1 apresenta a relação de trabalhos avaliados, com o respectivo resultado de cada estudante, bem como a média final.

Tabela1 – Avaliação dos Estudantes (UEPS1)

Estudante	Prancha 1 ponto	Situação problema 1 ponto	Avaliação Somativa 5 pontos	Média 7 pontos
E1	1,0	1,0	4,3	6,3
E2	0,5	0,8	2,2	3,5
E3	1,0	1,0	5,0	7,0
E4	0,9	1,0	3,8	5,7
E5	1,0	0,8	3,5	5,3
E6	Não entregou	Não entregou	0,8	0,8
E7	1,0	0,8	4,5	6,3
E8	1,0	1,0	4,2	6,2
E9	0,8	1,0	3,1	4,9
E10	0,8	1,0	3,8	5,6
E11	0,8	0,8	4,2	5,8
E12	1,0	0,8	4,2	5,8
E13	1,0	1,0	5,0	7,0
E14	0,9	1,0	5,0	7,0
E15	1,0	1,0	4,2	6,2
E16	0,5	0,5	3,2	4,2
E17	0,7	0,5	3,5	4,7
E18	1,0	1,0	4,7	6,7
E19	0,3	0,5	3,8	4,6
E20	0,8	0,8	3,5	5,1
E21	1,0	0,8	3,0	4,8
E22	0,5	0,5	3,4	4,4
E23	0,7	0,9	4,2	5,8
E24	0,8	1,0	5,0	6,8
E25	1,0	1,0	5,0	7,0
E26	1,0	0,6	4,0	5,6

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018)

Ao se analisar os resultados apresentados na Tabela 1, verificou-se que apenas dois estudantes não atingiram 60% (média da escola) ou 4,2 pontos nas atividades propostas.

Cabe salientar que o estudante **E6** possui 18 anos e já é repetente do 3º. ano do Ensino Médio. O mesmo não frequenta as aulas regularmente, sendo que, dos 12 períodos destinados à aplicação da UEPS, participou em apenas três, sendo dois deles destinados às avaliações. Já o estudante **E2** apresenta grande dificuldade com relação à aprendizagem na Matemática de conceitos básicos do Ensino Fundamental, sendo acompanhado pelas equipes de apoio pedagógico e reforço escolar desde seu ingresso na escola.

Levando em consideração todas as avaliações, 87% dos estudantes com avaliações acima da média, mostra-se que a utilização da UEPS favoreceu a construção do conhecimento e proporcionou resultados positivos.

Com relação aos principais objetivos propostos na UEPS, ou seja, de identificar as características de um Plano Cartesiano, conhecer as nomenclaturas referentes ao estudo do mesmo, localizar pontos através de suas coordenadas e reconhecer o Plano Cartesiano em situações do dia a dia, percebe-se que foram alcançados. Segundo Moreira (2011), a avaliação

do desempenho na UEPS é considerada satisfatória, quando fornecer evidências de aprendizagem significativa, como captação de significados, compreensão e a capacidade de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema, o que foi possível verificar ao longo da aplicação da UEPS, bem como nas questões da avaliação somativa.

A avaliação da UEPS foi realizada em conjunto. A pesquisadora solicitou que cada um dos estudantes externalizasse a sua avaliação, incluindo sugestões e críticas às atividades que fizeram parte da UEPS, a fim de auxiliar na identificação de potencialidades e fragilidades a serem consideradas no desenvolvimento das demais. Todos os comentários foram anotados no quadro e são descritos no Quadro 24.

Quadro 24 – Potencialidades e fragilidades da UEPS (UEPS1)

Potencialidades	Fragilidades	Sugestões
<ul style="list-style-type: none"> • Deu para ver onde se aplica esse conteúdo • Aplicabilidade – mapas e escalas – usamos o conceito para fazer o trabalho de Geografia • Foi legal trabalhar com o mapa da cidade e não com os mapas do livro que aparece só onde não conhecemos • Conhecemos o mapa da cidade • Achei fácil de entender o conteúdo, todos diziam que era bem difícil. Começou fácil e foi acrescentando coisas que precisavam das anteriores • Os problemas que construímos aparecem parecidos no Enem mas em outro contexto 	<ul style="list-style-type: none"> • A professora falava pouco. Quando perguntávamos alguma coisa ela fazia outra pergunta, que ajudava a responder, mas não dizia a resposta • No nosso grupo, um integrante não ajudava muito, mas como nosso grupo era o único trio, conseguimos trabalhar bem 	<ul style="list-style-type: none"> • Mais problemas envolvendo a cidade de Farroupilha e o mapa • Mais exercícios tipo ENEM • Mais atividades de construir, que nem a prancha que ajudou a resolver os exercícios • Mais atividades de elaboração de problemas

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Analisando as potencialidades expostas pelos estudantes, pode-se inferir que a UEPS desenvolvida alcançou o objetivo de promover uma aprendizagem que não fosse mecânica e sem significado, pois houve, nas potencialidades apontadas, a valorização da aplicabilidade do conteúdo. Com efeito, tais ações foram consideradas no desenvolvimento das etapas, considerando a complexidade e a reconciliação integradora. (MOREIRA, 2001).

Para Ausubel (2003), a TAS visa a fazer com que o estudante compreenda o processo de aprendizagem como uma construção e participe ativamente dela, porém, na fragilidade da aplicação, apresentada pelos estudantes, ainda consideram fundamental que o professor seja sujeito ativo na sala de aula e não um mediador do conhecimento. No desenvolvimento da UEPS, os estudantes se apresentaram como sujeitos ativos na construção da aprendizagem, sendo apenas incentivados pelo professor, com os recursos necessários, partindo da sua realidade e buscando dar significado à sua aprendizagem. De fato,

o único meio de fazer com que os alunos aprendam mais é ensinar, verdadeiramente, mais e melhor. Aprender é próprio do aluno: só ele aprende, e por si; portanto, a iniciativa lhe cabe. O professor é um guia, um diretor; pilota a embarcação, mas a energia propulsora deve partir dos que aprendem. Quanto mais conhecer o professor as experiências passadas dos estudantes, suas esperanças, desejos, principais interesses, melhor compreenderá as forças em ação que lhe cabe dirigir e utilizar, para formar hábitos de reflexão. (DEWEY, 1959, p. 43-44).

Por fim, com relação às sugestões propostas, constatou-se e compreendeu-se a necessidade, apontada por estudantes, de mais exercícios. De fato, segundo Ausubel (2003), deve-se levar em consideração que cada um apresenta um ritmo de aprendizagem, e o grau de complexidade das etapas deve estar de acordo com a estrutura cognitiva, evitando que a prática de exercícios matemáticos seja focada somente em situações que exigem apenas a memorização ou repetição de processos sem significado. Ainda para Dewey (1959), a compreensão de uma situação ou objeto está vinculada à atribuição de significados produzidos pelos estudantes e não à quantidade de repetições com as quais realizam as tarefas.

De todo modo, as sugestões apresentadas pela turma foram importantes para o replanejamento da próxima UEPS, sempre buscando centrar-se no estudante e na construção de significados relacionados ao respectivo contexto.

5.2 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA UEPS 2 – ESTUDO DO PONTO

Dando sequência à pesquisa, nesta seção apresentam-se os dados coletados durante a aplicação da segunda UEPS desenvolvida, que aborda o Estudo do Ponto. Novamente foi realizada a análise das produções elaboradas pelos estudantes, dos materiais construídos, das discussões realizadas e da avaliação baseada no referencial teórico que fundamenta esta pesquisa.

Buscando identificar conceitos já existentes na estrutura cognitiva dos estudantes, a primeira etapa constituiu-se pela aplicação de um questionário individual sobre o Estudo do Ponto. Assim procedeu-se, quando da introdução de cada um dos temas das UEPS que constituíram esta pesquisa. Segundo Ausubel (2003), a identificação dos conhecimentos prévios dos estudantes é imprescindível pois irá influenciar diretamente na aprendizagem e, portanto, precisa ser valorizada pelo educador, antes de apresentar o novo conteúdo.

O questionário foi elaborado com base em uma situação-problema envolvendo localização de pontos e localizações no mapa da cidade de Farroupilha, mais especificamente do trajeto realizado pela empresa “Ecofar” (empresa responsável pela coleta de lixo na cidade). Tal situação-problema foi dividida em cinco questões abertas. A análise desta

sondagem serviu como base para a elaboração das etapas subsequentes da UEPS. A Figura 15 mostra a estudante **E14** respondendo ao questionário dos conhecimentos prévios.

Figura 15 – Estudante **E14** respondendo o questionário sobre conhecimentos prévios



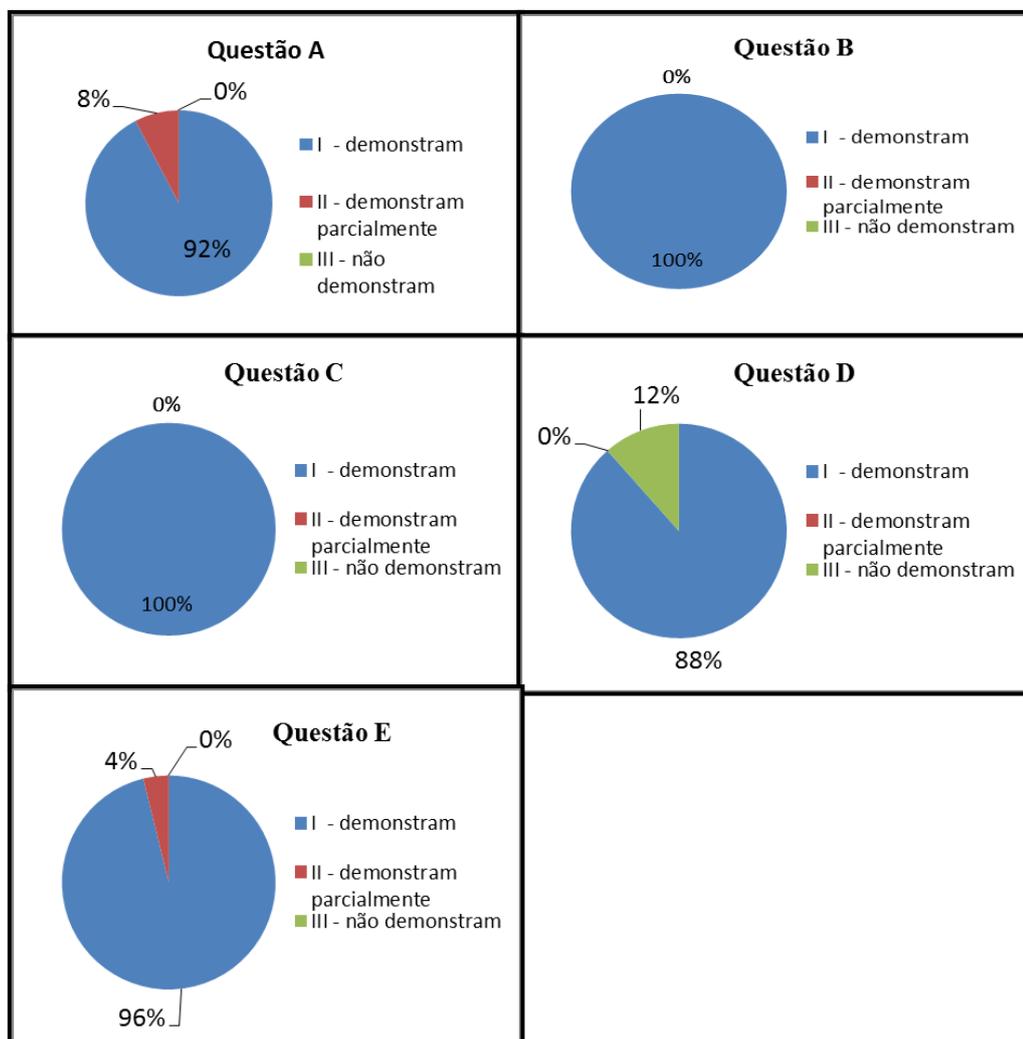
Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Após a aplicação do questionário, foi realizada a análise e tabulação das respostas apresentadas pelos estudantes. Das questões apresentadas, cada uma buscava identificar se os mesmos conheciam o conteúdo matemático envolvendo o Estudo do Ponto que consiste, principalmente, dos conceitos de: distância entre dois pontos, escala, ponto médio, baricentro e alinhamento entre pontos.

Para a investigação dos resultados, foi utilizada a análise quanti-qualitativa, de acordo com a proposta. Primeiramente, os resultados obtidos foram categorizados nos mesmos grupos que as demais UEPS: (I) os que demonstraram o conhecimento necessário; (II) os que os demonstraram parcialmente; e (III) os que não o demonstraram. A análise desses resultados serviu como um guia pedagógico para a construção das demais etapas da UEPS, cuja função principal é orientar o docente, neste caso a pesquisadora, quanto ao processo didático a ser adotado, além de inferir diretamente nas estratégias e decisões a serem realizadas nas demais etapas.

No Quadro 25 estão os gráficos dos dados quantitativos coletados, informando o que pode ser identificado sobre os conhecimentos prévios dos estudantes no contexto do estudo do ponto.

Quadro 25 – Avaliação quantitativa sobre os conhecimentos prévios dos estudantes (UEPS 2)



Fonte: Elaborada pela pesquisadora (2018).

Essa análise quantitativa revelou que a maioria dos estudantes apresentou os subsunçores necessários para a construção dos conceitos a serem abordados; os que não apresentaram foram orientados a pesquisar como atividade extraclasse e receberam maior atenção da pesquisadora, ao longo do desenvolvimento das etapas. Além dessa, realizou-se a análise qualitativa das respostas, que serviu para confirmar essa constatação.

As questões formuladas buscavam verificar se o estudante:

- calcula a distância entre dois pontos e/ou duas localizações e identifica como esse cálculo dele ser realizado;
- utiliza o conceito de escala apresentado em um mapa para calcular distâncias reais;

- c) conceitua e identifica o ponto médio como sendo o ponto localizado na metade de outras duas localizações;
- d) resolve a situação-problema apresentada e identifica o baricentro de três pontos distintos;
- e) identifica pontos que estejam alinhados a um ponto inicial dado.

Com relação à distância entre dois pontos abordada no item a), apresenta-se, na Figura 16, a resposta da estudante **E7**.

Figura 16 – Resposta da estudante **E7** para o item a

a) Ele saia exatamente na origem do Plano Cartesiano que é onde se encontra o escritório da empresa e parte 4 unidades para o Norte e 3 unidades para o Oeste, parando no ponto de coordenadas (3, 4). Se ele tivesse saído da origem e ido direto ao ponto que você encontrou, qual distância teria percorrido? Como você faria esse cálculo? Medi com a régua a distância da origem ao ponto (3,4) e achei 5 cm.

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

No item b), em que foi solicitada a forma de resolução para calcular a distância e a utilização correta da escala solicitada, considera-se representativa a resposta apresentada pelo estudante **E22** na Figura 17.

Figura 17 – Resposta do estudante **E22** para o item b

b) Suponhamos que cada unidade de medida corresponda a 320m, a nova distância entre a origem e o ponto em que o caminhão se encontra neste momento é de 1600 km
Multiplique 320 por 5

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

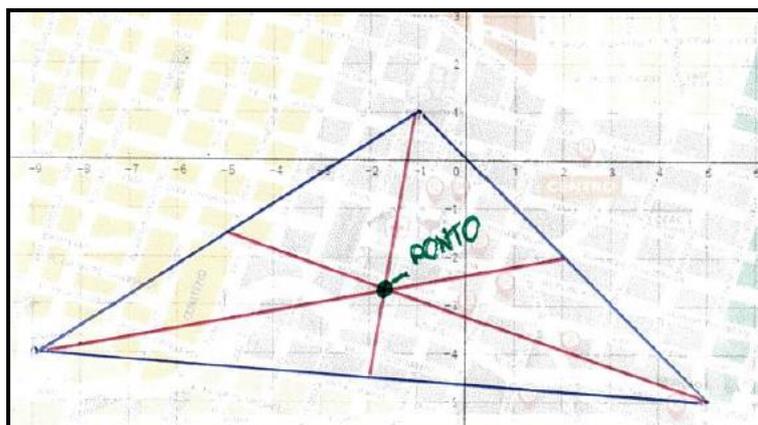
Já, no item c), o objetivo era identificar se o estudante conhecia o conceito de ponto médio, aqui abordado como “metade do trajeto”. Percebe-se, na resolução, que o estudante conseguiu identificar o ponto médio como o ponto que divide o segmento de reta exatamente no meio, separando-o em dois segmentos iguais. Com base nesse subsunçor, foi possível, na etapa seguinte, trabalhar com o cálculo das coordenadas de ponto médio entre dois pontos conhecidos. Para Ausubel (2003), a ocorrência da aprendizagem significativa implica o crescimento e a modificação do conceito subsunçor, vindo ao encontro do objetivo de apresentar outra possibilidade de resolução. A Figura 18 apresenta a forma como o estudante **E9** resolveu a situação-problema.

Figura 18 – Resposta do estudante **E9** para o item c

c) Continuando seu trajeto, o caminhão sai de $(-3, 4)$ indo em direção ao ponto $(1, -2)$, mas ao chegar nesse ponto, lembrou que não tinha feito uma das coletas, que ficava exatamente no meio do trajeto. Esse local de coleta se localiza no ponto de coordenadas $(-1, 1)$. Como você fez para localizar esse ponto? MEDI A DISTÂNCIA COM A RÉGUA E ACHEI A METADE E MARQUEI O PONTO $(-1, 1)$.

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

No item d), buscou-se identificar o conceito de ponto médio novamente e também a identificação do baricentro de um triângulo, através da situação-problema apresentada. Para a sua resolução, os estudantes optaram por fazer a representação geométrica do que estava sendo solicitado. Para finalizar a análise dos conhecimentos prévios, está, na Figura 19, a resolução do item d) pelo estudante **E11**.

Figura 19 – Resposta do estudante **E11** para o item d

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Para a realização da 3ª etapa da UEPS, ou seja, da situação-problema introdutória, foi entregue aos estudantes um manual elaborado pela pesquisadora, com atividades de manipulação no Plano Cartesiano, construído na UEPS anterior, além de régua. Um recorte dessa situação-problema, referente à distância entre dois pontos, segue descrita no Quadro 26 e a atividade completa está disponível no Apêndice H.

Quadro 26 – Recorte da situação-problema introdutória: distância entre dois pontos (UEPS 2)

(continua)

1. Distância entre dois pontos no Plano Cartesiano

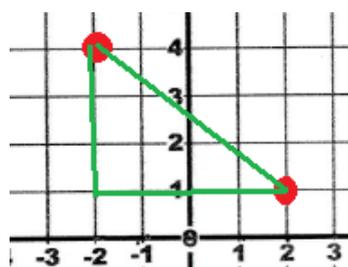
Vamos praticar um pouco:

- a) Marque na sua *prancha* os pontos A (-1,4) e B (3,4) utilizando os alfinetes recebidos e com a régua determine a distância entre eles. Marque a resposta que você encontrou abaixo.

- b) Marque na sua “*prancha*” os pontos A (-2,4) e B (2,1) utilizando os alfinetes recebidos e com a régua determine a distância entre eles. Marque a resposta que você encontrou abaixo.

Como essa distância é calculada?

Verifique que no segundo exemplo, através dos pontos A (-2,4) e B (2,1), pode-se formar um Triângulo Retângulo, como na figura abaixo.



Observando o triângulo formado, qual a medida dos catetos? Dica: cada quadradinho equivale a uma unidade de medida. Então, os catetos medem _____ e _____.

Observe que no eixo das abscissas há como valores -2 e 2. Logo a diferença entre eles é:

$$-2 - 2 = \underline{\quad}$$

Agora, observe que, no eixo das ordenadas, há como valores 4 e 1. Logo a diferença entre eles é:

$$4 - 1 = \underline{\quad}$$

Verifique que, através das coordenadas de x e y nos pontos dados, há a seguinte relação:

$$x_2 - x_1 =$$

$$-2 - 2 =$$

$$-4$$

$$y_2 - y_1 =$$

$$4 - 1 =$$

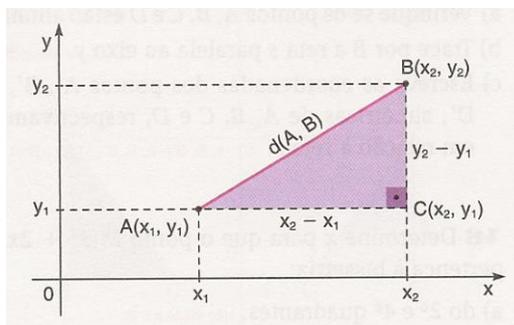
$$3$$

Agora, utilizando o Teorema de Pitágoras, que você já conhece, determine a medida da hipotenusa. Registre seu resultado abaixo.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Note que o valor encontrado para a hipotenusa é exatamente a distância que você encontrou entre os pontos A e B utilizando a régua na *prancha*.

Desta forma, pode-se definir que a distância entre dois pontos pode ser calculada por:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(d(A, B))^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

E resolvendo isso encontra-se: _____

Agora, utilizando a fórmula da distância entre dois pontos, calcule a distância dos pontos abaixo e após **verifique a sua resposta utilizando a prancha e régua**.

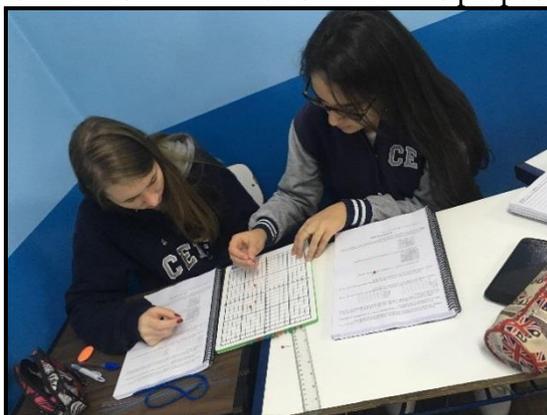
- Calcular a distância entre os pontos A (-1,4) e B (1,5).
- Calcular a distância do ponto M (-2,5) à origem.

Fonte: Elaboração da pesquisadora (2018).

As atividades propostas nesse manual foram construídas na forma de experimentação, ou seja, com o propósito de que, através de sua leitura, os estudantes fossem levados a sistematizar os conceitos e deduzir fórmulas fundamentais para o estudo proposto, entendendo, como Ausubel (2003, p. 5), que através da descoberta pode-se chegar à aprendizagem significativa: “[...] por outro lado, na aprendizagem pela descoberta, o aprendiz deve, em primeiro lugar, descobrir este conteúdo, criando proposições que representem soluções para os problemas suscitados, ou passos sucessivos para a resolução dos mesmos”.

A Figura 20 apresenta os estudantes realizando as atividades propostas no manual, para a situação-problema introdutória, buscando construir proposições que representem essas situações.

Figura 20 – Estudantes realizando as atividades propostas no manual



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

O objetivo nessa atividade era incentivar os estudantes para que fossem capazes de, através da realização das atividades de experimentação, elaboradas a partir de uma abordagem geométrica, fazer a descoberta, assim como sugere Ausubel (2003) e deduzir a expressão algébrica/fórmula que a define. Com efeito, também para Dewey (1959), é papel do professor criar momentos para possibilitar a construção do conhecimento.

A primeira atividade foi proposta com o objetivo de que calculassem a distância entre dois pontos, utilizando o Plano Cartesiano construído na UEPS anterior, primeiramente identificando os pontos dados e, posteriormente, com a régua, calculassem a distância entre eles. Na Figura 21, observam-se estudantes resolvendo a questão.

Figura 21– Estudantes realizando as atividades propostas



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

A partir de dois pontos distintos informados, a tarefa seguinte solicitava que fosse construído um triângulo-retângulo. Com base nessa construção, os estudantes foram

questionados e as discussões realizadas foram registradas no diário de campo e seguem no Quadro 27.

Quadro 27 – Discussões sobre o triângulo-retângulo (UEPS 2)

E1 – *Profe, já consegui construir o triângulo retângulo, olha!*
Professora – *Ótimo! Você consegue identificar a medida de cada lado desse triângulo?*
E9 – *Sim, se colocarmos a régua em cada lado do triângulo, conseguiremos ver essa medida – (a medida aqui referida é a distância entre os vértices do triângulo).*
Professora – *Perfeito! Mas se não soubéssemos um desses lados e não dispusemos de régua, seria possível calcular esse “terceiro lado” do qual não sabemos a medida?*
E1 – *Acho que sim profe! Não dá para usar o Teorema de Pitágoras que estudamos no passado?*
Professora – *Claro que sim! Então essa distância AB que não soubemos do nosso triângulo seria o quê?*
E21 – *A hipotenusa professora!*
Professora – *E como definiríamos os outros dois catetos?*
E21 – *Um é essa medida aqui (mostrando no Plano a distância medida com a régua dos vértices BC) e a outra (a distância dos vértices AC).*
Professora – *Ótimo! Mas e se eu não tivesse a régua. Teria como chegar a essas medidas que tu estás me mostrando utilizando apenas os pontos?*
E1 – *Profe, olha só, no eixo x um ponto está no -2 e outro está no 2, então a medida aqui é 4 quadradinhos (apontando para o Plano Cartesiano).*
Professora – *Qual cálculo conseguiríamos construir, a partir do 2 e do -2 que chegamos a 4 unidades ou a 4 quadradinhos como você comentou?*
E21 – *É só diminuir, $2 - (-2) = 4$. É isso?*
Professora – *Muito bem! Para identificar a medida desse cateto, a partir dos pontos (-2,4) e (2,1), que são os vértices do triângulo dado, basta diminuir o valor x do primeiro ponto do valor de x do segundo ponto.*
E9 – *E no y fazemos o mesmo profe! Teremos a medida do outro cateto diminuindo o valor de y do primeiro ponto do valor de y do segundo.*
Professora – *Excelente pessoal! Então se pensarmos temos que um cateto pode ser $x_2 - x_1$ e o outro $y_2 - y_1$. Como, podemos utilizar isso no teorema de Pitágoras?*
E1 – *Assim profe! E demonstrou no seu caderno o cálculo realizado.*

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

A Figura 22 representa a dedução da fórmula da distância entre dois pontos apresentada pela estudante **E1**.

Figura 22 – Dedução da fórmula da distância entre dois pontos apresentada por E1

$$a^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

distância que quero saber medida do cateto 1 medida do cateto 2

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Após a apresentação da dedução, continuaram as discussões, contando com a mediação da professora. No Quadro 28 está o seu registro.

Quadro 28 – Discussão sobre a dedução da fórmula da distância entre dois pontos (UEPS 2)

Professora – *Isso mesmo! Então esse “a” que tu definiste como sendo a distância que tu queres saber, é a distância entre o ponto A e B certo?*

E1 – *Certo.*

Professora – *E para resolver, ou para descobrir essa distância, que está ao quadrado o que devemos fazer?*

E21 – *Temos que calcular a raiz quadrada.*

Professora – *Ótimo, então utilizando a dedução apresentada pela Estudante E1, chegamos à fórmula da distância entre dois pontos. Verifiquem agora se o cálculo encontrado com a aplicação da fórmula é o mesmo que vocês encontraram quando mediram com a régua.*

E9 e E21 – *É sim professora.*

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Realizada a dedução da fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos foram propostos outros dois exemplos, a serem calculados algebricamente e, posteriormente, verificando as respostas com o auxílio da régua. Durante a realização da atividade, percebeu-se que os estudantes estavam bastante motivados e participativos, principalmente no momento em que verificavam que seus cálculos algébricos confrontados com os geométricos coincidiam, o que interpretaram como corretos. Nesse momento, houve as condições necessárias para a aprendizagem significativa, apresentadas por Ausubel (2003): o estudante deve estar disposto a aprender e o professor deve ser o mediador do processo.

Dando sequência às atividades propostas no manual, foi promovida a construção do conceito e definição do ponto médio entre dois pontos dados (A (-2,3) e B (4,1)). A partir da localização desses pontos no Plano Cartesiano construído, os estudantes deveriam localizar o ponto médio. Novamente discussões realizadas foram registradas no diário de campo e seguem no Quadro 29.

Quadro 29 – Discussões sobre o conceito e o cálculo do ponto médio entre dois pontos dados (UEPS 2)

E7 – *Esse é fácil profe! A gente vê quantos centímetros tem de um ponto ao outro e calcula a metade.*

Professora – *Sim, mas dessa forma eu não terei o ponto médio e sim a medida da metade desse segmento.*

E13 – *Sim profe, mas se eu sei onde é a metade, que é aqui (mostrando o plano cartesiano), é só ver o ponto que tem aqui, que é o (1,2).*

Professora – *Agora sim temos um ponto médio! E como chegamos nesse ponto sem usar a régua?*

E25 – *Profe, se é o ponto médio entre dois pontos é só dividir por 2.*

Professora – *Os valores de x e de y como a gente fez na distância.*

E13 – *Mas não dá certo, porque eu fiz aqui no caderno o $x_2 - x_1$ e dividi por 2 e fiz a mesma coisa com $\frac{y_2 - y_1}{2}$ e eu achei (-3, 1) e não é essa a resposta.*

E7 – *Mas quando a gente estudou média em estatística, tinha que somar os valores e não diminuir. É isso? (Questionando a professora).*

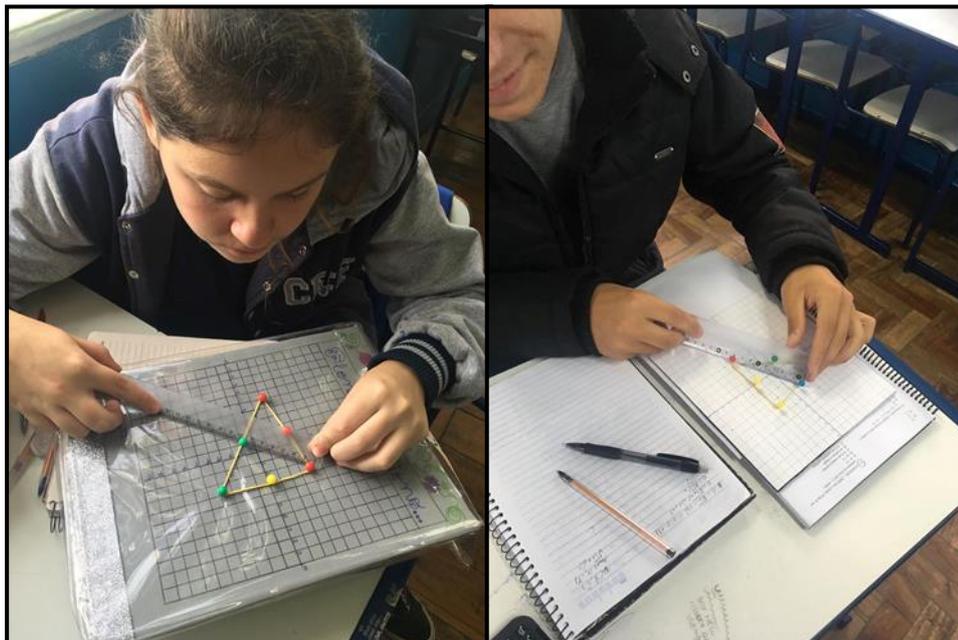
Professora – *Será? Tentem!*

E13 – *Sim profe. Para achar o ponto médio a gente soma os valores de x e divide por dois e faz o mesmo com o y.*

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

A etapa seguinte à da situação introdutória envolveu o cálculo da mediana e do baricentro de um triângulo. Nesta atividade, foram dados três pontos que os estudantes deveriam marcar no Plano Cartesiano com alfinetes, e foi fornecido um atilho, para que facilitasse a visualização do triângulo de vértices nos pontos dados. A primeira tarefa foi identificar, a partir da dedução já feita anteriormente, os pontos médios de cada um dos lados desse triângulo e, posteriormente, as medidas dos segmentos que unem cada um desses pontos médios aos vértices dos respectivos lados opostos. A Figura 23 apresenta estudantes realizando a atividade. Em seguida, constataram que se tratava da construção das medianas do triângulo.

Figura 23 – Estudantes construindo as medianas do triângulo dado



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Traçadas as três medianas no triângulo dado, os estudantes identificaram um ponto em comum entre elas. Novamente, identificou-se aprendizagem por descoberta e pelo interesse em aprender, de acordo com Dewey (1959), pois esse “ponto em comum” gerou algumas discussões que são indícios desta percepção e são registradas no Quadro 30.

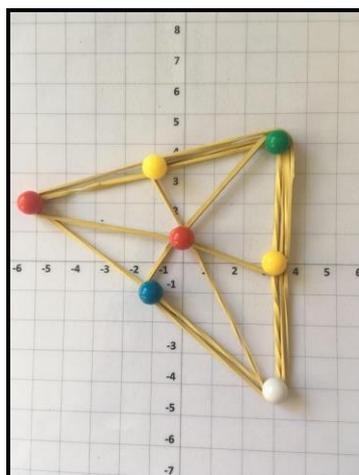
Quadro 30 – Discussões que levaram ao conceito de baricentro de um triângulo (UEPS 2)

E7 – *Profe, olha! Se a gente traça essas três retas elas se cruzam num mesmo lugar. Tem um nome para isso?*
Professora – *Esse mesmo lugar seria um ponto no Plano Cartesiano?*
E16 – *Sim. Esse ponto vermelho aqui no meio, olha!*

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

A Figura 24 apresenta a resolução realizada pelo estudante **E16** para a determinação das coordenadas do baricentro no Plano Cartesiano.

Figura 24 – Identificação do baricentro do triângulo no Plano Cartesiano



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Posteriormente a essa identificação, continuaram as discussões registradas no diário de bordo da pesquisadora e apresentadas no Quadro 31.

Quadro 31 – Discussões sobre a identificação da mediana e do baricentro do triângulo (UEPS 2)

Professora – *Perfeito! Quais as coordenadas desse ponto?*

E7 – *Profe, é o ponto (1,0).*

Professora – *E como achamos esse ponto?*

E7 – *Ele é o ponto de encontro das três retas construídas que partem do ponto médio ao vértice do lado posto.*

Professora – *Ótimo! A essa reta que tu falaste que parte do ponto médio ao vértice do lado oposto chamamos de mediana. Então nesse triângulo temos três medianas, certo?*

E16 – *Sim profe! Tem três.*

Professora – *E qual a medida delas?*

E7 – *Bom, dá para a gente medir com a régua aqui, ou calcular a distância, mas aí temos que usar o ponto médio e o vértice para encontrar.*

Professora – *Exatamente. Então agora, antes de verificarmos que esse ponto é desconhecido aí no triângulo, quero que vocês calculem algebricamente e geométrica a medida das três medianas. Vamos lá! (Neste momento os estudantes começaram a realizar os cálculos solicitados).*

E16 – *Profe, eu fiz as contas e medi com a régua e a mediana do vértice A da 8,2, a do B 6,4 e a do C 8,1.*

Professora – *Perfeito, agora vocês já sabem calcular a mediana.*

E7 – *Professora e esse ponto aqui (apontando para o baricentro) é quem?*

Professora – *Esse desafio será a tarefa para casa. Vocês já sabem como o encontraram e com o tema deverão pesquisar o nome desse ponto. (Como estava no final no período foi a alternativa encontrada para que os estudantes não esquecessem da atividade).*

Na aula seguinte...

Professora – *Realizaram a tarefa de casa?*

E1 – *Sim profe, é o baricentro e eu já sei como a gente pode calcular.*

E19 – *É a soma dos x dos três pontos do triângulo divididos por três e a mesma coisa para os valores de y.*

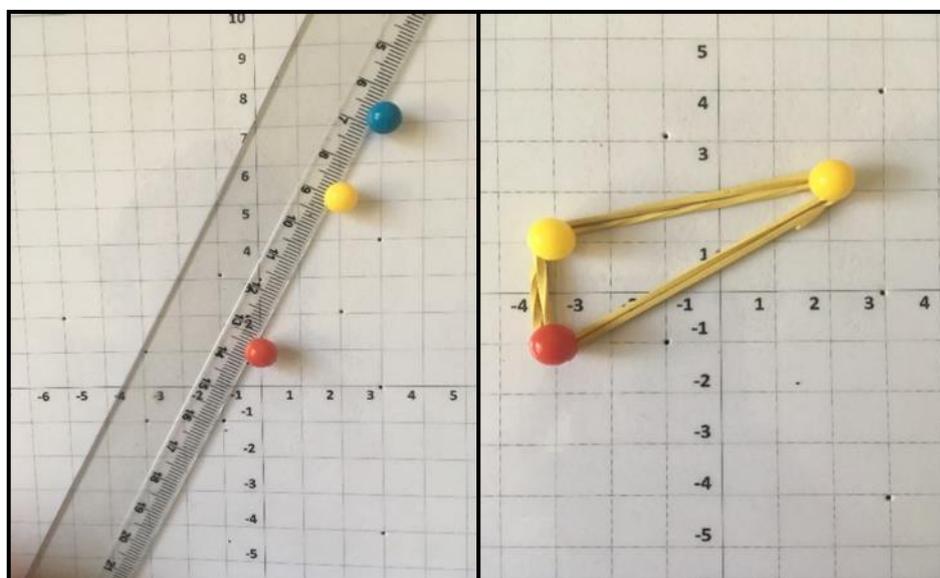
E12 – *Isso mesmo, eu até fiz a conta para o triângulo que a gente fez e dá certo, o ponto onde essas três medianas se encontram e que chamamos de baricentro é o ponto (1,0).*

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Para finalizar as atividades planejadas para experimentação e descoberta, o próximo conceito a ser construído refere-se à condição de alinhamento de três pontos. Novamente os estudantes foram levados a fazer a atividade no Plano Cartesiano, para verificar se os pontos dados eram colineares ou não. Para tanto, ao propor a atividade, o estudante **E7** logo comentou: “*Profe eu já fiz as duas atividades; na primeira, a gente consegue ver com a régua que esses pontos estão em linha reta, mas na segunda, não estão, dá até para fazer um triângulo*”.

A Figura 25 apresenta a resolução realizada pelo estudante **E4** para a identificação do alinhamento de três pontos no Plano Cartesiano.

Figura 25 – Atividade referente à condição de alinhamento de três pontos pelo estudante **E4**.



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Posteriormente a essa identificação, continuaram as discussões, que foram registradas no diário de bordo da pesquisadora e estão descritas no Quadro 32.

Quadro 32 – Condição de alinhamento de três pontos (UEPS 2)

Professora – *Perfeito! Vocês conseguiram verificar que em uma figura os pontos estão alinhados e na outra não.*

E14 – *Tem como fazer uma conta para ver isso, que nem fizemos nos outros?*

Professora – *Tem sim! Utilizamos o cálculo do determinante, assim como vocês estudaram no ano passado.*

E1 – *Eu lembro disso! Eu adorava fazer no ano passado. É aquele que a gente calcula a diagonal principal e depois a diagonal secundária. Vou fazer aqui!*

E21 – *Mas profe, para calcular o determinante, a matriz tinha que ser quadrada e aqui temos uma matriz com três linhas e duas colunas apenas.*

Professora – *Sim, mas que números poderíamos colocar na terceira coluna para deixar a matriz quadrada e que não implicaria no resultado do determinante?*

E2 – *O número 1 professora.*

E1 – *Então o cálculo do determinante da primeira atividade é 0 e da segunda é -10.*

Professora – *Agora quero que primeiro calculem o determinante referente aos pontos $A(-5,3)$, $B(-3,1)$ e $C(1,-2)$ e depois marquem esses pontos no Plano Cartesiano e verifiquem se esses pontos estão alinhados ou não.*

E7 – *Profe, o determinante também deu zero e no desenho está alinhado. Quer dizer que sempre que o determinante for igual a zero podemos concluir que os pontos estão alinhados?*

Professora – *Isso mesmo! Se o determinante for igual a zero significa que não possui área e, automaticamente, esses pontos serão colineares, ou estarão em linha reta.*

E18 – *Profe, tu falou em área. Então essa outra atividade que formou um triângulo tem área -10?*

E2 – *Não pode, não tem área negativa, e se a gente pensar em quantos quadradinhos completos temos aqui dentro é no máximo cinco.*

Professora – *Como fazemos para calcular a área de um triângulo?*

E5 – *É base multiplicada pela altura e dividida por dois professora! A gente estudou ano passado!*

Professora – *Pensando então nessa fórmula, no determinante que vocês encontraram, na fala do E2 que a área não pode ser negativa e que, no triângulo tem no máximo cinco quadradinhos ou unidades de área, o que podemos concluir?*

E1 – *É fácil profe! Se a gente calcular o determinante e der zero, temos uma reta e os pontos estão alinhados, e se der outro número diferente de zero, essa figura forma um triângulo e a área é a metade desse determinante. Só que tem que ser positiva, pois não existe área negativa.*

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Através das atividades propostas, os estudantes compreenderam os conceitos relacionados ao Estudo do Ponto, por meio de construções e deduções que lhes permitiram entender a fórmula utilizada, relacionando-a a aplicações anteriores, além de verificar geometricamente as relações encontradas. Esse tipo de atividade distancia-se da aprendizagem mecânica e por memorização e, segundo Ausubel, leva à aprendizagem por descoberta, pois o conteúdo a ser apreendido é descoberto pelo aprendiz, ou seja, “o estudante irá descobrir o

conteúdo, criando proposições que representem soluções para os problemas suscitados, ou passos sucessivos para a resolução dos mesmos”. (AUSUBEL, 2003, p. 5).

Na fase da diferenciação progressiva, buscou-se dar continuidade à etapa anterior, mas exemplificando e abordando também aspectos específicos, de acordo com Moreira (2011), começando pelos mais gerais, inclusivos, dando uma visão inicial do todo, do que é mais importante na unidade de ensino e abordando aspectos específicos. Para isso, foram fornecidos aos estudantes as atividades/exercícios propostos em material impresso, e solicitado que os mesmos respondessem e discutissem as soluções em duplas. Os mesmos foram orientados a resolver primeiro as situações-problema e, posteriormente, confrontar cada resposta com a representação geométrica no Plano Cartesiano.

A fase da complexidade consistiu na retomada dos aspectos mais gerais e estruturantes. Nesse contexto, a atividade foi organizada em níveis crescentes de complexidade, em comparação com as atividades anteriores, buscando promover a reconciliação integradora. Como organizador prévio, novamente os estudantes foram orientados sobre o conceito de escala que pode ser utilizado em um mapa.

Em um primeiro momento, os estudantes resolveram situações-problema que envolviam a distância entre dois pontos, em contextos como duas localizações no mapa da cidade, o ponto médio entre duas localizações, o baricentro de três localizações e as condições de alinhamento de uma avenida ou, ainda, o cálculo de uma área determinada no mapa. No Quadro 33, descrevem-se as atividades propostas na etapa da complexidade.

Quadro 33– Atividade desenvolvida na etapa da complexidade (UEPS 2)

(continua)

Observe o mapa da cidade de Farroupilha abaixo desenhado sobre um Plano Cartesiano.



Material elaborado pela autora a partir do mapa do município disponibilizado pela Prefeitura de Farroupilha

- a) Carolina está localizada na esquina entre as ruas Independência e Afonso João Farinon, no ponto (____,____) , a uma distância de _____ unidades do eixo das abscissas. Deve dirigir-se à Igreja Matriz , no ponto (____,____). A distância que Carolina percorreu é de _____ unidades. Sabendo que no mapa a escala utilizada é de 1 unidade = 320 metros, qual a distância percorrida? _____
- b) A Igreja Matriz localizada no ponto (____,____) é o centro (baricentro) da entrada de outros três bairros importantes da nossa cidade. Sabendo que a entrada do Bairro Imigrante é o ponto (-1 , 0), a do Bairro São Luís no ponto (-1 , 3) e a entrada mais próxima para o do Bairro Parque (x , y). Quais as coordenadas do ponto da entrada do Parque? _____
- c) Qual a distância entre a Igreja Matriz e o centro Social Urbano, sabendo-se que no mapa a escala utilizada é de 1 unidade = 320 metros? _____
- d) A empresa Bigfer está localizada no ponto de coordenadas (-5 , -1) e o centro administrativo das Lojas Colombo no ponto de coordenadas (7 , 6). O que se localiza no meio dessas duas empresas, e qual as coordenadas desses pontos? _____
- e) O Shopping Premiere recebe muitos turistas da nossa cidade que vêm à procura de malhas. Um turista aí localizado, solicitou informações de como chegar no Parque dos Pinheiros, pois existe um restaurante muito indicado no ponto (7 , 3). Qual a distância que o turista irá percorrer, levando em consideração a escala fornecida no mapa? _____
- f) A distância entre a Igreja Matriz e uma empresa da cidade é de 3.200 m. Sabendo da localização da Igreja e da escala indicada no mapa, de qual empresa estamos falando? Quais as coordenadas de localização dessa empresa? _____
- g) Uma ambulância sai do Corpo de Bombeiros em direção ao Hospital São Carlos localizado no ponto (0 , 2). Ao chegar no meio do trajeto, o ponto (3,5 , 1,5), entre a Rui Independência e a Floriano Peixoto, recebe a orientação de voltar ao ponto inicial. Qual o par ordenado que representa a sede do Corpo de Bombeiros no mapa? _____
- h) A empresa Bento, responsável pelo transporte público da nossa cidade, percorre o seguinte trajeto: sai da garagem, no ponto (4 , 3) para o ponto (0,4) e, em seguida, na parada localizada em (-6 , 0) formando um triângulo, cujo perímetro é de _____ unidades, ou, de acordo com a escala estabelecida, _____ metros. Qual a área formada por esses pontos? _____
- i) O Parque é um ponto turístico muito visitado em Farroupilha, devido à grande quantidade de araucárias. A parte arborizada do Parque dos Pinheiros possui vértices nos pontos (10 , 2), (6 , 2) e (10 , 4). Qual a área da parte arborizada? _____

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

A atividade foi realizada pelos estudantes, em duplas, para que pudessem discutir as soluções encontradas e, posteriormente, corrigi-las coletivamente.

A reconciliação integradora, próxima etapa da UEPS, é o passo mais relevante sob uma perspectiva de continuar o processo de diferenciação progressiva e de verificar a ocorrência da aprendizagem significativa, por meio de uma aplicação prática. Esta etapa foi organizada com o objetivo de reconhecer a presença de conhecimentos científicos referentes ao estudo do ponto, ou seja, utilizando o mapa da cidade no Plano Cartesiano, os estudantes

deveriam elaborar situações-problema que envolvessem o cálculo da distância entre dois pontos, ponto médio, mediana e baricentro.

Buscando investigar o processo da construção de conceitos e sua significação, foi necessário realizar uma análise e avaliação particular, detalhada para cada caso, pois, como as elaborações das situações-problema eram individuais, as resoluções não seguiam o mesmo caminho.

Mostram-se, a seguir, algumas situações-problema elaboradas por estudantes, a partir dos conceitos solicitados (distância entre dois pontos, ponto médio, mediana e baricentro) e as devidas resoluções, mostrando a compreensão e/ou as dificuldades na aplicação dos conceitos solicitados. A Figura 26 abaixo mostra a situação-problema elaborada pela estudante E25.

Figura 26– Situação-problema elaborada pelo estudante E25

(a) Tália está localizada na Armida 3 de outubro, cuja as coordenadas são $(0, 4)$ e Gabriela está na Coronel Perna de Moraes $(3, 0)$. Qual é a distância entre elas em unidades? Levando em consideração a escala do mapa, 1 unidade = 250 metros, calcule a distância em metros.

(a) $T(0, 4)$ $d(T, G) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
 $G(3, 0)$ $\sqrt{(3 - 0)^2 + (0 - 4)^2}$
 $\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$
 $\sqrt{9 + 16}$
 $d(T, G) = \sqrt{25} = 5 \text{ unidades}$
 1 metro = $5 \times 250 = 1250 \text{ metros}$

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Para a atividade descrita acima, a solicitação era de que elaborassem uma situação-problema na qual a distância entre duas localidades fosse de cinco unidades e ainda que utilizassem a escala definida no Plano. Percebeu-se com a situação criada pela estudante, que, primeiramente, a mesma identifica pares ordenados no Plano Cartesiano, mostrando que apresenta e aplica o conhecimento construído na UEPS anterior e o aplica, agora, em outras situações, o que pode ser indício de que a aprendizagem significativa está presente.

Para Ausubel (2003), a aprendizagem ocorre quando uma nova informação se ancora em conceitos já presentes, como é o caso, e gera experiências de aprendizado; por isso, o fator

mais importante que influencia na aprendizagem consiste no que o estudante já sabe e pode construir a partir disso. É importante ressaltar que o novo conteúdo deve ser significativo e que o estudante compreenda sua importância para que manifeste disposição para aprender.

A atividade seguinte solicitava que os estudantes determinassem o ponto médio e localizassem o mesmo no Plano. Abaixo, na Figura 27, está a situação elaborada e resolvida pelo estudante **E11**:

Figura 27 – Situação-problema elaborada pelo estudante **E11**

Carlos e Ana foram a um passeio, como
 não moram juntos marcaram um ponto de
 partida, que se localiza no método da distância
 entre eles. Sabendo que Carlos mora no
 ponto $(7, 4)$ e Ana no ponto $(7, -5)$, determi-
 ne o local e as coordenadas de onde será
 o ponto de partida deles.

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{7 + 7}{2}, \frac{4 + (-5)}{2} \right) = \left(\frac{14}{2}, \frac{-1}{2} \right) M = (7, -2)$$

R: Eles partirão da Rodoviária, nas coord.
 demadas $(7, -2)$

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Novamente, para elaborar e resolver a situação-problema, o estudante teve que primeiramente identificar pontos no Plano, que satisfizessem a uma condição de seu problema e então aplicar e identificar o ponto médio. Verificou-se, nesta etapa da reconciliação integradora, que esse tipo de atividade propicia a compreensão dos conceitos estudados, com evidências da ocorrência da aprendizagem significativa, através de uma aplicação prática construída pelos estudantes e não apenas pela pesquisadora.

Outra situação elaborada pelo estudante **E21**, e que demonstra a ocorrência de aprendizagem, é na situação para verificar se três pontos dados são colineares, ou seja, estão alinhados. Percebeu-se que o mesmo, além de demonstrar a compreensão dos conceitos estudados, apresenta a situação de forma criativa e bem-estruturada.

Figura 28 – Situação problema elaborada pelo estudante E21

Bernardo é um entregador da tramontina, localizada no ponto (9,5), precisa fazer uma entrega na rua Independência (4,0) e depois na Alfredo Klein no ponto (7,3), sua rota precisa estar alinhada, pois se não ele terá que trocar, com outro entregador. Bernardo terá que trocar de rota?

95	1	9	5	
40	1	4	0	
73	1	7	3	
0+35+12-(20+27+0)				
47-47				
0				

Ele não irá precisar trocar de rota pois os pontos estão alinhados.

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Dos conceitos abordados, os estudantes apresentaram maior dificuldade no cálculo do baricentro, que pode ser definido como o ponto de encontro das medianas de um triângulo. Após discussões e construções com o auxílio do Plano Cartesiano produzido em sala de aula, a situação-problema que envolvia esse conceito foi aplicada nesta atividade. Sendo assim, sabendo que as medianas de um triângulo sempre vão se interceptar em um único ponto, o estudante E7 conseguiu exemplificar perfeitamente a situação, que está escrita na Figura 29.

Figura 29 – Situação-problema elaborada pelo estudante E7

© Bianca mora em um prédio na rua Borão do Rio Branco no ponto (3,4) que é o centro de outros 3 pontos que moram perto dela. O 1º ponto é (8,4) na T-Store Tramontina, o 2º ponto é a (3,5) na Di Prima, o 3º ponto é a casa de sua colega de faculdade que a visita todos os dias. Quais são as coordenadas desse ponto?

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

$$(0,0) = \left(\frac{8+3+x}{3}, \frac{4+5+x}{3} \right)$$

$$0 = \frac{11+x}{3} \qquad 0 = \frac{9+x}{3}$$

$$0 = 11+x \qquad 0 = 9+x$$

$$\boxed{x = -11} \qquad \boxed{x = -9}$$

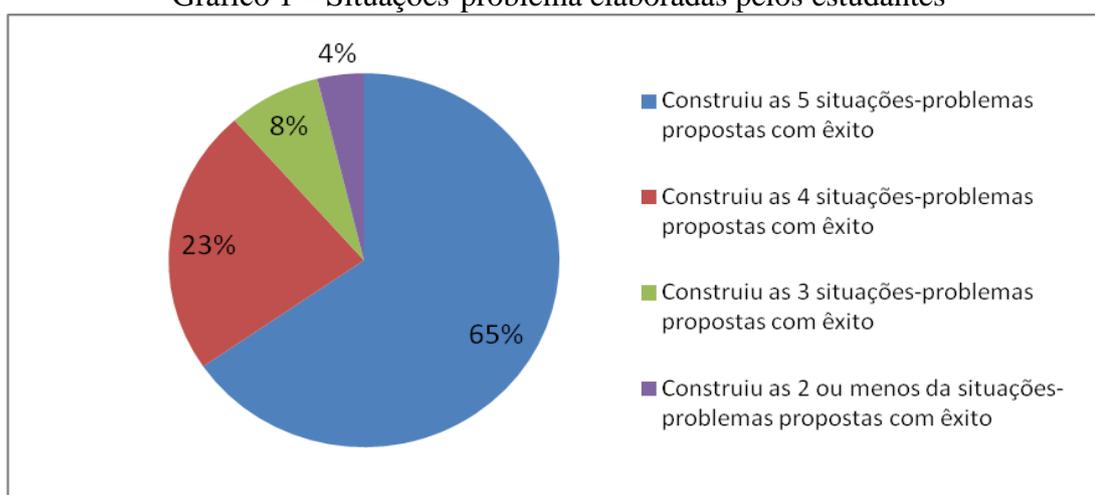
As coordenadas do caso de sua colega é (9, -11).

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Analisando as situações-problema elaboradas pelos estudantes, percebeu-se, de modo geral, o êxito na construção das mesmas, algumas delas revelando alto grau de compreensão e criatividade. Com efeito, entende-se que a elaboração de situações-problema pelos estudantes, já pode ser vista como estratégia de sucesso, pois foge da prática de reprodução mecânica de exercícios e permite identificar se o estudante consegue aplicar os conceitos nas diversas situações, com a utilização de diferentes abordagens.

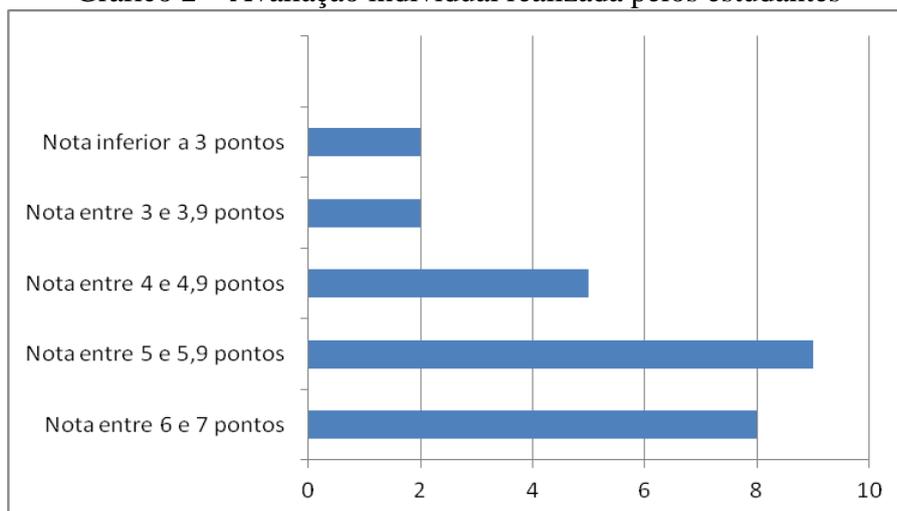
Na sétima etapa da UEPS, foi realizada a aplicação da avaliação somativa individual, com questões/situações que buscavam identificar a compreensão, por parte dos estudantes, dos tópicos estudados e, a partir disso, verificar indícios de aprendizagem significativa. Isso procurou-se observar, não apenas no desenvolvimento desta avaliação, mas sim ao longo da implementação de todas as etapas da UEPS. Para Ausubel (2003), o ensino com significado consiste em proporcionar ao estudante condições para que ele pense e compreenda o conteúdo que está sendo ministrado, o que foi observado na proposta desta avaliação. A mesma foi composta de 14 questões, todas de Vestibulares e do Enem, visto que são estudantes de 3º ano do Ensino Médio e estão se preparando para essas avaliações. Atribuiu-se peso 7 para as questões propostas pela professora e peso 3 para a elaboração das situações-problema pelos estudantes. Os Gráficos 1 e 2 apresentam os resultados de tais avaliações dos estudantes, no final do processo.

Gráfico 1 – Situações-problema elaboradas pelos estudantes



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Gráfico 2 – Avaliação individual realizada pelos estudantes



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Ao analisarem-se os resultados apresentados nos gráficos 1 e 2, percebeu-se que apenas um estudante não atingiu os objetivos nas atividades propostas. De fato, esse estudante tem 18 anos e frequenta raramente as aulas, tendo participado em apenas 1 dos 14 períodos destinados à aplicação da UEPS.

Após a avaliação quantitativa, partiu-se para uma análise qualitativa dos resultados, observando os erros apresentados pelos estudantes, com o objetivo de identificar as dificuldades e retomar possíveis problemas. Na questão 2, propôs-se a resolução de uma situação-problema envolvendo a área de uma fazenda de forma triangular, a partir das coordenadas de seus vértices. Abaixo, na Figura 30, está a resolução do estudante **E4**, que também foi apresentada por outros três estudantes, ou seja, calcularam o determinante dos vértices desse triângulo e esqueceram a segunda parte da resolução para o cálculo da área.

Figura 30 – Resolução do estudante **E4** para a questão 2

Para medir a área de uma fazenda de forma triangular, um agrimensor, utilizando um sistema de localização por satélite, encontrou como vértices desse triângulo os pontos A(2,1), B(3,5) e C(7,4) do plano cartesiano, com as medidas em km. A área dessa fazenda, em km², é de:

a) $\frac{17}{2}$
 (b) 17
 c) $2\sqrt{17}$
 d) $4\sqrt{17}$
 e) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 21 \\ 3 & 5 & 1 & 35 \\ 7 & 4 & 1 & 74 \end{vmatrix} = 10 + 7 + 12 - (3 + 8 + 35) = 29 - 46 = -17$$

$A = \frac{1}{2} |\det|$

C_{ii} resto?

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Outra questão que apresentou o mesmo erro por dois estudantes foi a de número 7. Nela, os estudantes receberam as coordenadas do baricentro de um triângulo e, a partir dele, deveriam encontrar os valores desconhecidos. Os estudantes resolveram corretamente a questão, mas, por falta de atenção, não calcularam a expressão $m^2 + n^2$ solicitada, não chegando à solução correta. O fato de o estudante não ter chegado à solução, não significa que não sabe o conceito, visto que calculou corretamente as coordenadas solicitadas, conforme identificado na resposta do estudante **E19**, na Figura 31. Entretanto, como já foi referido, muitas vezes a falha está na interpretação ou na atenção que a situação-problema deve merecer.

Figura 31 – Resolução do estudante **E19** para a questão 7

Os pontos $A(m, 7)$, $B(0, n)$ e $C(3, 1)$ são os vértices de um triângulo cujo baricentro é o ponto $G(6, 11)$. Calcule o valor de $m^2 + n^2$.

a) 40
b) 80
c) 225
d) 625
e) 850

$$G = \left(\frac{m+0+3}{3}, \frac{7+n+1}{3} \right)$$

$$(6, 11) = \left(\frac{m+3}{3}, \frac{8+n}{3} \right)$$

$$\frac{m+3}{3} = 6$$

$$m+3 = 18$$

$$m = 15$$

$$\frac{8+n}{3} = 11$$

$$8+n = 33$$

$$n = 25$$

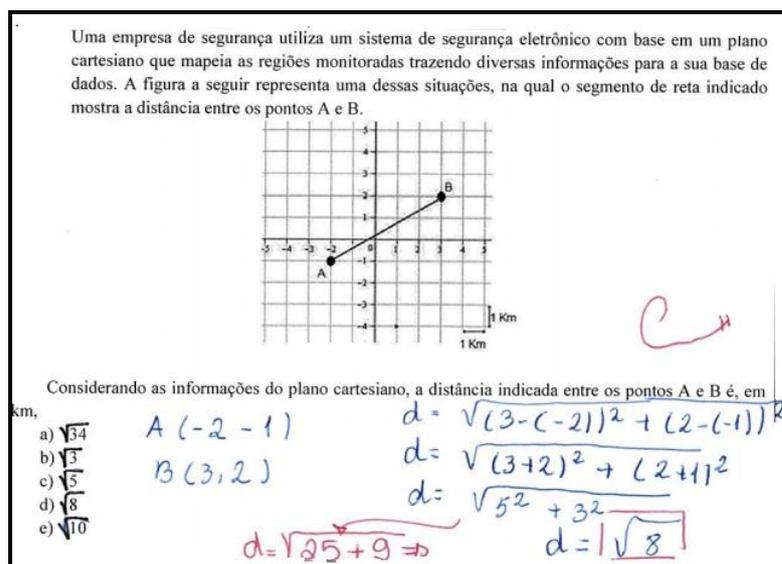
$m^2 + n^2 = 225 + 625 = 850$

$25 + 25 = 40$

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Outra questão que mereceu atenção foi a 9, que solicitava que, com base em uma dada situação-problema, calculassem a distância entre dois pontos. Apenas um estudante não a resolveu integralmente, visto que identificou os pares ordenados e escreveu corretamente o cálculo da distância. Porém, ao longo de sua resolução, não calculou a potência indicada, não conseguindo chegar à resposta correta. Durante essa avaliação, os estudantes puderam utilizar a “prancha” construída; e, durante a resolução da questão, esse estudante chamou a pesquisadora em sua classe e exclamou: “*Professora, eu fiz a conta aqui na folha e verifiquei a resposta na prancha com a régua e estão diferentes. Acho que a minha conta está errada, pois nos exercícios sempre achava a mesma resposta*”. Neste momento, a pesquisadora solicitou que o mesmo revisasse os seus cálculos, mas, no momento da correção, percebeu que o erro não tinha sido identificado. A resolução do estudante **E15** está apresentada na Figura 32.

Figura 32 – Resolução do estudante E15 para a questão 9



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Após a realização da avaliação da aprendizagem, partiu-se para a etapa 8, em que se buscou verificar as potencialidades e fragilidades da UEPS aplicada, na percepção dos estudantes. Realizou-se a avaliação da mesma de forma coletiva; a pesquisadora solicitou aspectos positivos, negativos e a melhorar, na metodologia proposta. Como na UEPS anterior, foi solicitado aos estudantes que externalizassem suas concepções, sugestões e possíveis críticas com relação à aplicação, buscando, também, sugestões para o desenvolvimento da próxima unidade. Todos os apontamentos manifestados foram anotados, muitos agrupados por repetição; foram registrados no quadro, em sala de aula e descritos no Quadro 34.

Quadro 34 – Potencialidades e fragilidades na aplicação da UEPS 2 na visão dos estudantes (UEPS 2)

Potencialidades	Fragilidades	Sugestões
<ul style="list-style-type: none"> • Deu para ver onde se aplica esse conteúdo no mapa da nossa cidade • Conseguimos ver no Plano Cartesiano construído se a resposta do cálculo feito no caderno era o mesmo que na régua (confronto resolução algébrica e geométrica) • As atividades eram desenvolvidas sempre em duplas, assim tínhamos como um ajudar o outro 	<ul style="list-style-type: none"> • Novamente a professora, ao invés de responder ao que solicitávamos, fazia outra pergunta que ajudava a responder, mas não dizia a resposta. Fazia a gente pensar 	<ul style="list-style-type: none"> • Mais problemas envolvendo a cidade de Farroupilha e o mapa • Mais exercícios tipo Enem

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Analisando as potencialidades expostas pelos estudantes, pode-se inferir que a UEPS desenvolvida alcançou seu objetivo, o de promover uma aprendizagem que não fosse mecânica e sem significado. As potencialidades da UEPS foram apontadas em maior número, destacando a aplicabilidade do conteúdo, quando as situações foram propostas com base no mapa da cidade, a utilização da “prancha” desenvolvida e de régua para a verificação dos resultados. Outro aspecto apontado pelos estudantes foi o trabalho em grupo e o auxílio entre colegas, o que está de acordo com Dewey (1959), quando aponta a troca de experiências como fator fundamental para a aprendizagem.

Com relação à fragilidade apresentada de fato, foi intenção da pesquisadora atuar como mediadora do conhecimento, de forma que os estudantes aprendam, também, mediante interação com os colegas, e não apenas recebendo passivamente o conteúdo apresentado pelo professor. No planejamento das UEPS, teve-se a preocupação de que o estudante tivesse papel fundamental nos processos de ensino e aprendizagem, sendo sujeito ativo nessa construção. A manifestação do estudante, ao mencionar que a professora “não respondia às perguntas, mas fazia outras”, revela o que já foi comentado na introdução, compactuando com Dewey (1959), que recomenda que as escolas exijam que os estudantes pensem.

Por fim, com relação às sugestões propostas, entende-se a importância atribuída aos exercícios, levando em consideração que cada um apresenta um tempo e grau de complexidade diferentes; porém, procurou-se evitar que a prática de exercícios matemáticos fosse focada unicamente em situações que exigissem apenas a memorização ou repetição de procedimentos sem significado.

De qualquer forma, as sugestões apresentadas pela turma foram importantes para o replanejamento da próxima unidade de ensino, sempre buscando centrar-se nos estudantes e na construção de significados relacionados aos respectivos contextos.

5.3 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA UEPS 3 – ESTUDO DA RETA

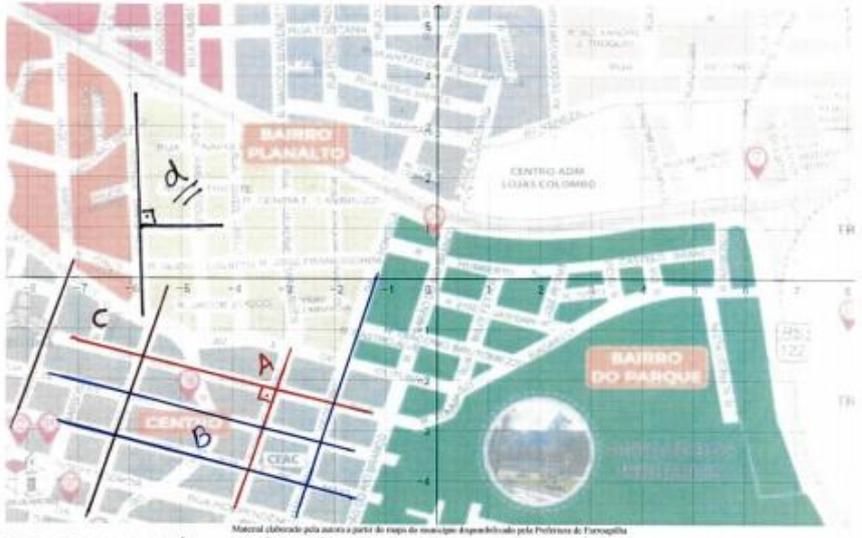
Nesta seção, são apresentados os dados construídos com a aplicação da terceira UEPS desenvolvida nesta pesquisa, que trata especificamente do Estudo da Reta. Realizou-se ao longo da aplicação, a análise das produções elaboradas pelos estudantes, dos materiais construídos, das discussões realizadas e da avaliação, com base no referencial teórico que fundamenta esta pesquisa.

Com o objetivo de identificar os subsunçores, presentes na estrutura cognitiva do estudante, na primeira etapa aplicou-se um questionário individual sobre o Estudo da Reta. O

questionário foi elaborado com base em uma situação-problema que buscava, nas duas primeiras questões, identificar o comportamento das ruas da cidade (ruas paralelas, perpendiculares, coincidentes e/ou concorrentes). Na Figura 33, está a questão e a resolução do estudante **E9** para a mesma.

Figura 33 – Resolução do estudante **E9** para a Questão 1 dos conhecimentos prévios

1- **SITUAÇÃO PROBLEMA INICIAL:** Observe o mapa abaixo da cidade de Farroupilha representado no Plano Cartesiano:



Com base no mapa, responda as seguintes situações problemas:

1- Observe o mapa e classifique os itens em V (para as alternativas verdadeiras) ou F (para as alternativas falsas).

a) () A Rua Floriano Peixoto é perpendicular a Rua José Dala Riva. 90°

b) () Podemos afirmar que as ruas : 13 de maio, 14 de julho e Marechal Deodoro da Fonseca são paralelas.

c) () Rua Tiradentes e Rua Pinheiro Machado são paralelas. 50°

d) () Avenida Santa Rita é perpendicular a Rua Roma. 90°

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Analisando a resolução do estudante **E9**, assim como a de 88% dos estudantes, identificou-se que demonstraram ter esse conhecimento consolidado, conseguindo diferenciar os tipos de reta, ou seja, identificam retas paralelas, perpendiculares, coincidentes e concorrentes. A Figura 34 apresenta a resolução realizada pelo estudante **E19**.

Figura 34 – Resolução da questão 2 pelo estudante E19

2- Responda com suas palavras:

a) O que significa dizer que duas retas são paralelas?
 Que elas não distantes em toda a sua extensão por igual e não possuem um ponto em comum.

b) O que significa dizer que duas retas são perpendiculares?
 São retas que se cruzam e formam um ângulo reto - 90°

c) O que significa dizer que duas retas são coincidentes?
 As retas coincidem e tem infinitos pontos em comum

d) O que significa dizer que duas retas são concorrentes?
 São retas que se encontram em um determinado ponto / vértice.

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Com relação à questão 3, dados os pares ordenados, no enunciado, todos os estudantes identificaram a rua solicitada, o que mostra que construíram os conceitos propostos como estudo (identificação de pontos no plano e alinhamento entre pontos) na UEPS anterior. Porém, 72% dos estudantes não conseguiram escrever uma equação que representa essa reta. A Figura 35 contém a resposta do estudante E15 que, como outros, mostrou não saber determinar a equação da reta que passa por dois pontos dados. Esse foi um indicativo revelador da necessidade de organizadores prévios que propiciassem a construção desse conceito, o que de fato foi feito.

Figura 35 – Resolução da questão 3 pelo estudante E15

3- Entre dois pontos dados, passa apenas uma única reta. Podemos observar isso no mapa, nos pontos $(-7, -2)$ e $(-3, -3)$ em que temos a Rua 14 de julho Será que é possível escrever uma equação que represente esta reta? Como?
 É uma reta que passa por esses pontos que nem na Função do 1º Grau.

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Para a terceira etapa programada para a introdução do conhecimento, foi utilizado o *software* matemático GeoGebra, disponível em aplicativo para celulares. Uma semana antes da atividade, os estudantes já foram orientados a baixar o aplicativo em seus celulares, para utilizarem nas aulas e, desde então, mostraram empolgação, visto que normalmente a utilização de celulares em sala de aula tem uso restrito na escola. Foi entregue aos mesmos um material para que, utilizando o *software*, construísem as equações de reta solicitadas e, partindo da observação das mesmas, conseguissem identificar o coeficiente angular e linear.

Nesta etapa, também buscando favorecer a aprendizagem por descoberta, sugerida por Ausubel (2003), propôs-se que os estudantes, utilizando o *software* GeoGebra, construíssem algumas retas e observassem os comportamentos das mesmas. Apenas dois estudantes, que vieram de outras escolas, não sabiam como utilizar. Porém, como os demais fazem uso desde o 1º. ano do Ensino Médio, puderam contar com a ajuda dos colegas, que, em outros momentos, utilizavam o laboratório de informática e não o celular.

Após construir as retas solicitadas no primeiro exercício, que é apresentado na Figura 36, perguntou-se o que poderia ser concluído, a partir da observação das retas. Dentre muitas discussões presenciadas nos grupos, selecionou-se a conclusão de um grupo de estudantes sobre o conceito de coeficiente linear da reta.

Figura 36 – Exercício 1: Conclusão dos estudantes sobre coeficiente linear

1- No GeoGebra, construa o gráfico das seguintes Retas no mesmo Plano Cartesiano. Para conseguir diferenciar as mesmas, escolha uma cor para cada uma delas.

a) $y = 2x$	e) $y = 2x - 1$
b) $y = 2x + 1$	f) $y = 2x - 2$
c) $y = 2x + 2$	g) $y = 2x - 3$
d) $y = 2x + 3$	

O que podemos concluir observando essas retas e suas respectivas equações?

Que o valor independente é o ponto que intersece o eixo y.

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Uma atividade semelhante foi proposta para a construção do conceito de coeficiente angular. Após a representação geométrica das retas, os estudantes concluíram corretamente. Na Figura 37 é apresentada a conclusão de uma das duplas.

Figura 37 – Exercício 2: Conclusão dos estudantes sobre o coeficiente angular

2- No GeoGebra, construa o gráfico das seguintes Retas no mesmo Plano Cartesiano. Para conseguir diferenciar as mesmas, escolha uma cor para cada uma delas.

a) $y = x$	e) $y = 1/2x$
b) $y = 2x$	f) $y = 1/3x$
c) $y = 3x$	g) $y = 0,25x$
d) $y = 4x$	

O que podemos concluir observando essas retas e suas respectivas equações?

QUE O VALOR DO X É O QUE DEFINE O ÂNGULO DA RETA.

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Enquanto os estudantes, em duplas, resolviam a atividade proposta, a professora aproveitou para observar as discussões e fazer anotações.

As atividades apresentadas nas Figuras 36 e 37 foram designadas de situações-problema em nível introdutório. Foram promovidas discussões, visando aos esclarecimentos necessários, bem como ouvir comentários de interesse dos estudantes, para estimular a curiosidade sobre o assunto, possibilitando a partilha dos conhecimentos prévios, que também podem desempenhar o papel de organizadores prévios e dar sentido aos novos conhecimentos.

Com essa atividade, percebeu-se o potencial do material fornecido, que proporcionou que os estudantes se envolvessem com as atividades, de tal forma que a construção dos conceitos de interesse fosse possível. Com efeito, entende-se, como Moreira (2011), que o material de ensino deve proporcionar a construção do conhecimento, através de situações em que o professor não seja um transmissor do conhecimento, mas um mediador do processo, principalmente pela forma como propõe as atividades.

Na etapa da diferenciação progressiva, buscou-se relacionar conhecimento algébrico (resolução feita pelos estudantes) com a representação geométrica (verificada no *software*). De fato, o material disponibilizado foi planejado em forma de conversa com o estudante, de modo que, ao ler, conseguisse compreender os passos propostos para a resolução e isso fomentasse as discussões em grupos. Para tanto, procurou-se relacionar as equações geral e reduzida da reta, com a função do 1º. grau, conteúdo que integra os programas de 1º. ano do Ensino Médio. A questão proposta solicitava a determinação da equação geral de uma reta. No Quadro 35, registra-se o diálogo de alguns estudantes.

Quadro 35 – Diálogo dos estudantes com relação à equação da reta (UEPS 3)

E5 – *A gente viu que se três pontos estão alinhados, montamos o determinante e no cálculo da resposta será zero, pois não tem área em uma linha reta.*
E11 – *Sim, a gente fez isso antes, mas agora a gente só tem dois pontos e não três.*
E5 – *Professora, quem é esse terceiro ponto?*
Professora – *Não temos esse ponto. Será que podemos utilizar coordenadas genéricas?*
E11 – *Tipo (x,y) por que a gente não sabe esses valores?*
Professora: – *Que tal tentar?*
E9 – *Olha profe, vou montar assim...*

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Após a fala, a estudante **E9** resolveu a atividade proposta no manual em que, partindo do determinante, era possível encontrar as equações geral e reduzida da reta. A resolução da estudante **E9** e de seu grupo é apresentada na Figura 38.

Figura 38 – Atividade desenvolvida pela estudante **E9** e por seu grupo, para encontrar as equações geral e reduzida da reta

VAMOS PENSAR UM POUCO.....

- Dados os pontos A(-1,2) e B(3,4) vamos encontrar a Equação Geral e Reduzida da Reta que passa por esses dois pontos. Para isso vamos determinar um ponto C, do qual não sabemos as coordenadas, então C(x,y).

a) Calcule o determinante entre os pontos A,B e C. O que você encontrou?

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ x & y & 1 & x & y \end{vmatrix}$$

$$-4 + 2x + 3y - (4x - y + 6) = 0$$

$$-4 + 2x + 3y - 4x + y - 6 = 0$$

$$-2x + 4y - 10 = 0$$

b) Se a Equação geral da Reta é da forma $mx + ny + b = 0$, qual a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B?

$$-2x + 4y - 10 = 0$$

c) Se a Equação Reduzida da Reta é da forma $y = mx + b$, qual a equação reduzida da reta que passa pelos pontos A e B?

$$4y = 2x + 10$$

$$y = \frac{2x}{4} + \frac{10}{4}$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

d) Qual é o coeficiente angular dessa re ? CA $\frac{1}{2}$

e) Qual é o coeficiente linear dessa ret: CL $\frac{5}{2}$

f) Marque os pontos A e B no GeoGebra, trace a reta que passa por esses dois pontos e verifique se o resultado que você encontrou estão corretos.

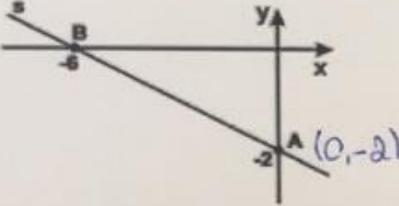
Sim, deu certo.

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Foram propostas duas atividades para essa construção, nas quais os estudantes, em grupos, deveriam escrever a equação geral da reta e a equação reduzida: a primeira, partindo de dois pontos dados e a segunda, a partir do gráfico da função. A Figura 39 mostra a resolução apresentada por um grupo de estudantes. Cabe ressaltar, aqui, que embora a figura represente a resposta de um estudante, todos os integrantes do grupo tinham o material com a mesma resolução.

Figura 39 – Equação geral e equação reduzida da reta

• Dado o gráfico abaixo:



a) Quais as coordenadas dos pontos A e B? A(0,-2) e B(-6,0)

b) Calcule o determinante entre os pontos A,B e C. Lembre-se que C é o ponto C(x,y). O que você encontrou?

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ -6 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ x & y & 1 & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -2x - 6y - (12 + 0 + 0) = -2x - 6y - 12 = 0$$

c) Qual a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B?

$$-2x - 6y - 12 = 0$$

d) Qual a equação reduzida da reta que passa pelos pontos A e B?

$$\begin{aligned} -2x - 6y - 12 &= 0 \\ -6y &= 2x + 12 \\ y &= \frac{2x}{-6} + \frac{12}{-6} \\ y &= -\frac{x}{3} - 2 \end{aligned}$$

e) Qual é o coeficiente angular dessa reta? -1/3

f) Qual é o coeficiente linear dessa reta? -2

g) Marque os pontos A e B no GeoGebra, trace a reta que passa por esses dois pontos e verifique se os resultados que você encontrou estão corretos.

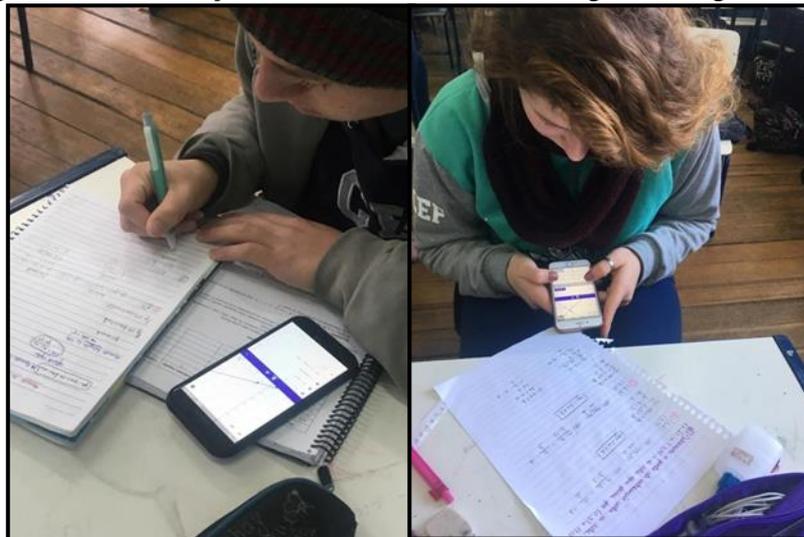
Sim, deu bem certinho

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Ao formular a questão, considerou-se a importância da utilização de uma sequência lógica e estruturada, que promovesse a construção do conhecimento através da interação com o material. Com efeito, para Ausubel (2003), a aprendizagem significativa parte da premissa de que existe uma estrutura em que a organização e a integração se processam e proporcionam a aprendizagem.

Assim também, ao longo de toda a etapa da diferenciação progressiva, os estudantes interagiram com o material e construíram os conceitos de inclinação e coeficiente angular da reta, posições relativas de retas no plano, ângulo formado por duas retas, ponto de intersecção entre retas e distância de um ponto a uma reta. Após a construção algébrica, verificavam a resolução geométrica e, quando suas respostas não tinham o retorno esperado, o grupo retomava os cálculos para identificar erros cometidos, na maioria das vezes na multiplicação ou troca de sinais. A Figura 40 mostra estudantes resolvendo as atividades propostas e verificando no *software* GeoGebra.

Figura 40 – Resolução de atividades na forma algébrica e geométrica



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Na etapa da complexidade, propôs-se interligar as atividades propostas com as da etapa anterior, por meio das questões 1 e 2 representadas na Figura 41, com as respectivas resoluções apresentadas. A atividade foi entregue à pesquisadora e utilizada para compor a avaliação.

Figura 41 – Resolução das questões 1 e 2 na atividade com o GeoGebra

1- Construa no GeoGebra a figura abaixo:

Para as atividades abaixo, observe a resolução apresentada no GeoGebra e após mostre um cálculo que comprove a sua resposta.

a) Determine a equação reduzida da reta que passa pelos pontos:

AB = $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - x + y - y - 1 + 1 = 0$
 $2y = -2 \quad |y = -1$

EA = $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x - x + y - 1 - 2y + 1 = 0$
 $2 + x - y - 1 - 2y - x = 0$
 $2 + x - y + 1 + 2y + x = 0$
 $2x + y + 3 = 0$
 $|y = -2x - 3|$

b) Qual o coeficiente angular da reta BC?

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - x + 2y - (x + y - 2) = 0$
 $1 - x + 2y - x - y + 2 = 0$
 $-2x + y + 3 = 0$
 $y = 2x - 3$
 $|CO = 2|$

2- Construa no GeoGebra a figura abaixo.

a) Escreva um exemplo de retas paralelas na figura construída.
A vista AG é paralela a vista BC

b) Escreva dois exemplos de retas perpendiculares na figura construída.
As vistas FG e GA são perpendiculares a as vistas BC e AB também.

Para as atividades abaixo, observe a resolução apresentada no GeoGebra e após mostre um cálculo que comprove a sua resposta.

c) Determine a equação reduzida da reta que passa pelos pontos:
 CD = C(3, 4) e D(4, 4) DE = D(4, 4) e E(2, 6)

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4x + 4y - 12 + 4x - 4y + 4 = 0$
 $4y - 4y - 3x + 4x - 8 + 4 = 0$
 $x - 4 = 0 \quad |x = 4$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4x + 4y - 4 + 4x - 4y + 4 = 0$
 $4y - 4y - 4x + 4x - 4 + 4 = 0$
 $-4y + 4 = 0 \quad |y = 1$

d) Qual é o ângulo formado entre as retas DE e CD.
 DE = $y - 4 = 0$ $\text{tg } \theta = \frac{1}{-1}$ $\angle B = 45^\circ$
 CD = $x - 4 = 0$ $\text{tg } \theta = 1$

e) Qual é a distância entre a reta AB e o ponto E
 AB = $y = 1 \rightarrow y - 1 = 0$ $d(E, a) = \frac{|0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 - 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$
 E(2, 4) $d(E, a) = \frac{|10 + 4 - 1|}{\sqrt{1}}$
 $d(E, a) = 7$ $d(E, a) = 3$

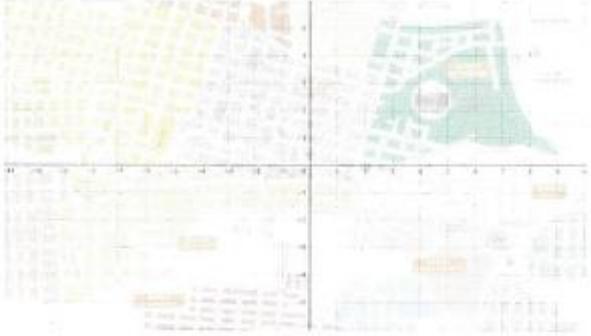
Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Dando seguimento ao processo de diferenciação progressiva de uma perspectiva integradora, conforme sugerido por Moreira (2011), organizou-se a atividade seguinte com o objetivo de reconhecer a presença de conhecimentos científicos, partindo da utilização de *softwares* matemáticos. Através das atividades propostas nessa etapa, buscou-se uma retomada de todas as etapas anteriores, visando à identificação de conhecimentos adquiridos e à possibilidade de aprimorá-los. A situação-problema foi elaborada, a partir do mapa da cidade de Farroupilha, pois percebeu-se, no desenvolvimento da UEPS anterior, o envolvimento dos estudantes por se tratar da cidade deles. Entende-se, assim como Dewey (1959), que, se tivermos um estudante envolvido com o problema, absorvido, o assunto o transportará, pois uma vez interessado em alguma coisa, perguntas e sugestões se apresentarão, quase de prontidão, impulsionando o ato de pensar.

A atividade novamente foi realizada em grupos e recolhida pela pesquisadora para compor a avaliação. Na Figura 42, há recortes das atividades desenvolvidas e das resoluções apresentadas pelo estudante **E21**, após as discussões.

Figura 42 – Resolução do estudante **E21** na atividade da reconciliação integradora

Observe o mapa da cidade de Farroupilha abaixo desenhado sobre um Plano Cartesiano, cuja escala utilizada é de 250 metros para cada unidade.



1- Observando o mapa, responda:

a) Escreva o nome de 2 ruas paralelas: Rua Independência e Rua da República

b) Escreva o nome de 2 ruas perpendiculares: Rua da República e Julho de Castilhos

2- Escreva a equação geral e a equação reduzida da reta representada pela Rua 14 de julho.

$(-5,4)$ e $(-1,3)$ $\begin{vmatrix} -5 & 4 & -15 & 4 \\ -1 & 3 & -15 & 3 \end{vmatrix} = -15 + 43x - y - (-4 - 15y + 3x) = -15 + 43x - y + 4 + 15y - 3x = 40x + 14y - 11 = 0$

3- Demostre, algebricamente que as ruas 14 de julho e a Rua Independência são paralelas.

14 de julho: $y = -\frac{3x}{4} + \frac{11}{4}$ Independência: $y = -\frac{3x}{4} + \frac{7}{4}$

4- Qual a distância entre a reta representada no mapa pela rua José Dala Riva e a Igreja Matriz.

Rua: $(1,)$ e $(-2,4)$ $d = \frac{|(-1)(-2) - 3(2) + 10|}{\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}}$
Igreja: $(-2,2)$ $3x - 3y + 10 = 0$ $d = \frac{3\sqrt{10} \times 250m}{5} = 474,3m$

5- Qual o ângulo formado entre as Ruas Independência e a Pinheiro Machado?

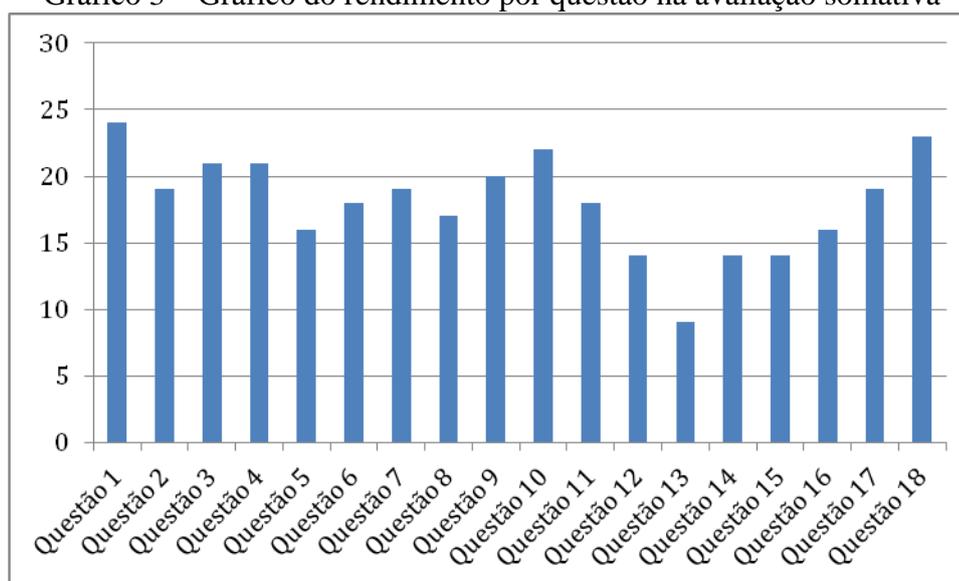
Independência: $y = -\frac{3x}{4} + \frac{7}{4} \Rightarrow 4y + 3x - 7 = 0$ $y = -\frac{3x - 7}{4}$
Pinheiro Machado: $y = -\frac{3x}{4} + \frac{5}{4} \Rightarrow 4y + 3x - 5 = 0$ $y = \frac{5 - 3x}{4}$

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Com a análise das atividades, concluiu-se que os estudantes, além de resolverem a situação-problema apresentada, de forma clara e coerente, conseguiram aplicá-la em situações do dia a dia, bem como relacioná-la às resoluções algébrica e geométrica, entendendo seus significados.

A sétima etapa foi destinada à avaliação somativa, composta de 18 questões, todas de Vestibulares e Enem. A mesma foi avaliada com peso 5 e as situações-problema elaboradas pelos estudantes, na fase da complexidade e reconciliação integradora, também foram avaliadas, com peso 3. A avaliação foi realizada de forma individual e, nesse momento, os estudantes não utilizaram o *software* para a verificação geométrica. Cabe apontar que, dos 26 estudantes da turma, um não realizou a avaliação somativa. O Gráfico 3 mostra os resultados apresentados em cada uma das questões da avaliação.

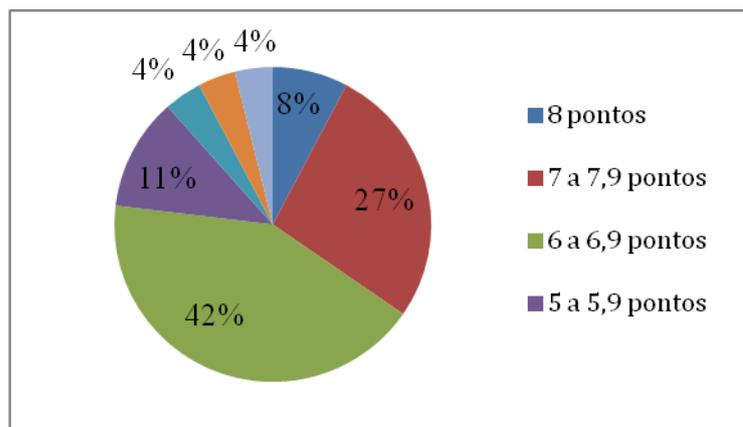
Gráfico 3 – Gráfico do rendimento por questão na avaliação somativa



Fonte: Acerto da pesquisadora (2018).

Analisando o resultado por questão, observou-se que a questão 13 foi a que apresentou maior dificuldade. Na questão era solicitado, a partir da equação geral da reta $4x - 3y + 12 = 0$, os pontos de intersecção da mesma com os eixos das abscissas e ordenadas. Após, teriam que calcular a distância entre esses pontos. A maioria dos estudantes encontrou os pontos de intersecção com os eixos, como sendo $A(0,4)$ e $B(-3,0)$, mas não calculou a distância solicitada. Na Figura 43 está a resolução do estudante **E26**, como representativa de outros.

Gráfico 4 – Resultados da avaliação dos estudantes no final do processo



Fonte: Acerto da pesquisadora (2018).

Levando em consideração que a média da escola é 60%, e partindo dos dados analisados, 88% dos estudantes alcançaram nota superior a 4,8 pontos. Considerou-se um bom resultado, o que nos permitiu inferir sobre a qualidade do material utilizado, com os pressupostos assumidos e referidos nesta pesquisa. Dewey (1959, p. 40) afirma que “uma atitude necessária para a conquista de uma base adequada ao desejo de novos pontos de vista e novas ideias, bem como para a conquista do entusiasmo pela matéria, é a capacidade de absorvê-la”, o que se procurou considerar, visando à identificação de indícios de aprendizagem significativa.

Com o intuito de verificar as potencialidades e fragilidades da UEPS aplicada, realizou-se novamente a avaliação da UEPS de forma coletiva; a pesquisadora solicitou a todos os estudantes, que mencionassem aspectos positivos, negativos e a melhorarem na metodologia proposta. Todos os apontamentos manifestados foram anotados, muitos agrupados por repetição; foram registrados e estão apresentados no Quadro 36.

Quadro 36 – Potencialidades e fragilidades na aplicação da UEPS 3 na visão dos estudantes (UEPS 3)

(continua)

Potencialidades	Fragilidades	Sugestões
<ul style="list-style-type: none"> Utilização do celular nas aulas O <i>software</i> mostrava a resposta geométrica, e caso tivéssemos errado, não precisávamos pedir para a professora corrigir; nós mesmos refazíamos o exercício, para achar o erro – foi uma forma diferente de correção 	<ul style="list-style-type: none"> Falta de comprometimento dos estudantes – que faltavam aulas e prejudicavam o grupo Muita conversa em alguns grupos atrapalhava 	<ul style="list-style-type: none"> Mais problemas envolvendo a cidade de Farroupilha e o mapa Deixar utilizar mais o celular em sala de aula – outros <i>softwares</i> podem ser utilizados Mais exercícios do tipo Enem

(conclusão)

<ul style="list-style-type: none"> • O material era fácil de entender e lendo conseguíamos fazer as atividades • As atividades eram desenvolvidas sempre em grupos, assim tínhamos como um ajudar o outro 		
---	--	--

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Com relação aos comentários apresentados, percebeu-se em comparação com a avaliação das UEPS anteriores, que nenhum estudante apontou como falha a atuação da pesquisadora, por responder perguntas por meio de outras perguntas. Além disso, foi apontado como uma potencialidade a forma como o material foi elaborado.

As sugestões apresentadas pela turma foram importantes para o replanejamento da próxima unidade de ensino, que utiliza outro *software* ou aplicativo, conforme solicitado, ou seja o GPS. Além disso, também acolhendo sugestões, na UEPS 5 utilizou-se o *software* Grafec para a construção de gráficos e figuras.

5.4 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA UEPS 4 – EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

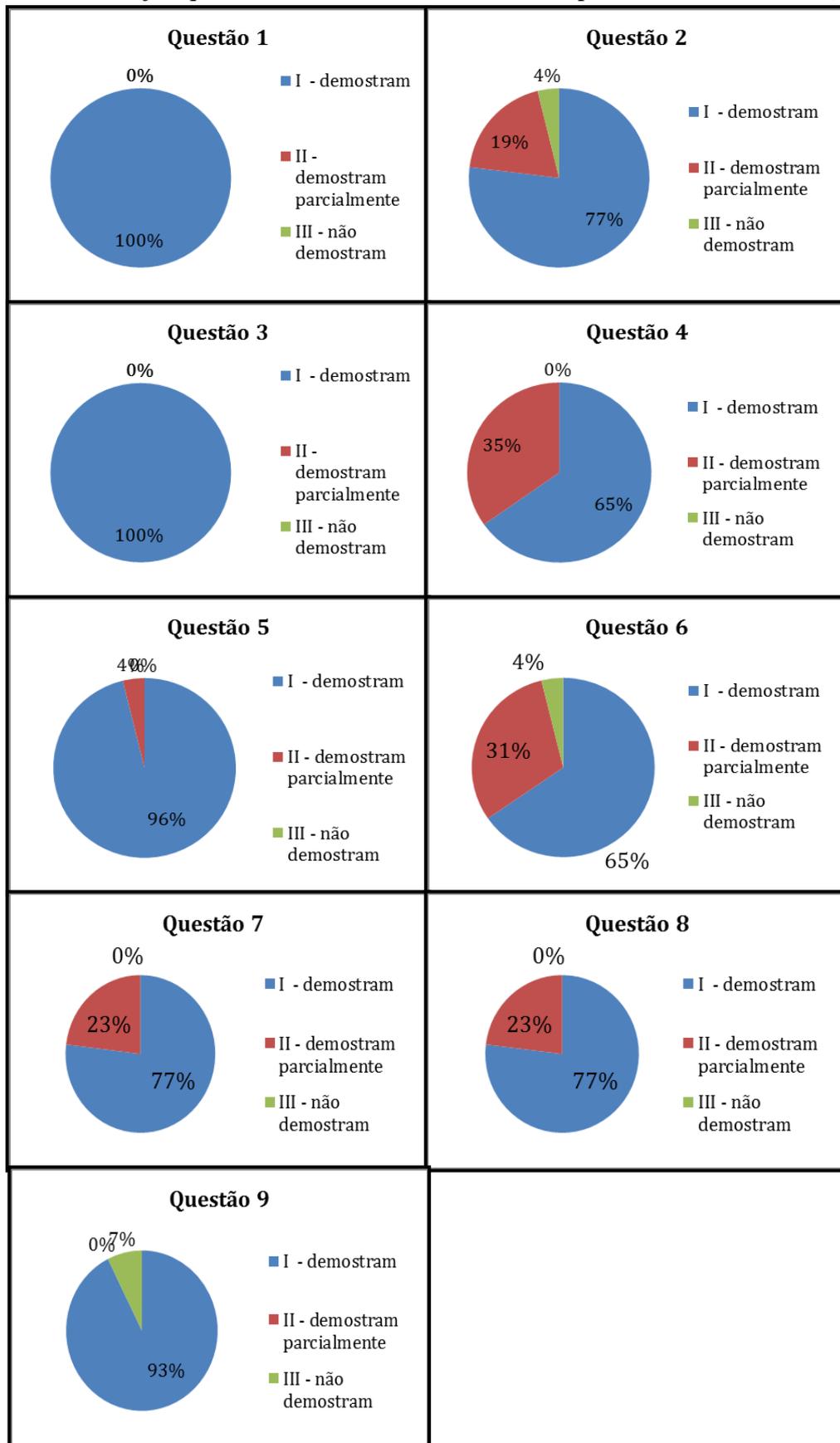
A equação da circunferência foi o tema abordado na UEPS-piloto, conforme apresentado no capítulo 4, acompanhada da respectiva análise. Com base nos resultados e nas considerações mencionadas, a UEPS 4 foi planejada e sua descrição e análise é apresentada a seguir. A sequência didática foi organizada para execução em 14 períodos de aula, seguindo novamente as etapas propostas por Moreira (2011), iniciando com a verificação dos conhecimentos prévios, por meio de um questionário com questões sobre: raio, diâmetro, centro da circunferência, produto notável, latitude e longitude, procurando relacionar o conteúdo (equação da circunferência) com aplicações do GPS. Em comparação com a UEPS-piloto, neste questionário houve o acréscimo da questão 3, pois, ao longo da aplicação, os estudantes fizeram comparações entre a utilização do GPS e aplicativos de celular que apresentavam o mesmo conteúdo. A partir daí, houve interesse em identificar quais eram esses programas, para, dentro do possível, utilizá-los nas atividades propostas. As questões formuladas foram as seguintes:

- 1- Você já viu um GPS? Já utilizou um? Se sim, em que situação?
- 2- Você sabe como funciona um GPS?

- 3- Conhece algum aplicativo de celular que também utilize a localização como estratégia para determinar algo?
- 4- Você já ouviu falar em latitude e longitude? O que significa isso?
- 5- Você sabe a diferença entre raio e diâmetro?
- 6- Como você faria para desenhar uma circunferência de raio 5?
- 7- O que é centro de uma circunferência?
- 8- Como você resolveria o seguinte produto notável $(x - 4)^2$?
- 9- Baseando-se no que você já conhece sobre geometria analítica, se $A(-1,3)$ e $B(3,5)$ são os pontos extremos de um diâmetro da circunferência, você saberia dizer qual seria o centro dessa circunferência? E qual a medida do raio da mesma?

Como nas demais UEPS, os questionários foram recolhidos e analisados quantitativamente. Assim, também, optou-se por categorizar os resultados obtidos e sugeridos por Moraes (2003), em três grupos: (I) os que demonstraram o conhecimento necessário; (II) os que o demonstraram parcialmente; e (III) os que não o demonstraram. No dia da aplicação, em virtude de mau-tempo, um estudante faltou e, em função disso, a atividade foi realizada com os 25 estudantes presentes em sala de aula. No Quadro 37, estão os gráficos dos dados quantitativos coletados, que informam quanto pode ser identificado sobre os conhecimentos prévios dos estudantes, no contexto do estudo da circunferência.

Quadro 37 – Avaliação quantitativa sobre os conhecimentos prévios dos estudantes (UEPS 4)

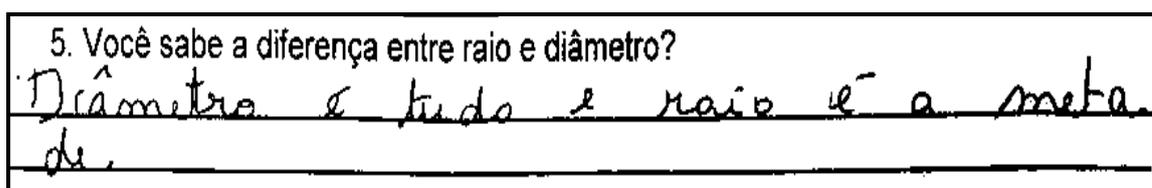


Fonte: Elaboração da autora (2018).

Com base nos resultados, que podem ser observados no Quadro 37, infere-se que os estudantes apresentam alguns dos subsunçores necessários para dar sequência à UEPS. Justifica-se esta afirmação, com base na análise qualitativa, comentada a seguir, que busca identificar as dificuldades apresentadas. Para tanto, selecionaram-se respostas consideradas esclarecedoras, em relação ao que se procurou demonstrar e que, posteriormente, tiveram a interferência da pesquisadora junto ao estudante, visando à construção de conhecimentos necessários para prosseguir com segurança.

Na questão 5, ao responderem sobre a diferença entre raio e diâmetro, assim como na UEPS-piloto, percebeu-se que os estudantes não identificam o raio como o segmento de reta que liga o centro de um círculo a um ponto qualquer desse círculo, nem o diâmetro como o comprimento do segmento que passa pelo centro e toca dois pontos da circunferência. Isso pode ser observado na resposta do estudante **E7**, apresentada na Figura 47.

Figura 47 – Resposta do estudante **E7** à questão 5



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

A resposta apresentada pelo estudante **E7** foi mais ou menos a mesma apresentada por outros nove estudantes. Visando a aprofundar esse conceito, em termos matemáticos necessários para prosseguir, os estudantes foram orientados a pesquisar em diferentes livros de Matemática a definição de raio e de diâmetro, que auxiliaria também na resolução da questão 6, em que foi apresentado o significado e não o conceito. Outra dificuldade observada foi com relação à questão 6, que solicitava que o estudante explicasse como faria para desenhar uma circunferência de raio 5. Nesse momento, o estudante **E8** chamou a pesquisadora e expressou que não sabia como escrever, mas sabia como construir. Utilizou o verso da folha do questionário, e, com um compasso régua e demonstrou, conforme resolução apresentada na Figura 48.

Figura 48 – Destaque da resposta do estudante **E8** ao questionário

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Com efeito, o desenho da circunferência é esse mesmo, porém é importante perceber a dificuldade em descrever o que sabem, problema observado com frequência, não somente em Matemática, e que precisa ser sanado com a retomada de conceitos necessários, bem como com a prática da escrita que pode e deve ser desenvolvida em muitas oportunidades. Outra questão que mereceu destaque, assim como na UEPS-piloto, foi a questão 8, que a solicitava o cálculo do produto notável $(x - 4)^2$, conteúdo integrante dos programados para o 8º. ano do Ensino Fundamental. Novamente observaram-se dificuldades destacadas na Figura 49.

Figura 49 – Respostas apresentadas pelos estudantes **E22** e **E14** à questão 8

8. Como você resolveria o seguinte produto notável $(x - 4)^2$?
$x^2 - 16$
8. Como você resolveria o seguinte produto notável $(x - 4)^2$?
$(x - 4) \cdot (x - 4)$
$x^2 - 4x - 4x + 16$
$x^2 - 0x + 16$

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Analisando respostas como estas, detectou-se que o estudante **E22** possui o conhecimento necessário para resolver o produto notável, porém apresentou um erro ao adicionar $-4x - 4x$, o que pode ser interpretado como falta de atenção aos sinais dos termos, ou mesmo falta de conhecimento relacionado à adição de números inteiros. Já na resolução do estudante **E14**, houve um problema maior, ao desconsiderar que o quadrado de uma diferença entre dois termos não é igual à diferença entre os quadrados dos mesmos.

Com relação à questão 9, considerou-se a sua resolução, desta feita, com melhor qualidade. Ocorre que, em comparação com a UEPS-piloto, o índice de acertos aumentou de 7% naquela, para 92% nesta. De fato, assim como os estudantes deste grupo, os estudantes participantes da UEPS-piloto já tinham estudado os mesmos conteúdos das UEPS 1, 2 e 3, porém, com outra metodologia. Com isso, entende-se que as UEPS proporcionaram melhores condições de aprendizagem, tendo revelado indícios da ocorrência de aprendizagem significativa.

Na Figura 50, está a resolução de um estudante, que conseguiu relacionar o centro da circunferência solicitado com o ponto médio do diâmetro e a medida do raio com a distância entre o centro e um dos pontos sobre a circunferência.

Figura 50 – Destaque da resposta do estudante **E11** à questão 9

9. Baseando-se no que você já conhece de geometria analítica, se $A(-1,3)$ e $B(3,5)$ e esses pontos são os pontos extremos de um diâmetro da circunferência, você saberia dizer qual seria o centro dessa circunferência? E qual a medida do raio da mesma?

DIÂMETRO	CENTRO - PONTO QUE FICA NA METADE DO DIÂMETRO
DISTÂNCIA DE A ATE B $A(-1,3)$ $B(3,5)$	$M = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+5}{2} \right)$
$D = \sqrt{(5-3)^2 + (3-(-1))^2}$	$M = \left(\frac{2}{2}, \frac{8}{2} \right)$
$D = \sqrt{2^2 + 4^2}$	$M = (1, 4)$ CENTRO
$D = \sqrt{4+16}$	
$D = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ CH.	
RAIO É A METADE $R = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ CM.	

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Com os subsunçores identificados, assim como dificuldades, orientou-se que buscassem a revisão desses conceitos em livros da biblioteca e/ou em *sites* de revisão de conteúdos na internet, apontando os erros cometidos. Acredita-se, como Dewey (1959), que o estudante tem condições de ampliar seus estudos sem a dependência do professor, o que, de fato, foi confirmado, no encontro seguinte, por meio de uma discussão, com esta intenção, e acrescentando esclarecimentos necessários.

Na etapa seguinte, conforme a programação, elaborou-se uma situação-problema introdutória, para apresentar o conteúdo a ser desenvolvido, como organizador prévio, por meio da questão: “Onde estamos? Através de um GPS é possível encontrarmos a nossa localização. Como isso é feito? Como funciona um GPS?” Os estudantes foram separados em

grupos de três e um grupo com dois componentes e receberam um texto explicativo adaptado pela pesquisadora e com base em Lima (2013), sobre o funcionamento do GPS e a localização de coordenadas geográficas. Durante e após a leitura do mesmo, a pesquisadora passava entre os grupos e observava as discussões e indagações dos estudantes. Para auxiliar nas discussões, apresentou o vídeo “As aventuras do Geodetive”,⁷ que relata a curiosidade de um estudante com relação ao funcionamento do GPS e a programação matemática realizada por ele, para localizar um ponto/pessoa. Após o vídeo, algumas discussões seguiram, conforme registrado no Quadro 38.

Quadro 38 – Discussões acerca do vídeo apresentado (UEPS 4)

E4 – *Professora, os aplicativos de celular como o Strava ou o Runtastic, que identificam a nossa localização quando corremos ou andamos de bicicleta, também funcionam desta forma?*

Professora – *Isso mesmo!*

E9 – *Nossa profe! Não imaginei que a precisão do GPS fosse tão importante, um microssegundo entre a transmissão e a recepção já muda a localização em 300 metros! Isso é muito!*

E6 – *A gente fez esse cálculo de $d = v \times t$ em física, vamos usar agora em matemática?*

Professora – *Vamos sim!*

E11 – *Profe, nós vamos aprender a calcular onde uma pessoa está localizada assim como o GPS faz?*

Professora – *Vamos tentar?*

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Aproveitando a empolgação dos estudantes, iniciou-se a etapa da diferenciação progressiva, utilizando a mesma situação-problema da UEPS-piloto. Durante a resolução da primeira situação-problema, os estudantes se mostraram bastante motivados, até mesmo por utilizarem o compasso; muitos salientaram que têm o material desde o Ensino Fundamental, mas nunca tinham utilizado. Após calcular a medida do raio correspondente a cada uma das três cidades mencionadas, começaram discussões que iniciaram com um questionamento: “*Profe, tem um lugar aqui que elas se encontram que nem vimos no vídeo do Geodetive. Então, se alguém souber o raio que eu me encontro de três pontos distintos, consegue identificar a minha localização assim como o GPS faz?*” A resolução realizada pelo estudante **E6** é apresentada na Figura 51.

⁷ Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=2jEgSZwm-nk>>. Acesso em: 12 mar. 2017.

localizada, recorreram ao Google Maps, e apontaram “a casa da pesquisadora” como solução. A resolução realizada pelo estudante **E12** é apresentada na Figura 52.

Figura 52 – Resolução apresentada pelo estudante **E12** para a situação-problema

ATIVIDADE 2 - O mapa abaixo é a imagem vista da cidade de Farroupilha no Google Maps. Imagine que uma pessoa está localizada a 800m do Escritório da Unimed, 600m da rodoviária e a 660m da Tramontina Store.

Observação: observe a escala utilizada para representar a figura. 1cm = 200 m



(Fonte: Disponível em: <https://www.google.com/maps/@32.2204001,-51.5403552,15z/data=!3m1!1e3>. Acesso: 29 de julho de 2017)

a) Observando a escala utilizada e determine a distância em cm a partir:

- Unimed $\frac{800}{200} = 4\text{cm}$
- Tramontina $\frac{660}{200} = 3,3\text{cm}$
- Rodoviária $\frac{600}{200} = 3\text{cm}$

b) Trace as três circunferências de acordo com a medida do raio que você encontrou acima.

c) Você consegue determinar o ponto exato onde esta pessoa está localizada? O que existe neste ponto no município de Farroupilha? O que essa pessoa pode estar fazendo? *A casa da professora. Ela deve estar corrigindo provas.*

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

A opção por acrescentar outra situação-problema deu-se pela necessidade apresentada pelos estudantes de mais exercícios; a escolha por elaborar uma situação-problema baseada no mapa da cidade foi organizada com a intenção de mostrar aos estudantes a aplicação do conteúdo no seu contexto, respondendo ao questionamento frequente: “Onde aplicamos esse conteúdo?”

Com efeito:

Se o novo material de aprendizagem é especificamente relacional com os conhecimentos existentes, pode atribuir-se o efeito facilitador de mais conhecimentos sobre ele quer à disponibilidade demais ideias ancoradas especificamente relevantes, quer a uma maior capacidade de discriminação entre os dois conjuntos de idéias análogas. (AUSUBEL, 2003, p. 162).

A etapa da complexidade foi a que apresentou maiores mudanças, em comparação com a UEPS-piloto, pois muitos estudantes apresentaram dificuldades em determinar as equações geral e reduzida da circunferência. Para tanto, foram elaboradas outras atividades, em que os estudantes, conhecendo o centro, o raio ou o diâmetro, tivessem condições de escrever as equações geral e reduzida da circunferência. Outra dificuldade apresentada, e que recebeu atenção nesta UEPS, foi a identificação do centro e do raio da circunferência, a partir da sua equação geral, em que se utilizou o método de completar quadrados.

Com base nessas mudanças, partindo de uma nova situação-problema utilizando trilateração⁸ na circunferência na cidade de Farroupilha, acrescentaram-se os conceitos de equação geral e equação reduzida da mesma, a partir da fórmula da distância já apresentada aos estudantes na UEPS 2 e confirmada por eles na resolução da questão 8 dos conhecimentos prévios. Na noite após a aula, o estudante **E11**, ao assistir ao Jornal Nacional, deparou-se com a previsão do tempo e associou a forma, como a mesma estava apresentada, com a trilateração realizada em aula. A Figura 53 apresenta a mensagem enviada do estudante para a pesquisadora.

Figura 53 – Mensagem enviada pelo estudante **E11** para a pesquisadora



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Com efeito, essa etapa foi organizada com o objetivo de demonstrar a existência de conhecimentos científicos no cotidiano do estudante, relacionando o conteúdo estudado com a aplicação. A associação feita pelo estudante **E11**, comentada na Figura 53, foi aproveitada

⁸ A **trilateração** é um processo para determinar o posicionamento de algo, a forma como são feitos os cálculos. O cálculo faz uso de 3 pontos de referência para determinar a posição do elemento, como acontece com os sistemas de GPS (*Global Positioning System*).

pela pesquisadora, que incluiu, no material a ser disponibilizado como continuação, uma situação-problema envolvendo a fotografia que foi tema da mensagem. No Quadro 39, apresentam-se comentários feitos em aula, quando da entrega do material, iniciados pelo estudante **E11**, que reconheceu a foto feita por ele.

Quadro 39 – Comentários com base no exercício proposto a partir da fotografia da previsão do tempo enviada pelo estudante **E11** (UEPS 4)

E11 – *Profe, esse exercício é com a foto que eu mandei?*
Professora – *Sim! Tu conseguiste identificar, enquanto assistias à televisão, que a trilateralização pode ser aplicada em outras situações.*
E11 – *Que legal! Posso começar a responder por esse exercício?*
E7 – *Eu também vi isso na televisão ontem profe!*
E4 – *Profe, eu trabalho com informática e tem um pouco disso também. Por exemplo, os roteadores de internet funcionam de acordo com um raio específico, se tu estás fora desse raio o wifi não vai funcionar!*
Professora – *Perfeito, é por isso que aqui na nossa sala o wifi não funciona. Estamos distantes do laboratório de informática e da sala dos notebooks, locais onde estão instalados os roteadores!*

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Nos comentários apresentados no Quadro 39, pode-se perceber indícios de aprendizagem significativa, ao relacionarem o conhecimento estudado com situações que ocorrem fora da sala de aula.

No material disponibilizado, foram acrescentados exercícios de Vestibulares e do Enem, que abordam principalmente a identificação das equações geral e reduzida da circunferência, atendendo sugestão apresentada pelos estudantes na UEPS-piloto. Durante a aplicação, os estudantes trabalharam em pequenos grupos, e a professora pesquisadora, como sugerido por Dewey (1959), agia como mediadora do processo, estimulando, observando e fomentando as discussões.

Na resolução dos exercícios propostos, os estudantes resolveram com facilidade aqueles onde deveriam escrever a equação geral e a equação reduzida da circunferência, bem como os exercícios para calcular o centro e o raio da circunferência, a partir de sua equação reduzida.

Nessa etapa, na UEPS-piloto, a maior dificuldade estava no exercício em que, partindo da equação geral da circunferência, deveriam escrever sua equação reduzida. Partindo da constatação dessa dificuldade, nessa UEPS propôs-se uma atividade utilizando o processo conhecido como “completar quadrados”, obtendo trinômios quadrados perfeitos que fatorados resultam em quadrados da soma ou da diferença de dois termos. A atividade resolvida por um grupo de estudantes segue na Figura 54.

Figura 54 – Resolução de um grupo de estudantes para a equação geral da reta

7- A equação $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$ representa a equação geral de uma circunferência. A partir dela, conseguimos determinar a equação reduzida da mesma utilizando um processo conhecido como "completar os quadrados". Vejamos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 &= 0 \\ x^2 - 4x + y^2 - 8y &= -19 \\ x^2 - 4x + \underline{4} + y^2 - 8y + \underline{16} &= -19 + \underline{4} + \underline{16} \\ (x^2 - 4x + \underline{4}) + (y^2 - 8y + \underline{16}) &= -19 + \underline{4} + \underline{16} \end{aligned}$$

Lembre-se que: $(x - a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$

Então: $(x^2 - 4x + \underline{4}) = (x - 2)^2$
 $(y^2 - 8y + \underline{16}) = (y - 4)^2$

Voltando para a situação de completar quadrados, temos:

$$\begin{aligned} (x^2 - 4x + \underline{4}) + (y^2 - 8y + \underline{16}) &= -19 + \underline{4} + \underline{16} \\ (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 8y + 16) &= -19 + 4 + 16 \\ (x - 2)^2 + (y - 4)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Então, a equação reduzida da circunferência é $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 1$. Seu raio é 1 e o Centro $(2, 4)$.

Utilizando o processo de "completar os quadrados", determine a equação reduzida, o centro e o raio das equações abaixo:

a) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ $x^2 + 6x + \underline{\quad} + y^2 - 4y + \underline{\quad} = 12$
 $R = 1$ $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = -12 + 9 + 4$
 $C = (-3, 2)$ $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = +3$

b) $x^2 + y^2 + 12x - 4y - 9 = 0$ $x^2 + 12x + \underline{\quad} + y^2 - 4y + \underline{\quad} = 9$
 $R = \sqrt{43}$ $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = -9 + 36 + 4$
 $C = (-6, 2)$ $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = +43$

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Na sétima etapa, ocorreu a avaliação somativa, elaborada com seis questões, de forma a contemplar os diferentes níveis de complexidade, realizada por 25 estudantes: um deles não compareceu. A Figura 55 apresenta os estudantes realizando a avaliação escrita de forma individual.

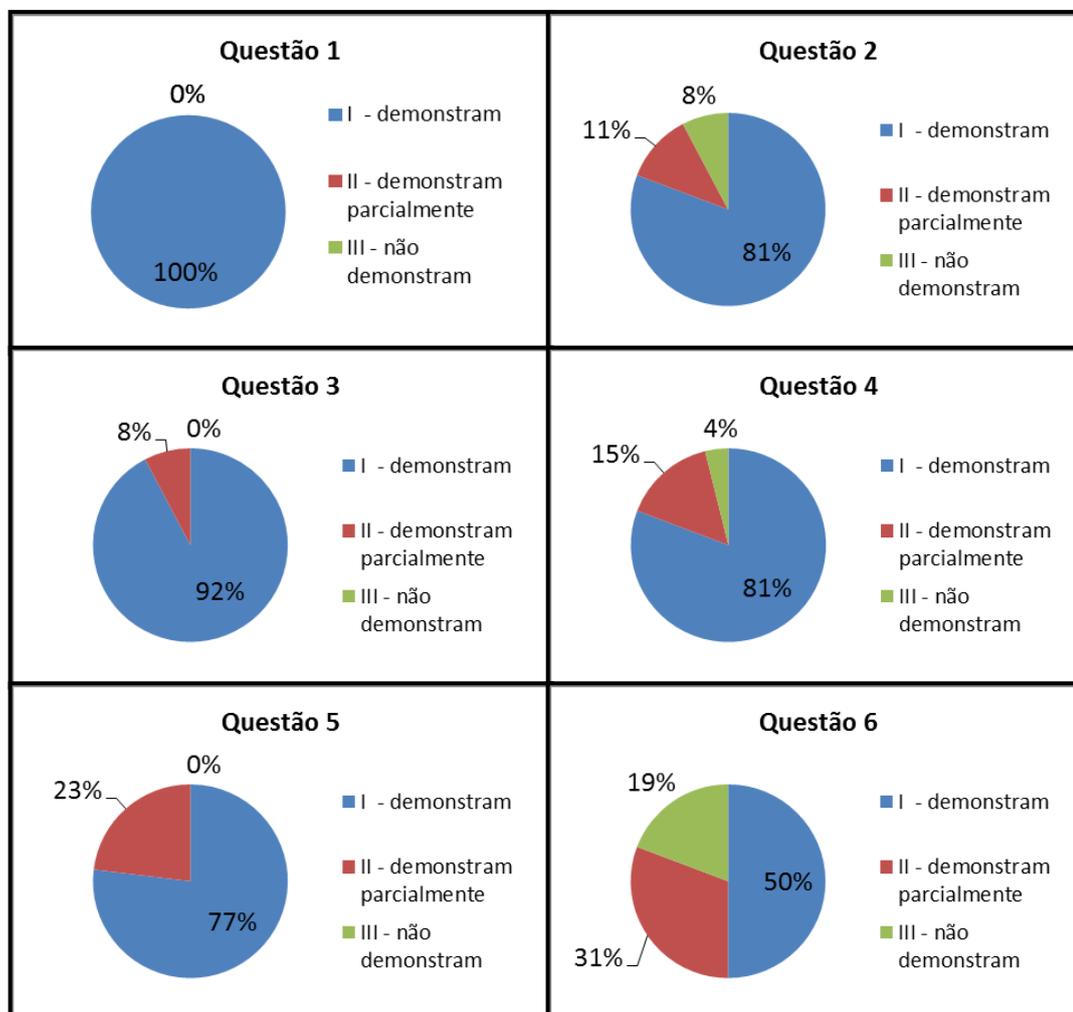
Figura 55 – Estudantes realizando a avaliação



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

No Quadro 40 estão os gráficos dos dados quantitativos coletados de cada questão da avaliação somativa.

Quadro 40 – Avaliação quantitativa da somativa realizada pelos estudantes (UEPS 4)



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Após a análise quantitativa procedeu-se à análise qualitativa dos resultados, observando os erros apresentados pelos estudantes, com o objetivo de identificar as dificuldades e retomar possíveis problemas. Na questão 1, foi proposta a resolução de uma situação-problema envolvendo a mesma trilateração do GPS, assim como desenvolvido em aula. Os resultados apontam que atividades que envolvem recursos não digitais como, por exemplo, régua e compasso, motivam o estudante e favorecem a aprendizagem. Com efeito, 100% dos estudantes acertaram a questão. Abaixo, na Figura 56, apresenta-se a resolução do estudante **E14** para a questão 1 da avaliação somativa.

Figura 56 – Resolução do estudante E14 para a questão 1 da avaliação somativa

1. Imagine a seguinte situação. É perto do meio-dia e você está perdido em Farroupilha entre o bairro Vicentina e o bairro Pio X. Você dispõe de um mapa da cidade, conforme a figura abaixo, e material de desenho geométrico e sabe que no Bairro Pio X está localizado o Corpo de Bombeiros, no Centro localiza-se a Igreja Matriz e no trevo da Santa de Caravaggio (pontos próximos) a sua localização existem sirenes que soam precisamente a cada hora sendo ouvidos a grandes distâncias. Identifiquem no mapa essas cidades.

ESCALA:
1cm = 1000m

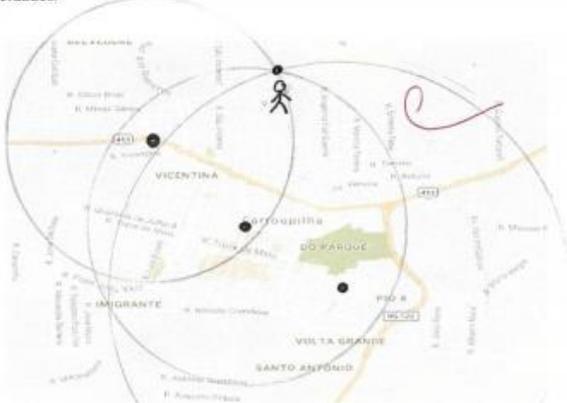


FIGURA 6: Disponível em: <https://www.google.com.br/maps/@-29,2251635,-51,3537883,14z> Acesso em 19 de junho de 2017)

Digamos que o seu relógio e a sirene desses lugares estejam sincronizados e que cada sirene tenha um timbre diferente, o que permite identificá-los. Suponha que:

- 11 segundos após o meio dia você ouve o sino da Igreja Matriz;
- A sirene do Corpo de Bombeiros você ouve 16 segundos após o meio-dia;
- E por fim, a sirene de um acidente no trevo da Santa em 10 segundos

Para se localizar você Utiliza o conceito da cinemática da Física já estudado:
 $v = d/t$ e sabe que a velocidade com que o som se propaga no ar é de 340,3 m/s.

Sabendo disso, você pode, então, calcular as distâncias r_1 , r_2 e r_3 em relação a Igreja Matriz, Corpo de bombeiros e trevo da Santa, respectivamente:

$$M \quad r_1 = 11 \times 340,3 = 3743,3 \text{ m} \quad / 1000 = 3,74 \text{ km}$$

$$B \quad r_2 = 16 \times 340,3 = 5444,8 \text{ m} \quad / 1000 = 5,44 \text{ km}$$

$$S \quad r_3 = 10 \times 340,3 = 3403 \text{ m} \quad / 1000 = 3,40 \text{ km}$$

Em qual ponto você está? Conseguiu descobrir? Justifique

NO PONTO QUE AS 3 CIRCUNFERÊNCIAS SE CROUZAM.

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Com relação à identificação do centro e do raio de uma circunferência, a partir da equação geral da reta, em que os estudantes apresentaram dificuldades na aplicação da UEPS-piloto, houve maior índice de acertos nesta aplicação. Atribuiu-se esse melhor resultado às adaptações realizadas na UEPS. Alguns estudantes ainda apresentaram dificuldades na resolução, tais como problemas relacionados a operações matemáticas e produtos notáveis, mesmo com as atividades desenvolvidas, como se pode identificar na Figura 57, com a resolução do estudante E11 para a questão 4.

Figura 57 – Resolução do estudante E11 para a questão 4 da avaliação somativa

4- Em cada equação de circunferência abaixo, determine o centro e o raio.

a) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 0 + 9 + 16 - 9$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 - 9$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$$

centro = (3, 4) ok
raio = 5 *aten!*

b) $x^2 + y^2 - 12x - 2y - 12 = 0$

$$x^2 - 12x + \text{---} + y^2 - 2y + \text{---} = 0$$

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 = 0$$

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 = 36 + 4 - 12$$

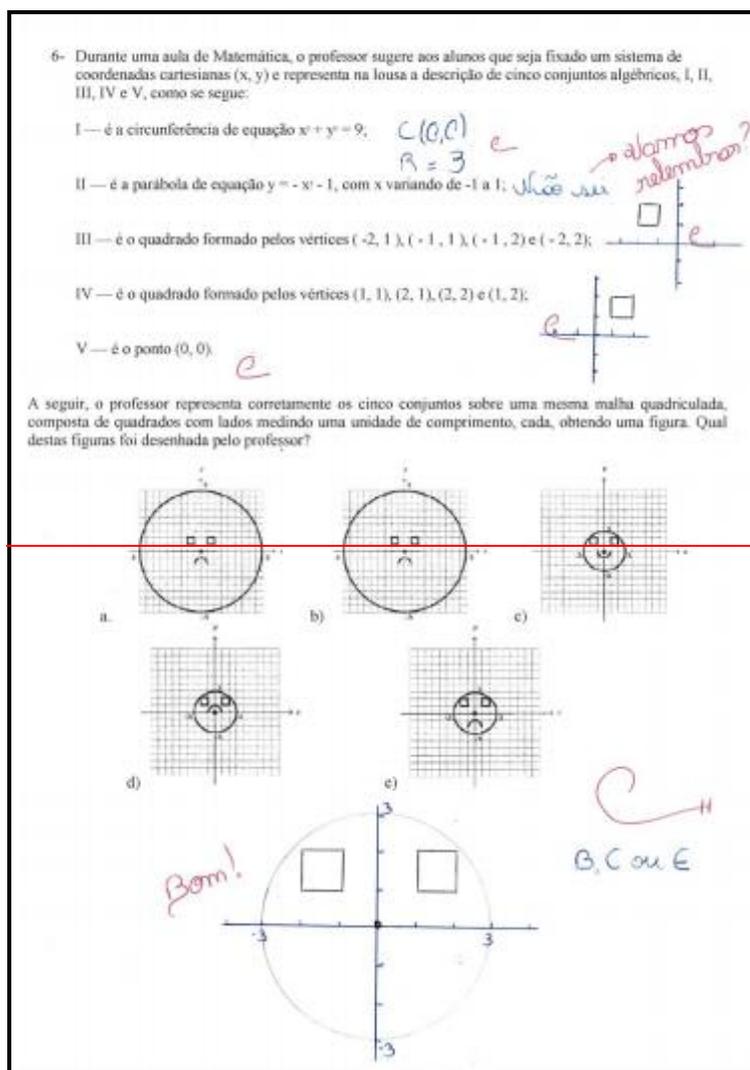
$$(x-6)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{40})^2$$

centro = (6, 2)
raio = $\sqrt{40}$

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Na questão 6, partindo da equação da circunferência, os estudantes deveriam identificar o centro e raio da mesma, o que não se constituiu como dificuldade, visto que, na atividade citada anteriormente, em que era solicitado algo semelhante, a maioria realizou com êxito. Observou-se, nas resoluções, que os mesmos identificaram o centro e o raio solicitados e conseguiram construir as figuras correspondentes, a partir dos pares ordenados obtidos. A dificuldade apresentada na questão, tem relação com a construção do gráfico da função $y = -x^2 - 1$, conteúdo que integra os programas de 1º ano do Ensino Médio. Entretanto, sempre que não ocorre aprendizagem significativa, muitos conceitos não se constituem como aprendizagem duradoura. Na Figura 58, está a resolução do estudante E17 para a questão 6 da avaliação somativa.

Figura 58 – Resolução do estudante E17 para a questão 6 da avaliação somativa



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

De forma geral, durante a realização da avaliação somativa, houve interesse, organização e demonstração de apropriação de conhecimentos referentes à Equação da Circunferência. De maneira geral, foi possível identificar que muitos conseguiram integrar novos conceitos, quando comparados com os conhecimentos prévios descritos no início dessa seção. Acredita-se que a utilização de recursos digitais, como é o caso do GPS através do celular, a linguagem com que a UEPS foi descrita e as atividades realizadas e adaptadas, a partir dos apontamentos realizados na UEPS-piloto, mostrando a aplicação do conteúdo, auxiliaram na aprendizagem.

Realizando uma comparação das respostas ao questionário inicial, com as que foram apresentadas na avaliação somativa, entende-se ser possível considerar que o material utilizado é potencialmente significativo e que colaborou para a ocorrência de aprendizagem

significativa, uma vez que os estudantes demonstraram ter ampliado o conhecimento e conseguiram relacionar novos conceitos com o cotidiano. Isto foi possível observar nas falas de estudantes, identificando aplicações do conteúdo estudado fora do ambiente escolar. Com efeito, segundo Moreira (2001), um material é considerado potencialmente significativo quando a relação entre a estrutura lógica do conhecimento em si e a estrutura psicológica do conhecimento do estudante é levada em consideração na sua elaboração, o que, de fato, foi levado em conta.

Ao contrário das demais, a avaliação desta UEPS foi realizada de forma individual e escrita, buscando melhor comparação com a avaliação da UEPS-piloto, a fim de verificar possíveis efeitos das alterações realizadas. Foi solicitado aos estudantes que respondessem os mesmos questionamentos, apontando fragilidades, potencialidades e sugestões que aperfeiçoem o trabalho. Após análise dos 25 questionários respondidos, como muitas respostas se repetiam, escolheram-se as com maior representação para apresentar no Quadro 41.

Quadro 41 – Avaliação da UEPS 4 na visão dos estudantes

Potencialidades	Fragilidades	Sugestões
<ul style="list-style-type: none"> • Identificamos onde aplicamos o conteúdo • Muito legal trabalhar com o GPS • Achei fácil de entender o conteúdo com esses materiais que a professora entrega • Já acostumamos a trabalhar com a UEPS, é bom assim, começa fácil e vai acrescentado aos poucos! 	<ul style="list-style-type: none"> • No nosso grupo, um integrante que faltou muitas aulas 	<ul style="list-style-type: none"> • Mais atividades com o compasso. É legal desenhar • Mais atividades de resolver problemas com a circunferência, para achar onde uma pessoa está

Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

De posse da avaliação da UEPS-piloto e também desta, percebeu-se que os ajustes construídos auxiliaram na organização da mesma, ao incluir situações que Ausubel (2003) considera de aprendizagem por descoberta. A adaptação realizada nesta UEPS, com mais atividades que envolviam a utilização de régua e compasso, naquelas de trilateração desenvolvidas, além de motivarem os estudantes, favoreceram a aprendizagem, o que pode ser verificado no resultado da avaliação somativa, pois 100% dos estudantes conseguiram resolver este tipo de situação-problema.

Ainda, destacam-se os exercícios envolvendo a identificação do centro e raio da circunferência, a partir da equação geral da mesma, como uma importante alteração realizada

na UEPS, pois a sua elaboração foi organizada de forma que o estudante pudesse melhor compreender os produtos notáveis, mediante o método de completar quadrados, o que apontou bons resultados, não apenas por memorização, como visto anteriormente na Figura 54.

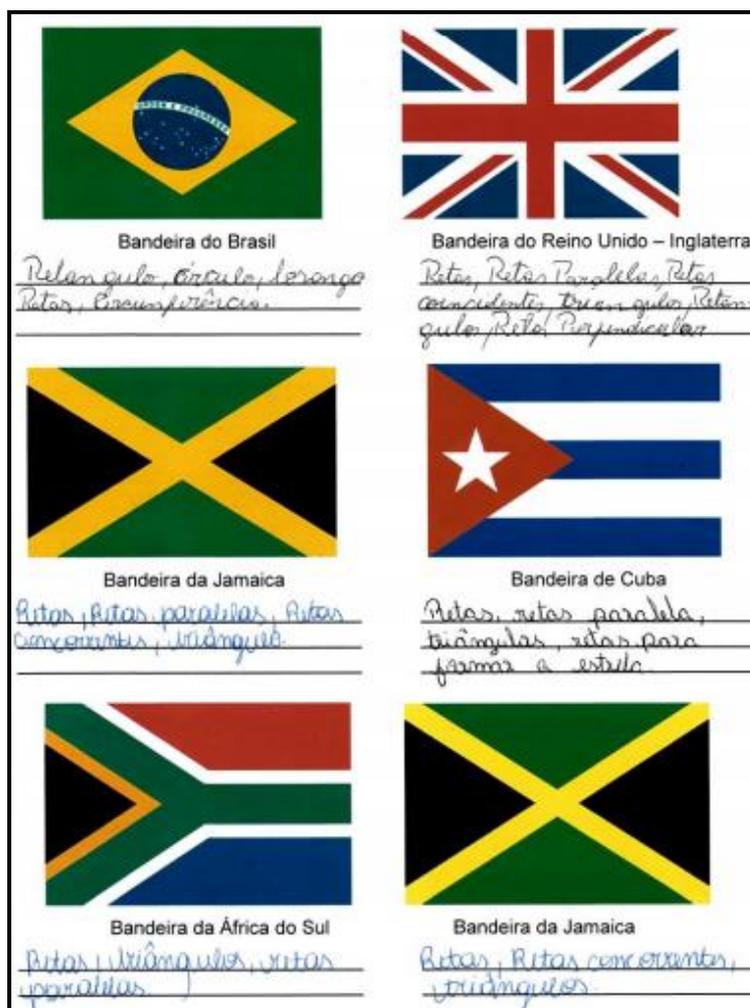
Por fim, destaca-se a importância da aplicação da UEPS-piloto para identificar os erros e acertos na mesma, e adaptá-la para a aplicação desta pesquisa. Ressalta-se ainda que, para futuras aplicações ainda há alterações a serem feitas, como, por exemplo, as relacionadas aos gráficos de funções, à manipulação de compasso e produtos notáveis. Para as demais etapas, sugere-se que os estudantes construam as próprias situações-problema, pois, através dessas elaborações, precisam aplicar os conceitos, o que favorece a aprendizagem.

5.5 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA UEPS 5 – GEOMETRIA ANALÍTICA COM SOFTWARES MATEMÁTICOS

Esta UEPS foi planejada de forma a abordar todos os conteúdos desenvolvidos nas UEPS anteriores. Para iniciar a aplicação, também foi solicitado aos estudantes que respondessem o questionário dos conhecimentos prévios, que incluiu a maior quantidade possível de conceitos matemáticos relacionados à Geometria Analítica estudada, presentes em bandeiras apresentadas.

Como tais conceitos estão sendo trabalhados desde a primeira UEPS, nesta fase espera-se que eles se apresentem consolidados para possíveis aplicações em outras situações do cotidiano. Um dos questionamentos foi o seguinte: *“Em cada uma das bandeiras abaixo, escreva a maior quantidade possível de conceitos matemáticos que você encontra. Algum deles faz referência ao que estudamos em Geometria Analítica?”* Na Figura 59 estão algumas das respostas dos estudantes para a questão.

Figura 59 – Resolução de alguns estudantes para a questão dos conhecimentos prévios



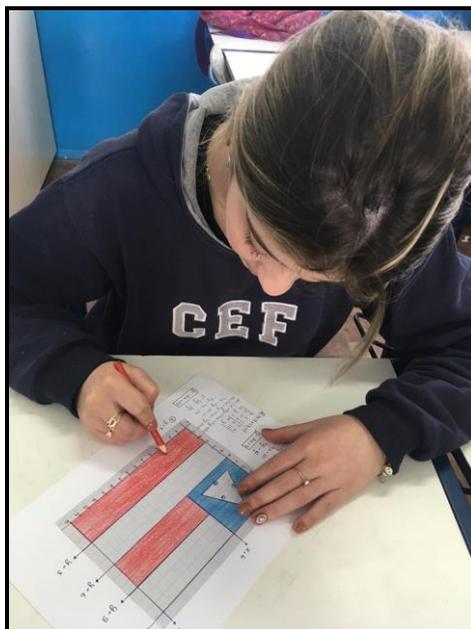
Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Dando início às demais etapas da UEPS, com base nos conhecimentos prévios identificados, a situação-problema introdutória apresentou um texto intitulado “Conhecendo um pouco a respeito das bandeiras”,⁹ que trouxe a origem e evolução da bandeira do Brasil. Os estudantes se mostraram bastante curiosos, principalmente com relação à evolução das bandeiras, comparando, em cada caso, a atual com as demais.

Após a leitura, teve início a etapa da diferenciação progressiva. Nesta etapa, os estudantes foram orientados a construir, em um Plano Cartesiano, a bandeira da Bahia. Os estudantes poderiam desenhar da forma como quisessem, porém deveriam respeitar as dimensões oficiais. A Figura 60 mostra a estudante **E24** representando a bandeira no Plano Cartesiano.

⁹ Adaptado pela pesquisadora e disponível em: <http://www.dsc.ufcg.edu.br/~pet/jornal/novembro2009/materias/cultura.html>. Acesso: 9 out. 2017.

Figura 60 – Estudante E24 representando a bandeira da Bahia no Plano Cartesiano



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Com a bandeira desenhada, na etapa da complexidade, utilizando os *softwares* matemáticos GeoGebra e GraFeq, os estudantes deveriam construir a mesma bandeira mas utilizando os *softwares*. Para isso, receberam um manual, com o passo a passo para, primeiramente, plotar a bandeira construída no GeoGebra e determinar as equações de retas correspondentes à figura. Feito isto, a partir dos dados obtidos no *software*, utilizando o material elaborado e os símbolos de maior e menor ($>$ e $<$), deveriam construir a bandeira no *software* GraFeq. A bandeira da Bahia foi escolhida por ser simples e com poucos elementos, para que a primeira construção realizada em *software* fosse mais fácil.

Durante a construção da bandeira, percebeu-se que os estudantes, conforme escreviam as equações, com os cálculos necessários, procuravam verificar se a construção realizada pelo *software* GeoGebra no celular correspondia à da imagem construída. A maior dificuldade, nessa etapa, foi a interpretação dos sinais de menor e maior para a construção da figura, como foi possível observar na fala de um grupo de estudantes.

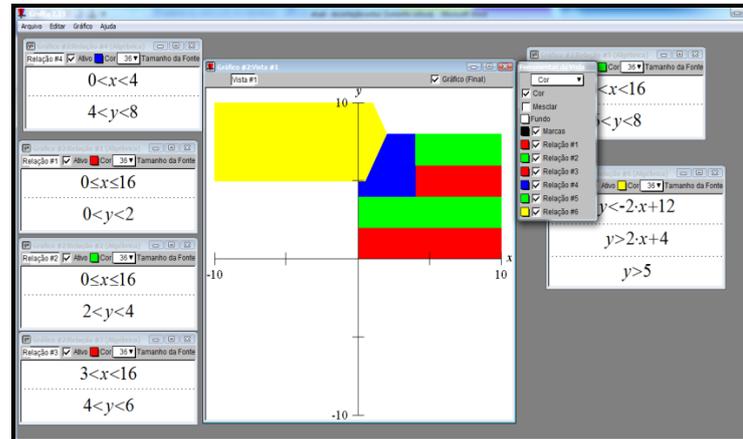
E19 – *Profe, olha, a gente tem as equações de reta corretas, está igual à equação do GeoGebra, mas quando forma a figura não é o triângulo que precisamos.*

Professora: – *O que acontece?*

E1 – *O software pinta a figura para cima ou para baixo se trocarmos os sinais de maior ou menor, olha só!*

Naquele momento, o estudante **E17** apresentou a resolução do *software* GeoGebra com as duas versões de sinais que, segundo ele, estariam corretas, mas não formava a figura desejada. A Figura 61 apresenta essas resoluções.

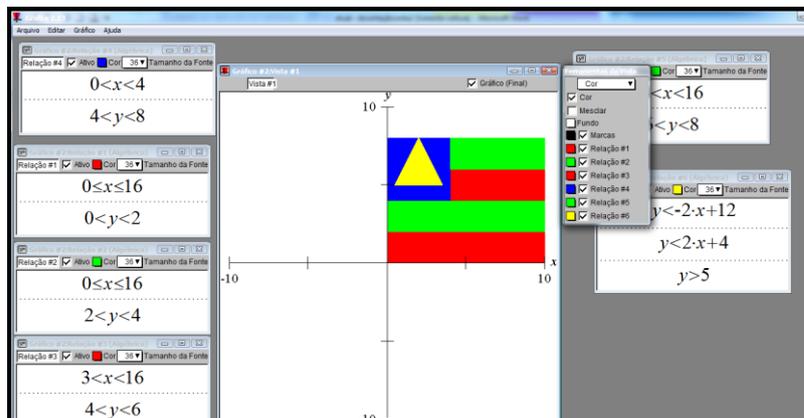
Figura 61 – Resolução do estudante **E17** para a construção da bandeira da Bahia



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Então, percebeu-se que as equações de reta, conforme estudado na UEPS 3, estavam corretas e a dificuldade estava mesmo na interpretação dos sinais. Quando questionados sobre o problema da figura, os mesmos apontaram que estava ficando acima do que eles precisavam e que, para a construção, era necessário que a parte amarela ficasse abaixo. Sem a interferência da pesquisadora, a estudante **E19** apontou: – “É fácil! Se tem que ficar para baixo é só trocar o sinal, aí, onde está maior, tem que colocar o símbolo de menor!” E já fez a alteração. Na Figura 62, está uma das bandeiras construída corretamente, por um dos grupos.

Figura 62 – Bandeira da Bahia finalizada por um grupo

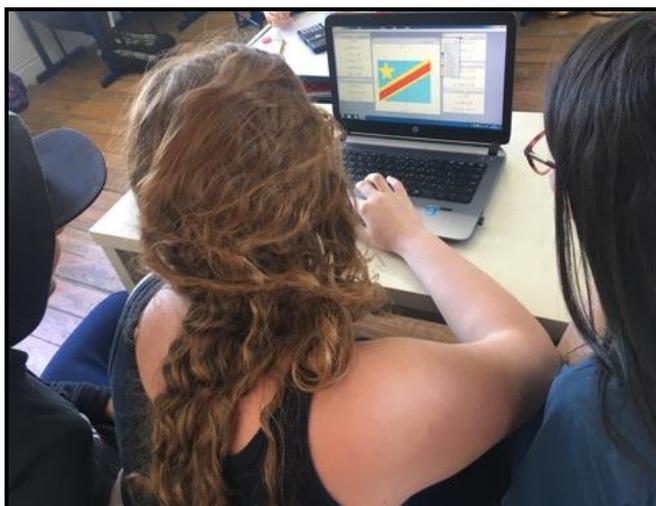


Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Na etapa da reconciliação integradora, foi feito um trabalho interdisciplinar com os professores de Geografia e de Artes. Selecionaram-se as bandeiras de alguns países, as quais os estudantes deveriam representar utilizando os *softwares* GeoGebra e GraFeq. As bandeiras foram escolhidas com elementos estudados nas UEPS anteriores, e os estudantes foram divididos em cinco grupos, sendo cada um deles responsável pela representação da bandeira de um dos países: Jamaica, República Democrática do Congo, República Federativa de São Tomé e Príncipe, Tunísia e Timor Leste. Posteriormente às construções, deveriam pesquisar dados importantes de cada um dos países.

A escola possui laboratório de informática e alguns *notebooks* cedidos pelo governo e que são utilizados em sala de aula quando o trabalho, assim como esse, é realizado em grupos. A Figura 63 mostra os estudantes trabalhando em sala de aula com os *notebooks* disponibilizados do laboratório de informática, para a construção da bandeira sorteada.

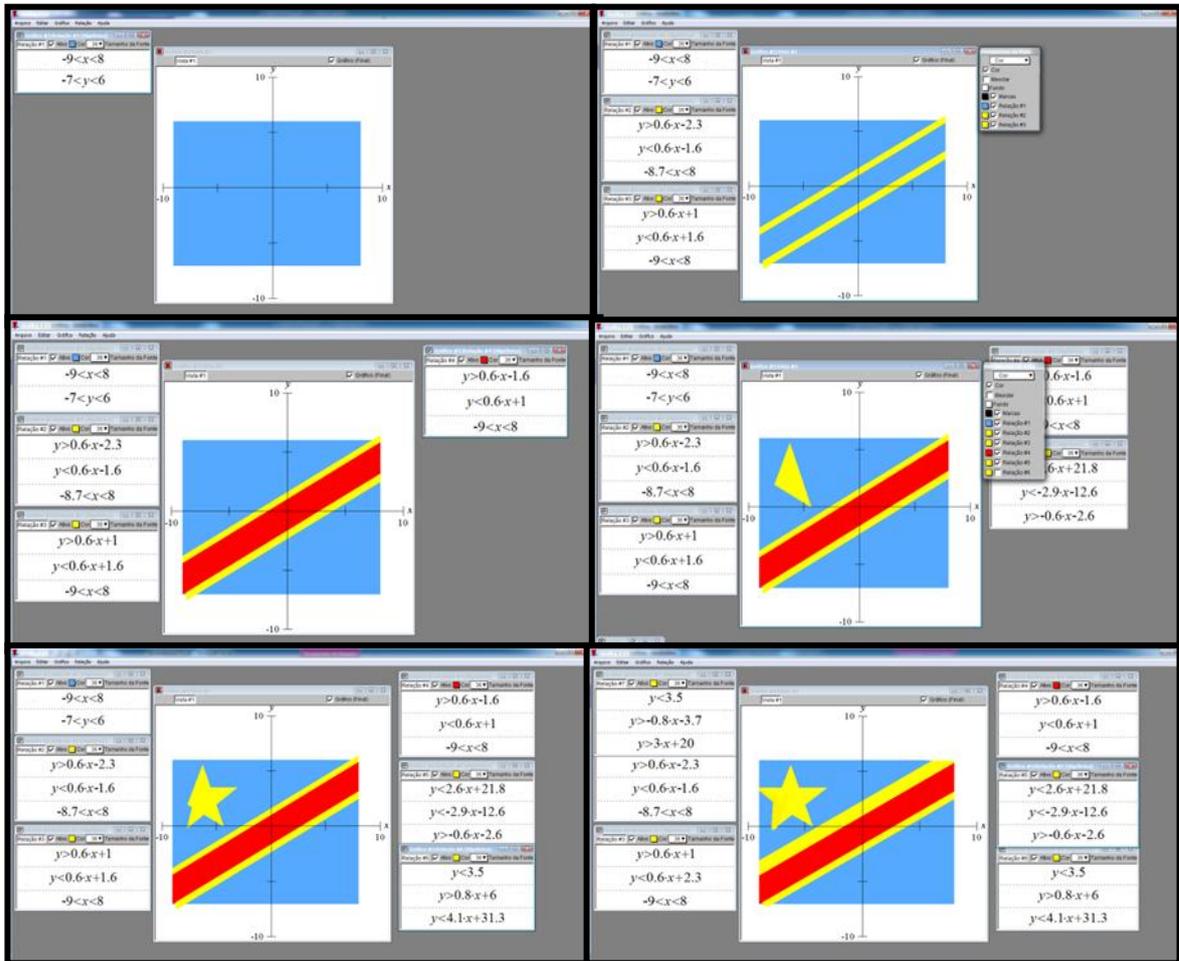
Figura 63 – Estudantes construindo a bandeira da República Democrática do Congo



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Na Figura 64, está o passo a passo realizado pelos estudantes para a construção da bandeira.

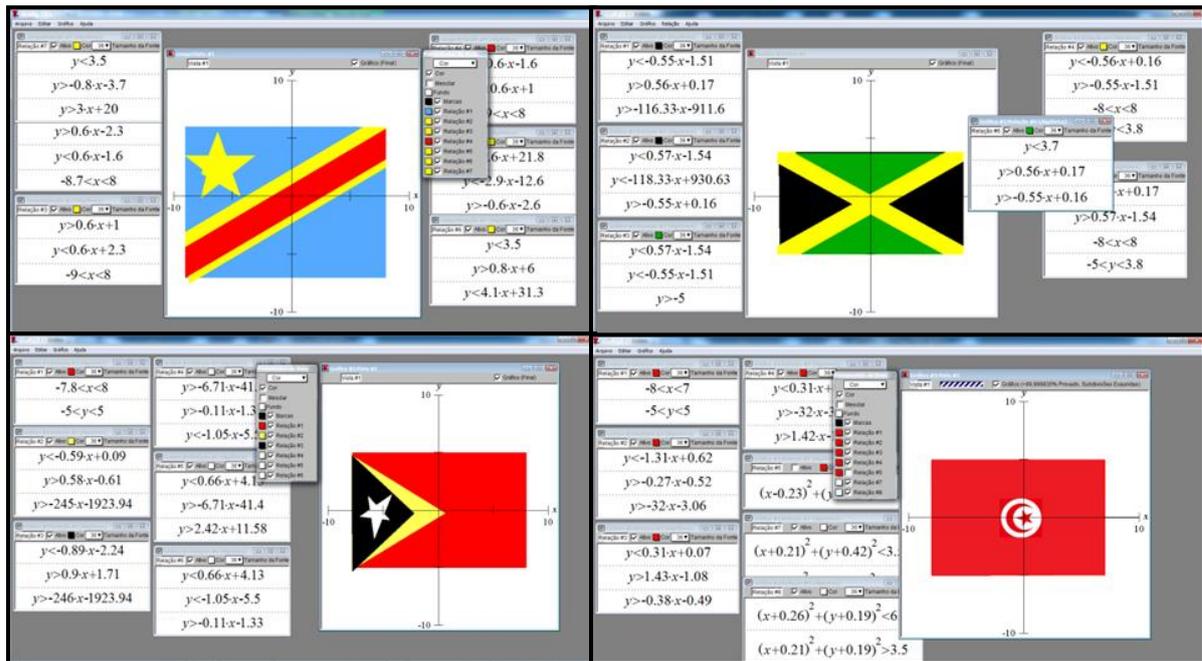
Figura 64 – Representação da bandeira da República Democrática do Congo



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

No final da tarefa, os estudantes deveriam imprimir a bandeira para resolver as questões propostas como atividade na disciplina de geografia e enviar o arquivo por *e-mail* para a professora, para que as equações pudessem ser conferidas. Na Figura 65, tem-se a imagem do arquivo de algumas das bandeiras construídas.

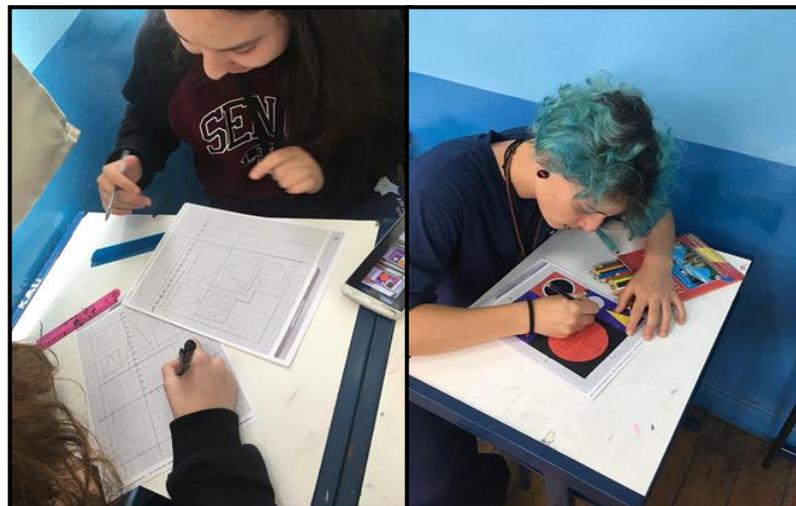
Figura 65 – Representação de algumas das bandeiras construídas



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Para finalizar a avaliação somativa, houve parceria com o professor de Artes. Os estudantes receberam um texto sobre a obra do pintor Herbin e, na aula de Artes, desenharam em Plano Cartesiano a releitura de uma de suas pinturas, ou seja, escolheram algumas obras do pintor, identificaram suas características, como a de trabalhar sempre com figuras geométricas planas e criaram a sua própria obra. A Figura 66 apresenta estudantes construindo suas releituras.

Figura 66 – Releituras construídas pelos estudantes



Fonte: Acervo da pesquisadora (2018).

Após o desenho da releitura realizada, deveriam plotar a figura no GeoGebra, traçar as retas e/ou circunferências correspondentes, identificando suas equações e, com o auxílio destas, construir a respectiva obra no *software* GraFeq. Como a atividade é demorada, os estudantes começaram em aula e terminaram como tarefa para casa, podendo, caso necessário, utilizar o laboratório no turno oposto ao das aulas.

Todos os trabalhos foram entregues pelos grupos de estudo. Por serem adolescentes e estarem conectados ao mundo tecnológico, manifestações de motivação, curiosidade, admiração e alegria foram reveladas pelos estudantes. Fecharam, assim, todo o trabalho construído ao longo das cinco UEPS desenvolvidas, pois, para a construção de cada uma das obras, os estudantes tiveram que localizar pontos no plano; utilizar os conceitos relativos ao ponto, à reta, e respectivas equações da reta assim como da circunferência. Retomaram todos os conceitos abordados. Analisando os resultados obtidos, perceberam-se indícios de aprendizagem significativa, através da releitura feita e das bandeiras construídas.

6 PRODUTO EDUCACIONAL

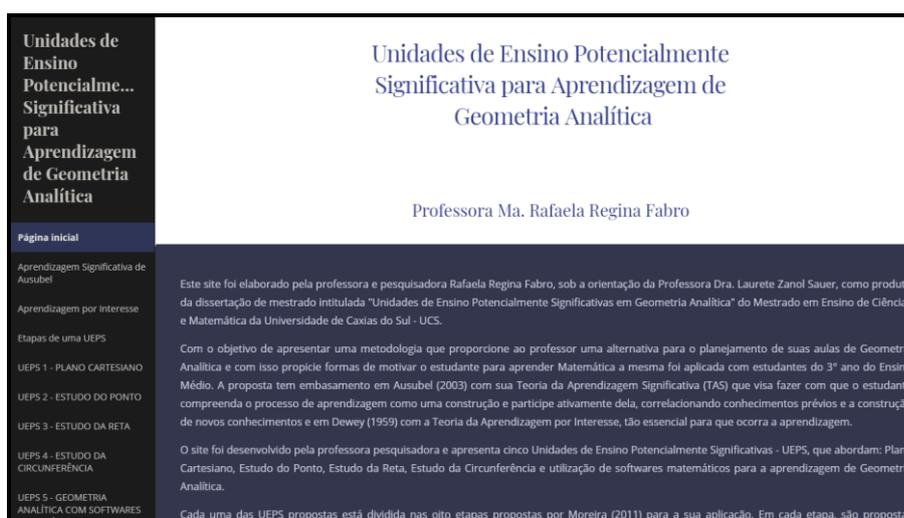
Com o intuito de compartilhar com professores de Matemática e/ou de áreas afins os resultados desta pesquisa, realizada com ênfase na utilização de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS), para promover aprendizagem significativa, optou-se por construir, como produto educacional desta dissertação de mestrado, um *site* (disponível em: <<https://sites.google.com/view/uepsemgeometriaanalitica>>), com a finalidade de servir à aprendizagem no estudo de Geometria Analítica.

De qualquer forma, uma compilação de todo o material produzido e disponível no *site* encontra-se no Apêndice H.

De acordo com o objetivo geral desta pesquisa, o de avaliar as contribuições de UEPS elaboradas para potencializar a ocorrência da aprendizagem significativa de Geometria Analítica e, diante dos resultados obtidos, para a construção do referido *site* buscou-se seguir as recomendações de Masetto (1996), de que o mesmo seja um instrumento eficiente de ação, pensado e elaborado da melhor maneira possível, procurando seguir diretrizes claras, práticas e objetivas. Espera-se que, desta forma, colegas professores possam utilizá-lo, adequando-o aos respectivos interesses.

A Figura 67 apresenta a página de abertura do *site*. Na mesma identifica-se o menu com as UEPS desenvolvidas na pesquisa.

Figura 67 – Página de abertura do *site* com o produto da dissertação



Fonte: Elaboração da pesquisadora (2018).

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante de uma inquietação da professora pesquisadora, ao longo de sua trajetória como estudante, diferentes metodologias vêm sendo estudadas, aplicadas e analisadas no contexto educacional, sempre com o objetivo de favorecer a aprendizagem e acompanhar os estudantes no processo de construção do próprio conhecimento. No mestrado, uma das metodologias estudadas foram as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) propostas por Moreira (2011), cuja fundamentação teórica, apoiada nos estudos de Ausubel, tem sintonia com os estudos de Dewey. Com efeito, encontrou-se em Dewey (1959) e em Ausubel (2003) argumentos seguros quanto à importância do interesse e dos conhecimentos prévios, para a ocorrência de aprendizagem significativa.

Assim originou-se a proposta de pesquisa, com o objetivo de avaliar as contribuições de UEPS elaboradas, para potencializar a ocorrência da aprendizagem significativa de Geometria Analítica. Seguindo um percurso construtivo, permeado de estudos, realização e análise de experiências, reorganizações que se fizeram necessárias, acredita-se ter finalizado, com a possibilidade de destacar evidências de aprendizagem significativa, apresentadas no decorrer da análise realizada no capítulo 5, culminando com os resultados da UEPS 5, que, conforme procurou-se demonstrar, foram considerados bastante expressivos.

Para verificar as contribuições das UEPS, bem como o processo que implica a sua construção, foi elaborada uma UEPS-piloto, a fim de investigar os erros e acertos na sua elaboração. Para a aplicação da mesma, foram utilizadas diferentes estratégias didáticas e instrumentos para verificar a ocorrência de aprendizagem significativa, as quais serviram como fonte de dados para o planejamento da pesquisa propriamente dita, com a construção das cinco UEPS, cujos temas poderiam abranger os conceitos abordados em Geometria Analítica, na escola de aplicação da pesquisa.

Desde o planejamento da UEPS-piloto, cuja situação-problema inicial se baseou no funcionamento de um GPS, confirmou-se a pertinência de utilizar situações-problema da realidade dos estudantes, o que foi feito em todas as UEPS.

Durante a elaboração das demais UEPS, teve-se o cuidado com o planejamento e com a devida importância, também manifestada pelos estudantes, de trabalhar com temas contextualizados, trazendo situações reais da cidade de Farroupilha, sugerindo uma diversidade de materiais, tais como *softwares* matemáticos, além de recursos não digitais.

Assim sendo, na primeira UEPS foi desenvolvido o estudo do Plano Cartesiano, partindo do mapa da cidade e utilizando como material não digital a construção de uma

“prancha” e alfinetes para a marcação de pares ordenados. Ainda, contando com a criatividade dos estudantes, propôs-se a elaboração de situações-problema com palavras-chave, tais como: abscissa, ordenada, quadrantes, pontos cardeais, entre outros, que envolvessem deslocamento entre alguns pontos do município.

Na segunda UEPS, partiu-se de uma situação-problema envolvendo o deslocamento de uma empresa de coleta de lixo, na cidade de Farroupilha, com a utilização do material elaborado pela pesquisadora, além de recursos não digitais, como prancha, régua e atilhos para a construção de conceitos referentes ao estudo do ponto e dedução de fórmulas. Novamente havia o trabalho em grupo, discussões e elaboração de situações-problema para promover a aprendizagem.

Na terceira UEPS, partiu-se da situação-problema relacionada ao comportamento (paralelas, perpendiculares, concorrentes) de algumas ruas no centro do município e o celular também foi incluído como recurso pedagógico.

Na quarta UEPS, que consistiu no aperfeiçoamento da UEPS-piloto, foi utilizado, novamente, o funcionamento do GPS como situação-problema, com o apoio de recursos como régua e compasso para simular a trilateração de circunferências.

Na quinta UEPS, a situação-problema foi contextualizada na construção de bandeiras de estados brasileiros, além de outros países, utilizando como recursos os *softwares* GeoGebra e GraFeq, em um trabalho interdisciplinar, envolvendo as disciplinas de Geografia e de Artes.

Percebeu-se que, durante a aplicação das UEPS, os estudantes realizaram conjecturas, criando estratégias de resolução, testando hipóteses e construindo significados, com a mediação da pesquisadora, para o que aprenderam em Geometria Analítica. Entende-se que o desenvolvimento cognitivo do estudante pode ser promovido e aprimorado com ações metodológicas que proporcionem a utilização de diversos materiais didáticos, de recursos tecnológicos e de estratégias pedagógicas. Buscando diversificar situações, o professor propicia ao estudante não apenas que ele aprenda conceitos matemáticos, mas que estes contribuam para o seu desenvolvimento, em suas capacidades de raciocínio, análise, visualização, interpretação e resolução de problemas.

De maneira geral, ao longo de todas as UEPS, foi possível perceber que muitos estudantes conseguiram incorporar os novos conceitos de forma substantiva e não arbitrária aos seus conhecimentos prévios. Isto se tornou evidente, por exemplo, quando estes estudantes confrontavam suas concepções, durante a resolução das situações-problema elaboradas.

Na qualidade de pesquisadora, durante o desenvolvimento das atividades procurou-se manter a postura de mediadora do processo, instigando os estudantes a buscarem, por seus próprios meios, a construção dos conceitos. Ainda, é importante destacar que, ao longo de todas as sequências aplicadas, a avaliação formativa esteve presente: procurou-se respeitar o ritmo dos estudantes, a fim de que tivessem condições para construir a própria aprendizagem, acompanhando-se essa construção durante todo o tempo e de diferentes formas, seja no diálogo, seja na realização de atividades ou fornecimento de subsídios necessários, para que avançassem na aprendizagem de conceitos selecionados, de Geometria Analítica.

Por meio da proposta pedagógica elaborada, conclui-se que é possível alcançar resultados satisfatórios, com relação ao interesse e à participação dos estudantes, e na qualidade da aprendizagem, compreendendo e atribuindo sentido ao que é aprendido.

Desta forma, espera-se que as UEPS aqui descritas sejam consideradas por educadores interessados em criar ambientes com potencial para aprendizagem significativa, estimulando-os a utilizarem o que foi elaborado e discutido nesta dissertação, com adaptações para outros conteúdos, quando for o caso.

REFERÊNCIAS

ALVES, S. A geometria do globo terrestre, II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. Disponível pela Internet no site < www.bienasbm.ufba.br >.

ARANTES, D.. Disponível em: <http://www.academia.edu/17462871/Quest%C3%A3o_1>. Acesso em: 9 out. 2018.

ARAÚJO, J.C.S. Docência e ética: da dimensão interativa entre sujeitos ao envolvimento sócio institucional. In: ROMANOWISKI, J.P.; MARTINS, R.D.O.; JUNQUEIRA, S.R. (Org.). Conhecimento local e conhecimento universal: práticas sociais, aulas, saberes e políticas. Curitiba: Champagnat, 2004.

AUSUBEL, D. P. *A aprendizagem significativa*. São Paulo: Moraes, 1982.

AUSUBEL, D. P; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. *Psicologia educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

AUSUBEL, D. P. *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*. Lisboa: Plátano, 2003. v. 1.

BARRETO FILHO, B.; SILVA, C.X. *Matemática aula por aula*. São Paulo: FTD, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação de Jovens e Adultos. Brasília, MEC/SEF/Coeja, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 7 out. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*. MEC. Brasília, DF, 2017. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>>. Acesso em: 5 jun. 2018.

BRASIL. *Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEF, 2006. v. 2.

CARROCINO, C. H. G. *Questões contextualizadas nas provas de Matemática*. 2014. 69 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2014.

CASTOLDI, R.; POLINARSKI, C. A. A utilização de recursos didático-pedagógicos na motivação da aprendizagem. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIENCIA E TECNOLOGIA, 2., 2009, Ponta Grossa, PR. *Anais...*, 2009. Disponível em: <http://www.pg.utfpr.edu.br/sinect/anais/artigos/8%20Ensinodecienciasnasseriesiniciais/Ensinodecienciasnasseriesinicias_Artigo2.pdf>. Acesso em: 5 jul. 2012.

CASTOLDI, R.; POLINARSKI, C. A. A utilização de Recursos didático-pedagógicos na motivação da aprendizagem. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIENCIA E TECNOLOGIA2., 2006, Ponta Grossa, PR. *Anais...* Ponta Grossa, 2006.

CENTRO DE SELEÇÃO. Disponível em: <https://centrodeselecao.ufg.br/2011/ps2011-2/gabarito/TIPO-2_caderno-questao.pdf>. Acesso em: 2 nov. 2018.

COMPUTAÇÃO. Disponível em: <<http://www.dsc.ufcg.edu.br/~pet/jornal/novembro2009/materias/cultura.html> > Acesso em: 15 out. 2018.

CORDEIRO, J. Disponível em: <<http://profjanilsoncordeiro.blogspot.com/2010/01/exercicios-resolvidos-geometria.html>>. Acesso em: 30 out. 2018.

CORREIA, W. M. *Aprendizagem significativa, explorando alguns conceitos de Geometria Analítica: pontos e reta*. 2011. 167 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

CPV VESTIBULARES. Disponível em: <http://d2f2yo9e8spo0m.cloudfront.net/vestibulares/insper/2008/semestre1/resolucoes/resolucao_insper_2008_sem1_analise_quant_logica_q41_60.pdf>. Acesso em: 5 out. 2018.

DANTE, L. R. *Coleção: Novo Ensino Médio*. São Paulo: Ática, 2005.

DESCOMPLICA. Disponível em: <<https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2016/segundo-dia/uma-cisterna-de-6-000-l-foi-esvaziada-em-um-periodo-de-3-h/>>. Acesso em: 9 out. 2018.

DESCOMPLICA. Disponível em: <<https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2013/segundo-dia/durante-uma-aula-de-matematica-o-professor-sugere-aos-alunos-que-seja-fixado-um-sistema-de/>>. Acesso em: 5 abr. 2017.

DESCOMPLICA. Disponível em: <<https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2014-segunda-aplicacao/segundo-dia/alunos-de-um-curso-de-engenharia-desenvolveram-um-robot-anfibio-que-executa-saltos-somente/>>. Acesso em: 30 out. 2018.

DEWEY, J. *Como pensamos: como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo (uma reexposição)*. 4. ed. Trad. de Haydée Camargo Campos. São Paulo: Nacional, 1959.

DEWEY, John. *A arte como experiência*. Trad. de Vera Ribeiro. São Paulo: Martins, 2010.

DREYFUS, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 25-41.

EDUCACIONAL PLENUS. Disponível em: <http://projeto-militar.blogspot.com/2015/06/questao_582.html>. Acesso em: 2 nov. 2018.

ENEM ESTUDA. Disponível em: <<https://enem.estuda.com/questoes/?prova=441&q=&cat>>. Acesso em: 9 out. 2018.

ETAPA. Disponível em: <https://www.etapa.com.br/etaparesolve/etaparesolve/2016/ENEM/FaseUnica_261/correcao/matematica/180.pdf>. Acesso em: 5 abr. 2017.

FONSECA, J. J. S. *Metodologia da pesquisa científica*. Fortaleza: UEC, 2002.

FORUMEIROS. Disponível em: <<https://pir2.forumeiros.com/t99649-enem>>. Acesso em: 30 out. 2018.

FREIRE, I.. Disponível em: <<file:///C:/Users/Aluno/Downloads/Lista%20de%20exerc%C3%ADcio-professor%20Ivanildo.pdf>>. Acesso em: 9 out. 2018.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. *Métodos de pesquisa*. Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS, Porto Alegre: Ed. da UFRGS, 2009.

GLOBO EDUCAÇÃO. Disponível em: <<http://educacao.globo.com/provas/enem-2010/questoes/156.html>>. Acesso em: 30 out. 2018.

GLOBO EDUCAÇÃO. Disponível em: <<http://educacao.globo.com/provas/enem-2013/questoes/175.html>>. Acesso em: 5 out.2018.

HALBERSTADT, F. F. *A aprendizagem da Geometria Analítica do Ensino Médio e suas representações semióticas no Grafec*. 2015. 174 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2015.

LEITHOLD, L. *O cálculo com Geometria Analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.

LIMA, D. D. *Desvendando a matemática do GPS*. 2013. 49f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Sergipe, 2013.

MASETTO, Marcos Tarcísio. *Didática: A Aula como Centro*. São Paulo: FTD, 1996.

MATEMÁTICA EM SUAS MÃOS. Disponível em: <<https://matematicaemsuasmaos.blogspot.com/2015/05/questao-1-questao-10-puc-numa.html>>. Acesso em: 5 out. 2018.

MATEMÁTICA NO PROJETO . Disponível em: <<http://matematicanoprojeto.blogspot.com/2014/03/3-serie-k1-do-e.html>>. Acesso em: 5 out.2018.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela Análise Textual Discursiva. *Ciência & Educação*, v. 9, n. 2, p. 191-211, 2003.

MOREIRA, M. A.; SALZANO, E. F. M. *Aprendizagem significativa: a Teoria de David Ausubel*. São Paulo: Centauro, 2011.

MOREIRA, Marco Antonio. *Teorias de aprendizagem*. 2. ed. ampl. São Paulo: EPU, 2011a.

MOREIRA, M. A. Unidades de enseñanza potencialmente significativas – UEPS. *Aprendizagem Significativa em Revista*, Porto Alegre, v. 1, n. 2, p. 43-63, 2011a. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID10/v1_n2_a2011.pdf> Acesso em: 23 maio 2017.

MUNDO EDUCAÇÃO. Disponível em: <<https://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exercicios-geografia/exercicios-sobre-coordenadas-geograficas.htm>>. Acesso em: 5 abr. 2017.

QUAREZI NETO, C.; SILVA, J. C. da; PINTO, V. C. Uma chamada a cobrar: a escola e o celular em sua difícil convivência. *EntreVer*, v. 2, n. 2, p. 56-62, 2012.

NOVAK, J. D. *Aprender, criar e utilizar o conhecimento: mapas conceituais como ferramentas de facilitação nas escolas e empresas*. Lisboa: Plátano, 2000.

NUNES, C. da S. *Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) para o ensino de Estatística na Educação Básica*. 2015. 129 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2015.

O ARQUIVO. Disponível em: <http://www.oarquivo.com.br/portal/index.php?option=com_content&view=article&id=2420:76-dos-internautas-brasileiros-ja-sofreram-golpe-na-internet&catid=84:mar-de-lama&Itemid=440>. Acesso em: 14 abr. 2017.

OLIVEIRA, O. B. de; TRIVELATO, S. L. F. Prática docente: o que pensam os professores de ciências biológicas em formação? In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 13., Rio de Janeiro, RJ, 2006. Disponível em: <<http://132.248.9.1:8991/hevila/Revistateias/2006/vol7/no13-14/5.pdf>>. Acesso em: 5 jul. 2012.

PASSEI DIRETO. Disponível em: <<https://www.passeidireto.com/pergunta/25383160/qual-e-a-equacao-reduzida-da-reta-r-que-tem-inclinacao-igual-a-45-e-passa-pelo-p>>. Acesso em: 9 out. 2018.

PELLIZZARI, A. et al. Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel. *Revista PEC*, Curitiba, v. 2, n. 1, p. 37-42, 2001/2002. < <http://antigo.obrasill.com/teoria-da-aprendizagem-significativa-seg> >. Acesso em: 16 jun. 2018.

PEREIRA, A.P. L. *Futebol: a geometria analítica no campo*. 2013. 86 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

PORTAL DO PROFESSOR. Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1913>>. Acesso em: 2 nov. 2018.

PROFE ELI. Disponível em: <<http://profeeli7.blogspot.com/2017/03/revisao.html>>. Acesso em: 5 out.2018.

PROJETO MEDICINA. Disponível em:

<http://projetomedicina.com.br/site/attachments/article/419/matematica_geometria_analitica_retas_exercicios.pdf> Acesso em: 9 out. 2018.

PROJETO MILITAR. Disponível em: <http://projeto-militar.blogspot.com/2015/06/questao_582.html>. Acesso em: 2 nov. 2018.

Q CONCURSOS. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-militares/questoes?assunto=20323&disciplina=13&modo=1&order=questao_aplicada_em+de+sc&page=10&per_page=5&product_id=5&url_solr=master&user_id=0>. Acesso em: 5 out. 2018.

QUARTIERI, M. T. *A noção de interesse no campo da modelagem matemática na Educação Básica*. 2011. 136p. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, 2011.

RACHA CUCA. Disponível em:

<<https://rachacuca.com.br/educacao/vestibular/tags/raciocinio-logico/>>. Acesso em: 2 nov. 2018.

REDESCOLA. Disponível em:

<http://www.redescola.com.br/site/index.php?option=com_content&view=article&id=189%3Aa-bandeira-do-brasil&catid=73%3Anovembro&Itemid=53>. Acesso em: 15 out. 2018.

RIBEIRO, B. N. M. *Desenvolvimento e proposta de uma unidade de ensino potencialmente significativa para tópicos de mecânica vetorial*. 2014. 76 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Severino Somba, Vassouras, 2014.

RIBEIRO, J. *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia 3: Ensino Médio*. São Paulo: Scipione, 2010.

SABER MATEMÁTICA. Disponível em: <<https://sabermatematica.com.br/geometria-analitica-exercicios-resolvidos.html>>. Acesso em: 7 out. 2018.

SANTOS, A. T. C. dos. *O Estado da Arte das pesquisas brasileiras sobre a Geometria Analítica no período de 1991 a 2014*. 2016. 277 f. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

SANTOS, J. C. F. *Aprendizagem significativa: modalidades de aprendizagem e o papel do professor*. Porto Alegre: Mediação, 2008.

RIO GRANDE DO SUL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO (SEDUC). *Proposta pedagógica para o Ensino Médio Politécnico e Educação Profissional integrada ao Ensino Médio – 2011-2014*. Porto Alegre. 2011.

SILVA, C. X.; BARRETO FILHO, B. *Matemática aula por aula*. São Paulo: FTD, 2000.

SILVA, W. M. S. da. *Uma abordagem dinâmica e inovadora para o ensino da geometria analítica no Ensino Médio*. 2013. 156 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2013.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SOU VESTIBULANDO. Disponível em:

<<http://souvestibulando.com/provas/exercicio.php?ida=12&ide=958>>. Acesso em: 30 out. 2018.

SOUZA S.C.; DOURADO, L. *Aprendizagem baseada em problemas (APB): um método de aprendizagem inovador para o ensino educativo*. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, Holos, 2015.

SOUZA, J. R. de. *Novo olhar matemática* 3. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

SUPERINTERESSANTE. Disponível em: <<https://super.abril.com.br/mundo-estranho/quantas-bandeiras-o-brasil-ja-teve/>>. Acesso em: 15 out. 2018.

TADEU, W. Disponível em:

<<http://professorwaltertadeu.mat.br/CP2VEST30questGeoAnalCircunf.pdf>>. Acesso em: 5 abr. 2017.

THIOLLENT, M. *Metodologia da pesquisa-ação*. São Paulo: Cortez, 2008.

TRIPP, D. Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, n. 3, p. 443-466, set./dez. 2005.

TUTOR BRASIL. Disponível:

<<https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=60150>>. Acesso em: 5 out.2018.

UNICAMP. Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1107>>. Acesso em: 19 maio 2016.

VALADARES, J.A.; MOREIRA, M.A. *A teoria da aprendizagem significativa: sua fundamentação e implementação*. Coimbra: Almedina, 2009.

VALENTE, J.A. (Org.). *O computador na sociedade do conhecimento*. Campinas: Nield Unicamp, 1999.

WESTBROOK, R. B. et al. (Org.). *Jonh Dewey*. Recife: Fundação Joaquim Nabuco; Ed. Massangana, 2010.

WOLFF, R. *A formação inicial de professore de matemática: a pesquisa como possibilidade de articulação entre a teoria e a prática*. 2007. 178f. (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, RS, 2007.

ZABALA, A. *A prática educativa: como educar*. Porto Alegre, 1998.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Visando a desenvolver uma pesquisa, que é parte da dissertação, de Mestrado coordenada por mim, Rafaela Regina Fabro (mestranda orientada pela Prof.^a Dr.^a. Laurete Zanol Sauer), no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática: Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Caxias do Sul, convido você a participar desta pesquisa, que tem como finalidade investigar *se a utilização de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas, integradas ao uso de tecnologias, produz efeitos positivos no processo de aprendizagem de Geometria Analítica de forma significativa.*

Para tanto, é importante assinar abaixo desta mensagem tomando ciência de que as informações serão tratadas somente para fins de pesquisa e que sua identidade, como participante, será preservada. Não serão divulgados nome ou informações que possam identificar o participante da pesquisa. Os dados obtidos serão utilizados apenas para fins de investigação. O participante pode obter informações sobre o andamento da pesquisa, quando considerar necessário.

Desde já agradeço a sua colaboração e coloco-me à disposição para esclarecimentos pelo telefone (54) 99912-5942, *e-mail*: rafafabro@yahoo.com.br

Eu, _____, RG _____, responsável pelo estudante _____ declaro que estou ciente das informações acima e autorizo a utilização de minhas interações no contexto de aprendizagem para fins da pesquisa.

Farroupilha, 26 de março de 2018.

Assinatura do sujeito da pesquisa

Assinatura do responsável
pelo sujeito da pesquisa

Assinatura da pesquisadora

APÊNDICE B – FICHA DE OBSERVAÇÃO – UEPS 1

UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS PARA A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA								
PESQUISADORA: Rafaela Regina Fabro								
UEPS 1: PLANO CARTESIANO								
ESTUDANTE Nome: _____	Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4	Etapa 5	Etapa 6	Etapa 7	Etapa 8
Participa das atividades.								
Demonstra interesse em aprender.								
Dialoga com os colegas nas atividades em grupo.								
Trabalha bem em grupo.								
Realiza as atividades propostas em aula.								
Realiza as atividades extraclasse.								
Demonstra que aprendeu.								
Utiliza adequadamente a prancha construída.								
CONHECIMENTOS PRÉVIOS:	Apresenta		Apresenta parcialmente			Não apresenta		
Apresenta os conhecimentos prévios necessários para a UEPS:								
COM RELAÇÃO AOS OBJETIVOS PROPOSTOS PARA ESTA UEPS								
OBJETIVO	A Atingiu	AP Atingiu parcialmente	NA Não atingiu					
Identificar as características de um Plano Cartesiano e trabalhar as nomenclaturas referentes ao estudo do mesmo (eixo, abscissa, ordenada, ponto de origem, quadrantes)								
Localizar pontos no Plano Cartesiano, através de suas coordenadas								
Identificar as coordenadas de um ponto no plano								
Representar os pontos no Plano Cartesiano, através de pares ordenados								

APÊNDICE C – FICHA DE OBSERVAÇÃO – UEPS 2

UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS PARA A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA									
PESQUISADORA: Rafaela Regina Fabro									
UEPS 2: ESTUDO DO PONTO									
ESTUDANTE Nome: _____	Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4	Etapa 5	Etapa 6	Etapa 7	Etapa 8	
Participa das atividades.									
Demonstra interesse em aprender.									
Dialoga com os colegas nas atividades em grupo.									
Trabalha bem em grupo.									
Realiza as atividades propostas em aula.									
Realiza as atividades extraclasse.									
Demonstra que aprendeu.									
Utiliza adequadamente os recursos não digitais solicitados									
CONHECIMENTOS PRÉVIOS	Apresenta		Apresenta parcialmente			Não apresenta			
Apresenta os conhecimentos prévios necessários para a UEPS:									
COM RELAÇÃO AOS OBJETIVOS PROPOSTOS PARA ESTA UEPS									
OBJETIVOS	A Atingiu	AP Atingiu parcialmente	NA Não atingiu						
Identificar pares ordenados no Plano Cartesiano, bem como o seu respectivo quadrante									
Trabalhar no Plano Cartesiano com diferentes pontos									
Calcular a distância de dois pontos usando suas coordenadas									
Calcular o ponto médio entre dois pontos usando suas coordenadas									
Identificar e calcular corretamente pontos colineares e não colineares									
Identificar geometricamente o baricentro de um triângulo e calcula algebricamente									
Articular o conhecimento entre a álgebra e a geometria, numa perspectiva interdisciplinar									

APÊNDICE D – FICHA DE OBSERVAÇÃO – UEPS 3

UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS PARA A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA								
PESQUISADORA: Rafaela Regina Fabro								
UEPS 3: ESTUDO DA RETA								
ESTUDANTE Nome: _____	Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4	Etapa 5	Etapa 6	Etapa 7	Etapa 8
Participa das atividades.								
Demonstra interesse em aprender.								
Dialoga com os colegas nas atividades em grupo.								
Trabalha bem em grupo.								
Realiza as atividades propostas em aula.								
Realiza as atividades extraclasse.								
Demonstra que aprendeu.								
Utiliza adequadamente os recursos digitais solicitados.								
CONHECIMENTOS PRÉVIOS	Apresenta		Apresenta parcialmente			Não apresenta		
Apresenta os conhecimentos prévios necessários para a UEPS:								
COM RELAÇÃO AOS OBJETIVOS PROPOSTOS PARA ESTA UEPS								
OBJETIVOS	A Atingiu	AP Atingiu parcialmente	NA Não atingiu					
Identificar corretamente o coeficiente angular e linear diferenciando sua função								
Determinar a equação geral e reduzida de uma reta								
Conhecer as equações de reta nas suas diferentes versões								
Diferenciar as condições para retas paralelas, perpendiculares, coincidentes e concorrentes								
Calcular a distância entre ponto e reta								
Reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas								
Calcular corretamente o ângulo formado por duas retas que se interceptam no Plano Cartesiano								
Identificar o ponto de intersecção entre duas retas								
Calcular a área de um triângulo sabendo os seus vértices								

APÊNDICE E – FICHA DE OBSERVAÇÃO – UEPS 4

UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS PARA A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA									
PESQUISADORA: Rafaela Regina Fabro									
UEPS 4: ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA									
ESTUDANTE Nome: _____	Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4	Etapa 5	Etapa 6	Etapa 7	Etapa 8	
Participa das atividades.									
Demonstra interesse em aprender.									
Dialoga com os colegas nas atividades em grupo.									
Trabalha bem em grupo.									
Realiza as atividades propostas em aula.									
Realiza as atividades extraclasse.									
Demonstra que aprendeu.									
Utiliza adequadamente os recursos digitais solicitados.									
CONHECIMENTOS PRÉVIOS	Apresenta		Apresenta parcialmente			Não apresenta			
Apresenta os conhecimentos prévios necessários para a UEPS:									
COM RELAÇÃO AOS OBJETIVOS PROPOSTOS PARA ESTA UEPS									
OBJETIVOS	A Atingiu	AP Atingiu parcialmente	NA Não atingiu						
Conceituar e representar graficamente, utilizando o compasso, uma circunferência									
Diferenciar raio e diâmetro de uma circunferência									
Reconhecer as coordenadas do centro e a medida do raio, na equação de uma circunferência e vice-versa									
Identificar as equações da circunferência na forma reduzida e geral e conhecer as propriedades características da circunferência									
Reconhecer a importância da equação da circunferência, em situações do dia a dia									
Transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos de construção de circunferência para localizar pontos com o GPS									

APÊNDICE F– FICHA DE OBSERVAÇÃO – UEPS 5

UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS PARA A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA								
PESQUISADORA: Rafaela Regina Fabro								
UEPS 5: GEOMETRIA ANALÍTICA COM <i>SOFTWARES</i> MATEMÁTICOS								
ESTUDANTE Nome: _____	Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4	Etapa 5	Etapa 6	Etapa 7	Etapa 8
Participa das atividades.								
Demonstra interesse em aprender.								
Dialoga com os colegas nas atividades em grupo.								
Trabalha bem em grupo.								
Realiza as atividades propostas em aula.								
Realiza as atividades extraclasse.								
Demonstra que aprendeu.								
Utiliza adequadamente os recursos digitais solicitados.								
CONHECIMENTOS PRÉVIOS	Apresenta		Apresenta parcialmente			Não apresenta		
Apresenta os conhecimentos prévios necessários para a UEPS:								
COM RELAÇÃO AOS OBJETIVOS PROPOSTOS PARA ESTA UEPS								
OBJETIVOS	A Atingiu	AP Atingiu parcialmente	NA Não atingiu					
Determinar a equação geral e reduzida de uma reta								
Conhecer as equações de reta nas suas diferentes versões								
Diferenciar as condições para retas paralelas, perpendiculares, coincidentes e concorrentes								
Reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas								
Compreender os diversos intervalos de tempo entre dois extremos indicados, podendo ou não conter os próprios extremos								
Utilizar corretamente os <i>softwares</i> matemáticos GeoGebra e GraFeq								
Articular o conhecimento entre a álgebra e a geometria numa perspectiva interdisciplinar								

APÊNDICE G – ORGANIZAÇÃO E PLANEJAMENTO DA UEPS-PILOTO

UEPS-PILOTO – EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

OBJETIVOS

- Conceituar e representar graficamente, utilizando o compasso, uma circunferência
- Diferenciar raio e diâmetro de uma circunferência
- Reconhecer as coordenadas do centro e a medida do raio, na equação de uma circunferência e vice-versa
- Saber identificar as equações da circunferência, na forma reduzida e geral, e conhecer as propriedades características da circunferência
- Reconhecer a importância da equação da circunferência, em situações do dia a dia
- Transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos de construção de circunferência para localizar pontos com o GPS
- Gerenciar o tempo, respeitando o ritmo de aprendizagem dos educandos
- Identificar, através de atividades da UEPS, se houve aprendizagem significativa

1) **DEFINIÇÃO DO TEMA:** Geometria Analítica – Equação da Circunferência

- Circunferência – raio e diâmetro
- Equação reduzida da circunferência
- Equação geral da circunferência
- Posições relativas entre ponto e circunferência
- Problemas envolvendo situações práticas

2) **DEFINIÇÃO DO TEMA:** Geometria Analítica – Equação da Circunferência

- Circunferência – raio e diâmetro
- Equação reduzida da circunferência
- Equação geral da circunferência
- Posições relativas entre ponto e circunferência
- Problemas envolvendo situações práticas

3) SITUAÇÃO INICIAL: para verificar os conhecimentos prévios dos educandos, foi solicitado que os mesmos respondessem um questionário inicial que buscava identificar conhecimentos básicos, estudados no Ensino Fundamental (raio, diâmetro, produto notável, etc.) e que relaciona o conteúdo (equação da circunferência) com a aplicação do uso do GPS.

QUESTIONÁRIO:

1- Você já viu um GPS? Já utilizou um? Se sim, em que situação?

2- Você sabe como funciona um GPS?

3- Você já ouviu falar em latitude e longitude? O que significa isso?

4- Você sabe a diferença entre raio e diâmetro?

5- Como você faria para desenhar uma circunferência de raio 5?

6- O que é centro de uma circunferência?

7- Como você resolveria o seguinte produto notável $(x - 4)^2$?

8- Baseando-se no que você já conhece de geometria analítica, se A(-1,3) e B(3,5) e esses pontos são os pontos extremos de um diâmetro da circunferência, você saberia dizer qual seria o centro dessa circunferência? E qual a medida do raio da mesma?

4) SITUAÇÃO-PROBLEMA INICIAL: Nesse momento, os alunos foram questionados sobre *“Onde estamos? Através de um GPS é possível encontrarmos a nossa localização. Como isso é feito? Como funciona um GPS?”* Após algumas respostas baseadas nos seus conhecimentos prévios, os alunos receberam um texto sobre o funcionamento do GPS e a localização de coordenadas geográficas. Por fim, os alunos assistiram a um vídeo explicando o seu funcionamento. O texto abaixo surgiu de uma pesquisa bibliográfica da pesquisadora e foi a partir do site www.oarquivo.com.br disponível em *link* completo nas referências.

GEOMETRIA ANALÍTICA E O SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL

“Onde estamos?”

Esta é uma pergunta comum, mas sua resposta pode não ser tão simples. Desde a Antiguidade, o homem necessita se localizar em seu mundo de modo que, sabendo onde está ele pode pensar em uma forma prática e segura de “como ir e voltar”.

Conforme vimos em nossas aulas, a Geometria Analítica é a base de grandes campos de estudos matemáticos, ela guia os nossos passos a cada instante da nossa vida. A utilização do método cartesiano tem uma grande relação com as localizações geográficas, pontos estratégicos de bases militares, localizações no espaço aéreo, terrestre e marítimo e no moderno Sistema de Posicionamento Global (*Global Positioning System*) – GPS.

Podemos utilizar o sistema de coordenadas para nos localizar, localizar pessoas ou imóveis, tendo por referência um **ponto de origem** (no qual estamos em determinado momento), os **eixos** (ruas, avenidas, etc.) e um **ponto de chegada** (local no qual queremos chegar). Saber se deslocar num determinado espaço, mesmo que ele ainda lhe seja desconhecido, nos permite conhecer novos mundos, novos campos de conhecimentos, de conquistas, de descobertas.

Você sabia que o GPS utiliza coordenadas fornecidas por satélites para o traçado de rotas e cálculo de distância? Em sua essência, está repleto de aplicações de geometria básica e avançada, envolvendo, em seu funcionamento, elementos como: distâncias, ângulos, circunferências, esferas, planos, vetores, equações, dentre outros, relacionando seu funcionamento com a Matemática, a Física e a Geografia.

Para compreender o funcionamento do GPS é preciso compreender a Geometria. Se você for informado de que está a 200 quilômetros de uma cidade A, apenas esse dado não fornece a sua localização precisa, pois você pode estar em qualquer ponto que demarca o círculo 1, conforme a figura abaixo. É necessário ter a distância em relação a mais dois pontos (cidades B e C), para definir sua posição exata, pois dessa forma o trio de círculos se encontra em um só lugar.

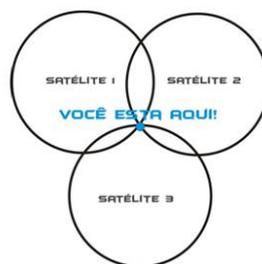


FIGURA 1: Disponível em: <<http://www.techtudo.com.br/artigos/noticia/2011/12/como-funciona-o-gps.html>>. Acesso em: 29 maio 2016.

Com o GPS é basicamente a mesma coisa, só que num esquema tridimensional. O aparelho receptor que está com você aqui na Terra calcula a sua distância para algum satélite que integra o sistema GPS. Mas, como vimos só com essa informação ele entende que você pode estar em qualquer ponto que demarca a esfera tridimensional.

O receptor precisa então saber sua distância em relação a pelo menos mais dois satélites. Com as três distâncias, o aparelho imagina três esferas e elas se juntam em dois pontos. Como um desses dois pontos fica sempre no espaço, e não na Terra, ele é descartado. Sobra, então, a sua localização exata no Planeta.

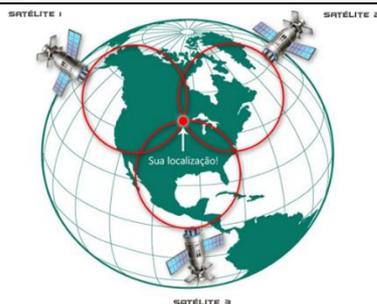


FIGURA 2: Disponível em: <<http://ectjoinville.com/AttractionsAndEquips/HowWorksDetail/8651>>. Acesso em: 19 maio 2016.

Podemos associar o Plano Cartesiano com a latitude e a longitude, temas relacionados aos estudos geográficos e à criação do atual Sistema de Posicionamento, o GPS. O Sistema de Posicionamento Global permite que saibamos nossa localização exata na Terra, desde que tenhamos em mãos um receptor de sinais GPS, informando a latitude, a longitude e a altitude, com o auxílio de satélites em órbita ao redor da Terra. Os satélites trabalham em equipe, para fornecer sua localização em qualquer ponto da Terra.

O sistema cartesiano geocêntrico é tridimensional: dessa forma, podemos relacionar as coordenadas geográficas com as coordenadas cartesianas. Vamos considerar um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas de centro O e eixos positivos Ox , Oy e Oz tais que:

- O é centro da Terra;
- o plano Oxy é o plano do Equador da Terra;
- o eixo Ox positivo corta o Meridiano de Greenwich;
- o eixo Oy positivo corta o Meridiano de longitude 90° Leste;
- o eixo Oz positivo aponta na direção do Polo Norte.

Fixado esse sistema de coordenadas, a cada ponto P do espaço pode-se associar coordenadas (x,y,z) .

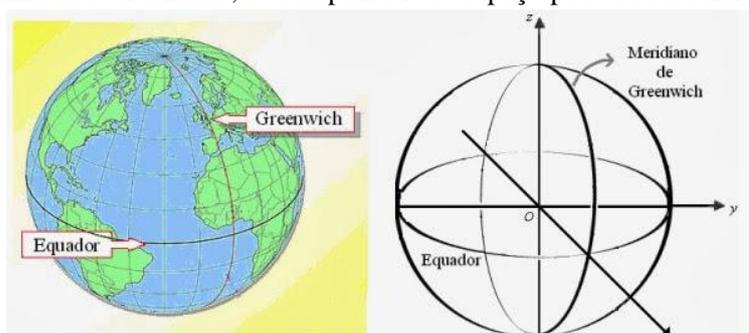


FIGURA 3: Disponível em: <http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto_2012/pdf/gps_-_a_antiga_matematica_na_atual_tecnologia.pdf>. Acesso em: 19 maio 2016.

Esse é o sistema utilizado pelo GPS, para localizar as coordenadas cartesianas de um receptor e depois transformá-las nas coordenadas geográficas: latitude, longitude e altitude.

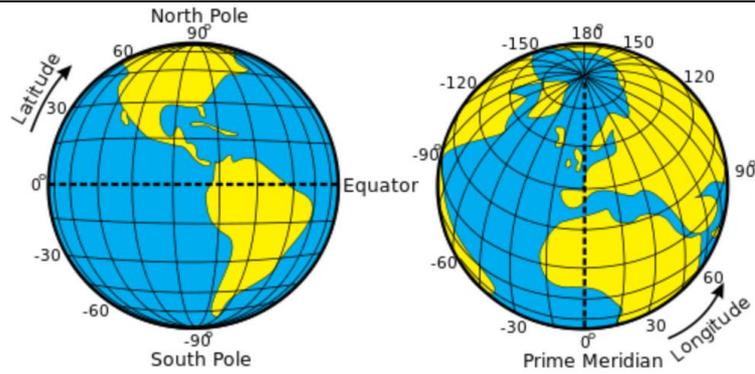


FIGURA 4: Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1107>>. Acesso em: 19 maio 2016.

❖ Mas como funciona afinal o GPS?

Quando um indivíduo está usando o GPS, o receptor recebe sinais de quatro satélites. Cada satélite transmite a posição exata do indivíduo, calculando a velocidade com que recebeu e enviou a informação, através de ondas eletromagnéticas na velocidade da luz. Com o cálculo das quatro distâncias, ele determina a altura, a altitude, a longitude e a posição exata do indivíduo na superfície da Terra.

Vamos compreender esse funcionamento:

Como funciona

O Sistema de Posicionamento Global (GPS) permite conhecer a posição de um objeto em qualquer parte do mundo.

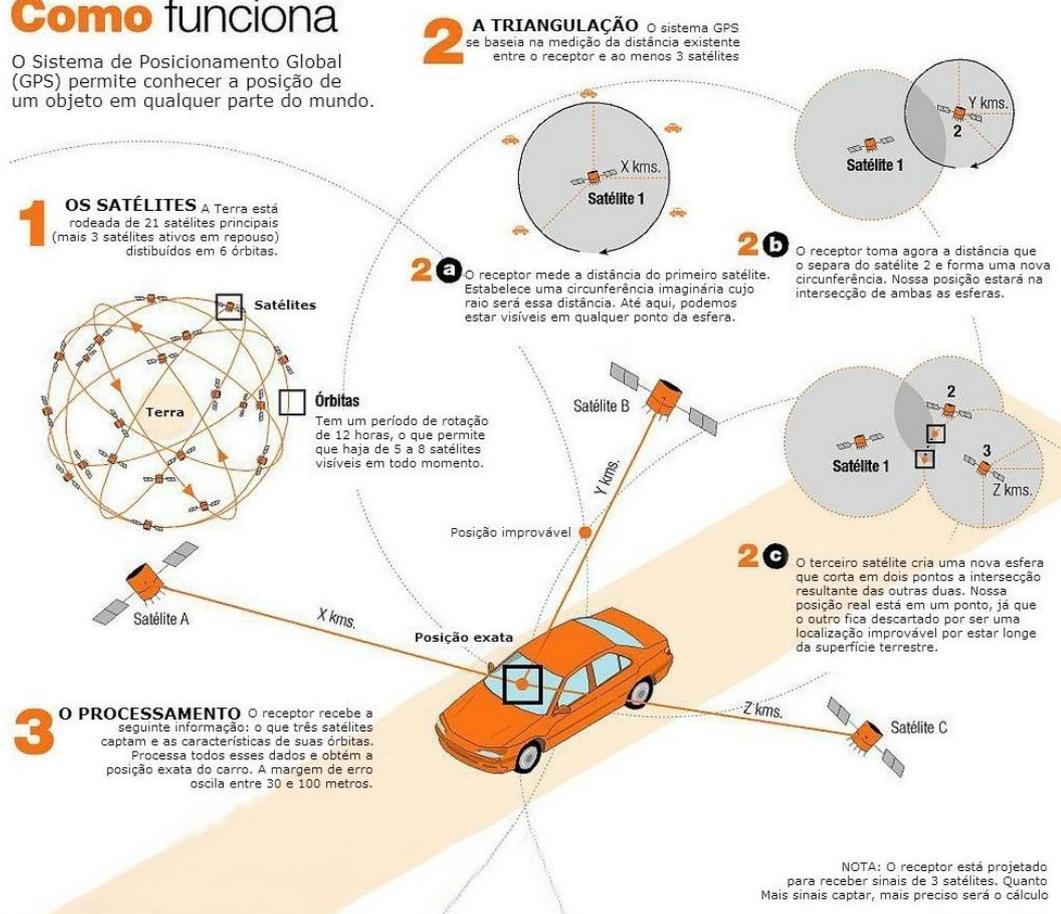


FIGURA 5: Disponível em: <<https://www.bidu.com.br/seguro-auto/guia-como-funciona-um-rastreador-veicular/>>. Acesso em: 25 maio 2016.

O GPS também pode fazer cálculos de velocidade. Se o indivíduo está se locomovendo num carro em determinado instante numa posição e depois noutra, ele calcula a velocidade que ele se

locomove de um ponto a outro, fornecendo a velocidade, a direção e o sentido.

Os satélites são usados como pontos de referência à Geometria e cumprem um papel fundamental no cálculo da posição de alguém na Terra. Uma pessoa usando o receptor de GPS poderá obter precisão de até um metro. E, em qualquer posição desta pessoa na Terra, haverá pelo menos um satélite acima dela.

E como o aparelho receptor (GPS) sabe a distância de cada satélite?

Em horários específicos, cada satélite do GPS manda um sinal codificado para o receptor na Terra, que está programado para fazer o mesmo sinal sozinho, na exata hora do satélite. De acordo com o intervalo de tempo entre a emissão do seu próprio sinal e a chegada do sinal do espaço, o receptor calcula a distância que está do satélite.

Para finalizarmos essa parte, acesse o *link* <<https://www.youtube.com/watch?v=2jEgSZwm-nk>> e assista ao vídeo.



FIGURA 5: Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=2jEgSZwm-nk>>. Acesso em: 19 maio 2016.

- 5) DIFERENCIAÇÃO PROGRESSIVA:** nessa etapa, introduziu-se o conceito prático utilizado pelo GPS para localizar o ponto onde uma pessoa se encontra. Para esta atividade, utilizou-se o conceito de circunferência (centro e raio) a utilização de compasso e os conceitos de velocidade, distância e tempo da física. Ainda, buscou-se o conceito de escala, para que a atividade pudesse ser realizada com maior precisão. A questão 1 é parte da dissertação de mestrado de Lima (2013), intitulada “Desvendando a matemática do GPS” e a questão 2 foi elaborada pela pesquisadora.

**VAMOS COMPREENDER, AINDA MELHOR, COM UM EXEMPLO.
AGORA É COM VOCÊ!**

ATIVIDADE 1 – É perto do meio-dia e você está perdido no interior de Sergipe entre Malhador e Divina Pastora. Você dispõe de um mapa, conforme a figura abaixo, e material de desenho geométrico e sabe que em Divina Pastora, Riachuelo e Santa Rosa de Lima (cidades próximas) existem igrejas onde os sinos soam precisamente a cada hora, sendo ouvidos a grandes distâncias. Identifiquem no mapa essas cidades.

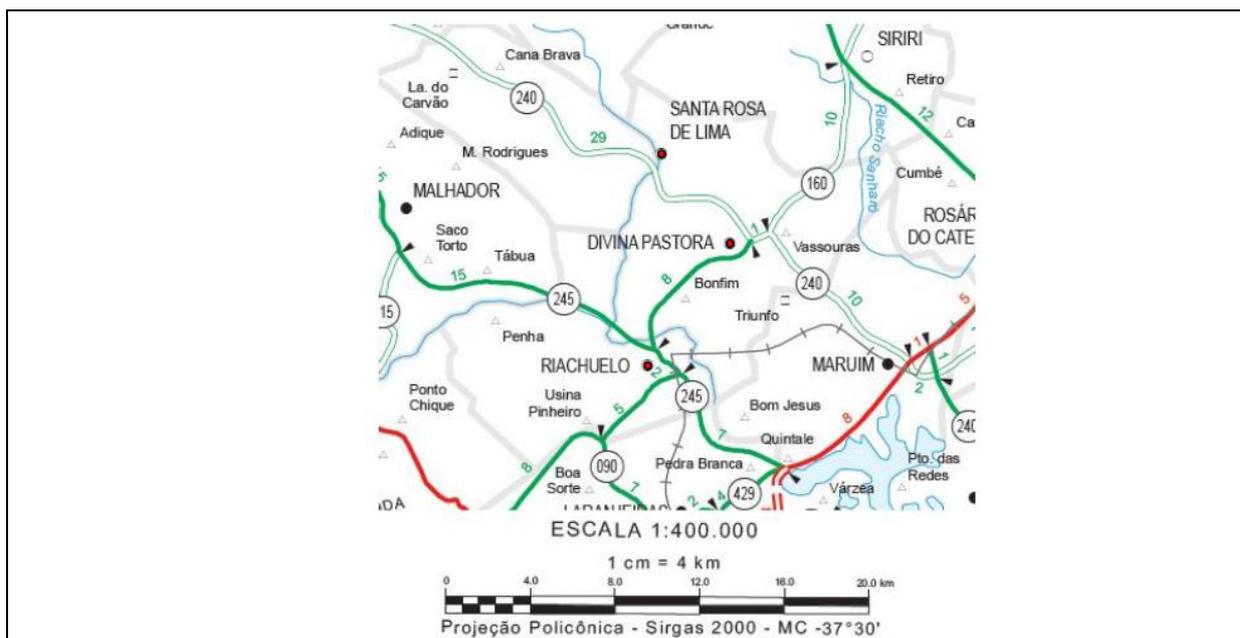


FIGURA 6: Disponível em: <https://bdt.d.ufs.br/bitstream/tede/303/1/DAVI_DANTAS_LIMA.pdf>. Acesso em: 11 jun. 2016.

Digamos que o seu relógio e o relógio das igrejas estejam sincronizados e que cada sino tenha um timbre diferente, o que permite identificá-los. Suponha que:

- 12,5 segundos após o meio-dia você ouve o sino de Riachuelo;
- o sino de Divina Pastora você ouve 17,3 segundos após o meio-dia;
- e por fim, o sino de Santa Rosa de Lima em 19,8 segundos.

Para tentar se localizar, você precisa saber a que distância se encontra de cada cidade, certo? Como você faz para calcular essa distância? Vamos lembrar as aulas de física!

E qual a velocidade com que o som se propaga no ar? _____

Sabendo disso, você pode, então, calcular as distâncias r_1 , r_2 e r_3 em relação a Riachuelo, Divina Pastora e Santa Rosa de Lima, respectivamente.

$$r_1 = _ \times _ = _ m$$

$$r_2 = _ \times _ = _ m$$

$$r_3 = _ \times _ = _ m$$

Assim, você traça no mapa uma circunferência centrada em Riachuelo de raio r_1 e outra, centrada em Divina Pastora de raio r_2 . As circunferências se intersectam? Em quantos pontos?

Agora, trace uma terceira circunferência, centrada em Santa Rosa de Lima, de raio r_3 . As circunferências agora se intersectam? Em quantos pontos? _____

Em qual ponto você está? Conseguiu descobrir? Justifique. _____

É importante considerar que, nesse exemplo o som não sofre interferências do vento, relevo, ou outra, e que você tem conhecimento de desenho geométrico, proporção, velocidade e escalas. O exemplo considera a região como um plano, logo se admitiu uma altitude constante.

De modo geral, *conhecendo as distâncias de onde estamos até três pontos bem localizados, em um sistema de coordenadas, a nossa localização é dada por um único ponto.*

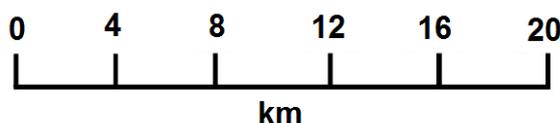
- Sobre escalas:

Conceito de escala: escala é a proporção entre a área real e o que está representado em um mapa ou em uma imagem. Assim, quanto maior a escala, menor a área representada e maior é a riqueza de detalhes, pois, quanto maior a escala, “mais próximo” da área representada o observador se encontra. Através da escala, podemos ter a noção real do espaço representado, tirar informações com relação à distância de percursos, comprimento de ruas e rios e área de espaços. A escala pode ser numérica ou gráfica:

Escala numérica: é expressa por uma fração, na qual o numerador representa a distância no mapa e o denominador, a distância na superfície real. No exemplo acima temos:

$$1: 400\ 000$$

Escala gráfica: é aquela que expressa diretamente os valores da realidade mapeada.



Levando em consideração o exemplo, temos que cada 1 cm no mapa equivale a 400 000 cm na superfície real, ou seja, 1 cm no mapa é igual a 4 km na superfície real.

ATIVIDADE 2 - O mapa abaixo é a imagem vista da cidade de Farroupilha no Google Maps. Imagine que uma pessoa está localizada a 800 m do Escritório da Unimed, 600 m da rodoviária e a 660 m da Tramontina Store.

Observação: observe a escala utilizada para representar a figura. **1 cm = 200 m**



Figura 8 – Disponível em: <<https://www.google.com.br/maps/@-29.2251635,-51.3537683,14z>>. Acesso em: 19 jun. 2017.

Digamos que o seu relógio e a sirene desses lugares estejam sincronizados e que cada sirene tenha um timbre diferente, o que permite identificá-las. Suponha que:

- 4 segundos após o meio-dia você ouve o sino da Igreja Matriz;
- a sirene do Corpo de Bombeiros você ouve 6 segundos após o meio-dia;
- e por fim, a sirene de um acidente no trevo da Santa, em 9,7 segundos.

Para se localizar, você utiliza o conceito da cinemática da Física já estudado: $d = v \cdot t$ e sabe que a velocidade com que o som se propaga no ar é de 340,3 m/s.

Sabendo disso, você pode, então, calcular as distâncias r_1 , r_2 e r_3 em relação à Igreja Matriz, ao Corpo de Bombeiros e ao trevo da Santa, respectivamente.

$$\text{Igreja Matriz } (r_1) = \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad} \text{ m}$$

$$\text{Corpo de bombeiros } (r_2) = \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad} \text{ m}$$

$$\text{Trevo da Santa } (r_3) = \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad} \text{ m}$$

Como nosso mapa utiliza a escala 1 cm = 500m, temos:

$$\text{Igreja Matriz } (r_1) = \underline{\quad} \text{ cm}$$

$$\text{Corpo de bombeiros } (r_2) = \underline{\quad} \text{ cm}$$

$$\text{Trevo da Santa } (r_3) = \underline{\quad} \text{ cm}$$

No plano cartesiano, construa as circunferências com centro nas localizações dadas e com o raio que você descobriu. Em qual ponto você está? Conseguiu descobrir? Justifique.

O que existe nesse ponto?

ATIVIDADE 2

Baseando-se no exercício realizado anteriormente, determine as coordenadas do centro de cada uma das circunferências traçadas.

Igreja Matriz

Corpo de Bombeiros

Trevo da Santa

Sabendo as coordenadas do centro vistas anteriormente e o raio, determine, a partir da fórmula da distância entre dois pontos já estudada, a equação dessas circunferências.

Igreja Matriz Corpo de Bombeiros Trevo da Santa

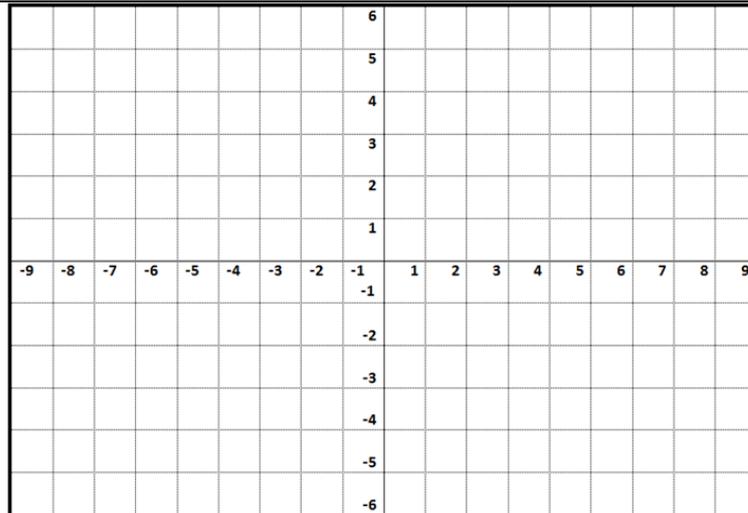
Qual a equação reduzida dessas circunferências?

Qual a equação geral dessas circunferências?

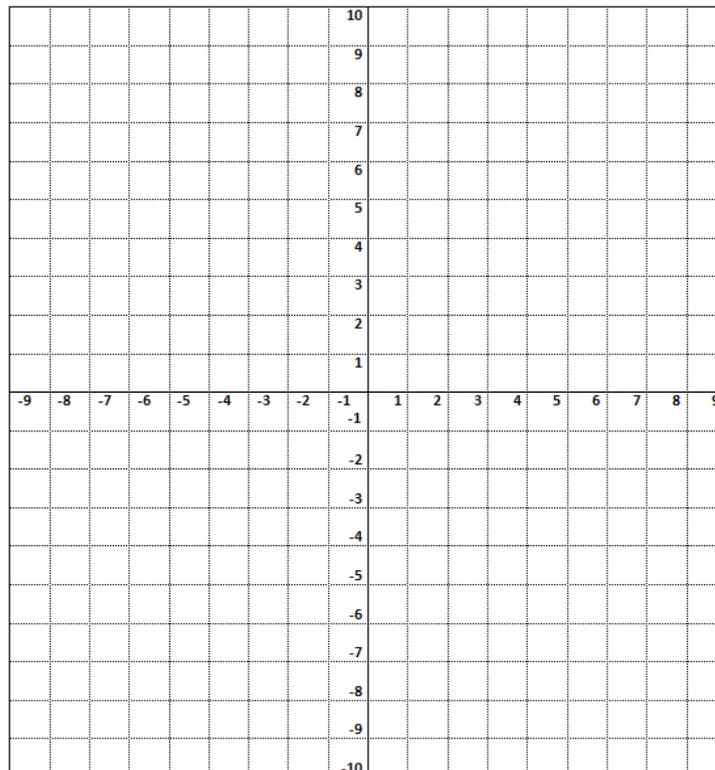
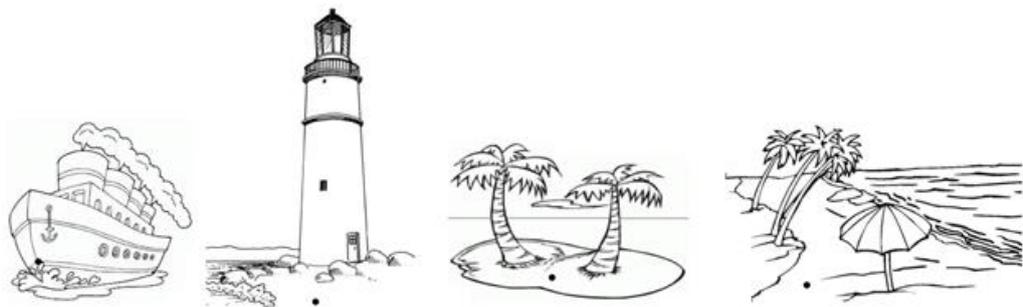
7) RECONCILIAÇÃO INTEGRATIVA: foi apresentado como o GPS funciona e, baseando-se no exercício resolvido anteriormente, como é possível encontrar a equação da circunferência fundamentando-se apenas na distância entre dois pontos já estudada anteriormente? Buscando conceitos anteriores, mostrou-se ao aluno que é possível escrever uma equação geral e uma equação reduzida da circunferência, assim como feito com a reta. Para verificar a aprendizagem, os alunos foram estimulados a resolver os exercícios propostos. Nesta etapa, buscou-se promover novos significados fazendo relação entre a prática (GPS e construção de circunferências de forma geométrica) e as novas ideias (representação algébrica).

Agora é a sua vez, vamos praticar!

- 1- Utilizando sua criatividade, desenvolva uma situação de trilateração no Plano Cartesiano abaixo. Identifique a escala utilizada.



2- Um navio encontra-se a 300 km de distância de um farol, a 240 km de uma ilha e a 150 km da costa. Mostre, no Plano Cartesiano abaixo, a localização do navio. Identifique a escala utilizada.



Agora, podemos relacionar tudo isso com o cálculo da distância entre dois pontos. Conforme já vimos nas aulas, a distância entre 2 pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pode ser calculada por:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(d(A,B))^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Vamos praticar? Que tal alguns problemas para ativar o pensamento?

- 1- Determine a equação geral de cada uma das superfícies esféricas abaixo.
 - a) S2: centro (4,2) e raio 3
 - b) S3: centro (5,1) e raio 5
 - c) S4: centro (0, -2) e raio 7

- 2- Em cada caso, determine o centro e o raio da circunferência dada pela sua equação reduzida.
 - a) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$
 - b) $(x + 7)^2 + (y + 8)^2 = 11$
 - c) $(x + 9)^2 + y^2 = 5$
 - d) $x^2 + (y + 8)^2 = 98$
 - e) $x^2 + y^2 = 20$

- 3- Os pontos M(1, -2) e N(3, 4) são os extremos do diâmetro de uma circunferência. A equação dessa circunferência é:
 - a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$
 - b) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$
 - c) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$
 - d) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5 = 0$
 - e) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$

- 4- (Fuvest-SP) A medida do centro e a medida do raio da circunferência cuja equação geral $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ são respectivamente:
 - a) C(2, 1) e R = 4
 - b) C(-2, 1) e R = 3
 - c) C(2, -1) e R = 3
 - d) C(-2, -1) e R = 4

- 5- O ponto da circunferência $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 4$, que tem ordenada máxima é:
 - a) (2, -4)
 - b) (2, -2)
 - c) (2, -6)
 - d) (-4, 2)
 - e) (-4, 4)

6- _____ é a distância, em graus, de qualquer ponto da superfície terrestre em relação à Linha do Equador, principal _____ da Terra. Além disso, _____ é a distância, em graus, de qualquer ponto da Terra em relação a Greenwich, estabelecido como o principal _____ do Planeta.
A alternativa que melhor completa as lacunas acima é:

- a) Coordenada geográfica, Ponto Cardeal, linha cartográfica, ponto de localização.
- b) Ponto cardeal, coordenada geográfica, linha cartográfica, ponto de localização.
- c) Latitude, paralelo, longitude, meridiano.
- d) Longitude, latitude, meridiano, paralelo.
- e) Latitude, longitude, meridiano, paralelo.

7- *“O GPS – Global Positioning System (Sistema de Posicionamento Global) – é um aparelho de bolso, do tamanho de um telefone celular, apoiado atualmente por cerca de 24 satélites que refletem os sinais de rádio para o local onde o aparelho está operando. O satélite envia ao GPS dados sobre a localização de qualquer lugar, no continente ou no oceano, por meio de **coordenadas geográficas**. Além da posição geográfica, o aparelho pode indicar velocidade, tempo de deslocamento e distância em relação a qualquer outro ponto de referência da Terra”.*

Ao registrar a posição de qualquer lugar da Terra, indicando as coordenadas geográficas, podemos concluir que o GPS dimensiona:

- a) Os dados referentes a distância, em metros, do ponto de referência mais próximo.
- b) A combinação entre os graus de latitude e longitude do ponto indicado.
- c) Uma linha imaginária qualquer do globo terrestre.
- d) A distância, em graus, entre o ponto escolhido e o meridiano mais próximo.
- e) A velocidade média do deslocamento.

7) AVALIAÇÃO SOMATIVA:

Segue abaixo a avaliação somativa realizada.

Nome: _____ Data: _____
 Turma: _____ Professora: RAFAELA REGINA FABRO 3º ano do Ensino Médio

OBSERVE AS INSTRUÇÕES DURANTE A REALIZAÇÃO DA AVALIAÇÃO:

- **Todas** as questões devem apresentar **desenvolvimento**, caso contrário, **NÃO** serão avaliadas.
- A letra deve ser **legível**.
- Apresente todos os passos necessários, tudo que você apresentar será avaliado.
- É permitido o uso de calculadora.
- A resolução deve ser **coerente** com a resposta.
- As respostas finais à **caneta**.

AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA– 1º TRIMESTRE

- 1- Imagine a seguinte situação. É perto do meio-dia e você está perdido em Farroupilha entre o Bairro Vicentina e o Bairro Pio X. Você dispõe de um mapa da cidade, conforme a figura abaixo, e material de desenho geométrico, e sabe que no Bairro Pio X, está localizado o Corpo de Bombeiros, no Centro localiza-se a Igreja Matriz e, no trevo da Santa de Caravaggio (pontos próximos), a sua localização. Existem sirenes que soam precisamente a cada hora, sendo ouvidas a grandes distâncias. Identifique no mapa essas cidades.

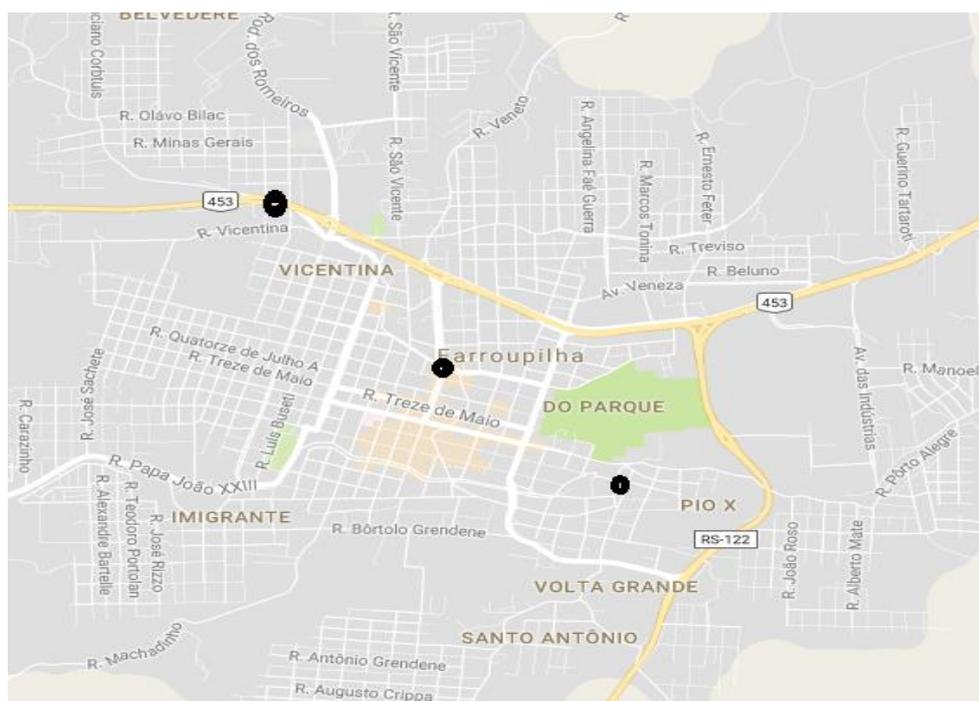


FIGURA 9: Disponível em: <https://www.google.com.br/maps/@-29.2251635,-51.3537683,14z> Acesso em 19 de junho de 2017)

Digamos que o seu relógio e a sirene desses lugares estejam sincronizados e que cada sirene tenha um timbre diferente, o que permite identificá-los. Suponha que:

- 11 segundos após o meio-dia você ouve o sino da Igreja Matriz;
- a sirene do Corpo de Bombeiros você ouve 16 segundos após o meio-dia;
- e por fim, a sirene de um acidente no trevo da Santa, em 10 segundos

Para se localizar você utiliza o conceito da cinemática da Física já estudado: $v = d.t$ e sabe que a velocidade com que o som se propaga no ar é de 340,3 m/s.

Sabendo disso, você pode, então, calcular as distâncias r_1 , r_2 e r_3 em relação à Igreja Matriz, ao Corpo de Bombeiros e ao trevo da Santa, respectivamente.

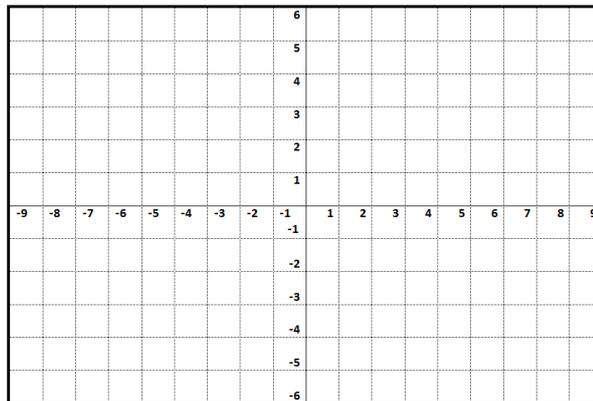
$$r_1 = ___ \times _____ = _____ m$$

$$r_2 = ___ \times _____ = _____ m$$

$$r_3 = ___ \times _____ = _____ m$$

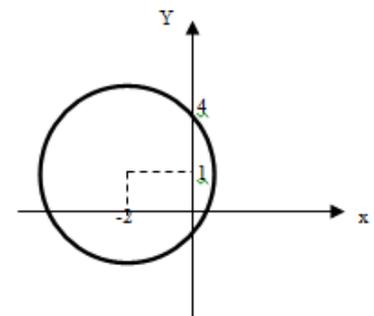
Em qual ponto você está? Conseguiu descobrir? Justifique

- 2- A Terra é uma esfera de aproximadamente 6.400 km de raio e um dos satélites GPS, que orbita a Terra, a 32.000 km de altitude. Faça um desenho, em escala, mostrando a Terra e a órbita de um satélite GPS. Deixe claro, também, qual foi a escala utilizada.



- 3- Represente cada circunferência abaixo, sob a forma geral e reduzida.

- a) Circunferência de centro em $C(-1, 3)$ e passa pelo ponto $A(3, 0)$.
- b) Circunferência representada na figura.



- 4- Em cada equação de circunferência abaixo, determine o centro e o raio.

a) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 12x - 2y - 12 = 0$

- 5- A *London Eye* é uma enorme roda-gigante na capital inglesa. Por ser um dos monumentos construídos para celebrar a entrada do terceiro milênio, ela também é conhecida como Roda do Milênio. Um turista brasileiro, em visita à Inglaterra, perguntou a um londrino o diâmetro (destacado na imagem) da Roda do Milênio e ele respondeu que ele tem 443 pés.



Disponível em: www.mapadelondres.org. Acesso em: 14 maio 2015 (adaptado).

Não habituado com a unidade pé, e querendo satisfazer sua curiosidade, esse turista consultou um manual de unidades de medidas e constatou que 1 pé equivale a 12 polegadas, e que 1 polegada equivale a 2,54 cm. Após alguns cálculos de conversão, o turista ficou surpreso com o resultado obtido em metros. Qual a medida que mais se aproxima do raio da Roda do Milênio, em metro?

- 68
- 94
- 113
- 135
- 145

- 6- Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como segue:

I — é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;

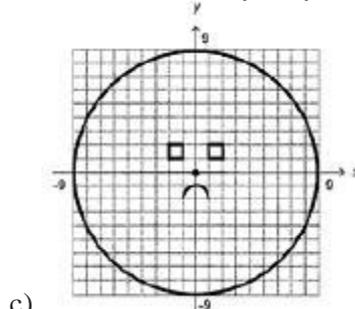
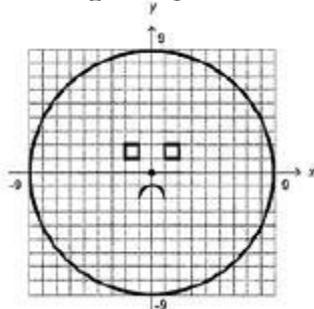
II — é a parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1 ;

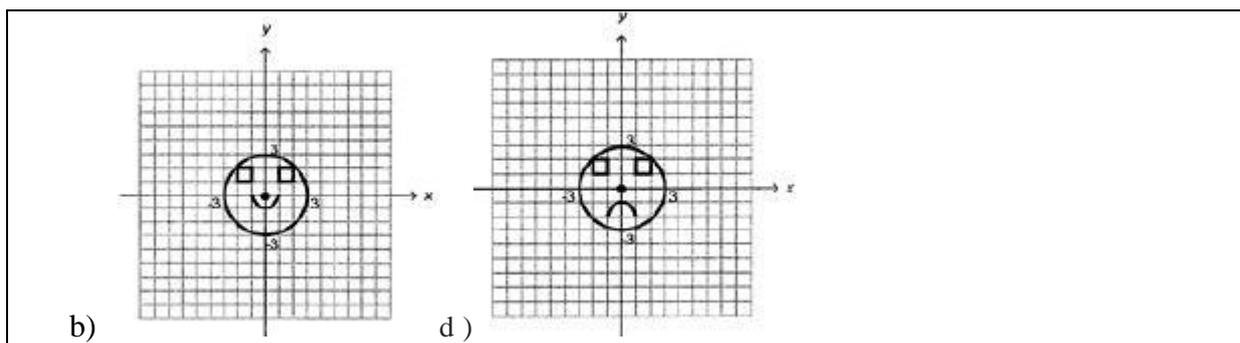
III — é o quadrado formado pelos vértices $(-2, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 2)$ e $(-2, 2)$;

IV — é o quadrado formado pelos vértices $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ e $(1, 2)$;

V — é o ponto $(0, 0)$.

A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento cada, obtendo uma figura. Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?





8) AVALIAÇÃO DE APRENDIZAGEM DA UEPS

Para tal etapa, utilizou-se como recurso a avaliação qualitativa, para notabilizar a ocorrência de aprendizagem significativa.

A avaliação foi contínua, ou seja, realizada ao longo de todas as etapas da UEPS; destacam-se alguns aspectos que foram observados: capricho na entrega do material, respeito aos prazos da entrega ou realização das atividades, comportamento e comprometimento na realização das atividades em sala de aula.

As construções realizadas para localizar um ponto específico no Plano Cartesiano através da equação da circunferência utilizando-se o conceito de trilateração, também auxiliaram para evidenciar a ocorrência da aprendizagem significativa, uma vez que trouxeram os conteúdos conceituais fazendo uma transposição criativa dos conceitos algébricos estudados.

Por fim, os alunos realizaram a avaliação somativa, que também serviu para verificar a efetividade da UEPS e um questionário na forma de “autoavaliação”, que auxiliará para nortear a construção da próxima UEPS, ou seja, através do resultado encontrado será avaliada não apenas a aprendizagem dos alunos, como também o trabalho docente realizado.

REFERÊNCIAS

DANTE, L. R. *Coleção: Novo Ensino Médio*. São Paulo: Ática, 2005.

DESCOMPLICA. Disponível em: <<https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2013/segundo-dia/durante-uma-aula-de-matematica-o-professor-sugere-aos-alunos-que-seja-fixado-um-sistema-de/>>. Acesso em: 5 abr. 2017.

ETAPA. Disponível em: <https://www.etapa.com.br/etaparesolve/etaparesolve/2016/ENEM/FaseUnica_261/correcao/matematica/180.pdf>. Acesso em: 5 abr. 2017.

LIMA, Davi Dantas. *Desvendando a matemática do GPS*. 2013. 49f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Sergipe, 2013.

MUNDO EDUCAÇÃO. Disponível em: <<https://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exercicios-geografia/exercicios-sobre-coordenadas-geograficas.htm>>. Acesso em: 5 abr. 2017.

O ARQUIVO. Disponível em: <http://www.oarquivo.com.br/portal/index.php?option=com_content&view=article&id=2420:76-dos-internautas-brasileiros-ja-sofreram-golpe-na-internet&catid=84:mar-de-lama&Itemid=440>. Acesso em: 14 abr. 2017.

PROJETO MEDICINA: Disponível em: <http://projeto medicina.com.br/site/attachments/article/421/matematica_geometria_analitica_circunferencia_exercicios.pdf>. Acesso em: 2 abr. 2017.

SILVA, C. X.; BARRETO FILHO, B. *Matemática aula por aula*. São Paulo: FTD, 2000.

TADEU, W. Disponível em: <<http://professorwaltertadeu.mat.br/CP2VEST30questGeoAnalCircunf.pdf>>. Acesso em: 5 abr. 2017.

UNICAMP. Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1107>>. Acesso em: 19 maio 2016.

APÊNDICE H – PRODUTO EDUCACIONAL

COMPILAÇÃO DO MATERIAL DISPONÍVEL EM:

<<https://sites.google.com/view/uepsemgeometriaanalitica>>

A sequência didática elaborada como produto educacional desta dissertação foi planejada para estudantes do 3º ano do Ensino Médio, com o objetivo de apresentar uma metodologia que proporcione ao professor uma alternativa para o planejamento de suas aulas sobre Geometria Analítica e com isso propicie a motivação do estudante para aprender Matemática. A proposta tem embasamento em Ausubel (2003) com sua Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) que visa fazer com que o estudante compreenda o processo de aprendizagem como uma construção e participe ativamente dela, correlacionando conhecimentos prévios e a construção de novos conhecimentos e em Dewey (1959) com a Teoria da Aprendizagem por Interesse, tão essencial para que ocorra a aprendizagem.

Desta forma, espera-se que o estudante passe a compreender a aprendizagem como um processo que vai além dos conteúdos da sala de aula, que o conhecimento adquirido tenha significados e que estes colaborem para o desenvolvimento da sua autonomia e emancipação, ou, como afirma Dewey (1959), que o estudante seja capaz de adquirir uma aprendizagem para a vida, com significado.

Para promover a aprendizagem significativa, Moreira (2011), estudioso de Ausubel, propõe Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa. As UEPS são compostas por oito etapas inter-relacionadas, que buscam a construção da aprendizagem significativa, sendo o estudante levado a construir o seu próprio conhecimento.

A sequência didática aqui apresentada é composta por cinco UEPS independentes, que juntas, compõem uma parte da Geometria Analítica abordada no Ensino Médio, sendo divididas em: Estudo do Plano Cartesiano; Estudo do Ponto; Estudo da Reta; Estudo da Circunferência e Geometria Analítica com Softwares Matemáticos.

A pesquisa que originou este material foi aplicada e faz parte da dissertação de mestrado Unidades de Ensino Potencialmente Significativas para a Aprendizagem de Geometria Analítica da Universidade de Caxias do Sul (UCS) estando disponível na página do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática em PDF com as atividades e orientações ao

professor e ainda em link específico (<https://sites.google.com/view/uepsemgeometriaanalitica>) destinado ao produto educacional.

Ao longo da aplicação da proposta, observou-se nos estudantes participantes da pesquisa excelentes resultados, e que apontam a ocorrência de aprendizagem significativa.

Desejo a você educador um ótimo trabalho e que sua experiência seja tão enriquecedora quanto a minha!

CONHECENDO AS UEPS E SUA EXTRUTURA:

As UEPS propostas por Moreira (2011a) são orientadas para a construção de materiais potencialmente significativos, que devem primeiramente fazer sentido ao estudante (auxiliar na compreensão do conteúdo) além de serem bem organizados e possuir um desencadeamento lógico.

Moreira (2011b) afirma que o material, se bem elaborado, deve levar em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes. Somente dessa forma ele será relacionável à estrutura cognitiva do sujeito que aprende e, assim, possibilitará a construção de significados por parte do mesmo.

A aquisição de novos conhecimentos envolve principalmente a apresentação de materiais potencialmente significativos para o aprendiz. Para que um material seja considerado potencialmente significativo, deve satisfazer duas condições, quais sejam:

(1) que o próprio material de aprendizagem possa estar relacionado de forma não arbitrária (plausível, sensível e não aleatória) e não literal com qualquer estrutura cognitiva apropriada e relevante (i.e., que possui significado 'lógico') e (2) que a estrutura cognitiva particular do aprendiz contenha ideias ancoradas relevantes, com as quais se possa relacionar o novo material. (AUSUBEL, 2003, p.01)

Sendo assim, um dos principais objetivos de uma UEPS é a construção de materiais que contribuam para um aprendizado de maior qualidade, que se distancie do aprendizado mecânico.

Segundo Moreira (2011), UEPS “são sequências de ensino fundamentadas teoricamente, voltadas para a aprendizagem significativa, não mecânica, que podem estimular a pesquisa aplicada em ensino, aquela voltada diretamente à sala de aula”.

Para a elaboração de uma UEPS são propostas oito etapas, definidas por Moreira (2011). São elas:

1. DEFINIÇÃO DO TEMA: fase inicial que define o assunto específico a ser abordado. Nesta etapa é importante identificar os aspectos fundamentais do assunto abordado e todo o contexto do conteúdo em estudo. Nesta pesquisa, a escolha do tema Geometria Analítica foi realizada pela pesquisadora a partir de um trabalho realizado em uma disciplina do mestrado. Ao longo do trabalho, foram elaboradas situações com base nas quais foi

possível refletir sobre a forma com que este conteúdo vem sendo abordado na escola, que demandaram estudos e discussões, culminando coma definição do tema.

2. INVESTIGAÇÃO DE CONHECIMENTO: nesta etapa deve-se criar e/ou propor situações que possam oportunizar a identificação dos conhecimentos prévios já existentes na estrutura cognitiva dos estudantes, requisito fundamental para a ocorrência de aprendizagem significativa. Para isso, pode-se utilizar diferentes mecanismos, tais como: produções textuais, discussões, questionários, mapas conceituais e situações-problemas que levem o estudante a manifestar seus conhecimentos prévios.

3. SITUAÇÃO PROBLEMA INTRODUTÓRIA: a partir do assunto específico definido na etapa 1, é importante partir de situações-problema iniciais, ou organizadores prévios, para retomar e revisar o que foi estudado até o momento, utilizando estratégias diversificadas. A utilização dos conhecimentos prévios é fundamental para a aprendizagem do novo assunto e o professor deve abrir espaço para discussões e perguntas dos estudantes, a fim de que esses estabeleçam as relações necessárias para a aprendizagem de novos conceitos.

4. DIFERENCIAÇÃO PROGRESSIVA: após a realização da etapa 3, deve-se apresentar o conhecimento a ser ensinado/aprendido utilizando aspectos mais gerais, dando uma visão inicial do todo, para posteriormente exemplificar e abordar aspectos específicos do assunto. Nesta fase, ao longo da aplicação das UEPS em Geometria Analítica, abordam-se situações-problema contextualizadas, baseadas no mapa da cidade de Farroupilha, para localizações, distâncias, orientações, dentre outras.

5. COMPLEXIDADE: nessa etapa, as situações-problema devem ser propostas em níveis crescentes de complexidade e devem ser dados novos exemplos, destacando semelhanças e diferenças entre as situações-problema e os exemplos já estudados, avançando, para promover a reconciliação integradora.

6. RECONCILIAÇÃO INTEGRADORA: retomar as características mais relevantes do conteúdo em questão, porém de uma perspectiva integradora, buscando a reconciliação integradora. Nesta fase é importante propor algumas atividades colaborativas que levem os estudantes a interagir socialmente, negociando significados, tendo o professor como mediador. Para isso, sugere-se que os estudantes criem situações-problema, buscando a aplicação dos conceitos aprendidos na fase da diferenciação progressiva, quando o estudante parte de uma situação geral, formulada por ele, para interagir com colocações/conceitos específicos.

7. AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM NA UEPS: esta avaliação pode ser formativa, ocorrendo ao longo do desenvolvimento da UEPS, aproveitando todas as

oportunidades para o tratamento dos acertos e também dos erros, visando à aprendizagem. É fundamental que o professor registre tudo que possa ser considerado evidência de aprendizagem significativa do conteúdo trabalhado. Por fim, deve realizar uma avaliação somativa individual, com situações-problema cuja resolução requeira compreensão e que evidencie construção de significados. A avaliação final do desempenho do estudante na UEPS deverá estar baseada tanto na avaliação formativa (observações realizadas, situações, tarefas resolvidas de forma colaborativa e registros do professor) como na avaliação somativa.

8. AVALIAÇÃO DA PRÓPRIA UEPS: partindo dos resultados encontrados na avaliação do desempenho dos estudantes, deve-se avaliar o êxito da implementação da UEPS, buscando evidências de aprendizagem significativa, tais como, captação de significados, compreensão, capacidade de explicar e de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema.

É importante salientar que a busca de evidências de aprendizagem significativa por meio das UEPS deve ocorrer ao longo de sua implementação e não somente na avaliação somativa, pois a aprendizagem significativa é progressiva. Buscar promover a aprendizagem significativa consiste em proporcionar ao estudante, condições para que ele pense e compreenda o conteúdo que está sendo ministrado. Sendo assim, se o professor busca auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem, deve também organizar o planejamento das aulas levando em conta a elaboração de situações de aprendizagem que instiguem o estudante a vivenciar a busca, a exercitar as possibilidades de resposta e principalmente a desenvolver seu pensamento.

A seguir são apresentados os conteúdos desenvolvidos, a duração de cada uma das etapas e os objetivos das cinco UEPS elaboradas com base na Geometria Analítica. As atividades foram elaboradas com base na realidade do estudante e do município de Farroupilha, local de aplicação da pesquisa, mas é possível modificá-las e adaptá-las às realidades de cada contexto educativo.

O detalhamento de cada uma das etapas, bem como as orientações ao professor e as atividades a serem aplicadas constam do site em que está disponível o produto educacional.

UEPS 1 – PLANO CARTESIANO

Orientações para o Professor

CONTEÚDOS DESENVOLVIDOS:

- Importância da Geometria Analítica e do Plano Cartesiano;
- Plano Cartesiano: identificação de eixos Ortogonais no plano (abscissas e ordenadas);
- Identificar pares ordenados no Plano Cartesiano bem como o seu respectivo quadrante;
- Problemas envolvendo situações práticas;
- Resolução de problemas de vestibulares e ENEM.

DURAÇÃO:

A sequência didática para a UEPS está organizada em 8 períodos de aula (podendo ser adaptada conforme a turma), sendo divididos de acordo com a tabela:

Etapa da UEPS	Tempo previsto para a aplicação:
Definição do Tema	Previamente
Conhecimentos Prévios	1/2 período (30 minutos)
Situação Problema Introdutória	1/2 período (30 minutos)
Diferenciação Progressiva	2 períodos (55 minutos cada) – com tarefa para casa.
Complexidade	1 período (55 minutos)
Reconciliação Integradora	1 período (55 minutos)
Avaliação Somativa	2 períodos (55 minutos cada)
Avaliação da Aprendizagem da UEPS e Estudos de Recuperação	1 período (55 minutos)

OBJETIVOS:

- Identificar as características de um Plano Cartesiano e trabalhar as nomenclaturas referentes ao estudo do mesmo (eixo, abscissa, ordenada, ponto de origem, quadrantes);
- Localizar pontos no Plano Cartesiano através de suas coordenadas;
- Identificar as coordenadas de um ponto no plano;
- Representar os pontos no Plano Cartesiano através de pares ordenados;
- Reconhecer a importância do Plano Cartesiano em situações do dia a dia;
- Transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos aprendidos sobre plano cartesiano para localizar pontos em mapas;
- Gerenciar o tempo, respeitando o ritmo de aprendizagem dos educandos.
- Identificar, através de atividades da UEPS, se houve aprendizagem significativa.

UEPS 2 – ESTUDO DO PONTO

Orientações para o Professor

CONTEÚDOS DESENVOLVIDOS: Estudo do Ponto

- Distância entre dois Pontos;
- Ponto Médio;
- Baricentro;
- Mediana;
- Condição de Alinhamento de três pontos.

DURAÇÃO:

A sequência didática para a UEPS está organizada em 12 períodos de aula (podendo ser adaptada conforme a turma), sendo divididos de acordo com a tabela:

Etapas da UEPS	Tempo previsto para a aplicação:
Definição do Tema	Previamente
Conhecimentos Prévios	1 período (55 minutos)
Situação Problema Introdutória	4 períodos (55 minutos cada)
Diferenciação Progressiva	2 períodos (55 minutos cada)
Complexidade	1 período (55 minutos)
Reconciliação Integradora	1 período (55 minutos)
Avaliação Somativa	2 períodos (55 minutos cada)
Avaliação da Aprendizagem da UEPS	1 período (55 minutos)

OBJETIVOS:

- Identificar pares ordenados no Plano Cartesiano bem como o seu respectivo quadrante;
- Ser capaz de trabalhar no Plano Cartesiano com diferentes pontos;
- Calcular a distância de dois pontos usando suas coordenadas;
- Calcular o ponto médio entre dois pontos usando suas coordenadas;
- Identificar e calcular corretamente pontos colineares e não colineares;
- Identificar geometricamente o baricentro de um triângulo e calculá-lo algebricamente;
- Despertar, compreender e utilizar o pensamento geométrico (Geometria Analítica) que leve ao aluno a resolver situações-problema;
- Articular o conhecimento entre a álgebra e a geometria numa perspectiva interdisciplinar;

- Transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos aprendidos sobre plano cartesiano para calcular distâncias ou ponto médio no mapa de Farroupilha;
- Gerenciar o tempo, respeitando o ritmo de aprendizagem dos educandos.
- Identificar, através de atividades da UEPS, se houve aprendizagem significativa.

UEPS 3 – ESTUDO DA RETA

Orientações para o Professor

CONTEÚDOS DESENVOLVIDOS: Estudo da Reta

- Coeficiente Angular e Linear;
- Equação Reduzida da Reta;
- Equação geral da reta;
- Pertinência de um ponto a reta;
- Posições relativas de duas retas no plano;
- Ângulo formado entre duas retas;
- Ponto de intersecção entre duas retas;
- Distância do ponto a reta;
- Área de um triângulo;

DURAÇÃO:

A sequência didática para a UEPS está organizada em 12 períodos de aula (podendo ser adaptada conforme a turma), sendo divididos de acordo com a tabela:

Etapa da UEPS	Tempo previsto para a aplicação:
Definição do Tema	Previamente
Conhecimentos Prévios	1 período (55 minutos)
Situação Problema Introdutória	1 período (55 minutos)
Diferenciação Progressiva	4 períodos (55 minutos cada)
Complexidade	2 períodos (55 minutos cada)
Reconciliação Integradora	1 período (55 minutos)
Avaliação Somativa	2 períodos (55 minutos cada)
Avaliação da Aprendizagem da UEPS	1 período (55 minutos)

OBJETIVOS:

- Identificar corretamente o coeficiente angular e linear diferenciando sua função;
- Ser capaz de determinar a equação geral e reduzida de uma reta;
- Conhecer as equações de reta nas suas diferentes versões;
- Diferenciar as condições para retas paralelas, perpendiculares, coincidentes e concorrentes;
- Ser capaz de calcular a distância entre ponto e reta;

- Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas;
- Calcular corretamente o ângulo formado por 2 retas que se interceptam no Plano cartesiano;
- Identificar o ponto de intersecção entre duas retas;
- Calcular a área de um triângulo sabendo os seus vértices;
- Despertar, compreender e utilizar o pensamento geométrico (Geometria Analítica) que leve ao aluno a resolver situações-problema;
- Articular o conhecimento entre a álgebra e a geometria numa perspectiva interdisciplinar.

UEPS 4 – ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

Orientações para o Professor

CONTEÚDOS DESENVOLVIDOS: Geometria Analítica – Equação da Circunferência

- Circunferência – raio e diâmetro
- Equação reduzida da circunferência
- Equação geral da circunferência
- Problemas envolvendo situações práticas

DURAÇÃO:

A sequência didática para a UEPS está organizada em 14 períodos de aula (podendo ser adaptada conforme a turma), sendo divididos de acordo com a tabela:

Etapas da UEPS	Tempo previsto para a aplicação:
Definição do Tema	Previamente
Conhecimentos Prévios	1 período (55 minutos)
Situação Problema Introdutória	4 períodos (55 minutos cada)
Diferenciação Progressiva	3 períodos (55 minutos cada)
Complexidade	1 período (55 minutos)
Reconciliação Integradora	2 períodos (55 minutos cada)
Avaliação Somativa	2 períodos (55 minutos cada)
Avaliação da Aprendizagem da UEPS	1 período (55 minutos)

OBJETIVOS:

- Conceituar e representar graficamente utilizando o compasso uma circunferência;
- Diferenciar raio e diâmetro de uma circunferência;
- Reconhecer as coordenadas do centro e a medida do raio na equação de uma circunferência e vice-versa;
- Saber identificar as equações da circunferência na forma reduzida e geral e conhecer as propriedades características da circunferência;
- Reconhecer a importância da equação da circunferência em situações do dia a dia;
- Transpor o conhecimento teórico por meio de uma abordagem prática, aplicando os conceitos de construção de circunferência para localizar pontos como o GPS;
- Gerenciar o tempo, respeitando o ritmo de aprendizagem dos educandos;
- Identificar, através de atividades da UEPS, se houve aprendizagem significativa.

UEPS 5 – GEOMETRIA ANALÍTICA COM SOFTWARES MATEMÁTICOS

Orientações para o Professor

CONTEÚDOS DESENVOLVIDOS: Geometria Analítica

- Coeficiente Angular e Linear;
- Equação Reduzida da Reta;
- Equação geral da reta;
- Pertinência de um ponto a reta;
- Posições relativas de duas retas no plano;
- Ângulo formado entre duas retas;
- Ponto de intersecção entre duas retas;
- Distância do ponto a reta;
- Área de um triângulo;
- Intervalos de variação.

DURAÇÃO:

A sequência didática para a UEPS está organizada em 12 períodos de aula (podendo ser adaptada conforme a turma), sendo divididos de acordo com a tabela:

Etapas da UEPS	Tempo previsto para a aplicação:
Definição do Tema	Previamente
Conhecimentos Prévios	1 período (55 minutos)
Situação Problema Introdutória	1 período (55 minutos)
Diferenciação Progressiva	2 períodos (55 minutos cada)
Complexidade	2 períodos (55 minutos)
Reconciliação Integradora	2 períodos (55 minutos cada)
Avaliação Somativa	3 períodos (55 minutos cada)
Avaliação da Aprendizagem da UEPS	1 período (55 minutos)

OBJETIVOS:

- Ser capaz de determinar a equação geral e reduzida de uma reta;
- Conhecer as equações de reta nas suas diferentes versões;
- Diferenciar as condições para retas paralelas, perpendiculares, coincidentes e concorrentes;

- Ser capaz de calcular a distância entre ponto e reta;
- Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas;
- Compreender os diversos intervalos de tempo entre dois extremos indicados, podendo ou não conter os próprios extremos;
- Despertar, compreender e utilizar o pensamento geométrico (Geometria Analítica) que leve ao aluno a resolver situações-problema;
- Traçar um paralelo da Geometria Analítica com o cotidiano, envolvendo a construção de Bandeiras Oficiais;
- Articular o conhecimento entre a álgebra e a geometria numa perspectiva interdisciplinar.

REFERÊNCIAS

- ALVES, S. A geometria do globo terrestre, II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. Disponível pela Internet no site < www.bienasbm.ufba.br >.
- ARANTES, D.. Disponível em: <http://www.academia.edu/17462871/Quest%C3%A3o_1>. Acesso em: 9 out. 2018.
- BARRETO FILHO, B.; SILVA, C.X. *Matemática aula por aula*. São Paulo: FTD, 2000.
- CARROCINO, C. H. G. *Questões contextualizadas nas provas de Matemática*. 2014. 69 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2014.
- CENTRO DE SELEÇÃO. Disponível em: <https://centrodeselecao.ufg.br/2011/ps2011-2/gabarito/TIPO-2_caderno-questao.pdf>. Acesso em: 2 nov. 2018.
- COMPUTAÇÃO. Disponível em: <<http://www.dsc.ufcg.edu.br/~pet/jornal/novembro2009/materias/cultura.html> > Acesso em: 15 out. 2018.
- CORDEIRO, J. Disponível em: <<http://profjanilsoncordeiro.blogspot.com/2010/01/exercicios-resolvidos-geometria.html>>. Acesso em: 30 out. 2018.
- CPV VESTIBULARES. Disponível em: <http://d2f2yo9e8spo0m.cloudfront.net/vestibulares/insper/2008/semestre1/resolucoes/resolucao_insper_2008_sem1_analise_quant_logica_q41_60.pdf>. Acesso em: 5 out. 2018.
- DANTE, L. R. *Coleção: Novo Ensino Médio*. São Paulo: Ática, 2005.
- DESCOMPLICA. Disponível em: <<https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2016/segundo-dia/uma-cisterna-de-6-000-l-foi-esvaziada-em-um-periodo-de-3-h/>>. Acesso em: 9 out. 2018.
- DESCOMPLICA. Disponível em: <<https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2013/segundo-dia/durante-uma-aula-de-matematica-o-professor-sugere-aos-alunos-que-seja-fixado-um-sistema-de/>>. Acesso em: 5 abr. 2017.
- DESCOMPLICA. Disponível em: <<https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2014-segunda-aplicacao/segundo-dia/alunos-de-um-curso-de-engenharia-desenvolveram-um-robot-anfibio-que-executa-saltos-somente/>>. Acesso em: 30 out. 2018.
- EDUCACIONAL PLENUS. Disponível em: <http://projeto-militar.blogspot.com/2015/06/questao_582.html>. Acesso em: 2 nov. 2018.
- ENEM ESTUDA. Disponível em: <<https://enem.estuda.com/questoes/?prova=441&q=&cat=>>. Acesso em: 9 out. 2018.

ETAPA. Disponível em:

<https://www.etapa.com.br/etaparesolve/etaparesolve/2016/ENEM/FaseUnica_261/correcao/matematica/180.pdf>. Acesso em: 5 abr. 2017.

FORUMEIROS. Disponível em: <<https://pir2.forumeiros.com/t99649-enem>>. Acesso em: 30 out. 2018.

FREIRE, I. Disponível em:

<<file:///C:/Users/Aluno/Downloads/Lista%20de%20exerc%C3%ADcio-professor%20Ivanildo.pdf>>. Acesso em: 9 out. 2018.

GLOBO EDUCAÇÃO. Disponível em: <<http://educacao.globo.com/provas/enem-2010/questoes/156.html>>. Acesso em: 30 out. 2018.

GLOBO EDUCAÇÃO. Disponível em: <<http://educacao.globo.com/provas/enem-2013/questoes/175.html>>. Acesso em: 5 out.2018.

LIMA, D. D. Desvendando a matemática do GPS. 2013. 49f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Sergipe, 2013.

MATEMÁTICA EM SUAS MÃOS. Disponível em:

<<https://matematicaemsuasmaos.blogspot.com/2015/05/questao-1-questao-10-puc-numa.html>>. Acesso em: 5 out. 2018.

MATEMÁTICA NO PROJETO . Disponível em:

<<http://matematicanoprojeto.blogspot.com/2014/03/3-serie-k1-do-e.html>>. Acesso em: 5 out.2018.

MOREIRA, M. A.; SALZANO, E. F. M. *Aprendizagem significativa: a Teoria de David Ausubel*. São Paulo: Centauro, 2011.

MUNDO EDUCAÇÃO. Disponível em:

<<https://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exercicios-geografia/exercicios-sobre-coordenadas-geograficas.htm>>. Acesso em: 5 abr. 2017.

O ARQUIVO. Disponível em:

<http://www.oarquivo.com.br/portal/index.php?option=com_content&view=article&id=2420:76-dos-internautas-brasileiros-ja-sofreram-golpe-na-internet&catid=84:mar-de-lama&Itemid=440>. Acesso em: 14 abr. 2017.

PASSEI DIRETO. Disponível em: <<https://www.passeidireto.com/pergunta/25383160/qual-e-a-equacao-reduzida-da-reta-r-que-tem-inclinacao-igual-a-45-e-passa-pelo-p>>. Acesso em: 9 out. 2018.

PORTAL DO PROFESSOR. Disponível em:

<<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1913>>. Acesso em: 2 nov. 2018.

PROFE ELI. Disponível em: <<http://profeeli7.blogspot.com/2017/03/revisao.html>>. Acesso em: 5 out.2018.

PROJETO MEDICINA. Disponível em:

<http://projeto medicina.com.br/site/attachments/article/419/matematica_geometria_analitica_retas_exercicios.pdf> Acesso em: 9 out. 2018.

PROJETO MILITAR. Disponível em: <http://projeto-militar.blogspot.com/2015/06/questao_582.html>.

Acesso em: 2 nov. 2018.

Q CONCURSOS. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-militares/questoes?assunto=20323&disciplina=13&modo=1&order=questao_aplicada_em+desc&page=10&per_page=5&product_id=5&url_solr=master&user_id=0>.

Acesso em: 5 out. 2018.

QUARTIERI, M. T. *A noção de interesse no campo da modelagem matemática na Educação Básica*. 2011. 136p. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, 2011.

RACHA CUCA. Disponível em:

<<https://rachacuca.com.br/educacao/vestibular/tags/raciocinio-logico/>>. Acesso em: 2 nov. 2018.

REDESCOLA. Disponível em:

<http://www.redescola.com.br/site/index.php?option=com_content&view=article&id=189%3Aa-bandeira-do-brasil&catid=73%3Anovembro&Itemid=53>. Acesso em: 15 out. 2018.

RIBEIRO, J. *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia3: Ensino Médio*. São Paulo: Scipione, 2010.

SABER MATEMÁTICA. Disponível em: <<https://sabermatematica.com.br/geometria-analitica-exercicios-resolvidos.html>>. Acesso em: 7 out.2018.

SANTOS, A. T. C. dos. *O Estado da Arte das pesquisas brasileiras sobre a Geometria Analítica no período de 1991 a 2014*. 2016. 277 f. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

SILVA, C. X.; BARRETO FILHO, B. *Matemática aula por aula*. São Paulo: FTD, 2000.

SOU VESTIBULANDO. Disponível em:

<<http://souvestibulando.com/provas/exercicio.php?ida=12&ide=958>>. Acesso em: 30 out. 2018.

SOUZA, J. R. de. *Novo olhar matemática3*. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

SUPERINTERESSANTE. Disponível em: <<https://super.abril.com.br/mundo-estranho/quantas-bandeiras-o-brasil-ja-teve/>>. Acesso em: 15 out. 2018.

TADEU, W. Disponível em:

<<http://professorwaltetadeu.mat.br/CP2VEST30questGeoAnalCircunf.pdf>>. Acesso em: 5 abr. 2017.

TUTOR BRASIL. Disponível:

<<https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=60150>>. Acesso em: 5 out.2018.

UNICAMP. Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1107>>. Acesso em: 19 maio 2016.