**UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL**
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**
**MESTRADO PROFISSIONAL**

**DAIANA BORDIN**

# UEPS: APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA TRIGONOMETRIA APLICADA AO FUTEBOL

**CAXIAS DO SUL, RS**
**MAIO 2019**

**UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

# UEPS: APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA TRIGONOMETRIA APLICADA AO FUTEBOL

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Caxias do Sul, sob a orientação da Eng. Prof.ª. Dr.ª Marilda Machado Spindola como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

**CAXIAS DO SUL, RS**

**MAIO 2019**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Universidade de Caxias do Sul
Sistema de Bibliotecas UCS - Processamento Técnico

B729u Bordin, Daiana
UEPS : aprendizagem significativa da trigonometria aplicada ao futebol / Daiana Bordin. – 2019.
220 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade de Caxias do Sul, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, 2019.
Orientação: Marilda Machado Spindola.

1. Trigonometria. 2. Futebol. 3. Aprendizagem. I. Spindola, Marilda Machado, orient. II. Título.

CDU 2. ed.: 514.116

Catalogação na fonte elaborada pela(o) bibliotecária(o)
Carolina Machado Quadros - CRB 10/2236

**UEPS: APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA TRIGONOMETRIA APLICADA AO FUTEBOL.**

**Daiana Bordin**

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Caxias do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Caxias do Sul, 07 de maio de 2019.

**Orientadores:**

Profª Drª Marilda Machado Spindola

**Banca Examinadora:**

Profª Drª Carine Geltrudes Webber

Profª Drª Marcia Jussara Hepp Rehfeldt

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus por me proporcionar saúde e a oportunidade de vivenciar essa experiência única.

Aos meus pais Vilma e Enio (in memoriam) pela rigorosidade com que me educaram e aos ensinamentos que a mim conferiram. A Dona Vilma, agradeço pelas incontáveis vezes que zelou, com tanto amor, pelas minhas filhas quando não pude estar presente. Sua dedicação foi fundamental para que esse trabalho fosse possível. Ao Sr. Enio, gratifico o exemplo de dignidade e honestidade, e sua capacidade de alegrar o ambiente onde se encontrava. Saudades!

As minhas filhas Eduarda e Heloísa, por terem suportado minha ausência no decorrer de todo este trajeto, dando-me forças para nunca desistir. Eu amo vocês!

Ao meu marido Alexandre, pelo companheirismo e amizade de sempre. Mas principalmente pelo empenho e diligência prestados a nossa família, em especial quando minha presença não foi possível! Gratidão meu amor!

A Profa. Dra. Marilda Machado Spindola, minha querida orientadora, pelos ensinamentos, paciência e dedicação com que me conduziste nessa pesquisa. Certamente fizeste muito mais do que o trabalho de um orientador, fostes à peça principal do jogo! Reitero, aqui, toda a admiração que tenho por essa pessoa maravilhosa. És inspiração!

Ao Professor Cícero Zanoni pelo incentivo para o ingresso no mestrado.

A vocês todos, muito obrigada!

## RESUMO

Na pesquisa que deu origem a esta dissertação, avaliaram-se as contribuições de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, para promover a aprendizagem significativa da trigonometria aplicada ao futebol. Elaborou-se uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa em que os estudantes foram sujeitos ativos na construção do próprio conhecimento, utilizando seus conhecimentos prévios, seguindo a teoria da aprendizagem significativa, proposta por Ausubel (2003). A temática desenvolvida surgiu diante da constatação do alto índice de reprovação e desistência da disciplina de Cálculo Integral e Diferencial, segundo estudos realizados por Masetto (1992), Barbosa e Neto (1995) e Morellatti (2001). Conforme pesquisa realizada com professores, estudantes e monitores da disciplina de Cálculo Integral e Diferencial, e que apontou a trigonometria como um dos conteúdos estruturantes para a aprendizagem da disciplina em questão, houve a preocupação em aliar este conteúdo a algo que despertasse o interesse dos estudantes em aprender, o futebol. Foi possível confirmar que a Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, planejada e aplicada aos estudantes do nono ano do ensino fundamental, apresentou indícios de aprendizagem potencialmente significativa, através dos mapas conceituais desenvolvidos pelos estudantes no decorrer, e no término da aplicação. Para análise dos mapas conceituais optou-se pela adoção da taxonomia topológica elaborada por Cañas et al. (2006) e Miller (2008). Outro indício de que ocorreu a aprendizagem significativa, foram os conceitos obtidos pelos estudantes, após a aplicação da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, em comparação com conceitos obtidos em anos anteriores. Como produto final, foi elaborado um guia didático, que pode servir como recurso a ser utilizado por outros professores, como material didático principal ou complementar, para a abordagem da trigonometria na Educação Básica.

**Palavras-chave:** Trigonometria. Futebol. Unidade de Ensino Potencialmente Significativa. Aprendizagem significativa.

# ABSTRACT

In the research that gave rise to this dissertation, the contributions of a Potentially Significant Teaching Unit were evaluated to promote the meaninful learning of trigonometry applied to soccer. A Potentially Significant Teaching Unit was elaborated in which the students were active subjects in the construction of own knowledge, using their previous knowledge, following the theory of meaninful learning proposed by Ausubel (2003). The study developed by Masetto (1992), Barbosa and Neto (1995) and Morellatti (2001), showed the high index of failure and withdrawal of Integral and Differential Calculus. According to research carried out with professors, students and monitors of the discipline of Integral and Differential Calculus, and that pointed to trigonometry as one of the structuring contents for the learning of the discipline in question, there was a concern to combine this content with something that aroused students' interest in learning, football. It was possible to confirm that the Potentially Significant Teaching Unit, planned and applied to the students of the ninth year of elementary school, showed signs of potentially meaninful learning through the conceptual maps developed by the students in the course and at the end of the application. For the analysis of the conceptual maps, we opted for the adoption of the topological taxonomy elaborated by Cañas et al. (2006) and Miller (2008). Another indication that meaninful learning occurred was the concepts obtained by the students, after applying the Potentially Significant Teaching Unit, in comparison to concepts obtained in previous years. As a final product, a didactic guide was elaborated, which can serve as a resource to be used by other teachers, as main or complementary didactic material, for the approach of trigonometry in Basic Education.


**Palavras-chave:** Trigonometry. Soccer a Potentially Significant Teaching Unit. Meaningful learning.

**SUMÁRIO**


1. INTRODUÇÃO ........................................ 15

**1.1. Problema de pesquisa ........................................ 17**

**1.2. Objetivos ........................................ 17**

*1.2.1. Objetivo geral ........................................ 17*

*1.2.2. Objetivos específicos ........................................ 17*

**1.3. Justificativa ........................................ 18**

2. REFERENCIAL TEÓRICO ........................................ 20

**2.1. Método de aprendizagem: Aprendizagem Significativa ........................................ 20**

**2.2. Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) ........................................ 23**

**2.3. Trigonometria ........................................ 27**

**2.4. A Trigonometria e o Cálculo Integral e Diferencial ........................................ 29**

**2.5. Trigonometria no futebol ........................................ 30**

**2.6. O Ensino de Trigonometria, o Cálculo e a Teoria de Ausubel ........................................ 32**

**2.7. Modelos de avaliação: Mapas Conceituais ........................................ 34**

*2.7.1. Análise dos Mapas Conceituais: Taxonomia Topológica ........................................ 36*

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS ........................................ 39

**3.1. Planejamento da pesquisa ........................................ 39**

**3.2. Percurso Metodológico ........................................ 40**

*3.2.1. Pesquisa Inicial: Investigação do Problema Principal ........................................ 41*

*3.2.2. Projeto Principal: Desenvolvimento da UEPS ........................................ 42*

3.2.2.1. Sujeitos e contextualização da Pesquisa ........................................ 43

3.2.2.2. Metodologia Aplicada a esta Pesquisa ........................................ 44

*3.2.2.2.1 Planejamento das UEPS ........................................ 45*

**3.3. Descrição das Etapas e aplicação da UEPS ........................................ 46**

**3.4. Construção de Dados ........................................ 53**

*3.4.1. Mapa conceitual inicial ........................................ 53*

*3.4.2. Mapa conceitual intermediário ........................................ 53*

*3.4.3. Mapa conceitual final*......54

4. ANÁLISE DE RESULTADOS E DISCUSSÕES......55

**4.1. Aplicação da UEPS......55**

*4.1.1. Mapa Conceitual Inicial - Aula 1*......55

*4.1.2. Trigonometria - Aula 2*......63

*4.1.3. Mapa conceitual intermediário - Aula 3*......69

*4.1.4. Pênalti e a Trigonometria - Aula 4*......74

*4.1.5. Escanteio e a Trigonometria - Aula 5*......79

*4.1.6. Pênalti e Quadrantes - Aula 6*......86

*4.1.7. Esquema Tático - Aula 7*......95

*4.1.8. Mapa Conceitual Final - Aula 8*......99

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS......104

6. PRODUTO FINAL......107

**6.1. Detalhamento das Aulas......107**

7. BIBLIOGRAFIA......157

8. APÊNDICE I – PRIMEIRO QUESTIONÁRIO......161

9. APÊNDICE II – COMPILAÇÃO DE DADOS DO PRIMEIRO QUESTIONÁRIO......164

10. APÊNDICE III - SEGUNDO QUESTIONÁRIO......165

11. APÊNDICE IV – COMPILAÇÃO DE DADOS DO SEGUNDO QUESTIONÁRIO......172

12. APÊNDICE V – TERCEIRO QUESTIONÁRIO......173

13. APÊNDICE VI – COMPILAÇÃO DOS DADOS DO TERCEIRO......174

14. APÊNDICE VII – PLANO DE AULA DE MAPA CONCEITUAL......176

15. APÊNDICE VIII – PLANO DE AULA 2 – INTRODUÇÃO A TRIGONOMETRIA......181

16. APÊNDICE IX – EXEMPLOS DE MAPAS CONCEITUAIS – AULA 3......191

17. APÊNDICE X – PLANO DE AULA 4 – PÊNALTI......193

18. APÊNDICE XI – PLANO DE AULA 5 – ESCANTEIO......196

19. APÊNDICE XII – MATERIAL ENTREGUE PARA OS ESTUDANTES – AULA5......201

20. APÊNDICE XIII – PLANO DE AULA 6 – PÊNALTI E QUADRANTES......204

21. APÊNDICE XIV – MATERIAL ENTREGUE PARA OS ESTUDANTES - AULA 6......207

22. APÊNDICE XV – PLANO DE AULA 7 – ESQUEMA TÁTICO......209

23. APÊNDICE XVI – MATERIAL ENTREGUE PARA OS ESTUDANTES - AULA 7......213

24. APÊNDICE XVII – 1º MAPAS CONCEITUAIS DOS ESTUDANTES DO 9º ANO......215

25. APÊNDICE XVIII – ÍNDICE DOS DIAGRAMAS DE BLOCOS.....................................220
26. APÊNDICE XIX – CARTA DE ANUÊNCIA .....................................................................221
27. APÊNDICE XX - TERMO DE CONSENTIMENTO..........................................................222

# LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Triângulo retângulo (ângulo reto)....................................................................27
Figura 2 - Triângulo retângulo e seus catetos.....................................................................28
Figura 3 - Ilustração da posição do jogador para a cobrança do pênalti .....................................31
Figura 4 - Cobrança de falta rasteira e paralela e o triângulo retângulo......................................31
Figura 5 - Esquema tático de um jogo de futebol.................................................................32
Figura 6 - Mapa conceitual.............................................................................................35
Figura 7 - Diagrama da UEPS "Aprendizagem Significativa da Trigonometria".........................47
Figura 8 - Exemplo de cobrança de escanteio.....................................................................49
Figura 9 - Goleira dividida em quadrantes.........................................................................50
Figura 10 - Exemplo de distância e ângulo lateral ................................................................51
Figura 11 - Esquema tático.............................................................................................52
Figura 12 - Quadro da sala de aula com mapa conceitual......................................................55
Figura 13 - Mapa conceitual do Estudante 1 .......................................................................56
Figura 14 - Mapa conceitual do Estudante 2 .......................................................................62
Figura 15 - Mapa conceitual do Estudante 3 .......................................................................62
Figura 16 - Diagrama da Aula 1 ......................................................................................63
Figura 17 - Exemplos da aplicação da Trigonometria.............................................................64
Figura 18 - Demonstração de Seno, Cosseno e Tangente .......................................................65
Figura 19 - Exercícios resolvidos como demonstração...........................................................66
Figura 20 - Diagrama da aula 2 .......................................................................................68
Figura 21 - Mapa conceitual intermediário - Estudante 4 .......................................................71
Figura 22 - Mapa conceitual intermediário - Estudante 5 .......................................................72
Figura 23 - Mapa conceitual intermediário - Estudante 6 .......................................................72
Figura 24 - Diagrama da aula 3 .......................................................................................73
Figura 25 - Figura ilustrativa da questão 1 ..........................................................................74
Figura 26 - Resposta do Estudante 7 .................................................................................75
Figura 27 - Estudantes medindo o diâmetro da bola de futebol ................................................76
Figura 28 - Triângulo desenhado pelo Estudante 8 ................................................................77
Figura 29 - Diagrama da aula 4 .......................................................................................79
Figura 30 - Estudantes desenvolvendo exercícios da Aula 5. ....................................................80
Figura 31 - Estudantes desenvolvendo exercícios da Aula 5 .....................................................80
Figura 32 - Ângulo a ser percebido pelos estudantes para desenvolvimento dos exercícios .......81
Figura 33 - Estudantes medindo a quadra da escola...............................................................82

Figura 34 - Estudantes medindo a quadra da escola....82
Figura 35 - Exemplo do exercício da Aula 5....83
Figura 36 - Estudantes fazendo a cobrança de escanteio....84
Figura 37 - Medidas feitas pelo estudante 9....84
Figura 38 - Diagrama da aula 5....85
Figura 39 - Figura ilustrativa da questão 3....86
Figura 40 - correção da primeira questão da Aula 6....87
Figura 41 - Explicação de como calcular o ângulo da trajetória da bola chutada, com o chão do campo de futebol.....88
Figura 42 - Exemplo de ângulo lateral entregue no material para os estudantes.....88
Figura 43 - Goleira dividida com cordas para aula prática....89
Figura 44 - Estudante chutando a bola e os juízes observando em qual quadrante a bola está entrando na goleira....90
Figura 45 - Estudante chutando a bola na trave da goleira....91
Figura 46 - Estudante chutando a bola nas cordas que delimita os quadrantes....92
Figura 47 - Exercício do estudante 10 que chutou a bola nos quadrantes A22 e A16....93
Figura 48 - Diagrama da aula 6....94
Figura 49 - Exemplo de Esquema Tático 4-3-3....95
Figura 50 - Esquema tático e figuras geométricas....95
Figura 51 - Medidas do campo de futebol....96
Figura 52 - Diagrama da aula 7....98
Figura 53 - Mapa conceitual Final - Estudante 11....101
Figura 54 - Mapa conceitual Final - Estudante 12....102
Figura 55 - Diagrama da aula 8....103
Figura 56 - Mapa Conceitual elaborado pelo Estudante 3.....111
Figura 57 - Mapa Conceitual elaborado pelo Estudante 4.....112
Figura 58 - Mapa Conceitual explicativo....113
Figura 59 - Termos de autorização para uso de imagem....222

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Relação de Critérios e níveis na análise estrutural dos mapas conceituais ................58
Quadro 2 - Avaliação estrutural dos mapas conceituais...............................................................59
Quadro 3 - Siglas utilizadas no Quadro 2.......................................................................................59
Quadro 4 - Análise estrutural dos primeiros mapas conceituais ..................................................60
Quadro 5 - Análise estrutural dos mapas conceituais intermediários...........................................69
Quadro 6 - Análise estrutural dos mapas conceituais finais..........................................................99
Quadro 7 - Relação de Critérios e níveis na análise estrutural dos mapas conceituais ..............109
Quadro 8 – Avaliação estrutural dos mapas conceituais. ...........................................................110
Quadro 9 – Siglas utilizadas no Quadro 2. ..................................................................................110

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Análise estrutural dos primeiros mapas conceituais .................................................61
Gráfico 2 - Análise estrutural dos mapas conceituais intermediários ..........................................70
Gráfico 3 - Análise estrutural dos mapas conceituais finais......................................................100

# 1. INTRODUÇÃO

A matemática surge como ciência, ao longo da história da humanidade, com o objetivo de solucionar problemas práticos e teóricos, que se apresentam nas variadas sociedades humanas, melhorando a qualidade de vida do cidadão (BOYER, 1974; EVES, 1995).

Neste sentido, as questões que envolvem as dificuldades no aprendizado da Matemática transcendem as barreiras do Ensino Fundamental e Médio e chegam ao curso superior. No contexto da Educação, infelizmente, a Matemática é vista como uma ciência afastada da realidade, de difícil compreensão e, principalmente, causadora de uma porcentagem alta de reprovações (D'AMBRÓSIO, 1986).

Conforme estudos realizados por Masetto (1992), Barbosa e Neto (1995) e Morellatti (2001) cerca de 70% dos estudantes matriculados nas disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial são reprovados ou desistem, apesar de ter conhecimento de que as disciplinas são de extrema importância para a construção de noções fundamentais da Matemática avançada.

Segundo Saravali (2005), professores, em todos os níveis de Ensino, inclusive universitários, têm sofrido os reflexos da formação deficitária de seus estudantes, acompanhando as dificuldades dos mesmos, na busca de conceitos básicos que não foram assimilados por eles em estudos anteriores.

> [...] o Estudante proveniente do Ensino público e que chega à faculdade, teve uma escolarização precária com todos os problemas que a caracterizam e vai iniciar a nova etapa de escolarização sem dominar conceitos e conteúdos básicos que o impedem de acompanhar as solicitações do meio universitário (SARAVALI, 2005, p. 100).

Atualmente, o tema dificuldade de aprendizado de Cálculo Integral e Diferencial tem sido objeto de palestras, encontros e de muitas pesquisas que apontam que estudantes ingressantes nos cursos superiores possuem carências em conteúdos estruturantes da Matemática, dificultando a aprendizagem significativa. Desta forma, o ensino e a aprendizagem de Cálculo Integral e Diferencial tem sido alvo de diversas pesquisas pelo mundo, buscando os mais variados fatores que têm contribuído para a evasão e reprovação nas disciplinas relacionadas.

É fato que o conhecimento básico em Matemática dos estudantes ingressantes no ensino superior encontra-se deficiente. E isto tem contribuído para o insucesso dos estudantes na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, componente curricular de formação básica nos cursos da área de Ciências Exatas.

Grande é a preocupação com o alto índice de reprovação e desistência das disciplinas, juntamente com a escolarização precária com que os estudantes ingressam nos cursos superiores. Conforme Cury (2005), Flemming e Luz (1999), Nascimento (2002) e Nasser, Freire e Cardador (2008), as dificuldades enfrentadas na aprendizagem de Cálculo Integral e Diferencial são, na realidade, reflexos da falta de compreensão por parte dos estudantes, de conceitos básicos teoricamente tratados nos Ensinos Fundamental e Médio.

Muitos estudos sobre as dificuldades no ensino e na aprendizagem de Cálculo Integral e Diferencial, são relatados pelos autores supracitados e apoiados por Nascimento (2002) e Soares e Sauer (2004) e apontam para problemas que evoluem, consideravelmente, pois vêm se acumulando no decorrer de todo o Ensino Básico e resultando no ensino superior. Afirmam ainda que esses problemas resultam da forma como os conteúdos de Matemática são estudados nos Ensino Fundamental e Médio, com muitos "macetes" e fórmulas decoradas, sem a compreensão dos conceitos básicos e suas aplicações.

Assim, para demonstrar o desconforto com o alto índice de reprovação e desistência da disciplina de Cálculo Integral e Diferencial, diversas universidades buscaram outras opções com a intensão de facilitar seu aprendizado. Dentre as opções, destacam-se as disciplinas preparatórias para o Cálculo Integral e Diferencial, monitorias e cursos preparatórios para a disciplina em questão, porém não conseguiram solucionar o problema.

Diante da complexidade do assunto, diversas têm sido as respostas de pesquisadores para a aprendizagem do Cálculo. Como exemplo, os estudantes não possuírem conceitos prévios suficientes para embasar este conteúdo.

Esse projeto de pesquisa tem o anseio de investigar os conteúdos matemáticos considerados, por estudantes e professores, como os que apresentam maiores dificuldades de aprendizado e que são estruturantes para as disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial.

Um dos conteúdos estruturantes para a aprendizagem de Cálculo Integral e Diferencial é a Trigonometria. Assunto, inicialmente abordado no nono ano do Ensino Fundamental, tem o intuito de calcular distâncias utilizando o triângulo retângulo e a medida de ângulos como base.

Mediante a dificuldade de aprendizagem da trigonometria por estudantes do Nono ano, conforme demonstrado no corpo desta dissertação, pretende-se propor uma UEPS para a construção do conhecimento na área.

Estabelecer relações Matemáticas com situações do cotidiano é a maneira encontrada didaticamente para que a aprendizagem aconteça de forma potencialmente significativa. Desta forma, unindo o passatempo preferido dos estudantes, que conforme grupo pesquisado é o futebol, com a Trigonometria, propor uma aprendizagem potencialmente significativa.

Este trabalho de pesquisa foi organizado em seis capítulos. O primeiro capítulo apresenta a introdução do trabalho, o objetivo e a justificativa da problemática em questão. O segundo capítulo trata do referencial teórico fundamentado na teoria de Ausubel (2003) que apresenta um parecer sobre a aprendizagem significativa. O terceiro capítulo apresenta os Procedimentos Metodológicos onde expomos a aplicação da UEPS. O quarto apresenta as análises dos resultados e discussões. No quinto capítulo discorre as considerações finais. E o sexto capítulo aponta o produto resultante deste estudo.

## 1.1. Problema de pesquisa

De que maneira os conteúdos estruturantes das disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial podem ser desenvolvidos no Ensino Fundamental de maneira a tornar a aprendizagem potencialmente significativa?

## 1.2. Objetivos

### *1.2.1. Objetivo geral*

Propor, explorar e avaliar os resultados de uma UEPS, mediada por um cenário do futebol, para o Ensino da Trigonometria.

### *1.2.2. Objetivos específicos*

- Verificar, juntamente com professores, estudantes e monitores da disciplina de Cálculo Integral e Diferencial, (cursos superiores da área das exatas) quais as maiores dificuldades enfrentadas pelos estudantes da disciplina em questão;
- Elaborar uma UEPS para o ensino e aprendizagem do conteúdo considerado de maior dificuldade para o embasamento do Cálculo Integral e Diferencial, com base num tema de interesse dos estudantes.
- Explorar, juntamente ao Ensino Fundamental a UEPS elaborada;
- Avaliar os resultados da aplicação do método, com o intuito de poder identificar se a aprendizagem foi significativa.
- Elaborar um Produto da Dissertação como contribuição resultante do estudo realizado.

## 1.3. Justificativa

Como justificativa para essa proposta de pesquisa do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, apresenta-se as dificuldades para a aprendizagem do Cálculo Integral e Diferencial nos cursos da área de Ciências Exatas, e o elevado índice de reprovação e desistência das disciplinas em questão.

Se não conseguirmos modificar este cenário, teremos cada vez menos formação de profissionais das áreas de Ciências Exatas, e como consequência a redução dos profissionais das áreas de engenharia, os quais são agentes de propulsão para evolução tecnológica de nossa nação.

O engenheiro tem como principal função servir de base para transformar a realidade econômica de um país. No cenário apresentado, a área de engenharia apresenta forte atuação na indústria e nesta realidade percebe-se a falta de profissionais para suprir as demandas de desenvolvimento e como consequência a elevação do PIB do Brasil.

Confirmando esta realidade é possível identificar o Brasil como sendo um grande consumidor de tecnologias em diversos segmentos como, por exemplo, eletro eletrônico, máquinas, equipamentos e indiretamente no segmento automotivo. A falta de profissionais da engenharia, bem como a falta de uma formação baseada no Ensino consistente da Matemática, gera uma grande evasão nos cursos de engenharia e, como consequência, a falta de profissionais destas áreas.

O Brasil precisa mudar sua forma de valorizar este profissional e como decorrência investir em educação de base, principalmente a Matemática, pois ela é um dos pilares da formação de um bom profissional das áreas de tecnologia.

Ao iniciar um Curso de Engenharia, ou qualquer outro curso superior da área das exatas, logo no primeiro semestre, o estudante confronta-se com o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral, onde aprenderá técnicas Matemáticas que serão posteriormente empregadas em disciplinas estratégicas. Contudo, grande parte dos ingressantes apresenta deficiência em conteúdos de Matemática elementar, que deveriam ter sido adquiridos no Ensino Fundamental e Médio. Isto, por sua vez, resulta em uma dificuldade no aprendizado de Cálculo, causando reprovações e contribuindo para o elevado nível de evasão observado nos cursos da área.

Segundo Lima e Sauer (2003), a Matemática possui fundamentação lógica e exige formalização dos conceitos construídos em cada etapa, adequado a cada nível de desenvolvimento.

Desta forma, mais importante que aplicar corretamente uma determinada regra é reconhecer primeiro sua devida aplicação, auxiliando o estudante na construção do conhecimento, baseando-se em conceitos prévios. A importância não está no conhecimento em si, mas no entendimento do seu significado.

As alternativas propostas por esta pesquisa não objetivam resolver o problema definitivamente, mas sim apresentar propostas para minimizar os efeitos, reduzindo a evasão e diminuindo a reprovação nos primeiros anos dos cursos das áreas das Ciências Exatas. A principal contribuição esperada é oferecer alternativas para que a aprendizagem da Matemática nos Ensinos Fundamental e/ou Médio aconteça de forma mais significativa, contribuindo para que mais estudantes prossigam nos cursos das Ciências Exatas, e deste modo formem-se engenheiros, matemáticos, arquitetos e demais profissionais competentes, necessários para o desenvolvimento nacional.

# 2. REFERENCIAL TEÓRICO

No capítulo a seguir apresentamos os conceitos da Aprendizagem Significativa aplicada à Matemática pelo modelo qualitativo de avaliação através de mapas conceituais. Apresenta ainda abordagem teórica referente à investigação aplicada à área da Matemática sobre os conteúdos de Trigonometria no Ensino Fundamental, que servirão como projeto de pesquisa para o programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

## 2.1. Método de aprendizagem: Aprendizagem Significativa

A Aprendizagem Significativa é o conceito fundamental da teoria da aprendizagem de David Ausubel. Ela constitui-se no processo pelo qual o aprendiz constrói significados, ancorando os novos conceitos aos conhecimentos prévios de sua estrutura cognitiva. Dessa forma, a ideia central da teoria de Ausubel é que o fator dominante na aprendizagem dos estudantes é o conhecimento que o mesmo já possui, e para confirmar isso Ausubel (1968) afirma que:

> Se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: o fato isolado mais importante que informação na aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso[1] os seus ensinamentos. (AUSUBEL 1968, p. 20 ).

Segundo Ausubel (2003), um novo conceito ocorre de maneira significativa quando o indivíduo vê a si mesmo como centro da construção de seu próprio conhecimento e, ao mesmo tempo, consegue agregar significado naquilo que está aprendendo a partir de relações que ele estabelece com conhecimentos que já possui.

Contemplando, Moreira e Masini (2009) asseguram que:

> Para Ausubel, Aprendizagem Significativa é um processo pelo qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo. Ou seja, neste processo a nova informação interage com uma estrutura específica, a qual Ausubel define como conceito subsunçor ou, simplesmente, subsunçor (subsumer), existentes na estrutura cognitiva do indivíduo. A Aprendizagem Significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em subsunçores relevantes preexistentes na estrutura cognitiva de quem aprende. Ausubel vê o armazenamento de informações na mente humana como sendo altamente organizado, formando uma hierarquia conceitual na qual elementos mais específicos de conhecimento são relacionados (e assimilados) a conceitos e proposições mais gerais, mais inclusivos. Estrutura cognitiva significa, portanto, uma estrutura hierárquica de subsunçores que são abstrações da experiência do indivíduo (MOREIRA; MASINI, 2009, p. 17-18).

[1] O texto original traz a palavra “isso”, alteramos para um melhor enquadramento no contexto.

Quando o aprendiz não consegue estabelecer esta ancoragem diz-se que houve uma aprendizagem mecânica, ou seja, o aprendiz só é capaz de expressar ideias repetindo as mesmas palavras, memorizadas de forma arbitrária e literal, sem ter assimilado as temáticas relacionadas.

Segundo a percepção de Ausubel (2003), para que a concepção de novos significados aconteça, são necessárias três condições: ter o material instrucional com conteúdo estruturado de maneira lógica; o aprendiz deve possuir, na sua estrutura cognitiva, o conhecimento organizado e relacionável com o novo conteúdo; o aprendiz deve ter vontade e disposição para relacionar o novo conhecimento com aquele já existente. Esses conceitos estáveis e relacionáveis já existentes na estrutura cognitiva são chamados de subsunçores, ou conceitos âncora. (AUSUBEL, 2003)

Os conhecimentos prévios ou subsunçores podem ser mais completos ou específicos que os novos conhecimentos a serem aprendidos e ainda podem ser modificados e reorganizados durante o processo de Aprendizagem Significativa. Podemos apresentar como exemplo a Aprendizagem Significativa das Funções Trigonométricas que requer indispensavelmente os subsunçores referentes à ângulos, Seno, Cosseno e Tangente, assim como potenciação e radiciação no conjunto dos números reais. Porém, ao aprender significativamente as Funções Trigonométricas, os conhecimentos referentes às regras de ângulos, Seno, Cosseno e Tangente reorganizam-se de forma a possuírem um significado mais amplo, ou seja, os subsunçores são modificados e reorganizados devido às interações com os novos conhecimentos que encaminham o aprendiz a ressignificação desses conceitos.

Significar o conteúdo implica em trazer para a sala de aula situações problemas que tenham sentido façam ligações com o mundo real, mas não necessariamente inseridos no cotidiano do estudante (VASCONCELOS, 2008).

Embora as situações do dia-a-dia sejam de grande relevância no sentido de favorecer a construção de significados para muitos conteúdos, necessita-se considerar a possibilidade da construção de significados a partir de questões internas da própria Matemática. Caso contrário, muitos conteúdos seriam descartados por não fazerem parte da realidade dos estudantes (VASCONCELOS, 2008).

Para Vasconcelos (2008) contextualizar é apresentar em sala de aula situações que deem sentido aos conhecimentos que desejamos que sejam aprendidos por meio da problematização, resgatando os conhecimentos prévios e as informações que os estudantes trazem, gerando assim, um contexto que dará significado ao conteúdo, ou seja, que conduza a sua compreensão.

Mais do que simplesmente a ressignificação de conceitos, a Aprendizagem Significativa é um processo dinâmico no qual, durante a execução de planejamentos de atividades bem elaborados, os aprendizes aprofundam, modificam e ampliam seus subsunçores. Assim, Gowin (1990) defende que a Aprendizagem Significativa de um indivíduo é um processo de "reorganização ativa de rede de significados pré-existentes na estrutura cognitiva desse indivíduo".

Na concepção de Ausubel (2003) existem dois tipos de aprendizagem, a Aprendizagem Significativa e Aprendizagem Mecânica, e essas aprendizagens se distinguem em dois processos; aprendizagem por recepção e aprendizagem por descoberta.

Aprendizagem por recepção não exige do aprendiz nenhum tipo de descoberta, a ele compete apenas incorporar o conteúdo ensinado que já está em sua forma final sem necessitar de elaboração por parte do aprendiz. Nesse processo o professor é o orientador que apresenta o conhecimento pronto e o estudante simplesmente recebe esses conceitos (AUSUBEL, 2003).

A aprendizagem por descoberta implica a participação do aprendiz na descoberta do conhecimento a ser aprendido. A descoberta é a tarefa principal desse tipo de aprendizagem, pois ao Estudante, não é dado o conteúdo final, pronto, e sim demostrado caminhos que o levem a descoberta deste conhecimento.

Ausubel esclarece que a ocorrência de Aprendizagem Significativa ou mecânica não está relacionada ao tipo de aprendizagem desenvolvida, seja ela por recepção ou por descoberta. Em sua concepção pode existir aprendizagem por recepção significativa ou mecânica e, da mesma forma, aprendizagem por descoberta significativa ou mecânica (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 20).

"Aprendizagem por recepção e aprendizagem por descoberta, estão no mesmo contínuo que parte da Aprendizagem Significativa ou da aprendizagem mecânica" (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 21).

Para uma melhor compreensão, apresentam-se as quatro situações básicas de aprendizagem combinando os tipos e os processos descritos anteriormente, conforme (LUZ, 2010 p. 19).

- A aprendizagem por recepção, segundo Luz (2010) está dividida em:
  - I. Aprendizagem por Recepção Significativa, onde as tarefas de aprendizagem não pressupõem nenhum tipo de descoberta ou elaboração por parte do aprendiz. Ele apenas recebe o material a ser aprendido de maneira pronta. No entanto ele faz interações substanciais e não arbitrárias com seus subsunçores.
  - II. Aprendizagem por Recepção Mecânica, em que no momento da transmissão do material a ser aprendido o aprendiz não faz interações substanciais entre o novo material e seus subsunçores. Desenvolvendo apenas relações

associativas por semelhanças e literais.

- Aprendizagem por descoberta, também é subdividida, conforme Luz (2010):
    I. Aprendizagem por Descoberta Significativa acontece quando as tarefas de aprendizagem exigem do aprendiz elaboração e descobertas que podem ser autônomas ou orientadas pelas tarefas de aprendizagem. Além disso, o aprendiz faz interações substanciais ente os significados descobertos e seus subsunçores.
    II. Aprendizagem por Descoberta Mecânica é quando mesmo que o Estudante participe das tarefas que o levem a fazer elaborações e descobertas, ele não produz interações substanciais entre as novas descobertas e seus subsunçores.

Essas diversas formas de aprendizagem estão presentes no cotidiano escolar, porém a mais fortemente utilizada é a aprendizagem mecânica, onde professores de diversas áreas de Ensino, ainda apresentam os conteúdos aos seus estudantes, esperando que os mesmos sejam copiados em seus cadernos, para que posteriormente possam ser memorizados e reproduzidos nas avaliações. Contudo esses conteúdos acabam por ser esquecidos, ou seja, "a nova informação é armazenada de maneira arbitrária e literal, não interagindo com aquela já existente na estrutura cognitiva e pouco ou nada contribuindo para sua elaboração e diferenciação" (MOREIRA, 2011).

Uma maneira de organizar esses conteúdos de forma a evitar que a aprendizagem aconteça de forma mecânica são as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS), que auxiliam a prática docente com os pressupostos teóricos. Desta forma, uma UEPS pode ser entendida como uma "sequência didática fundamentada em teorias de aprendizagem, particularmente a da Aprendizagem Significativa" (MOREIRA, 2011).

## 2.2. Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS)

A UEPS, segundo Moreira (2011), é uma sequência de Ensino direcionada à Aprendizagem Significativa de conceitos e tópicos específicos de um ou mais conteúdos escolares. A ideia principal é que os materiais e recursos utilizados estejam voltados a uma Aprendizagem Significativa na perspectiva de David Ausubel.

Essa sequência de Ensino, ou sequência didática compõem situações problematizadoras, apontadas como potencializadoras de aprendizagem, entendidas como um conjunto de atividades planejadas, experimentadas e analisadas que podem constituir meios favoráveis para a aquisição de significados. Zabala (1998) destaca que para compreender o valor educacional de uma sequência didática, e as razões que a justificam, é necessário identificar suas etapas, definindo atividades e as relações que se estabelecem nesse espaço de construção.

Segundo Zabala (1998), uma sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos estudantes.

Conforme Moreira (2011), os princípios relevantes que devem ser considerados para a construção de uma UEPS são:

- O que mais influencia na Aprendizagem Significativa é o conhecimento prévio;
- Quando a aprendizagem é significativa, a integração entre pensamentos, sentimentos e ações é positiva em quem aprende;
- Quem aprende decide se quer aprender significativamente;
- A relação entre os novos conhecimentos e os prévios é revelada pelos organizadores prévios;
- As situações-problema, que são papel do professor criar, dão sentido aos novos conhecimentos, despertam a intencionalidade de quem aprende, podem ser organizadores prévios e devem ser apresentadas em níveis crescentes de complexidade;
- Devem ser consideradas a diferenciação progressiva, a reconciliação integradora e a consolidação;
- A busca de evidências deve ser feita de forma progressiva para avaliação da AS;
- Um episódio de Ensino envolve uma relação entre quem aprende, o professor e materiais educativos, com o objetivo de que o estudante capte e compartilhe significados aceitos;
- O processo de aprendizagem não deve ser mecânico, mas sim significativo e crítico;
- A busca por respostas, o uso de diferentes materiais e estratégias e o abandono da narrativa, estimulam as crítica, considerando assim, o Ensino centrado em quem aprende.

Para uma sequência didática, um segmento deve ser observado na construção de uma UEPS, que Moreira (2011) apresenta como:

1. Definição do tópico específico;
2. Criação e proposta de situações em que o estudante possa expressar seu conhecimento prévio;
3. Proposição de situações-problema em nível introdutório, preparando a introdução do conhecimento que se pretende ensinar;
4. Apresentação de aspectos gerais do conhecimento a ser ensinado, levando em conta a diferenciação progressiva, começando com aspectos mais gerais, com uma visão geral do todo, do que é mais importante na unidade de Ensino, por exemplo: uma exposição oral, seguida de atividade colaborativa em pequenos grupos e complementada com uma atividade de apresentação;
5. Retomada dos aspectos mais gerais e estruturantes em uma nova apresentação em nível mais alto de complexidade;
6. Para conclusão da unidade, retomada das características mais relevantes do conteúdo em questão sob uma perspectiva integradora, em níveis mais altos de complexidade em relação às situações anteriores, buscando a reconciliação integrativa. Isso consiste no fato de relacionar conceitos e apontar similaridades e diferenças relevantes, possibilitando a descrição de uma nova realidade perceptível;
7. Avaliação da aprendizagem dos estudantes;
8. Avaliação da UEPS.

Moreira (2011) também estabelece aspectos transversais na elaboração de uma UEPS, ressaltando:

1. Em todos os passos da construção devem ser utilizados materiais e estratégias de Ensino diversificado. O questionamento, por sua vez, deve ser estimulado e privilegiado em relação às respostas prontas e deve haver estímulo ao diálogo e à crítica, situações-problema propostas ao longo do trabalho; valorização das atividades coletivas e individuais.
2. Em determinadas atividades desenvolvidas ao longo da unidade, pode-se solicitar aos estudantes que proponham situações-problema relativas ao conteúdo em estudo, como tarefa de aprendizagem.
3. Mesmo que a unidade privilegie as atividades colaborativas, as individuais também podem ser consideradas.

Para a construção das UEPS, utilizamos como referencial teórico os Níveis de Conhecimento esperados dos estudantes, de acordo como definidos pela pesquisadora francesa Aline Robert (ROBERT, 1997). A autora apresenta ferramentas de análise epistemológica e didática dos conhecimentos matemáticos que devem ser ensinados no Ensino Fundamental, Médio e na Universidade, levando-se em consideração o trabalho do educador em se adaptar à cada nível de especificidade da Matemática escolhida, os pressupostos cognitivos e didáticos adotados que possibilitarão implementar o conteúdo específico e os tipos de atividades esperadas dos estudantes para o desenvolvimento do conteúdo (ROBERT, 1997, p. 192).

Para que de fato o Estudante experimente uma Aprendizagem Significativa, Ausubel (2003) evidencia que é necessário que os novos conhecimentos venham a interagir com os conhecimentos prévios relevantes na estrutura cognitiva, para isso são necessárias atividades que possam, segundo Robert (1997), referir-se a uma definição ou constatar e estruturar o conhecimento para utilizar essas atividades como subsunçores ou organizadores prévios da aprendizagem. Desta forma, por exemplo, sendo capaz de associar os conhecimentos da Matemática com os da Física, ou seja, oportunizando a criação e aplicação de novas associações e métodos de atividades para as razões trigonométricas.

Fundamentando-se nos referenciais teóricos e nos princípios orientadores supracitados, almejou-se, neste trabalho, elaborar uma UEPS com o tema central “Aprendizagem Significativa da Trigonometria”, abordando os fatores históricos e os conteúdos de Seno, Cosseno e Tangente, tendo em vista a carência deste conteúdo nos estudantes das disciplinas de Cálculo, conforme pesquisa realizada pela autora, Apêndice IV.

Praticamente todos os conteúdos desenvolvidos no Nono ano do Ensino Fundamental, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, BRASIL (2000), servem de base para a aprendizagem dos conteúdos da disciplina de Cálculo Integral e Diferencial, como exemplos desses conteúdos estão à potenciação, radiciação, funções de 1º e 2º grau, equações biquadradas, equações irracionais, sistemas de equações, o estudo do Teorema de Tales, o estudo do Teorema de Pitágoras e a Trigonometria.

Dentre esses conteúdos, a Trigonometria se destaca como sendo a unidade de conhecimento com maior dificuldade de aprendizagem entre os estudantes do ensino superior, referência validada nessa pesquisa, Apêndice IV.

Deste modo, os tópicos a seguir abordarão a Trigonometria, e a importância que a unidade de conhecimento em questão tem para a Aprendizagem Significativa de Cálculo Integral e Diferencial.

## 2.3. Trigonometria

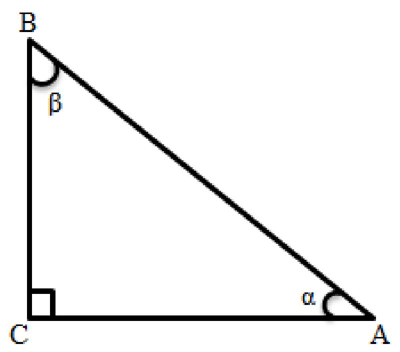
A Trigonometria, segundo Marques (2008 p. 27) “[...] é um vocábulo criado em 1595 pelo matemático alemão Bartholomaus Pitiscus (1561-1613), do grego *trigonon* (triângulo) e *metron* (medida)” e trata-se da parte da Matemática em que se estudam as funções trigonométricas e se estabelecem os métodos de resolução de triângulos.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais, BRASIL (2000), o estudo da Trigonometria é muito importante, se desenvolveu com o intuito de calcular distâncias usando a medida de ângulos como base. Este conteúdo é inicialmente introduzido no Nono ano do Ensino Fundamental, com as relações trigonométricas Seno, Cosseno e Tangente, além do Teorema de Pitágoras. Posteriormente no Ensino Médio estuda-se a lei dos Senos, lei dos Cossenos, a Tangente, a área de um triângulo qualquer, circunferência trigonométrica, entre outros, aprofundando ainda mais o conceito de Trigonometria e sua aplicabilidade.

Segundo Paiva (1995) Seno, Cosseno e Tangente relacionam as medidas dos lados de um triângulo retângulo com as medidas de seus ângulos. São chamados de relações trigonométricas ou razões trigonométricas.

Como essas relações são definidas a partir de um triângulo retângulo, que segundo Paiva (1995) é um polígono que possui três lados, e quando um dos seus ângulos é igual a 90°, ele é chamado de triângulo retângulo, conforme Figura 1.

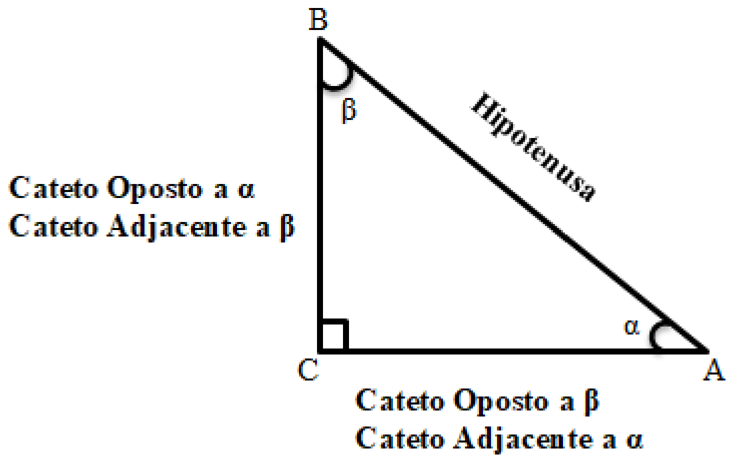
Figura 1 - Triângulo retângulo (ângulo reto)




Fonte: autora

Na Figura 1, o ângulo reto está no vértice C do triângulo, e conforme Paiva (1995), os lados que partem desse vértice são chamados de adjacentes ao ângulo reto e, na Trigonometria, são conhecidos como catetos, e o lado oposto ao ângulo de 90º, que é sempre o maior do triângulo retângulo é chamado de hipotenusa, conforme ilustra a Figura 2.

Figura 2 - Triângulo retângulo e seus catetos




Fonte: autora

A Figura 2 nos demonstra os catetos em relação ao ângulo reto, porém o Seno, o Cosseno e a Tangente sempre será uma razão definida em função de um dos outros dois ângulos.

Assim sendo, o Seno do ângulo α é o nome dado a uma razão entre a medida do cateto oposto α e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Razão é o resultado de uma divisão em que a ordem imposta deve ser respeitada. Desta forma, Seno é o resultado da divisão da medida do cateto oposto pela medida da hipotenusa, como demonstrado na Equação 1 (PAIVA, 1995).

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa} \tag{1}$$

Conforme apresentado na Equação 2, o Cosseno do ângulo α é a razão entre a medida do cateto adjacente a α e a hipotenusa do triângulo retângulo. (PAIVA, 1995).

$$\cos \alpha = \frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa} \tag{2}$$

A Tangente de um ângulo é a única razão que não envolve a medida da hipotenusa. Como podemos observar na Equação 3, a Tangente é dada pela razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente ao ângulo α. (PAIVA, 1995)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente} \tag{3}$$

A aplicação da Trigonometria nas diversas áreas das Ciências Exatas é um fato incontestável. E é dever do professor de Matemática expor isso da maneira mais clara possível ao estudante, pois a Trigonometria não se limita a estudar os triângulos. Sua aplicação se estende a diversos campos da Matemática, como Análise, a Mecânica, a Acústica, a Música, a Topografia, a Engenharia Civil etc. (PAIVA, 2003).

A trigonometria está presente nas mais diversas áreas e as pessoas fazem uso da mesma em situações do cotidiano sem se dar conta. Um exemplo disso, que será fortemente abordado neste trabalho, é a Trigonometria no futebol. A todo o momento, antes do jogo, pensando em esquemas táticos, durante o jogo analisando o melhor ângulo para a trajetória da bola, ou mesmo depois do jogo analisando a distância que a bola percorreu, a Trigonometria está vigorosamente presente em campo.

## 2.4. A Trigonometria e o Cálculo Integral e Diferencial

Os livros de Cálculo Integral e Diferencial costumam conter um capítulo dedicado a explanação de conceitos básicos da Matemática que são abordados no Ensino Fundamental e Médio das escolas brasileiras. A compreensão desses conceitos, e o uso adequado dos mesmos em diversas situações, são condições necessárias para que os estudantes de cursos superiores, da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I consigam compreender conceitos específicos da disciplina, como o de derivada e integral, e possa aplicar esses conceitos na resolução de situações problema relevantes. Contudo, na maioria das vezes que o estudante apresenta dificuldades em resolver um problema de aplicação de limite, derivada ou integral, essa dificuldade não reside no entendimento dos conceitos específicos do cálculo diferencial e integral, mas sim na interpretação do problema, no seu equacionamento, na manipulação de expressões algébricas, ou na utilização de fatores primários de Trigonometria.

As relações entre a Trigonometria e o Cálculo Integral e Diferencial ainda não encontram uma abordagem teórica que possam satisfazer esse entendimento. Baldino et al. (1997) afirmam que não aparecem em livros didáticos propostas sobre as melhores formas de aprender “Pré-Cálculo” no Ensino Fundamental e Médio.

Porém, sendo a Trigonometria um dos conteúdos base para a resolução de Cálculos Integrais e Diferenciais, e a, já demonstrada nessa pesquisa, carência deste conteúdo nos estudantes das disciplinas de Cálculo, é de suma importância que se construa um conhecimento significativo do conteúdo em questão. Este ocorrerá assim que o mesmo for apresentado para o estudante do Nono ano do Ensino Fundamental. Para tanto se deve fazer uso de didáticas adequadas que contemplem melhores desempenhos dos estudantes e consequentemente menor desistência.

Contudo, para que o conteúdo de Trigonometria seja apresentado de uma maneira que desperte o interessante dos estudantes do Nono ano, iniciou-se a presente pesquisa aplicando um questionário para que os mesmos apontassem um passatempo preferido. A grande maioria dos estudantes apontou como sendo o futebol sua grande forma de diversão, por este motivo, buscou-se alternativas de Ensino para que pudéssemos juntar a diversão do futebol com o conteúdo programático em questão.

## 2.5. Trigonometria no futebol

Relacionar conceitos Matemáticos a situações do nosso dia a dia, por diversas vezes torna-se complicado, porém fazer essas relações é de suma importância para que o processo de aprendizagem seja potencialmente significativo.

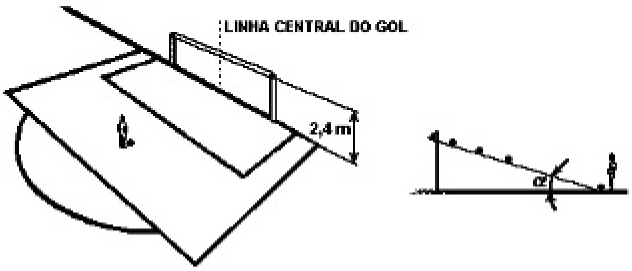
Vasconcelos (2009) afirma que não se pode apresentar a Matemática como uma disciplina fechada, monolítica e abstrata ou fora da realidade. E, por estar ligada diretamente a diversas áreas do conhecimento, a Matemática responde a diversas questões e necessidades, intervindo diretamente na vida do cidadão.

Contudo relacionar a Matemática com tema de interesse do estudante, além de tornar o conhecimento mais prazeroso, fará com que o interesse do mesmo seja otimizado.

No futebol, conhecido por ser a paixão nacional, a Trigonometria está presente muito antes de a bola começar a rolar, a cada jogada, a cada distância percorrida, a cada esquema tático ou até mesmo a cada ângulo pensado, existe a área da Matemática conhecida como Trigonometria.

A Figura 3 apresenta um exemplo de Trigonometria aplicada ao futebol. Nela podemos identificar uma cobrança de falta muito conhecida no futebol chamada pênalti. No pênalti o jogador se posiciona no local marcado para a cobrança da falta, esse local está a uma determinada distância da goleira. Quando o jogador chutar a bola em direção ao gol, em linha reta, sendo ela não rasteira, ela irá forma com o chão um ângulo, sendo possível, dessa forma, através de fórmulas trigonométricas, calcular a distância que a bola percorreu.

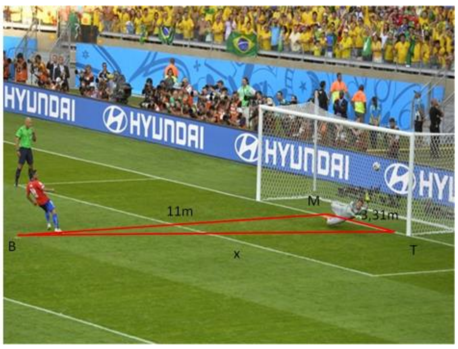
Figura 3 - Ilustração da posição do jogador para a cobrança do pênalti




Fonte: http://professor.bio.br/matematica/comentarios.asp?q=6445&t=Trigonometria

A Trigonometria também pode ser utilizada no evento mostrado na Figura 4, pois quando o jogador chuta a bola, de maneira paralela e rasteira, inicialmente posicionada na marca do pênalti, a mesma faz um ângulo com relação à linha reta imaginária até o goleiro. Com o conhecimento do ângulo formado entre as duas linhas, podemos definir a distância percorrida pela bola através da razão da Tangente. E caso não seja possível estabelecer o ângulo, utilizaremos as medidas dos catetos para o cálculo da distância.

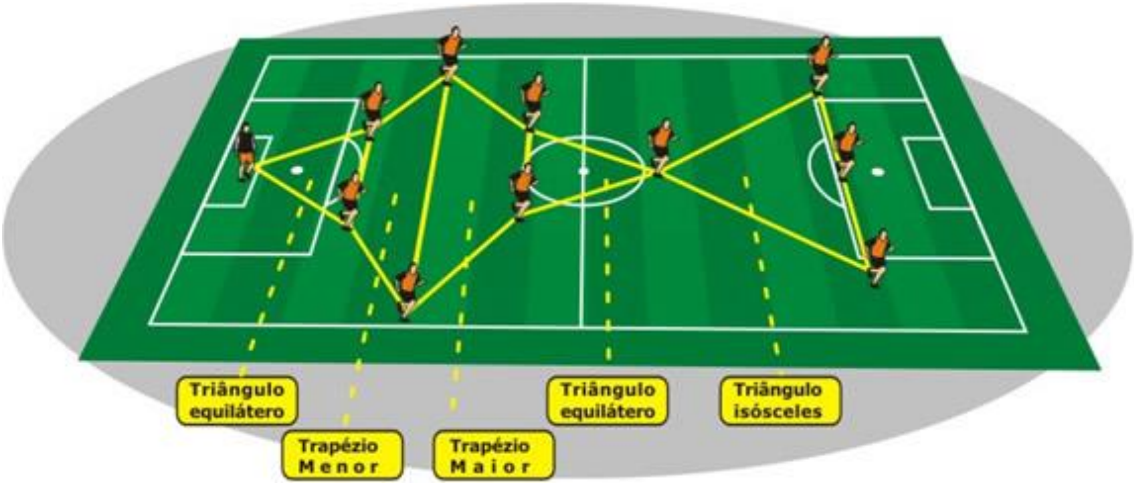
Figura 4 - Cobrança de falta rasteira e paralela e o triângulo retângulo




Fonte: http://trigonoblog.blogspot.com/2014/07/Trigonometria-na-cobranca-de-penalti.html

Outro exemplo do uso da Trigonometria no futebol está no uso dos Esquemas Táticos, que são as formas de um treinador organizar sua equipe dentro de campo. Para formular um esquema tático é estudada a posição mais favorável de cada jogador em campo, tanto para o ataque quanto para a defesa, e calculada utilizando fórmulas geométricas trigonométricas, a distância entre cada jogador e os ângulos formados por eles, conforme demonstrado na Figura 5.

Figura 5 - Esquema tático de um jogo de futebol




Fonte: http://www.pedagogia.com.br/artigos/geometriafutebol/index.php?pagina=6

Por isso a decisão da proposta de ensinar Trigonometria através do futebol vem fundamentada nas dificuldades encontradas por professores e estudantes no Ensino e aprendizagem do referido tema.

Estes exemplos sugerem que o uso do futebol para a compreensão da trigonometria pode ser uma importante ferramenta para inovar o ensino da Matemática, no sentido proposto por Kammi (1995) e construir subsunçores que facilitem a compreensão do cálculo diferencial e integral.

### 2.6. O Ensino de Trigonometria, o Cálculo e a Teoria de Ausubel

Assim como a maioria dos conteúdos matemáticos estudados, a Trigonometria surge para suprir necessidades práticas. A mesma vem sendo desenvolvida em diversos momentos da história, através de Teoremas e razões entre lados de triângulos.

Atualmente a Trigonometria pode ser pensada como o estudo das funções que apresentam gráficos com períodos, que representam fenômenos com padrões repetitivos, como uma grande parte dos fenômenos da natureza, esses gráficos também são muito utilizados na indústria, comércio e no sistema financeiro.

Este avanço da Trigonometria como estudo das funções periódicas feito no Ensino

Médio envolve o estudo de vibrações, calor, fenômeno de transporte, corrente elétrica, campos eletromagnéticos, entre outros, que podem ser estudados por series infinitas envolvendo Senos e Cossenos.

Contudo, para que essas funções sejam estudadas de forma expressiva, é necessário que os conhecimentos prévios de Seno, Cosseno e Tangente, dos estudantes, tenham sido abordados de forma a ter ocorrido uma Aprendizagem Significativa. Caso contrário, sem os conceitos básicos da Trigonometria, abordados no Nono ano do Ensino Fundamental, haverá dificuldades para adquirir esses novos conceitos trigonométricos.

As questões relativas às dificuldades de aprendizagem na Matemática são reforçadas nas referências de Brito e Morey (2004), que apresentam estudos com professores de redes públicas, que enfatizam as dificuldades que eles encontram ao ensinar Trigonometria para estudantes que não possuem subsunçores relativos a geometria. E é essa a ideia central da teoria de Ausubel, utilizar o conhecimento já obtido pelo estudante para fazer um *link* com o novo conhecimento.

Como já foi destacado anteriomente, para Ausubel (1962, p. 20), o fato isolado mais importante na aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece.

Por isso, é indispensável se empregar em sala de aula estratégias e métodos de Ensino que possibilitem uma aprendizagem com significado para o estudante, onde o mesmo se sinta motivado a participar ativamente do processo de Ensino aprendizagem, construindo, desta forma, seu próprio conhecimento.

Porém para que consigamos formar cidadãos críticos, criativos e transformadores do seu próprio conhecimento, faz-se necessário que o professor seja detentor do conhecimento, pois "um dos ingredientes da personalidade do educador que ressalta aos olhos de suas plateias consiste no fato de ele ser uma criatura verdadeira e consistente, saber sobre o que está falando e acreditar no que está dizendo" (GIKOVATE, 2001, p. 78).

O professor necessita possuir qualidades tais como: desejo de ensinar, competência profissional, compreensão da realidade com a qual trabalha e competência no campo teórico de conhecimento específico em que atua, para que desta forma consiga estimular o estudante a buscar o conhecimento, acreditando no seu educador. Rocha (2003) afirma que professores que passaram há muitos anos pelos cursos de graduação e que não tiveram cursos de requalificação não se sentem à vontade na aplicação de técnicas modernas de Ensino, como a etnoMatemática e resolução de problemas contextualizados.

Professores desmotivados ou não seguros, não conseguem formar estudantes capazes de construir seus próprios conhecimentos, pois não serão eficazes ao mostrar o caminho aos seus orientandos.

Para Masini (2011), a Aprendizagem Significativa de David Ausubel é uma teoria cognitivista e construtivista sobre o processo de aquisição do conhecimento, que é concebida como processo de compreensão, reflexão e atribuição de significados do sujeito, em interação com o meio social, ao constituir a cultura e por ela ser constituído. Assim busca-se, propor uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) como metodologia de Ensino apoiada na teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, para o Ensino da Trigonometria Básica.

Fazendo uso dos conhecimentos prévios dos estudantes sobre futebol, que Ausubel define como "subsunçores", ensinar Trigonometria através do jogo de futebol torna-se mais prazeroso e eficaz, despertando o interesse do Estudante.

Nos PCNs encontramos suporte para a introdução de jogos no processo de Ensino e aprendizagem: "Por meio dos jogos as crianças não apenas vivenciam situações que se repetem, também aprendem a lidar com símbolos e a pensar por analogia. Ao criarem essas analogias, tornam-se produtoras de linguagens, criadoras de convenções, capacitando-se para se submeterem a regras e dar explicações." (BRASIL, 2000).

Quando o estudante aprende a aprender, capacitando-se a questionar, a aprendizagem torna-se considerável, pois só é capaz de fazer questionamentos quem for capaz de refletir sobre o assunto em questão.

Perrenoud (2000) acredita que mesmo com a diversidade de recursos pedagógicos existentes o educador localiza nos jogos instrumentos de grande relevância. Afirma que a maioria das pessoas interessa-se, em alguns momentos, pelo jogo da aprendizagem, que lhes oferecem situações abertas, estimulantes, interessantes. Há maneiras mais lúdicas do que outras de se propor a mesma tarefa cognitiva. Conforme Perrenoud: não é necessário que o trabalho pareça uma *via crucis*; pode-se aprender rindo, brincando, tendo prazer.

Há necessidade de repensar a ação docente no contexto da sala de aula, nos aspectos teóricos - metodológicos com intenção de propor um material de apoio, que permita tornar o Ensino de Trigonometria, significativo, interessante e capaz de ser constatado, conforme a aprendizagem Ausubiana defende.

A Avaliação também deve ser repensada na ação docente. Os mapas conceituais, que também são utilizados como método de avaliação, e defendidos por Moreira (2012), é uma estratégia facilitadora da aprendizagem potencialmente significativa.

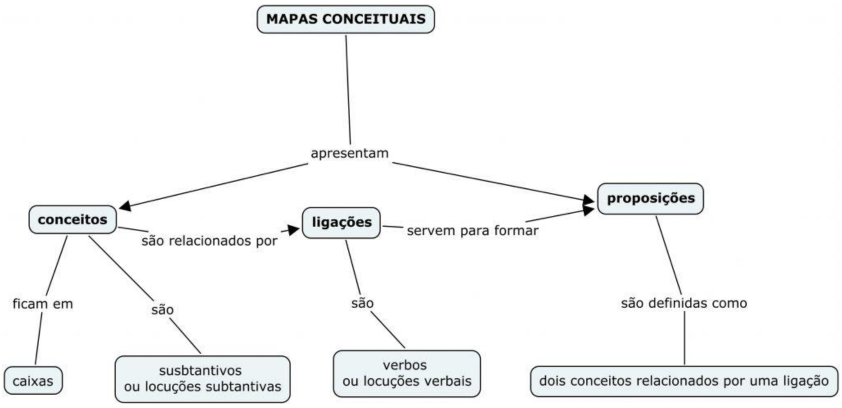
### 2.7. Modelos de avaliação: Mapas Conceituais

Segundo Moreira (2012), "mapas conceituais são diagramas de significados, de relações significativas; de hierarquias conceituais, se for o caso. Mapas conceituais não buscam classificar conceitos, mas sim relacioná-los e hierarquizá-los.”

Mapa Conceitual é uma estratégia potencialmente facilitadora da Aprendizagem Significativa. Também é uma técnica muito flexível e em razão disso pode ser usado em diversas situações, para diferentes finalidades: como instrumento de análise do currículo, técnica didática, recurso de aprendizagem e avaliação (MOREIRA; BUCHWEITZ, 1993).

Na Figura 6 apresentamos um exemplo simples de mapa conceitual. Nele encontramos diversas palavras chaves de ligações que auxiliam na formação do conceito de mapa conceitual.

Figura 6 - Mapa conceitual




Fonte: http://www.antigomoodle.ufba.br/mod/book/view.php?id=74558

A ferramenta mapas conceituais foi elaborada pelo educador americano Joseph Donald Novak e tem por objetivo:

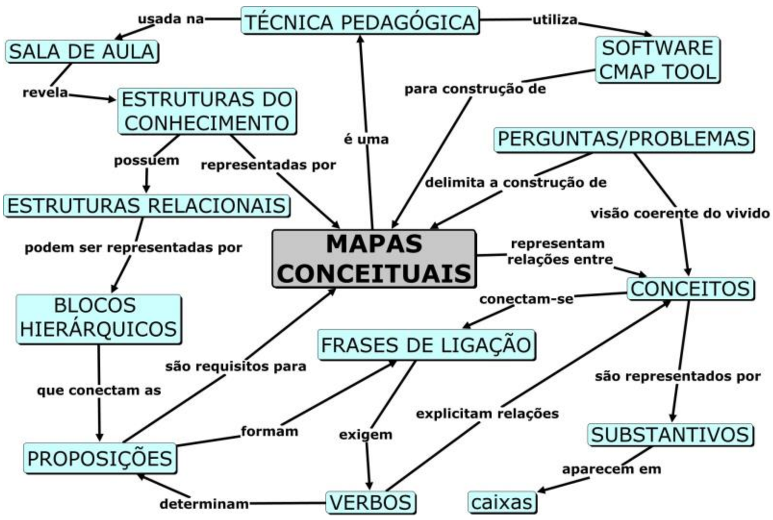
> representar relações significativas entre conceitos na forma de proposições. Uma proposição consiste em dois ou mais termos conceituais ligados por palavras de modo a formar uma unidade semântica. Na sua forma mais simples, um mapa de conceitos consta apenas de dois conceitos unidos por uma palavra de ligação de modo a formar uma proposição (NOVAK, 1984. p. 31).

Trata-se de uma ferramenta para auxiliar os estudantes e também os professores na busca de ideias centrais que representem um conjunto de significados numa estrutura de proposições no qual se inclui o conceito a ser adquirido.

É necessário que se busque evidências de que a Aprendizagem Significativa de fato tenha ocorrido. O Mapa conceitual é uma boa forma de avaliação, devendo-se considerar que a avaliação é um processo progressivo e que não ocorre apenas ao final da aplicação da UEPS (MOREIRA, 2011). Contudo, o papel do professor é o de mediador dessa avaliação, focado na captação de significados, sempre visando à aprendizagem não mecânica, e, consequentemente, tendo a possibilidade de êxito na ocorrência da Aprendizagem Significativa (MOREIRA, 2011).

O exemplo da Figura 7 apresenta um mapa conceitual explicativo muito mais enriquecido, composto por diversas palavras chaves e ligações que engrandecem o conceito de mapa conceitual.

Figura 7- Mapa Conceitual




Fonte:http://cursoonlineinformaticaprofessores.pbworks.com/w/page/45700860/MAPAS%20CONCEITUAIS%20_%20QUARTA%20AULA

O autor ainda afirma que é evidente a potencialidade de mapas conceituais como estratégia que favorece a Aprendizagem Significativa em situação formal de Ensino, como instrumento de avaliação da aprendizagem e de análise do conteúdo curricular.

Mapa Conceitual como instrumento de avaliação da aprendizagem deve ser utilizado para uma visualização da organização conceitual que o estudante impõe a um determinado conhecimento. Refere-se a uma técnica não tradicional de avaliação que rastreia informações e significados entre ponto primordial do conteúdo ensinado segundo a observação e entendimento do estudante. E o mais importante, não é a correção do certo ou errado, mas há nele evidencias de que o estudante está adquirindo o conhecimento de forma significativa. A técnica adotada para a análise dos mapas conceituais é a Taxonomia Topológica (MOREIRA, 2011).

*2.7.1. Análise dos Mapas Conceituais: Taxonomia Topológica*

Para a análise dos mapas conceituais, optou-se pela adoção da taxonomia topológica elaborada por Cañas et al. (2006) e Miller (2008), utilizada e validada pelo Projeto Conéctate al Conocimiento (MILLER, 2008).

A Taxonomia Topológica expõe uma maneira de classificar e avaliar estruturalmente a heterogeneidade de mapas conceituais através do uso de parâmetros comuns que viabilizem a aferição de avanços no processo de construção de mapas.

Segundo Cañas et al. (2006), essa taxonomia foi criada “[...] para servir como apoio na consecução dos objetivo específicos do projeto e como um instrumento de investigação [...]” .

Para isso, os autores Cañas et al. (2006) e Miller (2008) consideraram a taxonomia topologia como sendo composta por cinco critérios:

- ✓ Conceitos;
- ✓ Termos de ligação e relação entre conceitos;
- ✓ Grau de ramificações;
- ✓ Profundidade hierárquica;
- ✓ Ligações cruzadas.

Critérios esses avaliados em um nível de 0 a 6, onde 0 (zero) é o mais simples e 6 é o mais elaborado, conforme apresentado por Cañas et al. (2006) e Miller (2008).

Taxonomia topológica de mapas conceituais, Cañas et al. (2006) e Miller (2008):

- **Nível 0:**

a) Textos predominam sobre conceitos;
b) Não há frases de ligação;
c) A estrutura é linear (0-1 pontos de ramificação).

- **Nível 1:**

a) Conceitos predominam sobre textos;
b) Faltam metade ou mais das frases de ligação;
c) A estrutura é linear (0-1 pontos de ramificação).

- **Nível 2:**

a) Conceitos predominam sobre textos;
b) Faltam menos da metade das frases de ligação;
c) Há poucas ramificações (2 pontos).

- **Nível 3:**

a) Não há textos;
b) Não faltam frases de ligação;
c) O nível de ramificações é intermediário (3-4 pontos);
d) Há menos de três níveis hierárquicos.

- **Nível 4:**

a) Não há textos;

b) Não faltam frases de ligação;

c) O nível de ramificações é alto (5-6 pontos);

d) Há três ou mais níveis hierárquicos.

- **Nível 5:**

a) Não há textos;

b) Não faltam frases de ligação;

c) O nível de ramificações é alto (5-6 pontos);

d) Há três ou mais níveis hierárquicos;

e) Há 1 ou 2 links cruzados.

- **Nível 6:**

a) Não há textos;

b) Não faltam frases de ligação;

c) O nível de ramificações é muito alto (7 ou mais pontos);

d) Há três ou mais níveis hierárquicos;

e) Há mais de 2 links cruzados.

Considerando os critérios da taxonomia topológica, faremos a análise dos mapas conceituais, dando importância a conceitos, grau de ramificações, profundidade hierárquica e ligações cruzadas, classificando os mesmos através dos níveis propostos por Novak e Cañas (2006).

# 3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesse capítulo apresentaremos o delineamento da pesquisa e o percurso metodológico, elucidando o contexto da pesquisa, bem como o planejamento e desenvolvimento dos procedimentos e os instrumentos de coletas de dados.

## 3.1. Planejamento da pesquisa

Essa é uma pesquisa científica que, segundo Barros e Lehfeld (2001) refere-se à pesquisa como sendo a inquisição, o procedimento sistemático e intensivo, que tem por objetivo descobrir e interpretar os fatos que estão inseridos em uma determinada realidade. Quanto à abordagem é qualitativa, pois, conforme Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (1998), a pesquisa não se preocupa com a representatividade numérica e sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização. A pesquisa qualitativa preocupa-se com aspectos da realidade que não podem ser quantificados.

É de natureza aplicada com a pretensão de gerar conhecimentos para a aplicação prática, dirigidos à solução de problemas específicos, com objetivo descritivo e explicativo. Descritivo, pois pretende descrever os fatos e fenômenos da realidade em questão, porém conforme TRIVIÑOS (1987), os estudos descritivos podem ser criticados porque pode existir uma descrição exata dos fenômenos e dos fatos, fugindo da possibilidade de verificação através da observação. Às vezes não existe por parte do investigador um exame crítico das informações, e os resultados podem ser equivocados; e as técnicas de coleta de dados, como questionários, escalas e entrevistas, podem ser subjetivas, apenas quantificáveis, gerando imprecisão (TRIVIÑOS, 1987).

A objetividade Explicativa se dá pela preocupação em identificar os fatores que determinam ou contribuem para a ocorrência dos fenômenos (GIL, 2007). Busca-se explicar o porquê das coisas através dos resultados expostos. Segundo Gil (2007), uma pesquisa explicativa pode ser a continuação de outra descritiva, posto que a identificação de fatores que determinam um fenômeno exige que este esteja suficientemente descrito e detalhado.

De acordo com Fonseca (2002), a pesquisa possibilita uma aproximação e um entendimento da realidade a investigar, como um processo permanentemente inacabado. Ela se processa através de aproximações sucessivas da realidade, fornecendo subsídios para uma intervenção no real. Por isso, para o desenvolvimento dessa pesquisa os métodos de procedimentos bibliográficos são pesquisas bibliográficas, pesquisas de campo e pesquisas de levantamento.

> A pesquisa bibliográfica é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. (FONSECA, 2002)

Já pesquisa de campo caracteriza-se pelas investigações em que, além da pesquisa bibliográfica e/ou documental, se realiza coleta de dados junto a pessoas, com o recurso de diferentes tipos de instrumentos de pesquisa (FONSECA, 2002).

Na pesquisa de levantamento, obtemos o conhecimento direto da realidade, com a aquisição de dados em tabelas, possibilitando uma análise estatística produtiva.

As Técnicas e instrumentos para a execução da pesquisa inicial foram observações de aulas e questionários com estudantes, monitores e professores das disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial. Esta primeira investigação fez o levantamento de dados que justificou a pesquisa principal, que consiste em propor uma UEPS para o Ensino de um conteúdo estruturantes da área da Matemática no Ensino Fundamental, conteúdo este, apontado na pesquisa inicial.

A verificação de ocorrência de aprendizagem significativa ocorreu através dos mapas conceituais elaborados pelos estudantes, anteriormente, durante e após o desenvolvimento da UEPS.

## 3.2. Percurso Metodológico

A pesquisa em questão propõe uma UEPS para o Ensino de um dos conteúdos estruturantes da área da Matemática no Ensino Fundamental ou Médio, que são identificados como os conteúdos que comprometem o aprendizado em Cálculo Integral e Diferencial. Este tema foi selecionado em virtude do número expressivo de desistência ou reprovação de estudantes que ocorre no ensino superior em disciplinas da área das exatas, sobretudo nas disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial, cerca de 70%, conforme estudos realizados por Masetto (1992), Barbosa e Neto (1995) e Morellatti (2001). Neste projeto de pesquisa, a proposta de investigação desse tema, também é alavancada pela confirmação desse alto índice de reprovação e da falta de conhecimento sobre o próprio tema matemático junto à comunidade acadêmica.

O desenvolvimento Metodológico, no contexto desta pesquisa, encontra-se dividido em Pesquisa Inicial e Projeto Principal. Essa separação tem como objetivo melhor identificar os diferentes cenários e sujeitos que contribuíram para a realização desta investigação.

### *3.2.1. Pesquisa Inicial: Investigação do Problema Principal*

O problema principal abordado nesta dissertação refere-se à aplicação de uma proposta metodológica que evidencie a Aprendizagem Significativa sobre conteúdos da área de Matemática desenvolvidos no Ensino Fundamental e que servem como base de conhecimento para disciplinas de Cálculo Integral Diferencial no ensino superior.

Inicialmente foi realizado um trabalho de investigação, buscando respostas às nossas perguntas, por meio de questionários, aplicados a professores que ministram aulas nas disciplinas de Cálculo, estudantes e monitores das mesmas, em uma universidade comunitária da serra gaúcha, com o intuito de descobrir quais os conteúdos estruturantes da Matemática, estudados no Ensino Fundamental e Médio, que servem como base para o entendimento e aprendizado das disciplinas em questão.

Um questionário preliminar foi elaborado e aplicado a estudantes e professores de Engenharia e Matemática, conforme APÊNDICE I. No entanto, se mostrou insuficiente para suprir as necessidades que tínhamos em levantarmos os conteúdos estruturantes da Matemática para aprendizagem de Cálculo, nos quais os estudantes apresentam carência.

Conforme APÊNDICE II, onde se apresenta a compilação das respostas a este questionário, pode-se perceber que os próprios estudantes não conseguem citar quais conteúdos da Matemática eles têm mais dificuldades, utilizando-se de termos como “Matemática básica”, para identificar os conteúdos que possuem dificuldades. Por parte dos professores também não foi obtido o resultado esperado, pois acabaram não apontando com precisão os conteúdos que os estudantes não possuem domínio, causadores do insucesso da aprendizagem de Cálculo. Os monitores das disciplinas em questão mostraram-se um pouco mais precisos, apontando as principais dificuldades dos estudantes que procuram a monitoria. Foram citados conteúdos como Trigonometria, Fatoração e Polinômios, porém afirmam que os estudantes só procuram ajuda para a resolução de exercícios. Desta forma, o questionário foi reestruturado e reaplicado a um novo grupo de professores, estudantes e monitores.

O novo questionário (APÊNDICE III) foi organizado com perguntas mais objetivas sobre o conteúdo de Cálculo. O mesmo foi aplicado a cinco turmas da disciplina de Cálculo 1, com uma média de 55 estudantes por turma, nas cidades de Bento Gonçalves e Caxias do Sul.

Juntamente com os estudantes, 3 professores que ministram a disciplina e 2 monitores da mesma, responderam ao questionário.

O resultado desta investigação (APÊNDICE IV) mostrou que, quanto ao perfil dos estudantes que participaram da resolução do questionário, a faixa etária dos pesquisados é de 18 a 34 anos, porém sua grande maioria concentra-se entre 20 e 26 anos. Dentre os mesmos, 96% afirmam ter estudado em escolas públicas, e apenas 8% finalizou o Ensino Médio a mais de dois anos.

A partir deste levantamento de dados preliminar, foi possível diagnosticar (APÊNDICE IV) que a maior parte dos estudantes trabalha todo o período diurno. Ainda que sejam assíduos às aulas, os estudantes encontram-se cansados, o que afeta diretamente a aprendizagem. O trabalho também é o principal motivo de os estudantes não terem tempo de se dedicarem aos estudos fora da sala de aula, e quando conseguem, esse tempo não é muito significativo, pois não ultrapassam três horas semanais. As ajudas para esses estudos extraclasses, em sua grande maioria, são obtidas através da *internet*. Há poucos relatos de busca de ajuda com monitores, com exceção aos dias que antecedem as provas.

Um fator que identificamos é que os estudantes que retomaram os estudos após longos períodos sem estudar, apresentam maior dificuldade na Matemática básica. Outro levantamento importante que obtivemos é que, em sua totalidade as aulas de Cálculo são somente expositivas e a forma de avaliação, também em sua totalidade não foge da tradicional prova.

Dentre as diversas constatações de relevância, encontra-se também o questionamento em relação aos conteúdos que os estudantes apresentavam dificuldades. Por se tratar de uma questão com opção de três respostas, obtivemos como resposta com maior percentual, o conteúdo de Trigonometria com 63%, seguido do conteúdo Logaritmo com 59%.

Nesta pesquisa inicial foi constatado que o conteúdo de Trigonometria apresentou maior dificuldade de compreensão junto aos estudantes. Este entendimento gerou o tema escolhido para o desenvolvimento de uma UEPS visando à aprendizagem potencialmente significativa.

A formatação da UEPS foi projetada a partir de uma nova etapa investigativa junto aos estudantes do Nono ano do ensino Fundamental, e que será descrita na próxima seção.

### *3.2.2. Projeto Principal: Desenvolvimento da UEPS*

O projeto principal consistiu na aplicação de uma UPES para o Ensino de Trigonometria, por ser um conteúdo estruturante da área da Matemática no Ensino Fundamental.

Bicudo e Chamie (1994) investigando dizeres dos estudantes relatam depoimentos de estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Como exemplo tem-se: “O que eu acho ruim na Matemática são as fórmulas que temos que decorar (Seno, Cosseno, área, delta etc.) muitas vezes sem entender como esta fórmula foi feita...”. Essas afirmativas nos fazem refletir sobre o olhar dos educandos sobre a Matemática, em especial a Trigonometria, que conforme pesquisa realizada pela autora, e já demonstrada neste trabalho, é o conteúdo que mais tem afetado o desenvolvimento dos estudantes das disciplinas de Cálculos, nos cursos superiores.

*3.2.2.1. Sujeitos e contextualização da Pesquisa*

A única turma de Nono ano, na qual foi realizada a pesquisa, é composta por 12 meninas e 18 meninos, com idades entre 14 e 17 anos, contando com somente um Estudante que está repetindo o Nono ano.

A escola está localizada em uma zona periférica da cidade, e as famílias dos estudantes frequentadores da mesma, classificados, segundo levantamento feito pela própria escola, como sendo de baixa renda.

O Ambiente escolar, palco da pesquisa e aplicação da proposta, é construído entre professores, estudantes e comunidade escolar é constituído de um agradável recinto. Em sala de aula é que todos passam a maior parte do tempo, e os estudos demonstram que os comportamentos definidos como adequados para este ambiente, são limitados, já que são diferentes entre si e de necessidades diferenciadas. No entanto, cabe aos professores, promoverem a harmonia do ambiente, bem como proporcionar o rendimento esperado por todos os elementos da turma, com suas diferenças, oferecendo atenção de forma individualizada.

Os relacionamentos interpessoais construídos na escola, contam, para aumentar a probabilidade de os estudantes terem um bom desempenho, no que diz respeito às metas a atingir na aprendizagem escolar (TONELOTTO, 2002).

Para conseguir um bom ambiente escolar, faz-se necessário ter presunção de diferentes aptidões como a capacidade tanto dos estudantes como dos professores, para se relacionarem de forma positiva, mas também, dos próprios estudantes entre si (TONELOTTO, 2002).

Na tentativa de buscar alternativas metodológicas que despertem o interesse dos estudantes em aprender Matemática, em especial Trigonometria, foi realizado uma pesquisa, no segundo trimestre do ano de 2018, com os estudantes do Nono ano de uma escola estadual de Ensino Fundamental na Cidade de Bento Gonçalves-RS, com a finalidade de descobrirmos o que de fato desperta o interesse dos mesmos.

A escola em questão está situada em uma zona periférica da cidade de Bento Gonçalves, e possui cerca de 250 estudantes matriculados do Primeiro ao Nono ano do Ensino Fundamental. Ela é composta por sete salas de aulas, uma sala de informática, 2 banheiros, uma secretaria, uma sala de recursos, uma pequena biblioteca, uma sala dos professores e uma cozinha, não possuindo refeitório e nem ginásio de esportes. As aulas de Educação Física são ministradas em uma quadra com piso em concreto alisado, e em dias de chuva em uma pequena área coberta.

A única turma de Nono ano, na qual foi realizada a pesquisa, é composta por 12 meninas e 18 meninos, com idades entre 14 e 17 anos.

### *3.2.2.2. Metodologia Aplicada a esta Pesquisa*

Após o primeiro trabalho de investigação, foi possível constatar que a Trigonometria que é um dos conteúdos estruturantes da Matemática, estudado no Ensino fundamental, serve também como base para o entendimento e aprendizado da disciplina Cálculo Integral e Diferencial. Desta forma, após diversas pesquisas literárias, vários anos de experiência da autora desta pesquisa em sala de aula, constatou-se que o estudante aprende melhor quando o conteúdo em questão está relacionado a algo do seu interesse.

Quanto ao processo de Ensino e de aprendizagem de Matemática, Bicudo e Garnica (2001), afirmam que o mesmo envolve vários elementos: práticas, conceitos, abordagens e tendências e exigem um tratamento teórico que lhe serve de base. Desta forma, o Ensino da Matemática não se pode fundamentar apenas nas teorias; deve-se criar novas formas de ensinar no decorrer do tempo e evoluir objetivamente na direção do conhecimento construtivo.

Por diversas vezes o professor encontra dificuldades para despertar o interesse do estudante para a Matemática, estando o mesmo disputando com um mundo virtual cheio de atrativos para distrair o adolescente. Parra (1993, p. 11) afirma:

> O mundo atual é rapidamente mutável, a escola como os educadores devem estar em continuo estado de alerta para adaptar-se ao Ensino, seja em conteúdos como a metodologia, a evolução dessas mudanças que afetam tantas condições materiais de vida como do espírito com que os indivíduos se adaptam a tais mudanças. Em caso contrário, se a escola e os educadores descuidarem e se manterem estáticos ou com movimento vagaroso em comparação com a velocidade externa, origina-se um afastamento entre a escola e a realidade ambiental, que faz com que os estudantes se sintam pouco atraídos pelas atividades de aula e busquem adquirir por meio de uma educação informal os conhecimentos que consideram necessários para compreender a sua maneira no mundo externo.

Por isso, na tentativa de buscar alternativas metodológicas capazes de despertar o interesse dos estudantes em aprender Matemática, em especial Trigonometria, aplicou-se um questionário no Nono ano, buscando conhecer melhor os passatempos preferidos dos mesmos, conforme Apêndice V.

Neste questionário propomos tendenciosamente a música e a dança como passatempo preferido, pois acreditávamos que esse fosse ser o escolhido pela maioria dos estudantes, porém, após analisarmos as respostas do questionário, conforme Apêndice VI, constatamos que o tema selecionado como sendo o passatempo preferido dos estudantes foi o Futebol.

Desta forma, a realização desta pesquisa nos trouxe a informação necessária para que pudéssemos transformar o conhecimento em Trigonometria interessante para os estudantes. A ideia de ensinar Trigonometria jogando futebol surgiu através dos relatos de interesses pessoais dos mesmos, visto que, a turma em questão possui um time masculino e um feminino de futebol.

De posse do conteúdo programático, a Trigonometria, e do passatempo preferido dos estudantes, o futebol, deu-se inicio a construção de uma UEPS com o tema central “Aprendizagem Significativa da Trigonometria”.

*3.2.2.2.1Planejamento das UEPS*

Esta seção contempla a descrição do planejamento da UEPS que foi organizadas em forma de planos de Ensino, salientando que na seção 5.4 é descrita a sua execução em detalhes.

Segundo Moreira (2011), Unidades de Ensino Potencialmente Significativas são sequências de Ensino fundamentadas na Teoria da Aprendizagem Significativa, portanto não mecânica, que tem como objetivo desenvolver unidades de Ensino na busca de Aprendizagem Significativa. Na elaboração da UEPS adaptamos pelos aspectos sequenciais estabelecidos por Moreira (2011), e os formatamos para que se apresentassem adequados a esta pesquisa. A seguir listamos a sequência lógica das atividades propostas.

1. Apresentamos aos estudantes os conceitos de mapa conceitual, bem como sua utilização e construção de um mapa conceitual.
2. Utilizamos situações que possibilitassem identificar os conhecimentos prévios já existentes na estrutura cognitiva do Estudante e supostamente relevantes para a Aprendizagem Significativa do tema, partindo de discussões, questionários e situações-problema.
3. Aplicamos situações-problema relacionadas aos conhecimentos prévios dos estudantes, de forma a prepará-los para a introdução do conhecimento sobre o

tema.

4. Definimos os conceitos de Seno, Cosseno e Tangente de forma tradicional;
5. Solicitamos a confecção de novo um mapa conceitual sobre Seno, Cosseno e Tangente.
6. Aplicamos situações-problema relacionadas ao futebol e que utiliza as fórmulas trigonométricas para sua resolução.
7. Empregamos situações-problemas de forma prática, para que o Estudante seja capaz de vivenciar a utilização das fórmulas trigonométricas no jogo de futebol.
8. Construímos os mapa conceitual sobre Seno, Cosseno e Tangente e suas aplicações.

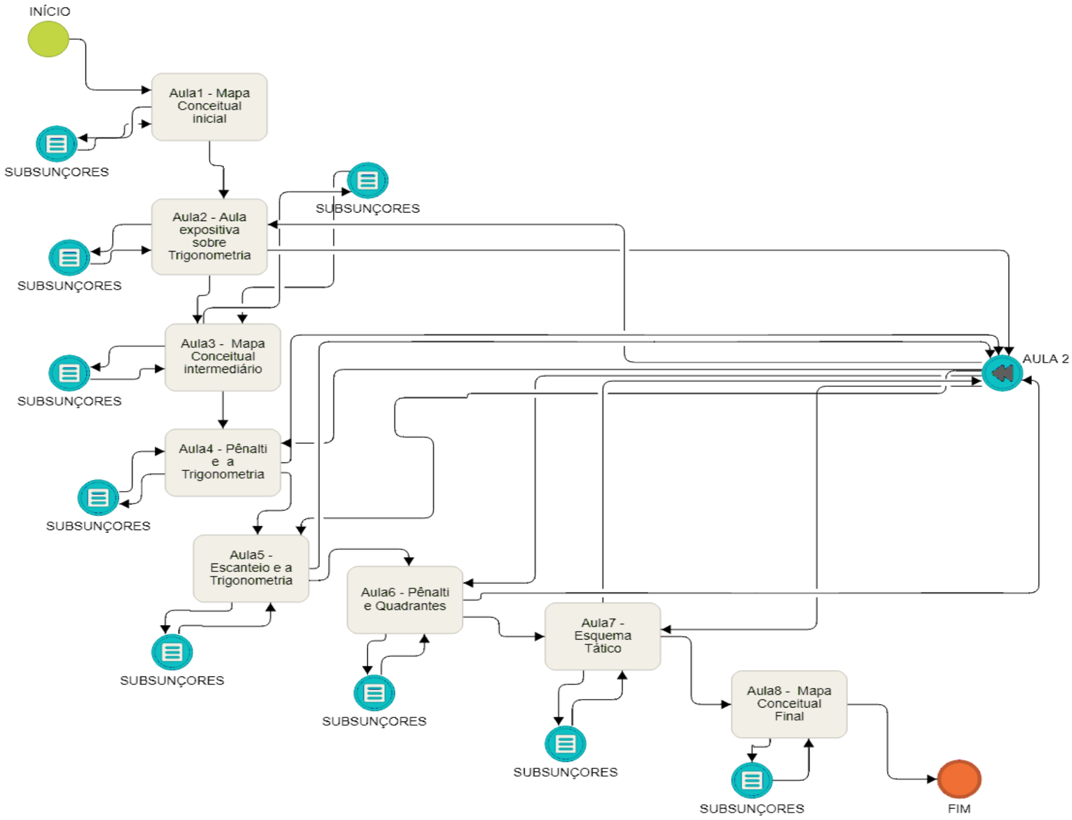
Desta forma foram relacionados objetos, elementos e situações das razões trigonométricas com a finalidade de despertar a curiosidade do Estudante, buscando uma interação das concepções prévias com o tema. Essas questões foram propostas para possibilitar a integração através de estratégias colaborativas que levassem o Estudante a relacionar-se, negociando significados, tendo o professor como mediador.

### 3.3. Descrição das Etapas e aplicação da UEPS

Nesta seção, estão descritas as atividades realizadas em cada uma das etapas de aplicação da UEPS com o tema central "Aprendizagem Significativa da Trigonometria", conforme diagrama de blocos[2] apresentado na Figura 7.

[2] Os diagramas de blocos utilizam símbolos adaptados por essa pesquisadora, conforme Apêndice XVIII

Figura 7 - Diagrama da UEPS “Aprendizagem Significativa da Trigonometria”




Fonte: autora

## Aula 1 – Mapa Conceitual Inicial

Nesta primeira aula foram apresentado aos estudantes os conceitos, exemplos e dicas de construção de Mapa Conceitual. Logo após, foi solicitado que os mesmos, em grupos construíssem um mapa sobre um tema de livre escolha, mas com os conhecimentos que possuíssem naquele momento. Posteriormente, após pesquisa na *internet* sobre o tema selecionado anteriormente, o mesmo grupo fez e apresentou para a turma, um novo mapa conceitual, evidenciando desta forma o crescimento do mapa conceitual final, em comparação com o inicial.

Ainda neste primeiro encontro, foi solicitado aos estudantes que, individualmente elaborassem um mapa conceitual sobre a Trigonometria. Para o desenvolvimento do trabalho, os estudantes receberam orientações para refletirem sobre o contexto da Trigonometria, para que desta forma mostrassem os conhecimentos que tinham sobre o assunto, ou seja, para que fosse possível analisar quais eram os subsunçores dos estudantes.

## Aula 2 – Introdução a Trigonometria

Iniciamos nossa segunda aula com perguntas com o intuito de despertar o interesse dos estudantes pelo conteúdo. Logo após prosseguimos demonstrando que desde a antiguidade já se utilizava a Trigonometria, com algumas aplicações, para posteriormente seguirmos com as definições. Fizemos ainda, algumas revisões importantes que serviram de pré-requisitos para a aprendizagem de Trigonometria.

O objetivo desde plano de aula foi o Ensino da Trigonometria no triângulo retângulo, onde se introduziu os conceitos das razões trigonométricas, Seno, Cosseno e Tangente, de forma tradicional. Este plano de aula foi dividido em duas partes, sendo o tempo para a primeira aula de quatro períodos e a segunda aula de dois períodos, sendo cada período de 55 minutos. Na primeira aula, foram apresentadas as definições e alguns exemplos. Na segunda aula, foram apresentados exemplos do cotidiano dos estudantes para que possam compreender melhor a matéria.

**Aula 3 - Mapa Conceitual Intermediário**

Após o Ensino da Trigonometria de forma tradicional, com conceitos e fórmulas prontas, solicitamos aos estudantes que, individualmente, elaborassem um novo Mapa Conceitual sobre Trigonometria.

De posse de um novo conhecimento os estudantes desenvolveram mapas conceituais mais elaborados, com mais ramificações, conforme mostra Apêndice VIX.

**Aula 4 – Pênalti e a Trigonometria**

Esta foi a primeira aula utilizando a Trigonometria no futebol e teve uma duração de 55 minutos. O trabalho foi desenvolvido em sala de aula fazendo o estudante pensar em cada movimento utilizado para a realização de uma cobrança de pênalti. Para isso utilizamos as dimensões do gol, distância da marca do pênalti até o gol, diâmetro da bola de futebol, ângulos formados pelas trajetórias das bolas e o solo, em uma cobrança, dentre outros.

Com o intuito de aumentarmos a participação e o interesse dos estudantes nas atividades, fizemos uso de uma linguagem informal e lúdica, e lançamos diversas perguntas, conforme Apêndice VII, que submeteram os estudantes a estudar cada informação para que conseguissem desenvolver as questões.

**Aula 5 - Escanteio e a Trigonometria**

Nesta etapa o nosso trabalho teve início na sala de aula, onde trouxemos um jogador fictício (personagem Théo) que executava diversas cobranças de escanteio. Mostramos aos estudantes que para calcular a distância percorrida pela bola, ao ser chutada pelo nosso jogador, seria necessário conhecer as medidas do campo onde as cobranças seriam feitas. E que as cobranças somente poderiam ser feitas com chutes rasteiros.

Mostramos aos estudantes também que após descobrirmos a distância percorrida pela bola, através da razão trigonométrica Tangente, também era possível descobrirmos o ângulo formado pela bola com as linhas que demarcam o campo de futebol.

A Figura 8 apresenta um exemplo de cobrança de escanteio, onde a linha vermelha é a trajetória feita pela bola após ser chutada de forma rasteira pelo jogador, formando ângulos com as linhas que demarcam o campo de futebol.

Figura 8 - Exemplo de cobrança de escanteio

Fonte: a autora

Após calcularem diversos exemplos de cobranças de escanteios feitos pelo nosso jogador fictício, convidamos os estudantes para que fossem até a quadra de futebol da escola e medíssemos suas distâncias. Depois, os estudantes formaram duplas, para que pudessem cobrar os escanteios e medir a distância percorrida pela bola. Enquanto um se colocava na posição do escanteio para fazer a cobrança, o outro estudante posicionava-se do outro lado do campo, para fazer a marcação do ponto, no qual a bola cruzou a linha lateral, saindo do campo.

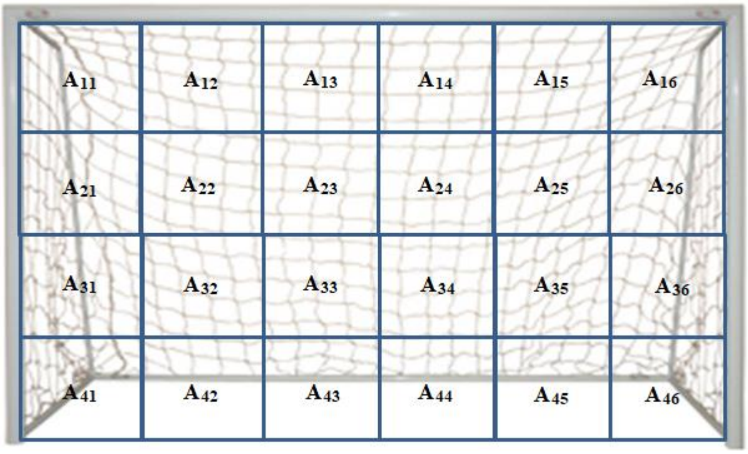
Desta forma, cada Estudante chutou 5 cobranças de escanteio, e calculou a distância que a bola percorreu e o ângulo que a mesma fez com a linha de escanteio.

**Aula 6 – Pênalti e quadrantes**

Nesta aula trouxemos a seguinte questão para nossos estudantes: “Galera, nosso amigo Théo quer fazer uma nova cobrança de pênalti, mas resolveu trocar o futebol de campo pelo futebol de salão. Neste caso, a goleira do futebol de salão mede 2 metros de altura por 3 de comprimento e há uma marca a 6 metros do ponto médio até a linha do gol, para que seja feita a cobrança da falta chamada "pênalti". A cobrança da falta será novamente sem a presença do goleiro, mas agora Théo irá chutar a bola em qualquer direção do gol, e desta forma teremos que ajudá-lo a determinar 2 ângulos, um formado pela elevação da bola, e outro pelo deslocamento lateral que a mesma fará. Para facilitar o nosso trabalho, Théo dividiu a goleira em 24 partes iguais, e irá chamar cada uma delas de quadrante. O primeiro número indica a linha, e o segundo a coluna a qual pertence.”

A Figura 9 representa um modelo de goleira dividida em 24 quadrantes e cada quadrante é um quadrado de lado medindo 50 cm.

Figura 9 - Goleira dividida em quadrantes




Fonte: a autora

Para que a atividade desenvolvida ficasse mais próxima possível da realidade projetada, determinamos que a bola sempre entraria no centro de cada quadrante. Assim, a primeira atividade foi solicitar que os estudantes determinassem o centro de cada quadrante, dando como exemplo que o ponto central do quadrante **$A_{41}$**, que encontra-se a uma altura de 25 cm do chão e uma distância do centro da goleira de 125 cm. Baseado neste exemplo poderiam calcular os demais.

Logo após calcularem os pontos centrais dos quadrantes, perguntamos para os estudantes se foi necessário calcular cada individualmente como feito no exemplo do quadrante **$A_{41}$** ou se descobriram alguma outra maneira de achar o ponto central de cada quadrante.

Depois de calcularem os pontos centrais, solicitamos que calculassem os ângulos que a bola chutada por Théo fez, imaginando que a bola possa entrar em qualquer um dos quadrantes, foi necessário calcular o ângulo de todos os quadrantes, sendo que para cada quadrante 2 ângulos foram calculados, um referente a altura da bola, e outro referente ao deslocamento lateral da mesma.

Na Figura 10, temos o exemplo da marca do pênalti localizada a 6 metros da linha do gol,  e de um ângulo formado por uma possível cobrança de pênalti de forma rasteira.

Figura 10 - Exemplo de distância e ângulo lateral


Fonte: a autora

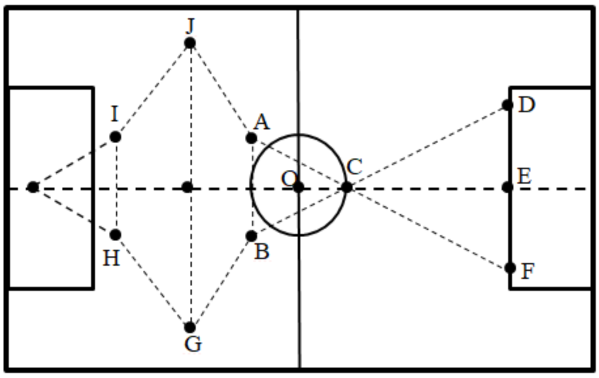
Depois de todo esse trabalho desenvolvido em sala de aula, mais uma vez nos deslocamos até a quadra da escola para, primeiramente, verificar as medidas da goleira e a distância da marca de cobrança do pênalti até a goleira.

Com a goleira já devidamente dividida em quadrantes, selecionamos um estudante para ser o "Juiz" e informar em qual quadrante cada estudante acertou o gol. Cada estudante teve direito a chutar a falta 5 vezes. Cada um, com suas próprias medidas, pode fazer novamente os cálculos de distância e ângulo, dos seus chutes a gol, e o mesmo fez, e com as medidas da quadra de sua escola.

**Aula 7 – Esquema Tático**

Neste encontro podemos demonstrar para os estudantes que os esquemas táticos do futebol também utilizam a Trigonometria para se beneficiar. No esquema tático, demonstrado para os estudantes, utilizado no futebol de campo conhecido como 4-3-3 (4 zagueiros, 3 jogadores de meio de campo e 3 atacantes) podemos observar várias figuras geométricas, assim como diversos ângulos. Utilizamos essas figuras geométricas e ângulos para demonstrarmos a Trigonometria nesse esquema, conforme Figura 11.

Figura 11 - Esquema tático




Fonte: autora

Como exemplo de esquema tático na Figura 10, foi possível observar diversas figuras geométricas como: triângulos equiláteros, triângulos isósceles, trapézios, hexágonos e retângulos. Trouxemos ainda, para os estudantes, algumas informações importantes coletadas na figuram em questão, como:

- O triângulo ABC é equilátero, e o vértice C pertence à circunferência.
- O ponto O é o centro da circunferência.
- Os pontos D, E e F pertencem ao lado do retângulo que representa a grande área.
- O ponto E é o ponto médio do segmento $\overline{DF}$
- O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{DF}$
- O segmento $\overline{AB}$ é perpendicular à reta $\overline{CE}$.

De posse de todas essas informações, e utilizando as medidas do campo de futebol da escola, já coletadas em aulas anteriores, foi feita a primeira questão aos estudantes:

**Questão1:**

*O jogador da posição B chutou a bola para o jogador da posição C, e este para o jogador da posição D, sem interferência de outros jogadores. Qual foi a distância que a bola percorreu, em metros, saindo do jogador B até o jogador D?*

Algumas perguntas orientativas foram feitas aos estudantes para facilitar a interpretação do problema, como por exemplo:

- *Você consegue visualizar algum triângulo retângulo?*
- *Como você conseguirá algumas medidas?*
- *Você possui medidas do campo?*
- *Você tem uma tabela com valores de Seno, Cosseno e Tangente? Isso pode lhe ajudar!*

- *Você pode utilizar semelhança de triângulos?*
- *Você lembra-se de ângulos opostos, complementares?*

Conforme as perguntas facilitadoras iam sendo feitas aos estudantes, o desenvolvimento da questão ia ficando mais evidente para os mesmos. E assim também aconteceu com as demais questões.

**Aula 8 – Mapa Conceitual Final**

Após finalizar a aplicação da UEPS, ensinando a Trigonometria de forma diferenciada aos estudantes, com a prática no futebol, solicitamos aos mesmos que elaborassem o último Mapa Conceitual sobre Trigonometria, e entregassem este desenvolvimento para mais uma vez pudéssemos avaliar a aprendizagem dos estudantes.

## 3.4. Construção de Dados

### *3.4.1. Mapa conceitual inicial*

No primeiro encontro destinado ao estudo de Mapas conceituais foi solicitado aos estudantes que individualmente elaborassem um mapa conceitual sobre Trigonometria. Foram orientados a refletirem sobre o conteúdo em questão, pois, acreditava-se que havia algum conhecimento a priori sobre o assunto, alguns subsunçores, por menor que fossem todos possuíam algum conhecimento sobre o assunto.

A elaboração dos mapas teve como intenção avançar na identificação dos subsunçores, para que após a aula inicial de Trigonometria e ao final das atividades da UEPS, pudessem ser evidenciados a construção do conhecimento significativo. Como referenciado no Capítulo 4 deste documento, a elaboração de mapa conceitual facilita a Aprendizagem Significativa por impulsionar a importância das relações existentes entre os conceitos na estrutura cognitiva dos estudantes.

### *3.4.2. Mapa conceitual intermediário*

Logo após a aula tradicional de Trigonometria, foi solicitado que os estudantes elaborassem um novo mapa conceitual, utilizando as mesmas orientações que tiveram para a confecção do primeiro mapa conceitual, porem de posse de novos conceitos, e após já terem resolvidos exercícios que envolvam os conceitos estudados.

O objetivo da elaboração deste novo mapa conceitual é verificar o quanto se pode agregar em conhecimento conceitual da Trigonometria com uma aula tradicional, onde o professor utiliza apenas quadro e giz para tentar ensinar esse novo conteúdo.

### *3.4.3. Mapa conceitual final*

Em nosso último encontro, após toda a aplicação da UEPS, onde se buscou levar até o estudante formas diferenciadas de ensinar a Trigonometria pela prática do futebol, foi solicitado ao estudante que desenvolvesse um terceiro mapa conceitual. O objetivo foi verificar se houve uma mudança conceitual, se de fato houve um acréscimo significativo em relação ao tema estudado e buscar evidencias da ocorrência da Aprendizagem Significativa.

Assim, o objetivo foi fazer a comparação dos três mapas conceituais, o inicial, o intermediário e o final, para constatarmos se houve evidências de conhecimento construído pelos estudantes após vivenciarem as atividades da UEPS.

# 4. ANÁLISE DE RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nessa seção serão analisados os dados e apresentadas as principais evidências de que a Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) com o tema central "Aprendizagem Significativa da Trigonometria", favoreceu a ocorrência da Aprendizagem Significativa dos estudantes que participaram da sua aplicação. São consideradas as análises de dados provenientes dos mapas conceituais elaborados pelos estudantes, antes, durante e após o estudo do conteúdo programático de Trigonometria do Nono ano do Ensino Fundamental.

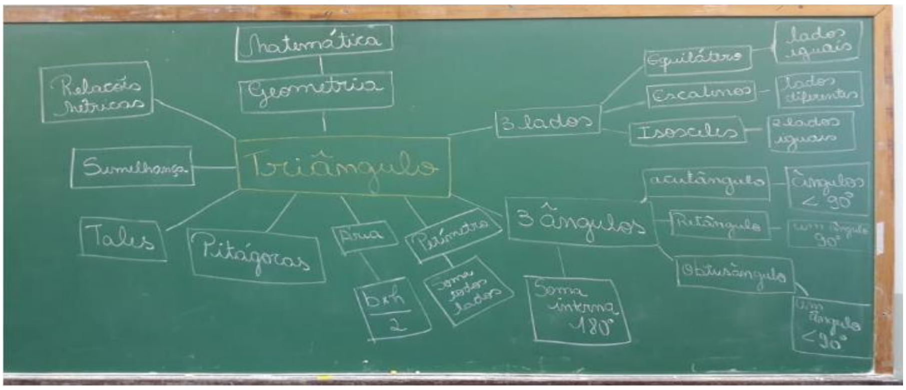
## 4.1. Aplicação da UEPS

Nessa seção está descrita a realização da aplicação de cada uma das etapas da UEPS com o tema central "Aprendizagem Significativa da Trigonometria", composta de 8 planos de aulas que abordaram Mapa Conceitual e conteúdos de Seno, Cosseno e Tangente.

### *4.1.1. Mapa Conceitual Inicial - Aula 1*

Nesta primeira aula introduzimos aos estudantes os conceitos de Mapa Conceitual, bem como exemplos de mapas com temas de fácil entendimento para os mesmos. Inicialmente construímos um mapa conceitual com o tema "Árvore". No primeiro momento, os estudantes mostraram-se inseguros e envergonhados de participar da construção do mesmo, porém quando escolhemos o segundo tema, o qual foi escolhido com a exigência de que estivesse ligado a Matemática, e o escolhido foi "Triângulo", a participação dos estudantes foi bastante satisfatória. Conseguimos construir um mapa conceitual com diversos conceitos, termos de ligações, hierarquias e ramificações, conforme Figura 12.

Figura 12 - Quadro da sala de aula com mapa conceitual

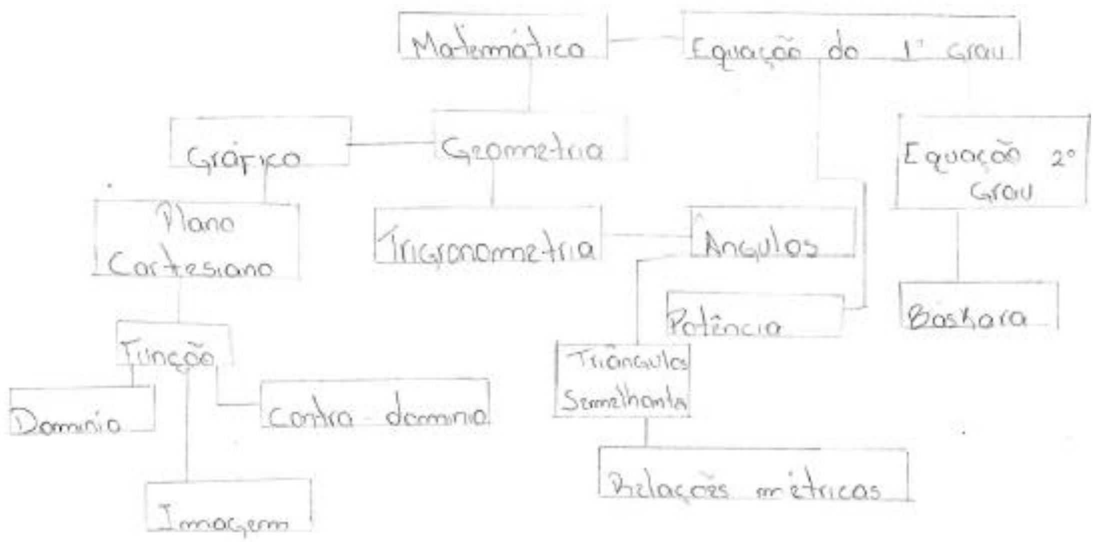



Fonte: autora

Logo após, dividimos a turma em cinco grupos de seis estudantes e solicitamos que os estudantes construíssem um mapa, sobre um tema de livre escolha, mas somente com os conhecimentos que possuíssem naquele momento. Os temas escolhidos pelos estudantes foram: amor, escola, filmes, músicas e vida. Estas temáticas são muito próximas deles, portanto os mapas ficaram bem elaborados, mesmo assim, toda a turma se deslocou até a sala de informática, onde puderam pesquisar mais sobre o tema selecionado, e assim ampliar os mapas, conforme apresentado no Apêndice XI.

Com o intuito de conhecer os subsunçores dos nossos estudantes, ainda neste primeiro encontro, solicitamos que, individualmente elaborassem um mapa conceitual sobre a Trigonometria. Este assunto ainda não havia sido trabalhado em sala de aula, portanto pensamos que os estudantes não conheciam e, por essa razão, não acreditávamos que pudéssemos receber trabalhos bem elaborados. No entanto, a qualidade do material que nos foi entregue superou nossa expectativa, demonstrando, além dos subsunçores, uma ideia do que acreditam que seja a Trigonometria, conforme demonstra a Figura 13.

Figura 13 - Mapa conceitual do Estudante 1




Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelo estudante

Para fazermos uma análise dos mapas conceituais, quanto à estrutura, utilizamos como base a Taxonomia Topológica proposta e validada por Cañas et al. (2006) e Miller (2008), conforme descrito no capítulo 2 desta dissertação.

Esta Topologia é composta por cinco critérios, e cada critério é avaliado em um nível de 0 a 6, sendo nível 0 (o mais simples) e o nível 6 o mais elaborado. Esses critérios são descritos por Boff (2017), como sendo:

- Critério C1 (utilização de conceitos):
    - ✓ Presença de trechos de textos no lugar de conceitos
    - ✓ Poucas palavras (aprendizagem mecânica),
    - ✓ Palavras isoladas.
- Critério C2 (termos de ligação e relações entre conceitos):
    - ✓ Presença ou não de termos de ligação.
    - ✓ Palavras que são utilizadas.
    - ✓ Relações adequadas entre os conceitos.
- Critério C3 (grau de ramificação):
    - ✓ Pontos de ramificações.
    - ✓ Número de conceitos que apresentam ramificações.
- Critério C4 (profundidade hierárquica):
    - ✓ Número de ligações entre o conceito raiz e o conceito mais afastado (este critério só tem sentido se o mapa possuir pelos menos um conceito raiz).
- Critério C5 (presença de ligações cruzadas):
    - ✓ Proposição entre conceitos (formando circuito fechado).

Com base nesses critérios, foi organizado um quadro para realizar a análise estrutural dos mapas conceituais, no qual apresentamos as relações entre critérios e níveis dessa Taxonomia Topológica (Quadro 1).

Quadro 1 - Relação de Critérios e níveis na análise estrutural dos mapas conceituais

| NÍVEL | CRITÉRIO | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **C1 Conceitos** | **C2 Termos de Ligações** | **C3 Grau de Ramificações** | **C4 Profundidade Hierárquica** | **C5 Ligações Cruzadas** |
| **N0** | Nenhuma associação com conceitos relacionados ao tema | Não apresenta | Linear (0 ou 1 ponto) | Nenhuma | Nenhuma |
| **N1** | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (Somente subsunçores) | Apresenta menos de 50% | Linear (0 ou 1 ponto) | Nenhuma | Nenhuma |
| **N2** | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (Subsunçores) | Apresenta menos de 50% | Ramificação baixa (2 pontos) | 1 nível | Nenhuma |
| **N3** | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (inferior a 50%) | Apresenta 50% | Ramificação média (3 ou 4 pontos) | 2 níveis | Nenhuma |
| **N4** | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (igual a 50%) | Apresenta 50% | Ramificação alta (5 ou 6 pontos) | 3 níveis | Nenhuma |
| **N5** | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (superior a 50%) | Apresenta mais de 50% | Ramificação alta (5 ou 6 pontos) | 4 níveis | 1 ou 2 ligações |
| **N6** | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria e suas aplicações. (superior a 50%) | Apresenta mais de 50% | Ramificação altíssima (7 ou mais pontos) | 5 ou mais níveis | Mais de 2 ligações |

Fonte: adaptado de Boff (2017).

Importante ressaltar que os níveis, para cada critério foram adaptados para este estudo, considerando os conceitos da Trigonometria.

De forma resumida, o Quadro 2 apresenta os símbolos correspondentes para cada critério e nível.

Quadro 2 - Avaliação estrutural dos mapas conceituais.

| Nível | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 |
|---|---|---|---|---|---|
| N0 | NC | 0 | 0-1 | 0 | 0 |
| N1 | $C_1 < 0,5$ | $C_1 < 0,5$ | 0 - 1 | 0 | 0 |
| N2 | $C_2 < 0,5$ | $C_1 > 0,5$ | 2 | 1 | 0 |
| N3 | $C_1 = 0,5$ | $C_1 = 0,5$ | 3 - 4 | 2 | 0 |
| N4 | $C_2 = 0,5$ | $C_2 = 0,5$ | 5 - 6 | 3 | 0 |
| N5 | $C_1 > 0,5$ | $C_1 > 0,5$ | 5 - 6 | 4 | 1 - 2 |
| N6 | $C_2 > 0,5$ | $C_2 > 0,5$ | ≥ 7 | ≥ 5 | >2 |

Fonte: adaptado de Boff (2017).

O Quadro 3 tem o intuito de descrever o significado atribuído a cada sigla utilizada no Quadro 2.

Quadro 3 - Siglas utilizadas no Quadro 2.

| SIGLAS | Significado |
|---|---|
| NC | Nenhuma associação com conceitos relacionados ao tema |
| $C_1 < 0,5$ | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (subsunçores) |
| $C_2 < 0,5$ | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. |
| $C_1 = 0,5$ | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (inferior a 50%) |
| $C_2 = 0,5$ | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (igual a 50%) |
| $C_1 > 0,5$ | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (superior a 50%) |
| $C_2 > 0,5$ | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria e suas aplicações. (superior a 50%) |

Fonte: adaptado de Boff (2017).

Segundo Boff (2017), quanto ao critério C2, a ausência de termos de ligação é representada por 0 (zero), a presença de metade ou menos de termos de ligação entre conceitos por (< 0,5), a presença de mais da metade por (> 0,5) e o número (1) representa a presença de termos de ligações em todos os conceitos apresentados no mapa conceitual.

Ainda segundo Boff (2017), aos critérios C3, C4, C5, os números indicam a quantidade de pontos de ramificações, os números de ligações entre conceito raiz e o mais afastado, e os números de ligações cruzadas, respectivamente, presentes no mapa conceitual.

Como coloca Moreira (2011), os mapas conceituais são instrumentos que podem levar a profundas modificações na maneira de ensinar, de avaliar e de aprender, por promoverem a Aprendizagem Significativa, principalmente quando comparados com técnicas didáticas voltadas para a aprendizagem mecânica. Porém, é necessário que os estudantes adquiram habilidades que os auxiliem a construção desses mapas.

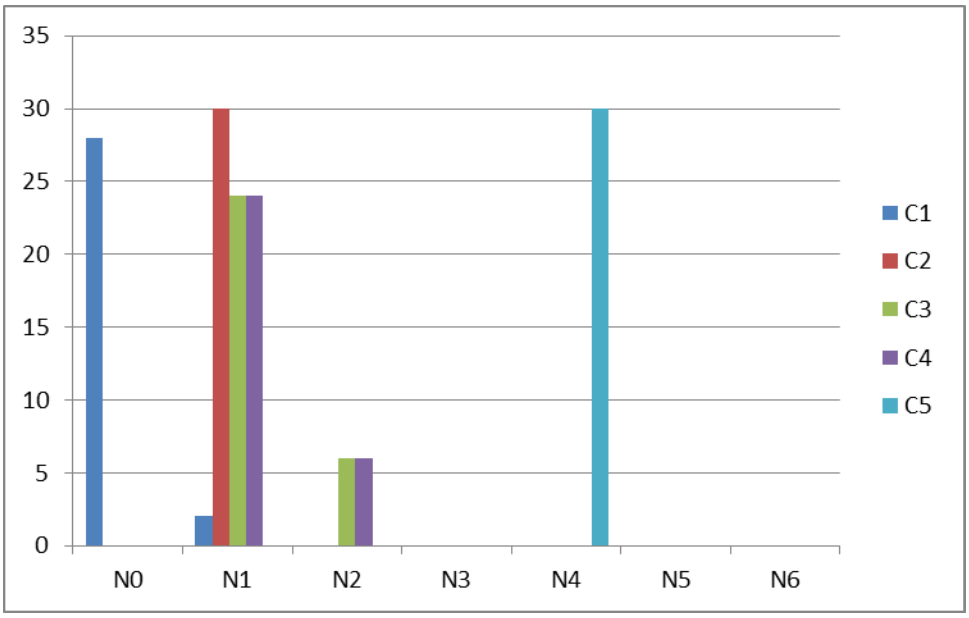
A análise estrutural deste primeiro mapa conceitual, com a participação de 30 estudantes, teve por objetivo conhecer os seus subsunçores. Por se tratar de um tema desconhecido dos mesmos, obtivemos os resultados apresentados no Quadro 4, e demostrados também, no Gráfico 1.

Quadro 4 - Análise estrutural dos primeiros mapas conceituais

| | CRITÉRIOS | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **NÍVEL** | **C1** | **C2** | **C3** | **C4** | **C5** |
| **N0** | 28 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **N1** | 2 | 30 | 24 | 24 | 0 |
| **N2** | 0 | 0 | 6 | 6 | 0 |
| **N3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **N4** | 0 | 0 | 0 | 0 | 30 |
| **N5** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **N6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Fonte: autora

Gráfico 1 - Análise estrutural dos primeiros mapas conceituais




Fonte: autora

Conforme resultados apresentados no Quadro 4 e no Gráfico 1, podemos fazer as seguintes observações:

**C1 – Conceitos**

Dos 30 estudantes presentes em sala de aula, 28 deles não apresentaram nenhuma associação aos conceitos relacionados ao tema, fazendo uso apenas dos subsunçores para a construção do mapa. Porém 2 estudantes demostraram a presença de tópicos relacionados a trigonometria.

**C2 – Termos de ligações e relações entre conceitos**

Em relações aos termos de ligações, os estudantes, em sua totalidade, fizeram ligações utilizando somente seus subsunçores.

**C3 – Grau de ramificações**

Mesmo fazendo uso exclusivamente de seus subsunçores, 6 estudantes elaboraram seus mapas conceituais com até 2 ramificações, contudo, 24 deles, não utilizaram ou utilizaram somente 1 ramificação.

**C4 – Profundidade Hierárquica**

Apenas 6 estudantes formaram, pelo menos uma hierarquia.

**C5 – Ligações Cruzadas**

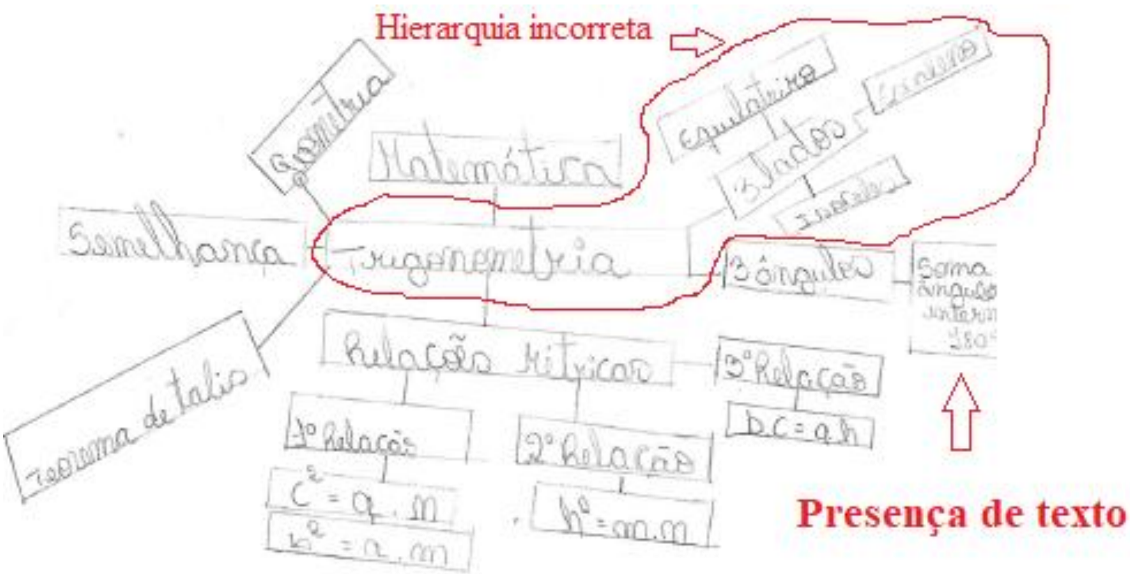
Nenhum estudante estabeleceu ligações cruzadas.

Ainda, analisando qualitativamente os mapas conceituais, podemos perceber, conforme descrito no Critério 1 a presença de textos no lugar de conceitos, e relações não adequadas entre os conceitos, percebemos ainda algumas ramificações usadas de forma errada, não fazendo uso da hierarquia, conforme comprovam as Figuras 14 e 15.

Figura 14 - Mapa conceitual do Estudante 2


Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelo estudante

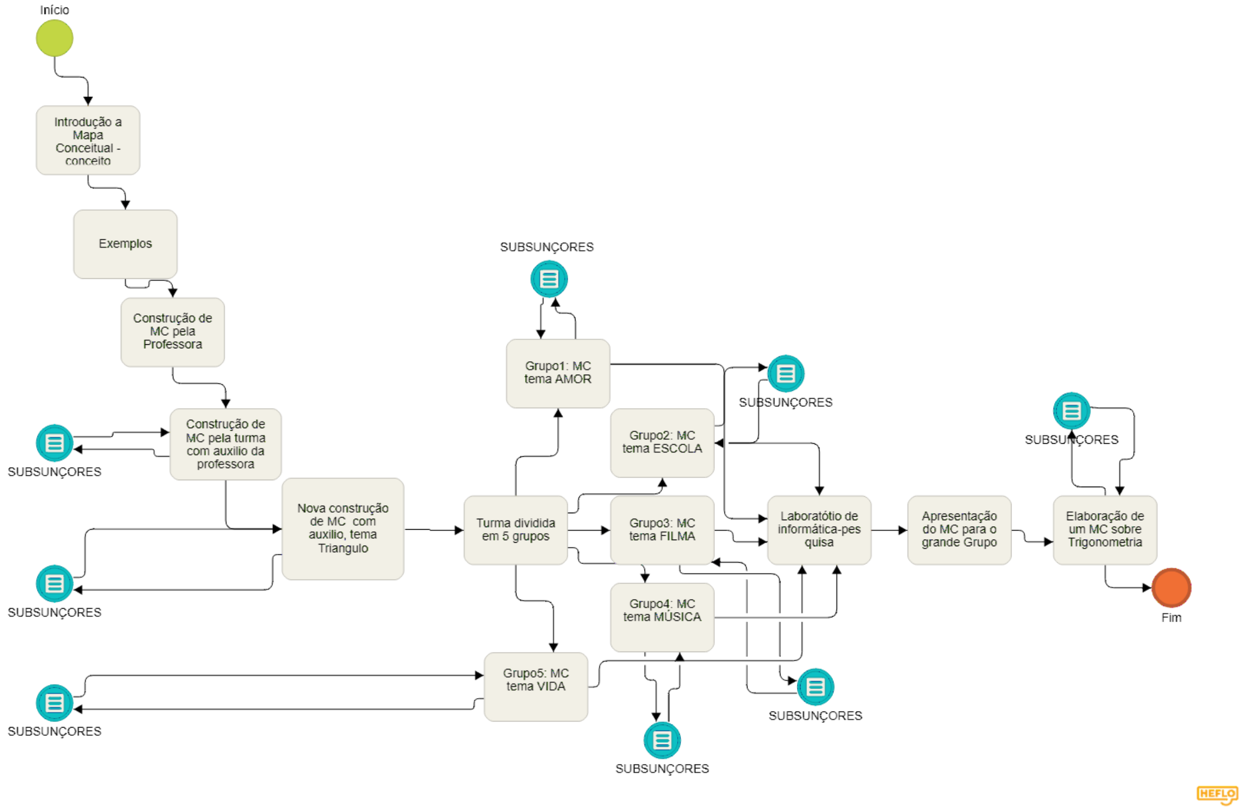
Figura 15 - Mapa conceitual do Estudante 3




Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelo estudante

Na Figura 16 representamos, através de um diagrama, a Aula 1.

Figura 16 - Diagrama da Aula 1




Fonte: autora

### *4.1.2. Trigonometria - Aula 2*

Nesta aula, a proposta foi a apresentação das atividades utilizando o meio impresso. No entanto, em função de problemas técnicos ocorridos na escola foi utilizado tão somente quadro negro e giz.

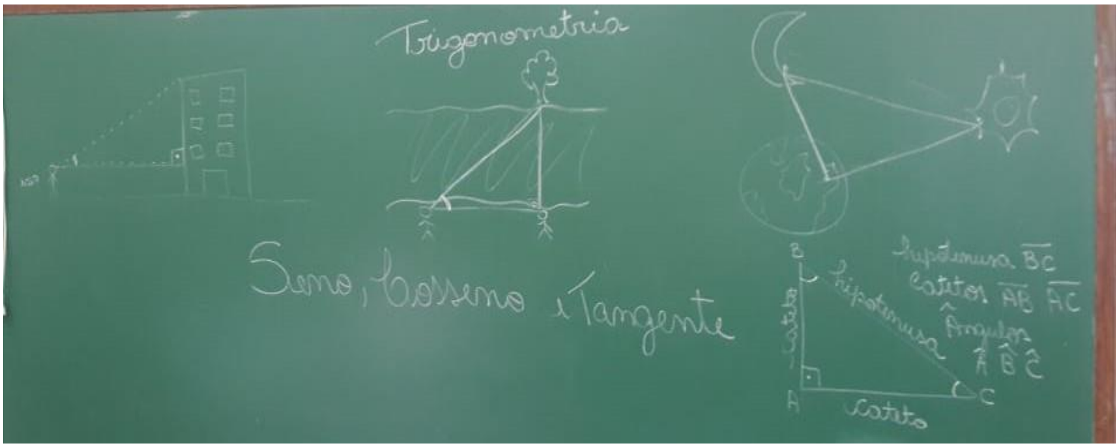
Iniciamos nossa aula com perguntas com o intuito de despertar o interesse dos estudantes pelo conteúdo, a saber:

- Como podemos medir a altura de um prédio?;
- Qual a largura de um rio? ou ainda,
- Qual a distância da Terra até a Lua?

As respostas foram as mais diversas, algumas delas bem interessantes como: "Para medirmos a altura de um prédio podemos medir somente o primeiro andar e multiplicarmos pela quantidade de andares" ou ainda, "para medirmos um rio, poderíamos prender uma corda bem grande, em uma das margens e atravessar a barco com a corda, quando chegarmos ao outro lado, podemos medir quanto foi de corda, e descobrir a largura do rio".

Para uma melhor visualização das questões colocadas para os estudantes foram representados graficamente no quadro negro os problemas propostos, e informados a eles que existia uma forma de calcularmos distâncias inalcançáveis, conforme mostra a Figura 17.

Figura 17 - Exemplos da aplicação da Trigonometria




Fonte: autora

Antes de iniciarmos o conteúdo de Trigonometria, fizemos algumas recordações importantes que serviram de pré-requisitos para a aprendizagem de Trigonometria, como a classificação dos triângulos, tanto pelas medidas dos lados, quanto pelos ângulos internos, lembrando-os que:

Quanto aos lados, o triângulo pode ser classificado como:

- Equilátero: possui os lados com medidas iguais.
- Isósceles: possui dois lados com medidas iguais.
- Escaleno: possui todos os lados com medidas diferentes.

Quanto aos ângulos, os triângulos podem ser denominados:

- Acutângulo: possui os ângulos internos com medidas menores que 90º
- Obtusângulo: possui um dos ângulos com medida maior que 90º.
- Retângulo: possui um ângulo com medida de 90º, chamado ângulo reto.

Lembramos ainda que no triângulo retângulo existem algumas importantes relações, uma delas é o Teorema de Pitágoras, que diz o seguinte: “A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa”. Essa relação é muito importante na Matemática, responsável pela resolução de inúmeros problemas geométricos.

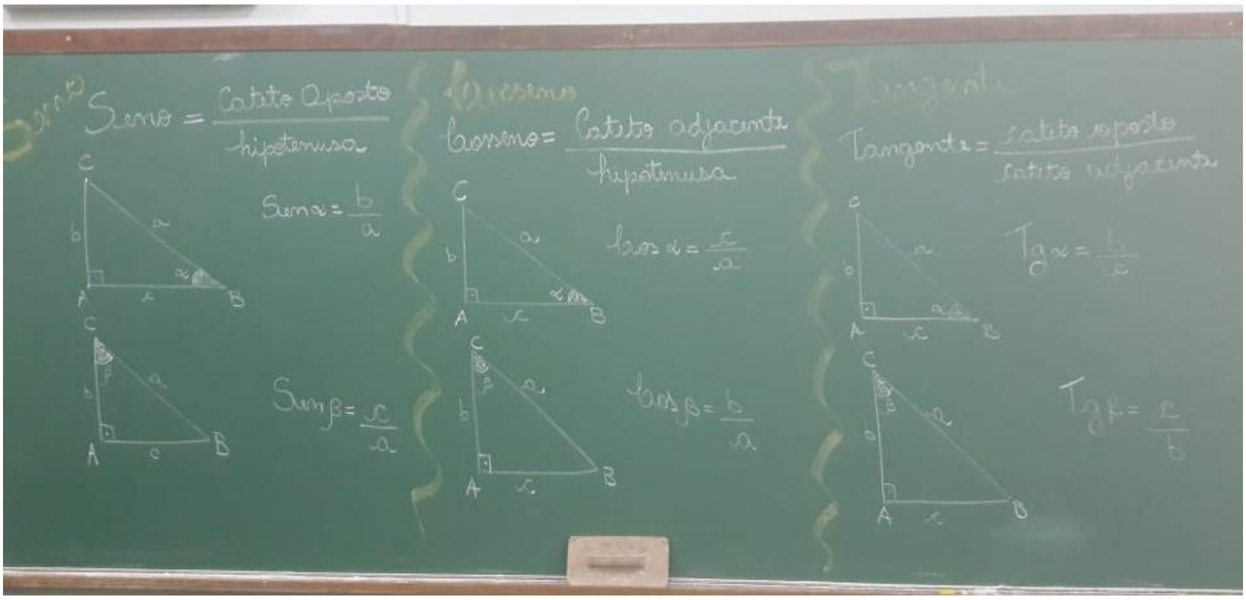
Foi necessário lembrar para alguns dos estudantes o conceito de hipotenusa e catetos, pois alguns eles não lembravam essas importantes definições.

Começamos, então, a introdução dos conceitos das razões trigonométricas, Seno, Cosseno e Tangente, de forma tradicional:

- Seno de um ângulo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.
- Cosseno de um ângulo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.
- Tangente de um ângulo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

Para que o estudante conseguisse visualizar melhor essas fórmulas, as mesmas foram desenhadas e explicadas no quadro negro, conforme Figura 18.

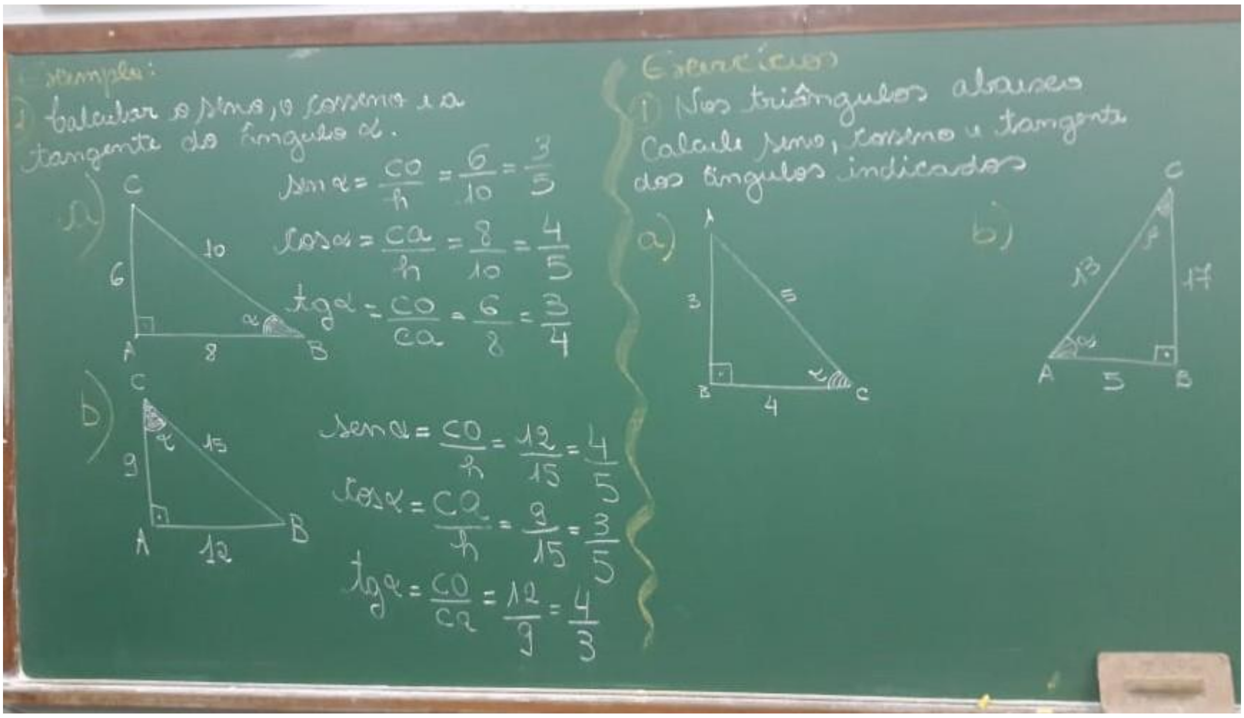
Figura 18 - Demonstração de Seno, Cosseno e Tangente




Fonte: autora

Foram resolvidos alguns exemplos no quadro negro, para que os estudantes entendessem a aplicação das fórmulas, conforme demonstrado na Figura 19.

Figura 19 - Exercícios resolvidos como demonstração




Fonte: autora

Logo após, propomos alguns exercícios que foram realizados pelos estudantes sem demonstrarem dificuldades, porém podemos perceber que a aprendizagem foi mecânica, pois os estudantes se preocuparam em decorar as fórmulas a eles ensinadas, e aplicar cada uma delas ao exercício proposto, sem fazer nenhum questionamento sobre o assunto. Desta forma, encerramos nossa aula com a correção dos exercícios propostos.

Inicialmente havíamos proposto somente um período de 55 minutos para esta aula, porém acabamos nos estendendo nas perguntas iniciais, pela boa participação dos estudantes, e a aula acabou se estendendo para 2 períodos, totalizando 110 minutos.

Iniciamos nossa aula explicando que apesar de serem muito usados nos cálculos de Relações Trigonométricas do Triângulo Retângulo, os valores de Seno Cosseno e Tangente dificilmente podem ser decorados, até mesmo porque são mais de 80. Existem, entretanto, alguns ângulos que são tidos como Notáveis, e nessa aula fizemos a demonstração desses ângulos juntamente com os estudantes.

Apesar de toda demonstração ter sido explicada a cada detalhe, pode-se perceber o desinteresse dos estudantes na demonstração, inclusive com comentários do tipo, “Porque a senhora não deu direto a tabela pronta? Essas demonstrações só servem pra atrapalhar nossas cabeças!  Eu não quero saber de onde veio, se alguém já descobriu tá tudo certo!”

Após a apresentação da tabela de Seno, Cosseno e Tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º, apresentamos para os estudantes uma música, a qual é utilizada pela autora dessa dissertação, e diversos outros professores de Matemática há anos, porém desconhecemos a autoria da mesma. A música apresentada no Apêndice VIII, deve ser cantada no ritmo e melodia da canção de natal Jigle Bells de autoria de James Lord Pierpont (1857), e explicada juntamente com a tabela de Seno, Cosseno e Tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º.

Com a apresentação da música cantada pela autora dessa dissertação, a aula se tornou mais divertida e os estudantes participaram mais, com interesse de gravar a música, e consequentemente a tabela dos Seno, Cosseno e Tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º.

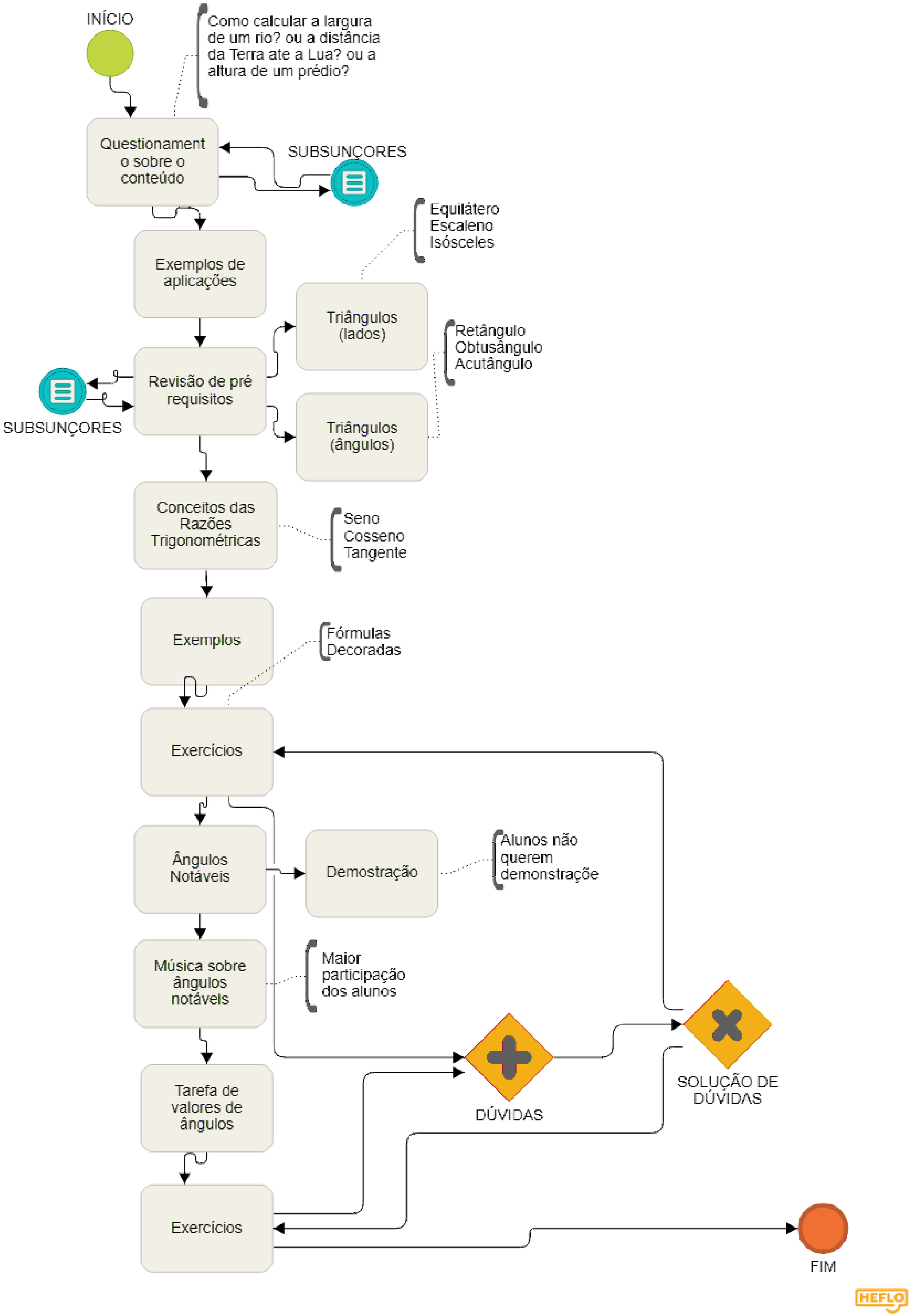
Diversos exercícios foram realizados pelos estudantes e posteriormente corrigidos no quadro negro.

No último encontro deste plano de aula, salientamos mais uma vez que as razões trigonométricas são utilizadas principalmente na determinação de distâncias inacessíveis. Assim, para calcular a altura de uma montanha ou a distância entre as margens de um rio, por exemplo, usa-se um instrumento de precisão para medir ângulos ou aplicam-se as razões trigonométricas.

Entregamos uma cópia da tabela já estabelecida com os valores dos ângulos, e explicamos como fazer uso da mesma. Após alguns exemplos terem sido feitos no quadro negro, os estudantes seguiram fazendo exercícios sem apresentar maiores dificuldades. As dúvidas dos estudantes consistiam em qual das fórmulas utilizar, o que nos leva a acreditar que eles são capazes de solucionar as fórmulas, mas não ficou evidente em quais situações práticas deveriam aplicar cada uma delas.

Um pequeno resumo desta segunda aula está demonstrado através de um fluxograma na Figura 20.

Figura 20 - Diagrama da aula 2




Fonte: autora

### *4.1.3. Mapa conceitual intermediário - Aula 3*

Após a apresentação do conteúdo de Trigonometria de forma tradicional, com conceitos e fórmulas prontas, solicitamos aos estudantes que elaborassem um novo Mapa Conceitual sobre Trigonometria.

Segundo Novak e Cañas (2006), os mapas conceituais constituem-se em importantes acessórios em atividades diversificadas, como: aprender um novo assunto; auxiliar a manter a relação entre conceitos chaves; ajudar a captação dos conceitos e a aprendizagem; permitir a visualização dos conceitos chaves resumindo suas inter-relações, proporcionando maior autonomia para desenvolver a aprendizagem de maneira significativa.

O mapa intermediário serviu pra mostrar se houve um crescimento do conhecimento do estudante, no conteúdo de Trigonometria, quando o conteúdo em questão foi apresentado de forma tradicional, e mais, se de fato o crescimento que aconteceu foi significativo.

Comparando os mapas conceituais do primeiro encontro e os do terceiro encontro, pode-se perceber que houve uma pequena evolução nas ideias representadas nos mesmos.

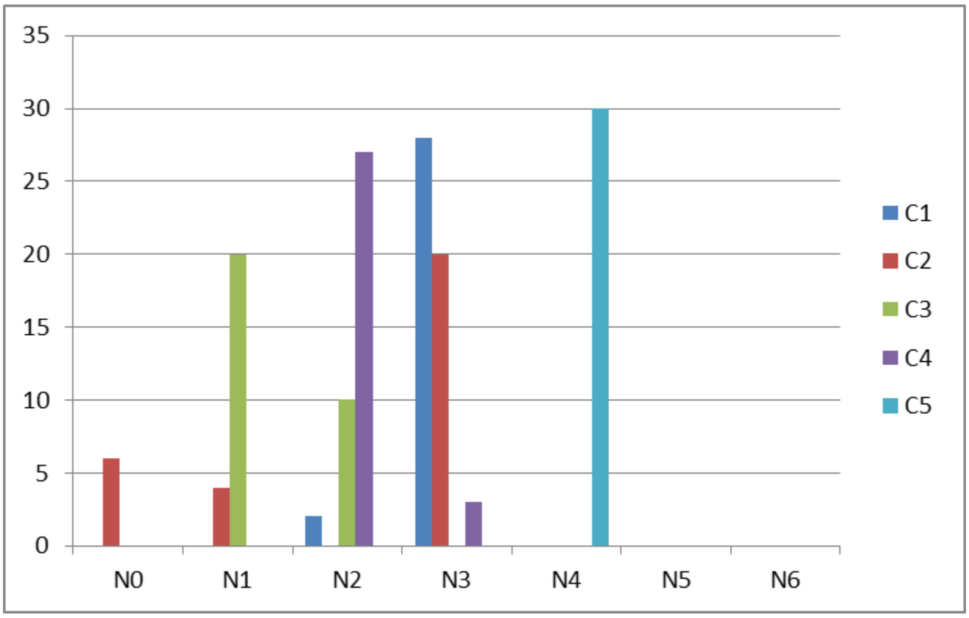
Quando feita a análise dos mapas conceituais intermediários, quanto à estrutura, utilizando como base a Taxonomia Topológica proposta e validada por Cañas et al. (2006) e Miller (2008), conforme descrito no capítulo 2 desta dissertação e na Aula 1 deste capítulo, com a participação de 30 estudantes, obtivemos os resultados apresentados no Quadro 5 e demonstrados no Gráfico 2.

Quadro 5 - Análise estrutural dos mapas conceituais intermediários

| | CRITÉRIOS | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **NÍVEL** | **C1** | **C2** | **C3** | **C4** | **C5** |
| **N0** | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| **N1** | 0 | 4 | 20 | 0 | 0 |
| **N2** | 2 | 0 | 10 | 27 | 0 |
| **N3** | 28 | 20 | 0 | 3 | 0 |
| **N4** | 0 | 0 | 0 | 0 | 30 |
| **N5** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **N6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Fonte: autora

Gráfico 2 - Análise estrutural dos mapas conceituais intermediários




Fonte: autora

O resultados apresentados no Quadro 5 e no Gráfico 2, fazem os seguintes apontamentos:

**C1 – Conceitos**

Em relação aos conceitos, 2 estudantes utilizaram somente subsunçores para a confecção de seus mapas conceituais. Porém 28 deles apresentaram conceitos relacionados à Trigonometria, mas abrangendo uma porcentagem inferior a 50% do seu mapa conceitual.

**C2 – Termos de ligações e relações entre conceitos**

As relações entre conceitos, ou os termos de ligações, foram utilizados por 20 estudantes que fizeram uma ligação entre conceitos da Trigonometria. Outros 4 estudantes fizeram ligações mas somente entre subsunçores, e houve também 6 estudantes que não fizeram ligações entre conceitos.

**C3 – Grau de ramificações**

Em relação às ramificações, 20 estudantes fizeram zero ou uma ramificação, porém 10 fizeram 2 ramificações entre conceitos trigonométricos.

**C4 – Profundidade Hierárquica**

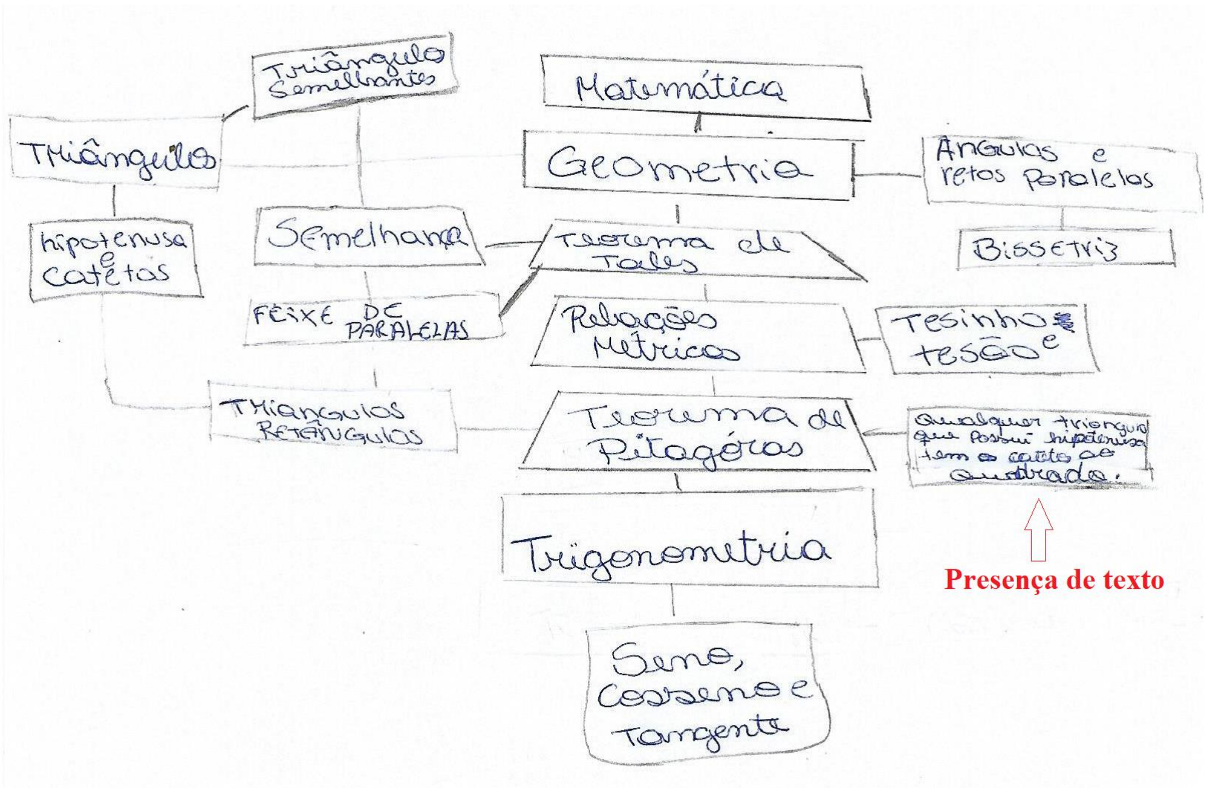
A Hierarquia foi utilizada por todos os estudantes para a confecção do mapa conceitual, porém somente 3 fizeram uso de duas ligações hierárquicas.

**C5 – Ligações Cruzadas**

Nenhum Estudante fez uso de ligações cruzadas.

Analisando qualitativamente os mapas conceituais intermediários, desenvolvidos pelos estudantes, percebemos que ainda fizeram uso de textos no lugar de conceitos, como haviam feito no primeiro mapa conceitual, conforme Figura 21.

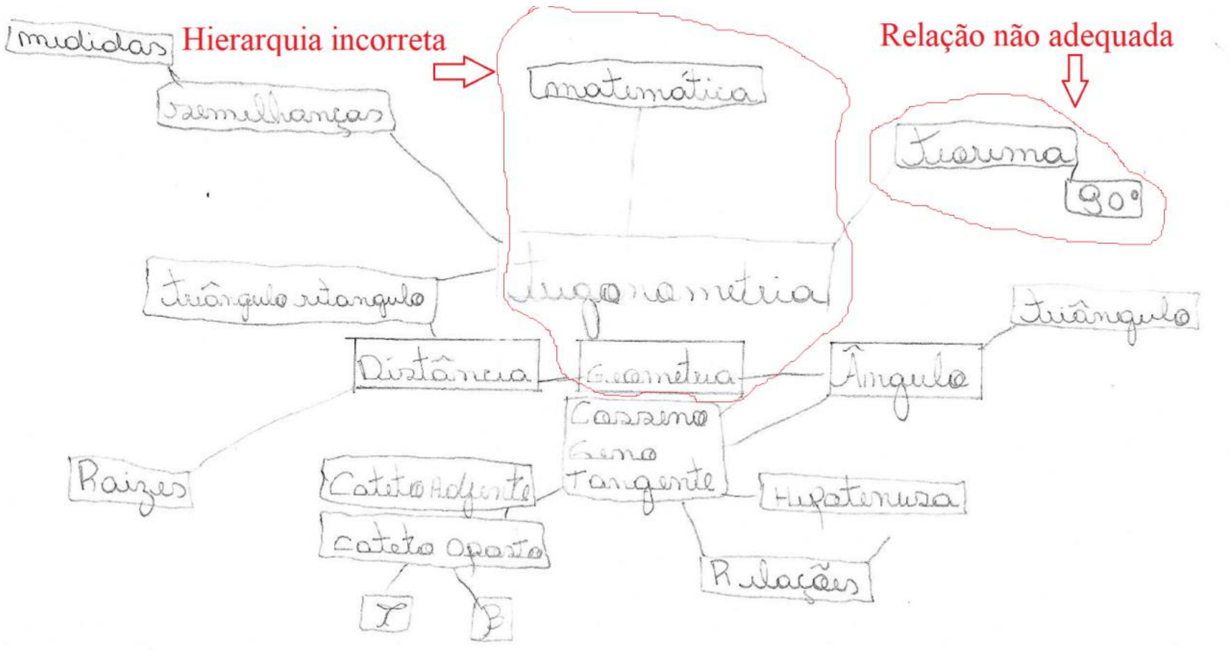
Figura 21 - Mapa conceitual intermediário - Estudante 4




Fonte: autora

Podemos perceber ainda a existência de relações não adequadas entre os conceitos, e quanto às ramificações, elas não obedecem a uma hierarquia, conforme comprova a Figura 22.

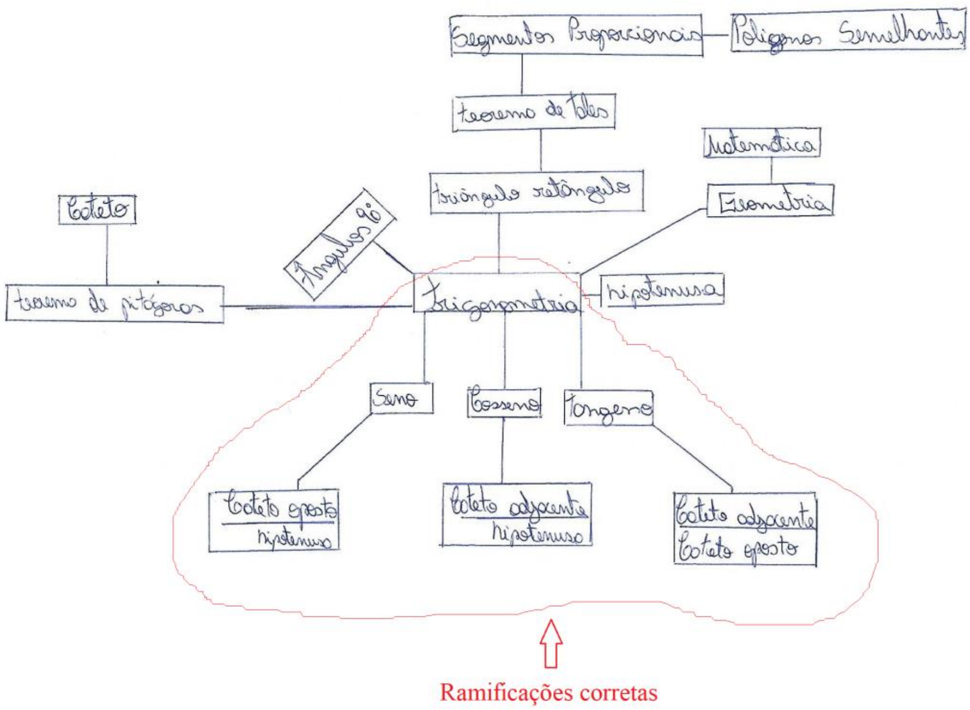
Figura 22 - Mapa conceitual intermediário - Estudante 5




Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelo estudante

Contudo, houve alguns mapas conceituais com boas ramificações e ligações feitas corretamente, como é demonstrado no mapa conceitual do estudante 6, na Figura 23.

Figura 23 - Mapa conceitual intermediário - Estudante 6




Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelo estudante

A avaliação através dos mapas conceituais visa buscar evidências da Aprendizagem Significativa, considerando que esse é um processo progressivo e não ocorre somente no final dessa trajetória (MOREIRA, 2011).

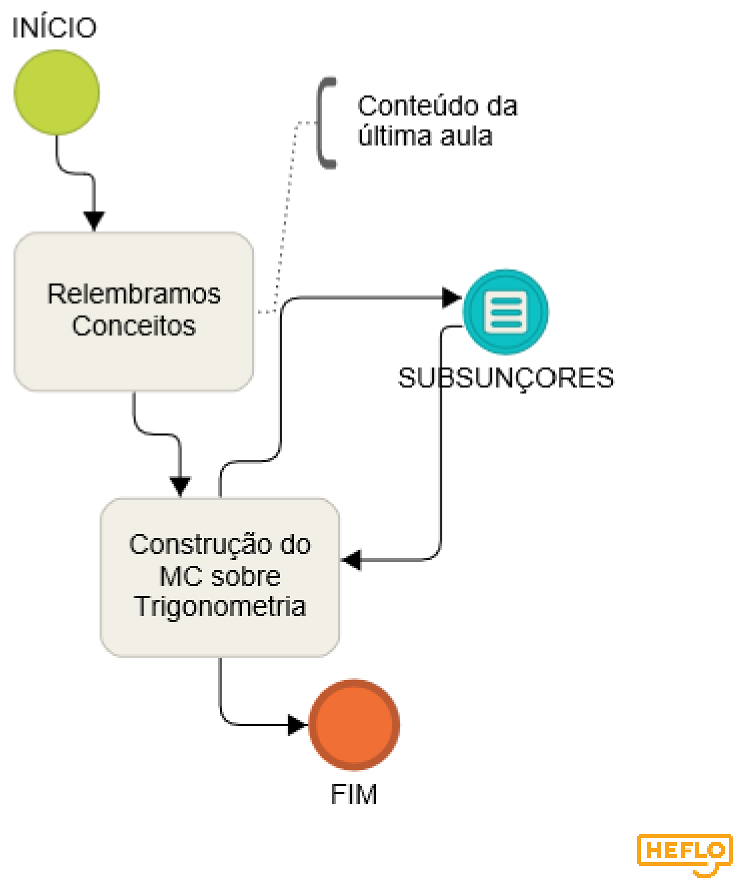
Como método de avaliação, este trabalho utilizou os mapas conceituais, que segundo Moreira (2012):

> Como instrumento de avaliação da aprendizagem, mapas conceituais podem ser usados para se obter uma visualização da organização conceitual que o aprendiz atribui a um dado conhecimento. Trata-se basicamente de uma técnica não tradicional de avaliação que busca informações sobre os significados e relações significativas entre conceitos-chave da matéria de Ensino segundo o ponto de vista do Estudante. É mais apropriada para uma avaliação qualitativa, formativa, da aprendizagem.

De acordo com Novak e Cañas (2006), os mapas conceituais apresentam os conceitos de forma hierárquica, ligando-se secundariamente a outros conceitos e estabelecendo significados entre eles. Porém, nessa concepção, os mapas conceituais estão restritos ao uso de conceitos, o que demonstra que não houve de fato uma Aprendizagem Significativa.

O diagrama da Figura 24, demonstra a aula 3 de forma sucinta.

Figura 24 - Diagrama da aula 3




Fonte: autora

### *4.1.4. Pênalti e a Trigonometria - Aula 4*

Iniciamos a quarta aula distribuindo aos estudantes uma folha contendo a Questão 1, a figura ilustrativa da mesma, e o primeiro questionamento, conforme Apêndice X, e Figura 25.

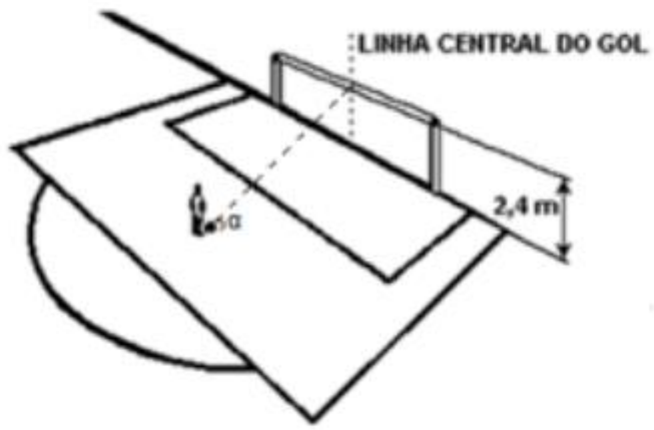
**Questão 1**

*Olá Galera! Vou apresentar para vocês o nosso amigo Théo. Théo é ótimo em futebol, mas não tão bom em Matemática, por isso precisa de nossa ajuda. Ele quer fazer uma cobrança de pênalti sem a presença do goleiro, e decidiu chutar a bola na direção central do gol. Qual deve ser o ângulo máximo de elevação da bola, para que o Théo consiga fazer o gol?*

*Para que possamos ajudar o Théo, precisamos de alguns dados, que serão coletados a partir de algumas respostas. Vamos pensar juntos!*

*a) Se Théo chutar a bola a uma altura de 2,4 metros, conseguirá fazer o gol? Justifique.*

Figura 25 - Figura ilustrativa da questão 1



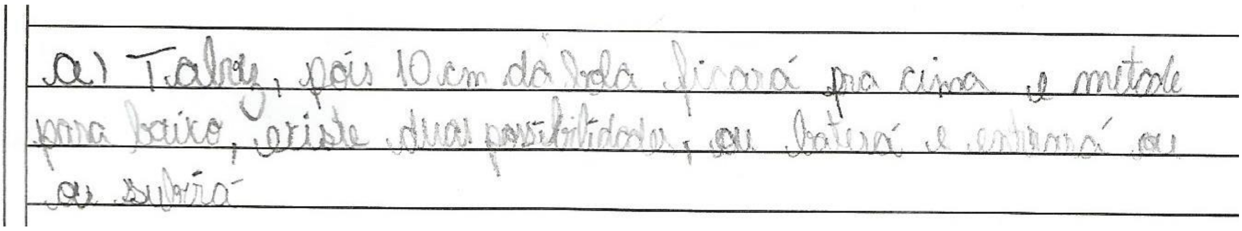

Fonte: http://professor.bio.br/matematica/comentarios.asp?q=6445&t=Trigonometria

Solicitamos aos estudantes que respondessem os questionamentos em folhas avulsas para que pudessem ser entregues para a professora para que a mesma fizesse a correção e posteriormente devolvesse o material corrigido.

Alguns questionamentos bem relevantes foram feitos pelos estudantes, como por exemplo, se a altura da goleira, que na Figura 25, está demonstrada como sendo de 2,4 metros, era até o final da goleira, pois a mesma tem uma estrutura de ferro, que mede cerca de 10 cm ou se aquela medida era da parte interna da goleira. Então, decidimos, juntamente com a turma, adotar 2,4 metros de altura no ponto central da estrutura de ferro que compõe a goleira.

Neste primeiro momento a grande maioria da turma respondeu que Théo não faria o gol, pois a bola bateria na trave. Porém, ao fazermos a correção do material entregue, podemos perceber algumas respostas diferentes aquela que esperávamos, como exemplo a da Figura 26.

Figura 26 - Resposta do Estudante 7


a) Talvez, pois 10 cm da bola ficará pra cima e metade para baixo, existe duas possibilidades, ou baterá e entrará ou ou subirá

Fonte: autora

Lançamos aos estudantes o segundo questionamento:

*b) Qual o raio da bola?*

Alguns estudantes não lembravam o que era raio e foi necessário relembrar esse conceito. Também foi levantada a questão de haver diferença entre o tamanho da bola de futebol de salão e futebol de campo. Foi necessário informar que seria utilizado, neste caso, a bola de futebol de campo.

Os estudantes não possuíam nenhum material para pesquisar esse assunto, estavam de posse somente de uma bola, fitas métricas e réguas que pudessem auxiliar na questão. Deste modo, enquanto um estudante segurava a bola sobre a mesa, o outro apoiava uma régua sobre a bola, e assim mediram, com o auxílio de outra régua, o diâmetro da bola que é de aproximadamente 20 cm, descobrindo o valor de seu raio aproximado, como sendo 10 cm, conforme Figura 27.

Figura 27 - Estudantes medindo o diâmetro da bola de futebol


Fonte: autora

Houve bastante empenho dos estudantes nesta questão, a interatividade com questões práticas tornou a aula mais prazerosa, e desta maneira, o aprendizado potencializado.

A terceira questão foi feita aos estudantes foi:

c) *Qual a altura máxima que o centro da bola pode atingir para que Théo consiga fazer o gol?*

A maioria dos estudantes conseguiu perceber que era necessário diminuir da altura da goleira, somente o valor do raio da bola, ou seja, 10 cm, porém alguns ficaram com dúvidas do porque não diminuir o tamanho total da bola que é o valor do diâmetro, no caso 20 cm. Fez-se necessário uma explicação através de desenho no quadro negro para melhor entendimento do problema.

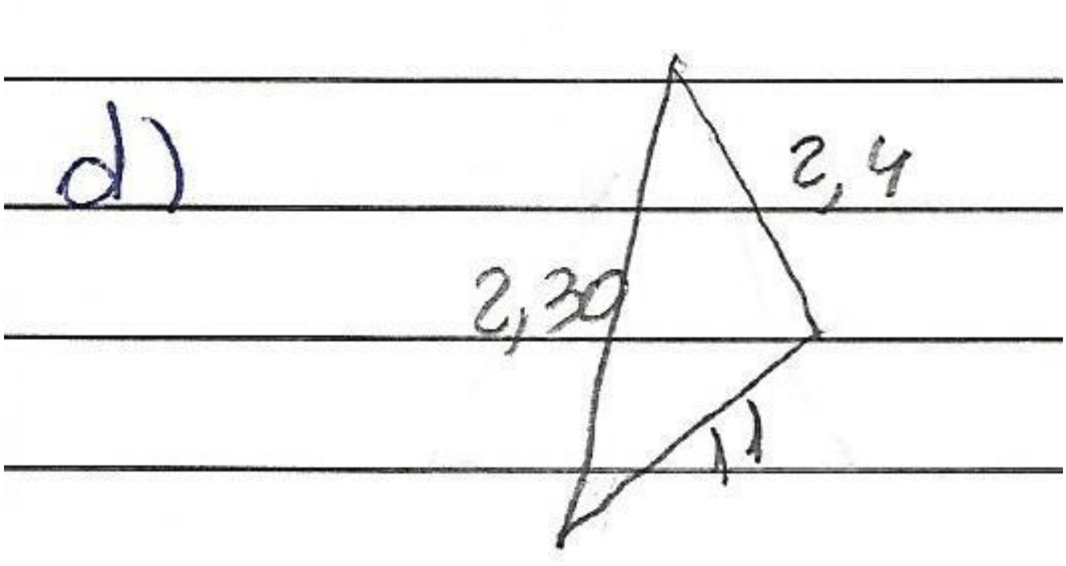
A próxima questão solicitava que os estudantes desenhassem um triângulo representando a situação descrita na questão anterior, com os valores encontrados.

A principal questão aqui foi que a marca do pênalti da Figura 25, não apresentava a distância até a goleira, por isso atribuímos a esta distância o valor de 11 metros conforme pesquisa feita pela autora anteriormente.

Alguns estudantes não evidenciaram logo a presença de um triângulo retângulo na Figura 25, foi necessário intervenção por parte da professora. Houve também, os estudantes que perceberam a presença do triângulo, mas não se deram conta que a altura deveria ser de 2,3 cm para que o jogador conseguisse fazer o gol, e colocaram como sendo a altura inicial de 2,4 cm.

Ao fazermos a correção do trabalho entregue pelos estudantes, tivemos algumas surpresas negativas, como a do estudante que não desenhou nem o triângulo retângulo nem as medidas descobertas anteriormente, conforme Figura 28.

Figura 28 - Triângulo desenhado pelo Estudante 8




Fonte: autora

Porém a questão nos trouxe grande satisfação por perceber que em sua maioria os estudantes responderam corretamente e alguns já questionavam se poderíamos descobrir a distância percorrida pela bola.

Chamamos atenção dos estudantes que na Figura 25 existe um ângulo chamado de α, e questionámos os mesmos sobre qual relação trigonométrica poderíamos utilizar para determinar o ângulo de elevação que a trajetória da bola fez com relação ao solo. Nesta questão não houve divergências, os estudantes em sua totalidade responderam que a razão trigonométrica utilizada para descobrir o ângulo em questão seria a Tangente, uma vez que os mesmos possuíam os valores dos catetos, e não conhecendo o valor da hipotenusa.

Para descobrirem o valor aproximado do ângulo α os estudantes utilizaram a tabela trigonométrica entregue para eles na aula 2, obtendo como resultado aproximado o ângulo de 11º.

Utilizando todas as informações levantadas até aqui, solicitamos que calculassem a distância percorrida pela bola, no chute que Théo fez o gol.

Neste momento os estudantes questionaram o porquê utilizando Seno obtiveram um valor diferente dos colegas que utilizaram o Cosseno, para descoberta da distância. Precisamos lembra-los então, que o ângulo α inicial já havia sido arredondado para 11º e por isso seria necessário que fizéssemos alguns arredondamentos para que as respostas fossem as mesmas.

A última questão da aula, foi a seguinte:

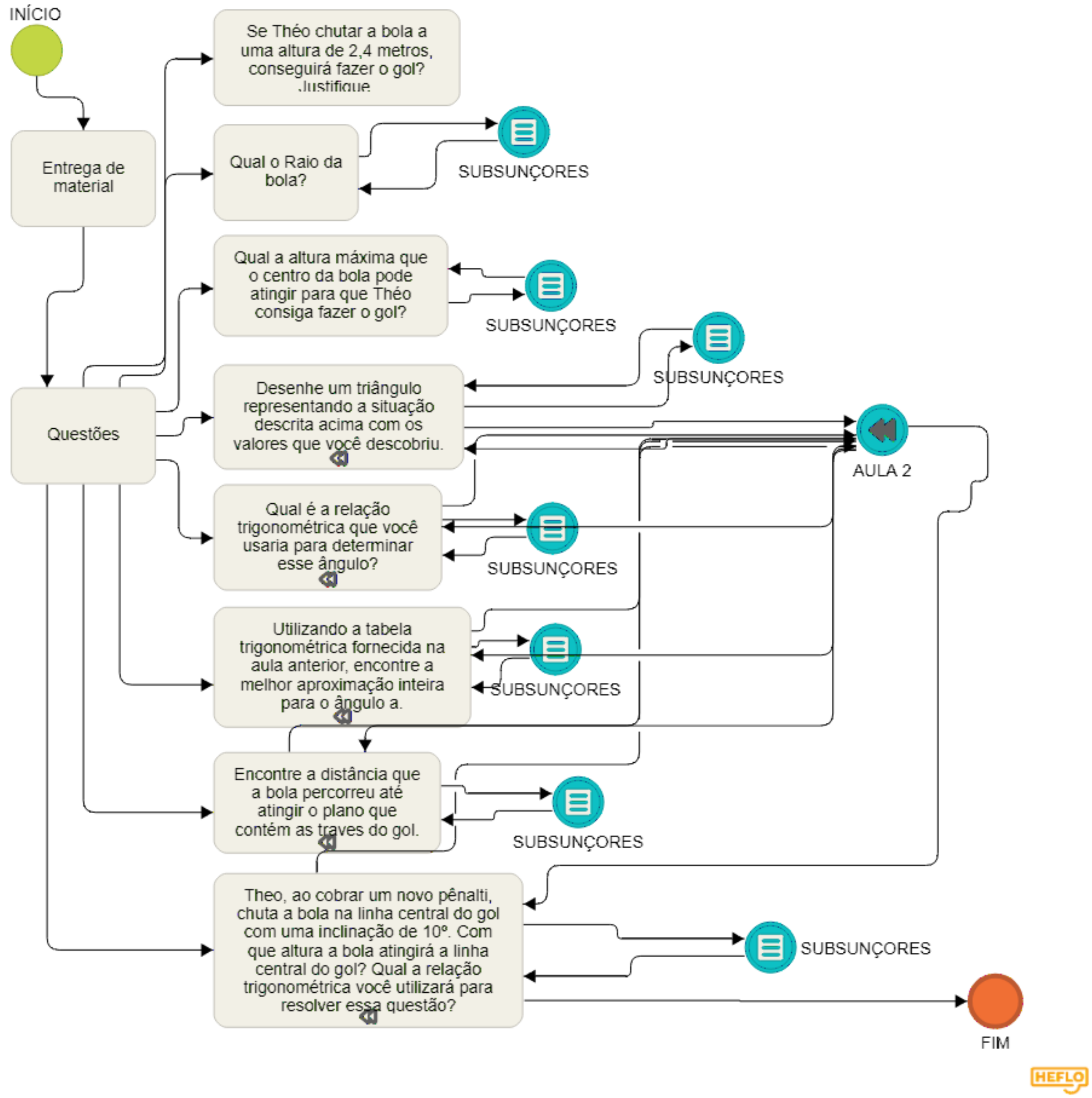
*h) Theo, ao cobrar um novo pênalti, chuta a bola na linha central do gol com uma inclinação de 10º. Com que altura a bola atingirá a linha central do gol? Qual a relação trigonométrica você utilizará para resolver essa questão?*

Podemos perceber que os estudantes associaram a relação trigonométrica Tangente sem maiores dificuldades, pois possuíam o ângulo informado pelo problema, no caso 10º, o cateto adjacente, que é a distância da marca do pênalti até a goleira, e precisavam descobrir o cateto oposto, que é a altura que a bola atingirá a linha central do gol.

Mesmo esta aula tendo sido toda trabalhada dentro da sala de aula, por se tratar de um assunto do interesse dos estudantes, podemos perceber que a aula foi prazerosa para os mesmos, demonstrando participação e interesse em resolver as questões propostas.

Através do diagrama de blocos, apresentamos de forma sucinta a aula 4, conforme Figura 29.

Figura 29 - Diagrama da aula 4




Fonte: autora

### *4.1.5. Escanteio e a Trigonometria - Aula 5*

Neste quinto encontro, havíamos planejado aplicar todas as nossas atividades em apenas um período de 55 minutos, mas não foi tempo suficiente, pois as questões práticas levantaram algumas dúvidas nos estudantes que levaram mais tempo para serem sanadas.

Deu-se início a aula fazendo a entrega do material planejado para o estudante, conforme apresentado no Apêndice XII.

Os estudantes não tiveram dificuldades em entender a questão 2, e calcularam as cinco primeiras questões sem dúvidas relevantes, demonstrando interesse em calcular as distâncias percorridas pela bola em cada uma das situações propostas, conforme Figuras 30 e 31.

Figura 30 - Estudantes desenvolvendo exercícios da Aula 5.

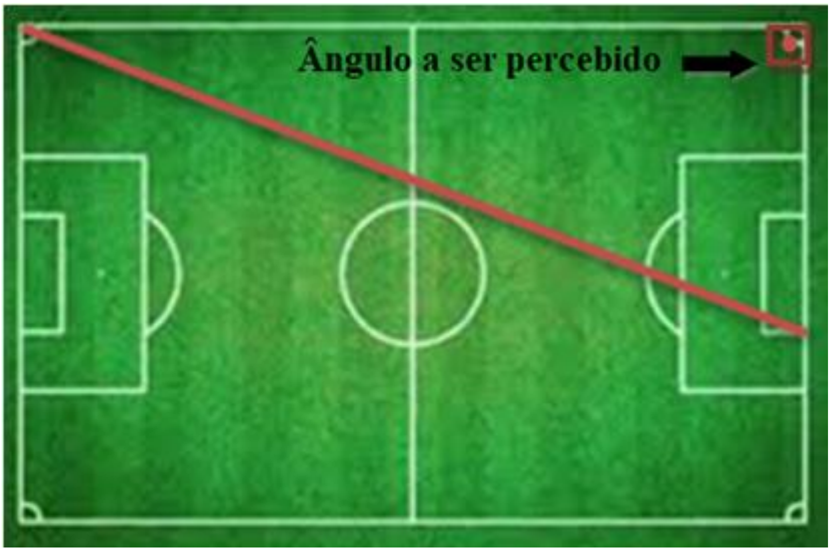
Fonte: autora

Figura 31 - Estudantes desenvolvendo exercícios da Aula 5

Fonte: autora

Na segunda etapa das questões os estudantes precisavam perceber que o triângulo retângulo formava o ângulo de 90º do outro lado do campo, conforme Figura 32.

Figura 32 - Ângulo a ser percebido pelos estudantes para desenvolvimento dos exercícios




Fonte: autora

Após perceberem onde se formava o novo triângulo retângulo, não tiveram dificuldades em calcular a distância percorrida pela bola em cada um dos chutes efetuados pelo jogador fictício Théo, utilizando a razão trigonométrica da Tangente.

A terceira parte da aula foi a que os estudantes mais gostaram, pois todos se deslocaram até a quadra da escola para fazer a medida da quadra de futebol, conforme Figuras 33 e 34.

Figura 33 - Estudantes medindo a quadra da escola

Fonte: autora

Figura 34 - Estudantes medindo a quadra da escola

Fonte: autora

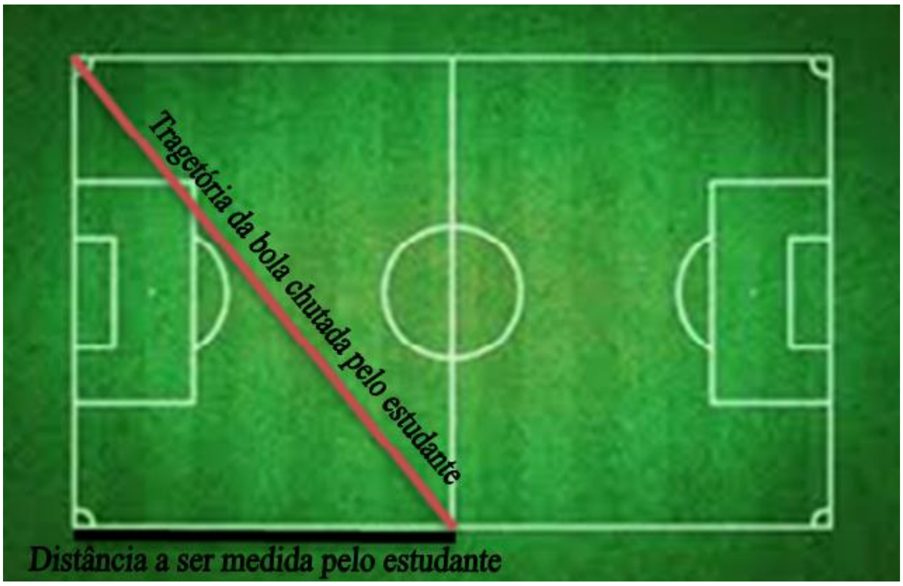
Os estudantes apresentaram dúvidas de como utilizar corretamente uma trena, pois não participam com frequência de aulas práticas.

Outra dúvida que surgiu foi em relação à linha que demarca o campo de futebol, pois as mesmas possuem uma largura de cerca de 10 cm, então tomamos como base sempre a medida até o final da linha.

Solicitamos então, para o primeiro grupo, composto por quatro duplas, que se deslocasse até um dos locais de cobrança de escanteio, onde permanecia um componente da dupla, enquanto o outro se dirigia até a diagonal oposta, para que quando o estudante chutasse o escanteio, sua dupla conseguisse marcar o ponto onde a bola cruzou a linha que demarca o campo de futebol.

Cada estudante da dupla, chutou a bola 5 vezes, enquanto o par fazia a anotação, na própria quadra, do ponto onde a bola cruzou a linha que demarca o campo. Logo após cada Estudante anotou a distância que cada chute seu ficou da linha que demarca o campo, na parte atrás da goleira, até onde sua bola saiu do campo, conforme demostrado na Figura 35.

Figura 35 - Exemplo do exercício da Aula 5

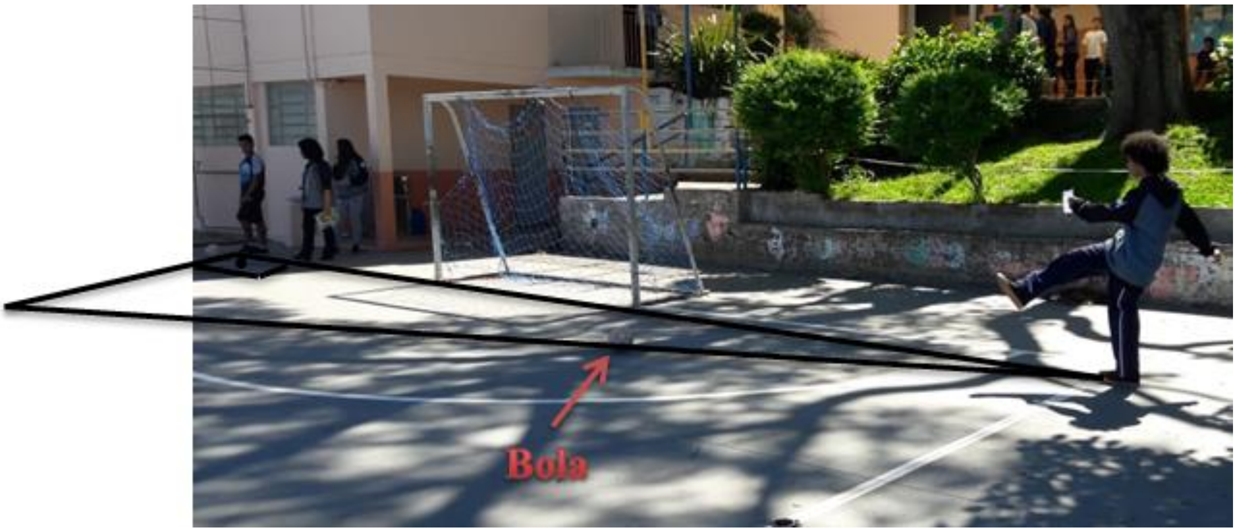



Fonte: autora

Houve muita empolgação por parte dos estudantes neste momento. Ouvimos frases do tipo “Nossa profe, a senhora podia fazer as aulas sempre assim!” e mais “Depois que fizermos esse trabalho com o futebol a senhora vai ensinar o próximo conteúdo com o quê?”, ou então “Assim fica fácil aprender Matemática!” e ainda “Finalmente consigo gostar e entender Matemática!”.

Esses dizeres nos deixaram muito satisfeitos, pois podemos perceber que os estudantes não falavam por falar, mas que de fato estavam felizes em participar de uma aula diferenciada, como mostra a Figura 36.

Figura 36 - Estudantes fazendo a cobrança de escanteio

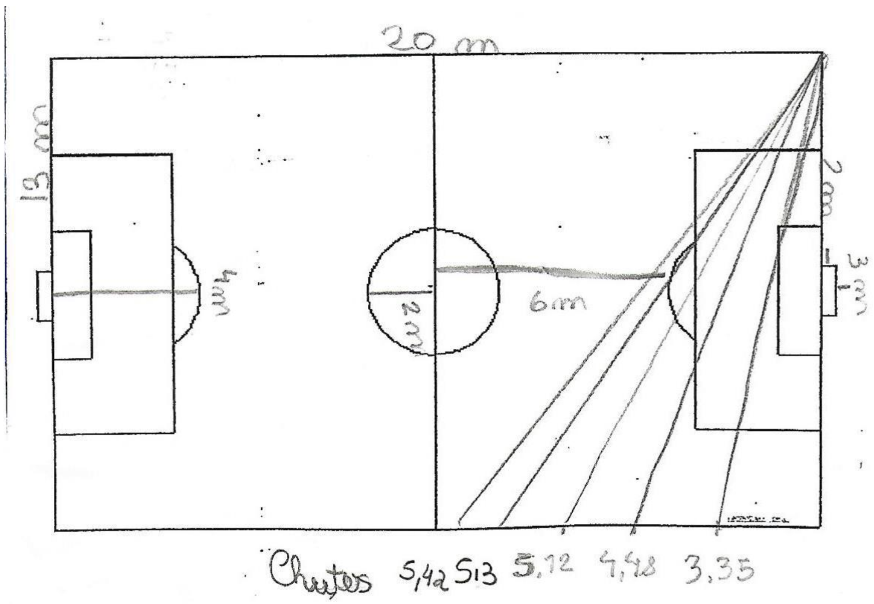



Fonte: autora

Para que os estudantes fizessem essas anotações foi fornecido pela professora um desenho de um modelo de uma quadra, conforme Apêndice IX.

Depois que todos os estudantes conseguiram anotar as medidas que suas bolas chutadas obtiveram em relação à linha de fundo e anotaram também, as medidas da quadra, retornamos a sala de aula, com as anotações feitas no modelo entregue, conforme Figura 37.

Figura 37 - Medidas feitas pelo estudante 9




Fonte: autora

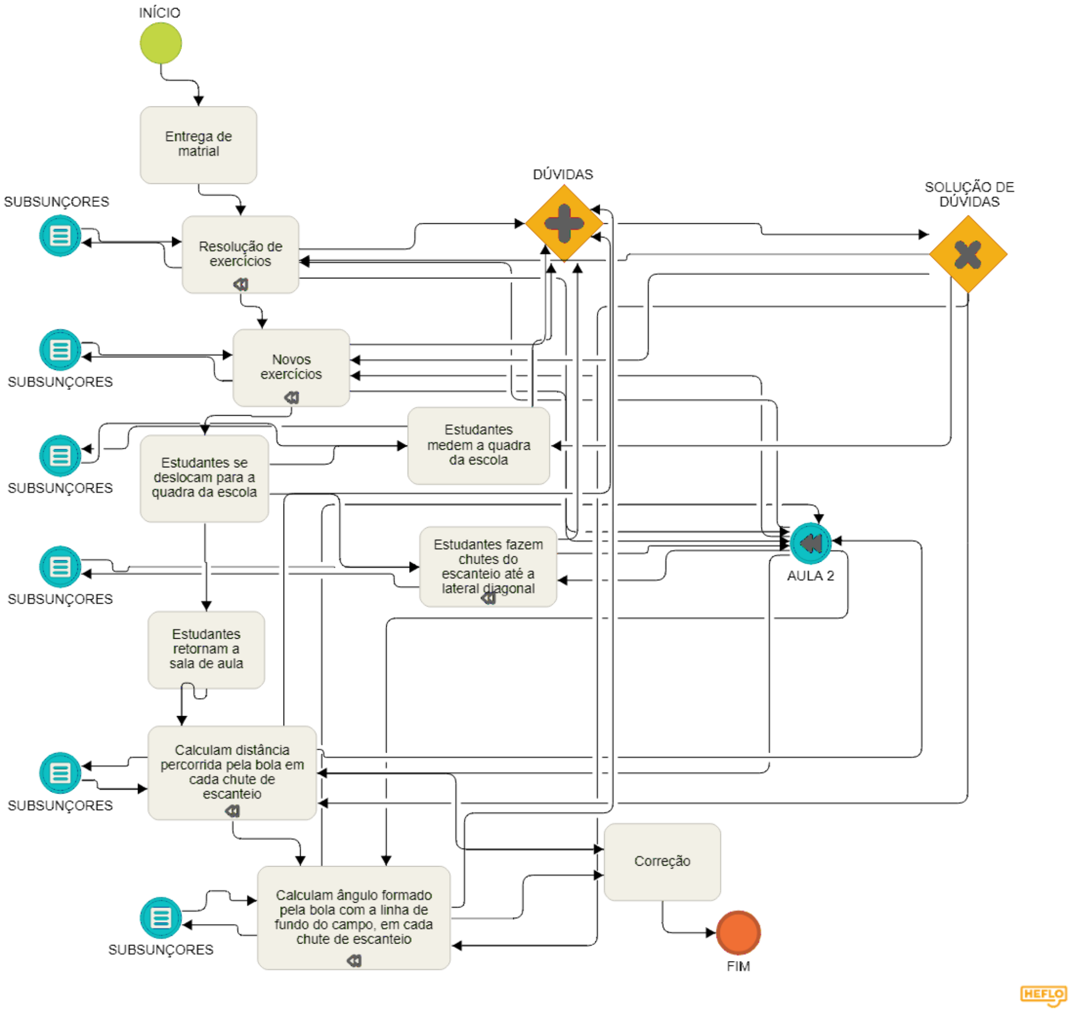
Como já esperávamos os estudantes não demonstraram interesse em retornar a sala de aula, e nos solicitaram tempo no pátio para fazerem os cálculos. Porém, para evitar que se distraíssem, decidimos voltar para a sala de aula, onde os mesmos não levaram muito tempo para se acomodar e começar a calcular.

Não houveram muitos erros de cálculo, mas o que nos deixou ainda mais satisfeitos foi ver que a turma toda participou da atividade, calculando e questionando durante a aula, inclusive houve participação ativa dos estudantes que normalmente apresentam maiores dificuldades e, até mesmo, dos mais tímidos.

Encerrou-se a Aula 5 com os estudantes questionando se a próxima aula de Matemática seria tão divertida como esta, e ainda, prometendo que se as próximas aulas fossem assim, todos iriam participar, pois como eles mesmo disseram, "foi muito tri".

Na Figura 38, apresentamos um diagrama para demonstrar a aula 5 de forma resumida.

Figura 38 - Diagrama da aula 5




Fonte: autora

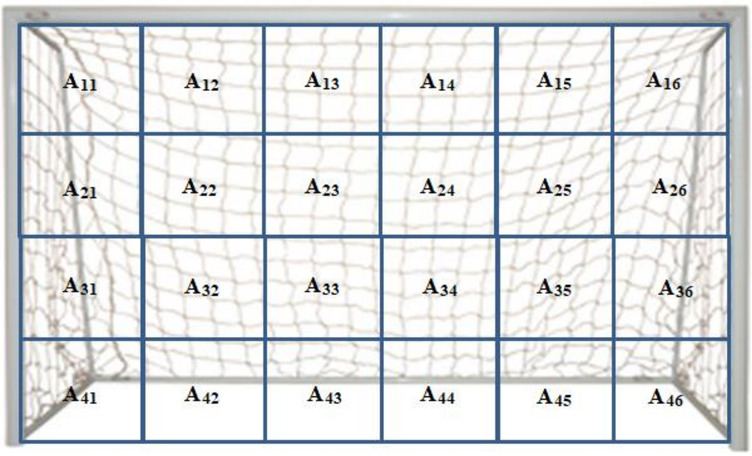
### *4.1.6. Pênalti e Quadrantes - Aula 6*

Após entregar para os estudantes o material representado no Apêndice XIV, fizemos a leitura da Questão 3, demonstrada na Figura 39.

**Questão 3**

Galera, nosso amigo Théo quer fazer uma nova cobrança de pênalti, mas resolveu trocar o futebol de campo pelo futebol de salão, sendo que a goleira do futebol de salão mede 2 metros de altura por 3 de comprimento e há uma marca a 6 metros do ponto médio até a linha do gol, para que seja feita a cobrança da falta chamada "pênalti". A cobrança da falta será novamente sem a presença do goleiro, mas agora irá chutar a bola em qualquer direção do gol, e desta forma teremos que ajudá-lo a determinar 2 ângulos, um formado pela elevação da bola, e outro pelo deslocamento lateral que a mesma fará. Para facilitar o nosso trabalho, Théo dividiu a goleira em 24 partes iguais, e irá chamar cada uma delas de quadrante, como mostra na figura abaixo. O primeiro número indica a linha, e o segundo a coluna a qual pertence.

Figura 39 - Figura ilustrativa da questão 3




Fonte: autora

Inicialmente os estudantes tiveram certas dificuldades em entender como seria desenvolvida a atividade, assim começamos salientando para os mesmos que havíamos combinado que a bola sempre entraria no centro de cada quadrante, e que desta forma precisaríamos descobrir qual o ponto central de cada um dos quadrantes.

Alguns estudantes ficaram se olhando, completamente sem saber o que fazer, chegaram a fazer comentários do tipo “Não entendi nada!”, ou ainda “Alguém entendeu alguma coisa?”. Percebemos então que seria necessária uma nova explicação.

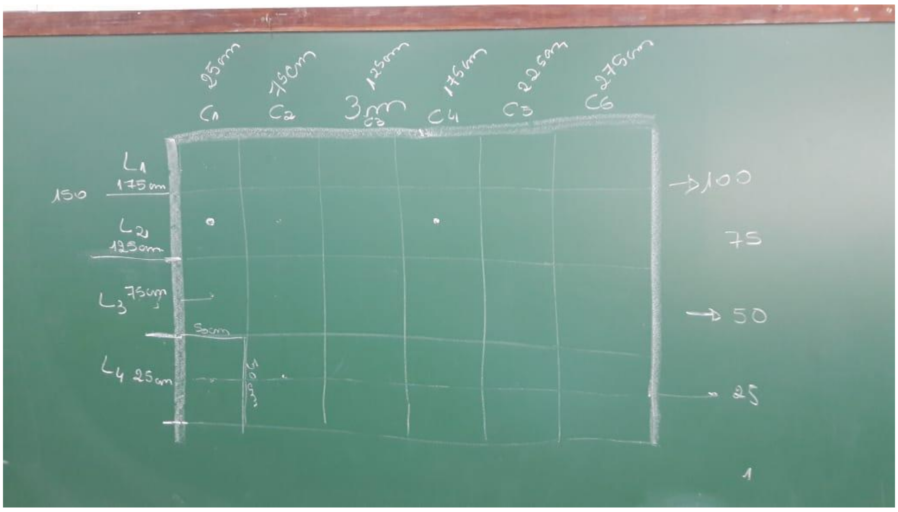
Começamos conversando sobre o que é ponto médio, pois ouvimos a seguinte pergunta: “Profe ponto médio é a mesma coisa que a metade?” explicamos então que quando falamos em ponto, nós remetemos a pensar em plano cartesiano, na reta das ordenadas(y) e das abscissas(x), e por isso seria necessário que os estudantes encontrassem duas medidas que representariam o ponto médio. A primeira medida seria a do ponto central do quadrante em relação ao chão, que representaria a reta das ordenadas, ou seja, a altura. O segundo ponto central do quadrante em relação a trave esquerda da goleira, que representaria a reta das abscissas, ou seja, o comprimento.

Mesmo diante dessas informações os estudantes permaneciam com dúvidas, então fizemos um exemplo no quadro negro, encontrando o ponto médio do quadrante $A_{41}$ juntamente com os estudantes, conforme mostrado na Figura 40.

Assim, alguns estudantes tomaram a iniciativa e começaram a calcular os demais pontos, então um estudante comentou, “Mas é só aumentar 50 cm do ponto médio do $A_{41}$ pra descobrir o ponto médio do $A_{42}$”, e o outro concluiu, “Sim e quando for “subir” também é só aumenta 50cm”. Essas informações foram colocadas por alguns estudantes para o grande grupo, mas nem todos entenderam, então a professora precisou explicar no quadro negro.

Porém, logo toda turma percebeu que descobrir o ponto médio dos quadrantes não era tão difícil como parecia num primeiro momento, e desta forma, juntamente com os estudantes fizemos a correção do exercício no quadro negro, conforme Figura 40.

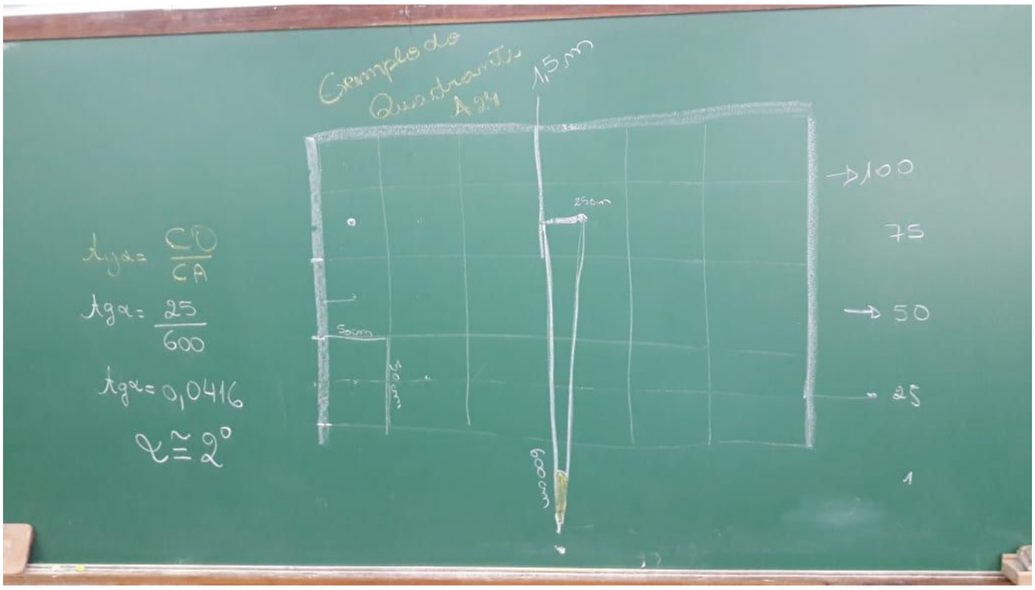
Figura 40 - correção da primeira questão da Aula 6




Fonte: autora

Após descobrirem os pontos centrais dos 24 quadrantes, explicamos que ao ser cobrado um pênalti, a trajetória da bola forma com o solo um ângulo, e esse ângulo é diferente para cada quadrante que a bola entrar, e que para cada quadrante 2 ângulos, um referente a altura da bola, e outro referente ao deslocamento lateral. Solicitamos que os estudantes calculassem cada um desses ângulos. Novamente fez-se necessária a explicação no quadro negro, conforme Figura 41, e ainda precisamos da Figura 42, que estava presente no material entregue para demonstrar como calcular os ângulos laterais.

Figura 41 - Explicação de como calcular o ângulo da trajetória da bola chutada, com o chão do campo de futebol.




Fonte: autora

Figura 42 - Exemplo de ângulo lateral entregue no material para os estudantes.


Fonte: autora

Neste momento percebemos que o ponto central de cada quadrante não deveria ter sido calculado em relação à trave esquerda da goleira, e sim em relação ao centro da goleira, pois a bola chutada pelo jogador na cobrança de um pênalti, encontra-se a uma distância da goleira, porém localizada bem ao centro da mesma. Então, juntamente com os estudantes, recalculamos os pontos centrais. Alguns logo perceberam que não seria necessário calcular novamente os 24 quadrantes, porém outros não tiveram a mesma percepção, e neste momento um estudante fez a seguinte colocação, “Ah profe, calcular tudo de novo?”, então outro estudante que percebeu que não seria necessário calcular todos os 24 quadrantes fez a seguinte proposta ao colega “Vamos fazer assim, você calcula metade e me dá as respostas, que depois eu te dou as respostas da outra metade, pode ser?”. A maioria da turma deu risada nesse momento, pois haviam percebido que seria necessário calcular somente metade dos quadrantes, na outra metade os pontos se repetiriam, pois todos os quadrantes da mesma linha teriam o mesmo ângulo, e todos os quadrantes da mesma coluna também possuíam o mesmo ângulo lateral. Esse momento de descontração da turma nos deixou satisfeitos, pois percebemos que os estudantes haviam entendido de fato o exercício proposto.

Não tiveram dificuldades em perceber que a razão utilizada neste caso para encontrar o ângulo é a Tangente, pois possuíam apenas os catetos dos triângulos.

Para que pudéssemos fazer a atividade prática desta aula, foi necessário preparar a goleira da escola no dia anterior a aplicação da aula. E, por se tratar de uma escola estadual, não possuíamos muitos recursos para fazer essa atividade, então utilizou-se de cordas para fazer as delimitações dos quadrantes, conforme apresentado na Figura 43

.

Figura 43 - Goleira dividida com cordas para aula prática

Fonte: autora

Por se tratar de uma divisão feita manualmente e com cordas de diferentes espessuras, nossa precisão não será exata, mas procuramos chegar o mais próximo possível das medidas, e explicamos para aos estudantes que existiriam pequenas diferenças das medidas reais, mas que faríamos os cálculos como se todos os quadrantes fossem de fato quadrados perfeitos de 50 cm de lados.

Convidamos então todos os estudantes para que se deslocassem até a quadra da escola onde havíamos dividido a goleira em quadrantes. Sempre que convidamos os estudantes a saírem da sala de aula para aulas diferenciadas eles comemoram e demonstram mais interesse, participando das atividades propostas.

No material entregue para os estudantes constava que seria necessário fazer as medidas da quadra da escola, porém eles já haviam medido a quadra em aulas anteriores, e lembravam as medidas, por isso esse primeiro exercício não foi necessário.

Os estudantes comentaram que a única coisa que mudava das medidas da quadra do jogador fictício Théo para a quadra de futebol da escola, era que a distância da marca da cobrança de pênalti até a goleira da quadra do Jogador Théo era de 6 metros e a da quadra da escola é de 4 metros.

Chegando a quadra da escola selecionamos dois estudantes para que fossem os juízes, ou seja, para que ficassem observando em qual quadrante a bola chutada pelo colega iria entrar.

O estudante chutava a bola ao gol, e o juiz observava em qual quadrante a bola entrava na goleira, para que fosse possível anotar os quadrantes, para posteriormente calcular os ângulos. Cada estudante chutou 5 vezes, sem poder acertar o mesmo quadrante duas vezes.

A Figura 44 demostra um estudante acertando o quadrante $A_{21}$.

Figura 44 - Estudante chutando a bola e os juízes observando em qual quadrante a bola está entrando na goleira

Fonte: autora

Ainda na Figura 44, podemos observar a concentração dos demais estudantes enquanto o colega chuta a bola em direção ao gol. Por se tratar de um assunto que eles gostam muito, o futebol, obtivemos a participação de todos. Empenharam-se em resolver as questões da melhor maneira, e também corrigiam os colegas. Nos casos em que o chute batia na trave, eles apoiavam o colega dizendo, “vai lá chuta de novo que você precisa de um quadrante, na trave não dá para nossa “brincadeira””, conforme Figura 45.

Figura 45 - Estudante chutando a bola na trave da goleira


Fonte: autora

Houve ainda os casos mais raros, onde a bola chutada bateu em uma das cordas, ou seja, no demarcador do quadrante, e assim como quando a bola bateu na trave, o estudante teve que chutar novamente, mas também houve apoio dos colegas, porém com um pouco mais de deboche, com dizeres como “Só você mesmo pra conseguir isso!”, ou ainda “Parabéns, é exatamente assim que você chuta nas provas de assinalar também”, conforme demostrado na Figura 46.

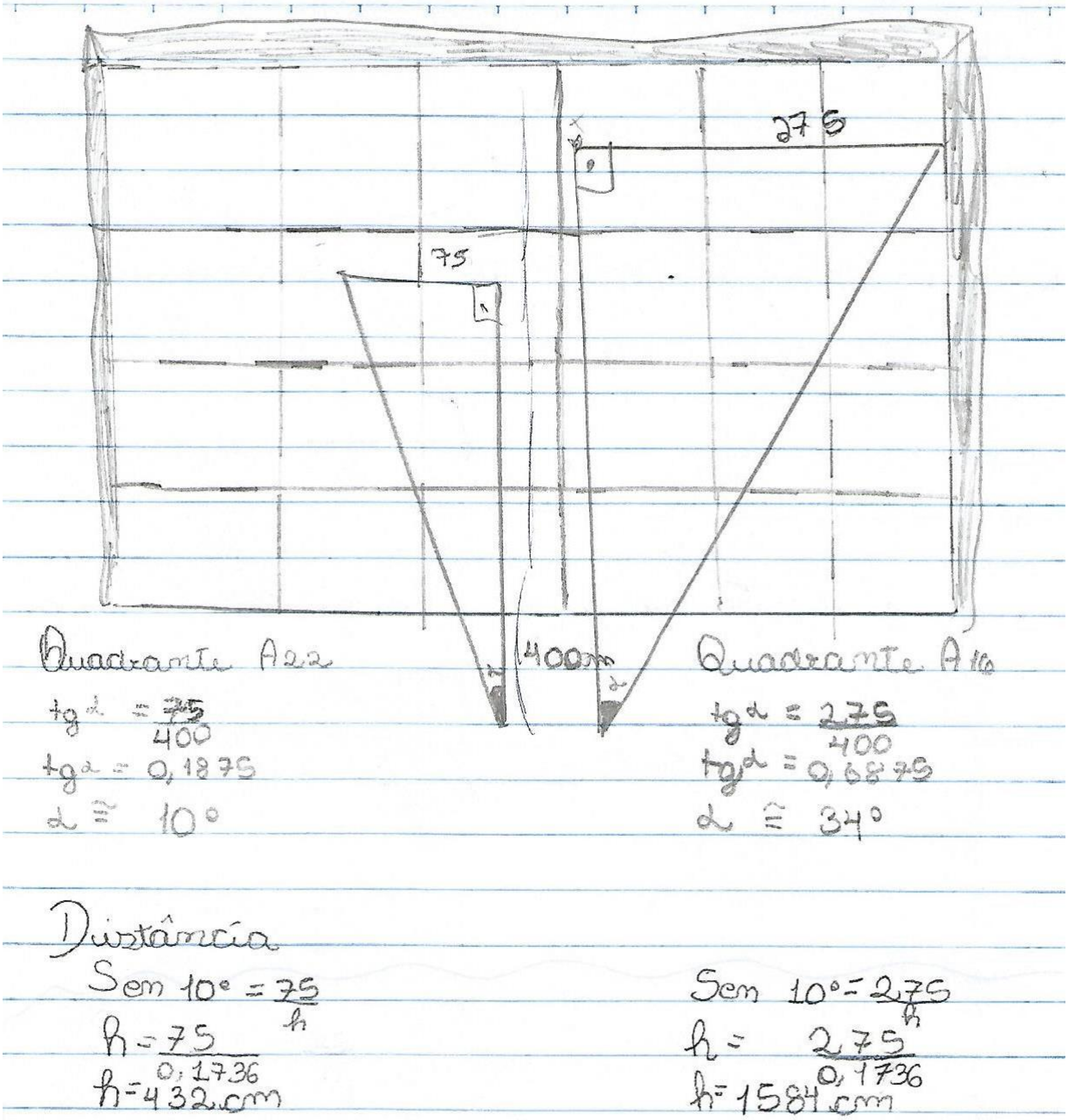
Figura 46 - Estudante chutando a bola nas cordas que delimita os quadrantes

Fonte: autora

Assim que todos os estudantes concluíram suas cobranças de pênaltis, retornamos a sala de aula para que os mesmos calculassem o ângulo formado pela trajetória da bola, e a distância percorrida pela mesma.

Alguns estudantes fizeram, inclusive os desenhos para ilustrar a atividade proposta, conforme Figura 47.

Figura 47 - Exercício do estudante 10 que chutou a bola nos quadrantes A22 e A16




Fonte: autora

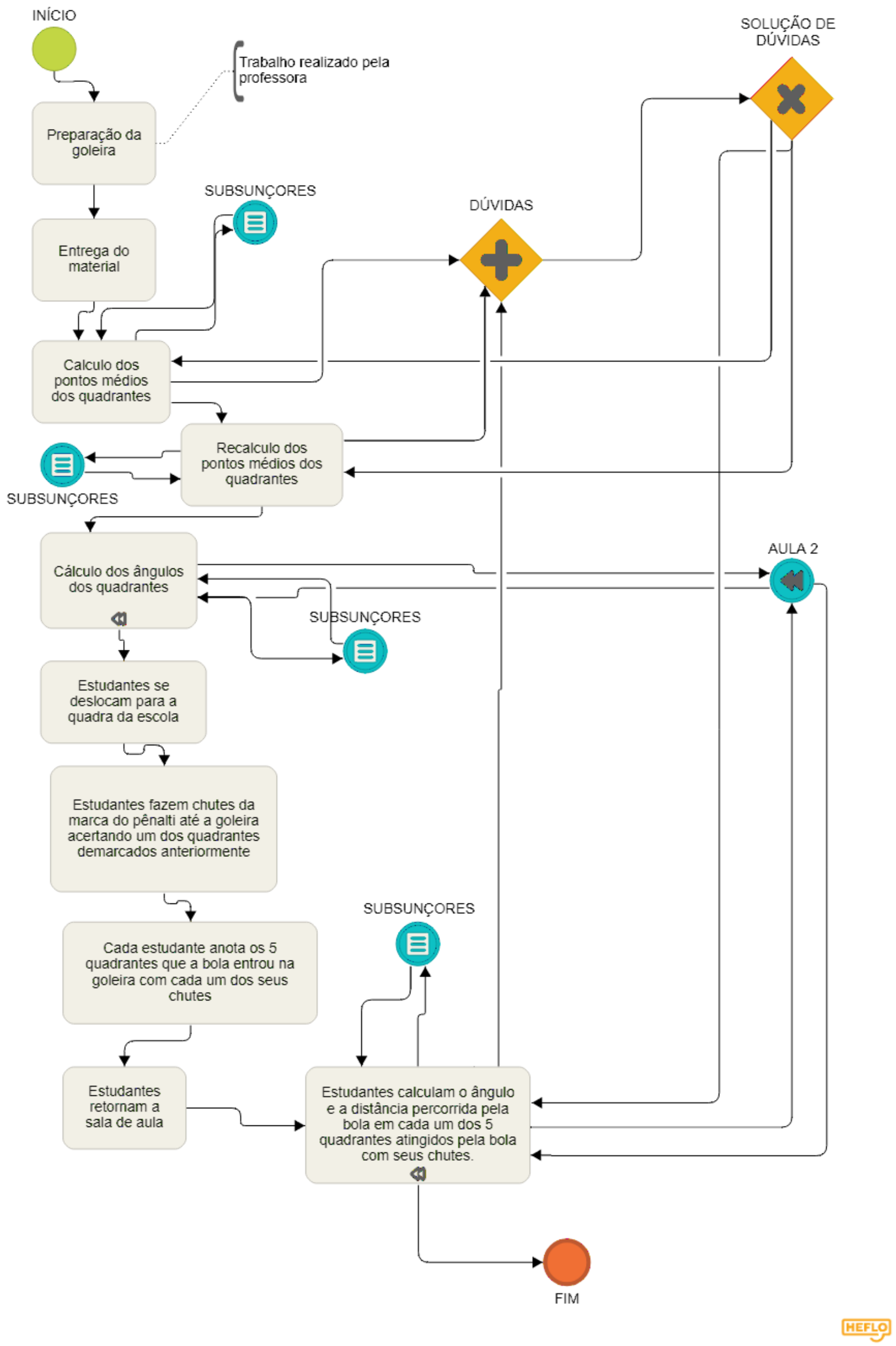
A maioria dos estudantes não conseguiu terminar os cálculos em sala de aula, então ficaram para serem calculados em casa e entregues para a professora na aula seguinte.

Os estudantes gostaram muito da aula, o fato de sair da sala de aula e ir para a quadra de esportes faz com que eles fiquem muito animados, querendo colaborar, para que isso possa acontecer mais vezes. Ofereceram-se, inclusive, para que, se na próxima aula fosse preciso preparar a quadra de algum modo, como fizemos com a goleira nessa aula, eles iriam ajudar a fazer a preparação, mesmo que fosse fora do horário das aulas.

Perceber a empolgação dos estudantes e a vontade de ajudar a fazer com que as aulas fiquem mais dinâmicas e práticas, nos causa grande satisfação, pois demonstra que eles ainda têm vontade de aprender se o conteúdo em questão for exposto de forma diferenciada.

A nossa Aula 6 está explicada de forma sucinta no diagrama da Figura 48.

Figura 48 - Diagrama da aula 6



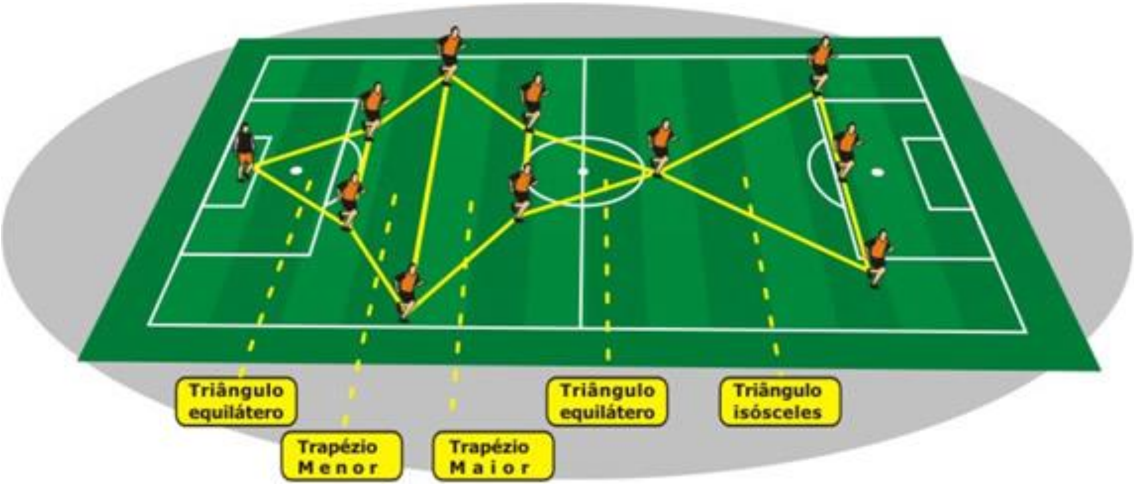

Fonte: autora

### *4.1.7. Esquema Tático - Aula 7*

Nesse encontro demonstramos para os estudantes, através do material entregue para os mesmos e apresentado no Apêndice XVI, que os esquemas táticos do futebol também utilizam Trigonometria.

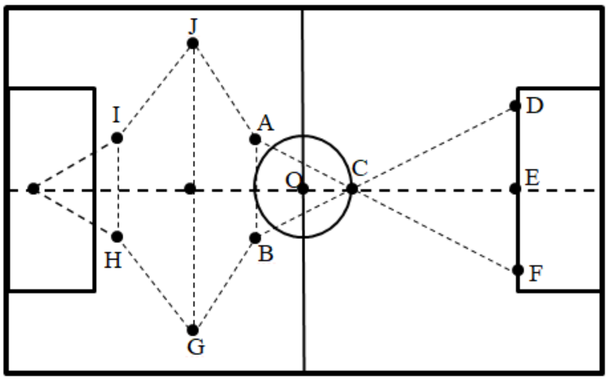
O esquema tático, em questão é utilizado no futebol de campo conhecido como 4-3-3 (4 zagueiros, 3 jogadores de meio de campo e 3 atacantes), e como a maioria da turma do Nono ano gosta de futebol, eles já conheciam, ou pelo menos haviam ouvido falar deste esquema tático. Mas, da mesma forma, utilizamos a Figura 49 e 50, para exemplificar o esquema, e principalmente as figuras geométricas por ele formadas.

Figura 49 - Exemplo de Esquema Tático 4-3-3




Fonte: http://www.pedagogia.com.br/artigos/geometriafutebol/index.php?pagina=6

Figura 50 - Esquema tático e figuras geométricas



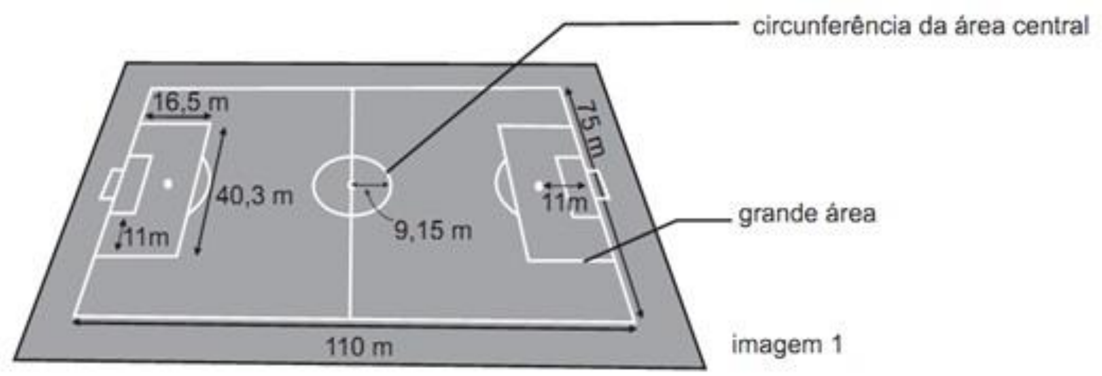

Fonte: autora

Ressaltamos as diversas figuras geométricas presentes no esquema, como: triângulos equiláteros, triângulos isósceles, trapézios, hexágonos e retângulos. Trouxemos ainda, para os estudantes, algumas informações importantes coletadas na figura em questão, como:

- O triângulo ABC é equilátero, e o vértice C pertence à circunferência.
- O ponto O é o centro da circunferência.
- Os pontos D, E e F pertencem ao lado do retângulo que representa a grande área.
- O ponto E é o ponto médio do segmento $\overline{DF}$
- O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{DF}$
- O segmento $\overline{AB}$ é perpendicular a reta $\overline{CE}$.

Para que os estudantes conseguissem calcular as questões que foram lançadas na sequencia, fornecemos aos mesmos as medidas do campo de futebol, conforme Figura 51.

Figura 51 - Medidas do campo de futebol




Fonte: [http://www.gramassinteticas.com.br/medidas-oficiais-da-quadra-de-futebol/](http://www.gramassinteticas.com.br/medidas-oficiais-da-quadra-de-futebol/)

De posse de todas essas informações, e utilizando as medidas do campo de futebol da escola, já coletadas em aulas anteriores, lançamos a primeira questão aos estudantes:

1) *O jogador da posição B chutou a bola para o jogador da posição C, e este para o jogador da posição D, sem interferência de outros jogadores. Qual foi a distância que a bola percorreu, em metros, saindo do jogador B até o jogador D?*

Como já imaginávamos os estudantes não conseguiram interpretar logo a questão, e por isso fizemos algumas perguntas aos estudantes, para facilitar a interpretação do problema, como por exemplo:

- *Você consegue visualizar algum triângulo retângulo?*
- *Como você conseguirá algumas medidas?*
- *Você possui medidas do campo?*

- *Você tem uma tabela com valores de Seno, Cosseno e Tangente? E isto pode lhe ajudar?*
- *Você pode utilizar semelhança de triângulos?*
- *Você lembra-se de ângulos opostos, complementares?*

Conforme as perguntas facilitadoras iam sendo feitas aos estudantes, o desenvolvimento da questão ia ficando mais evidente para os mesmos, que não tiveram maiores dificuldades em aplicar as fórmulas das razões trigonométricas para resolver as questões. Isso aconteceu também com as demais questões propostas no material entregue aos estudantes.

Após o término da resolução dos exercícios por parte dos estudantes, foi feita a correção dos mesmos no quadro negro, solucionando possíveis dúvidas.

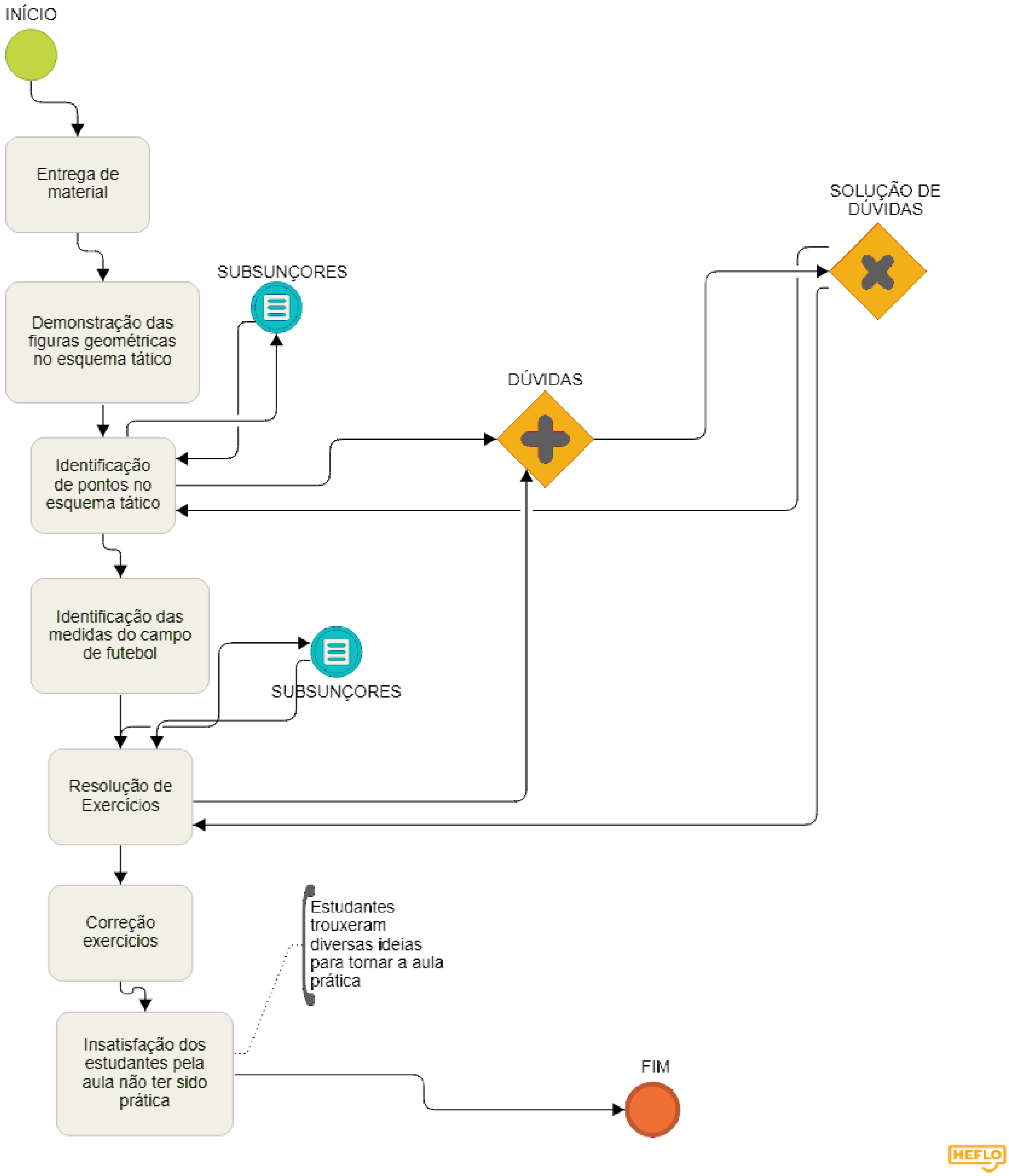
Porém essa foi uma aula toda ministrada em sala de aula, o que não agradou muito aos estudantes, que fizeram comentários do tipo "Profe nós poderíamos ter feito o desenho do esquema tático com giz na quadra da escola né?" e, mediante esses comentários, acreditamos que se tivéssemos feito à aula de forma mais prática e com a participação dos estudantes na quadra da escola, a aula teria sido mais produtiva e a aprendizagem teria acontecido de forma mais significativa.

Ou seja, após a aplicação da Aula 7, percebemos que o plano de aula deixou a desejar, pois poderíamos ter explorado mais a quadra da escola com o esquema tático, fazendo, juntamente com os estudantes, o esquema tático na quadra da escola, o que iria nos fornecer novas medidas paras as formas geométricas, novos ângulos e com isso novos cálculos para os estudantes reforçarem a aplicação prática dos conteúdos trigonométricos.

Desta forma, deixamos como sugestão que ao aplicar esse plano de aula, o professor que ministrar a mesma, explore de forma mais eficiente todas as medidas da quadra da escola, iniciando a aplicação em sala de aula e logo após encaminhando os estudantes para a quadra, desenhando o esquema tático conforme as medidas da quadra da escola. Podem ser refeitos todos os cálculos do exemplo, com as medidas da própria quadra da escola, gerando assim um aprendizado mais significativo.

A Figura 52 demostra a aula 7 de forma resumida através de diagrama.

Figura 52 - Diagrama da aula 7




Fonte: autora

### *4.1.8. Mapa Conceitual Final - Aula 8*

Após a apresentação das diversas formas de aplicabilidade das razões trigonométricas, e já de posse dos conceitos e fórmulas trigonométricas, solicitamos aos estudantes que elaborassem um novo Mapa Conceitual sobre Trigonometria.

Ao analisarmos um mapa conceitual, devemos vislumbrar que o mais importante não é verificar se está correto, mas sim analisar se ele viabiliza sinais de que o estudante está aprendendo significativamente o conteúdo. É possível observar isto através da quantidade de ramificações e da qualidade como os conceitos são expressos. Assim, um mapa pode apresentar apenas conceitos pertinentes, interligados ou não, bem como apresentá-los com as adequadas definições, que podendo estar corretas, parcialmente corretas ou incorretas. Desta forma, todas as alternativas são analisadas e classificadas de diferentes maneiras.

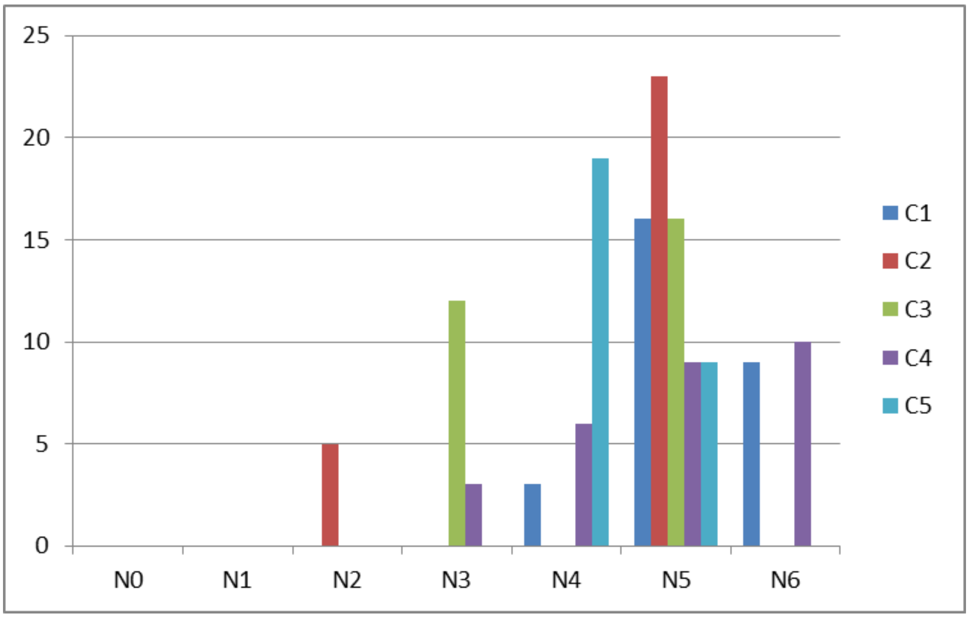
Os mapas elaborados pelos estudantes foram analisados através da taxonomia topológica de Cañas et al. (2006) e Miller (2008), conforme descrito no capítulo 4 desta dissertação e na Aula 1 deste capítulo, com a participação de 28 estudantes. Obtivemos os resultados apresentados no Quadro 6 e demonstrados no Gráfico 3.

Quadro 6 - Análise estrutural dos mapas conceituais finais

| | CRITÉRIOS | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **NÍVEL** | **C1** | **C2** | **C3** | **C4** | **C5** |
| **N0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **N1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **N2** | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| **N3** | 0 | 0 | 12 | 3 | 0 |
| **N4** | 3 | 0 | 0 | 6 | 19 |
| **N5** | 16 | 23 | 16 | 9 | 9 |
| **N6** | 9 | 0 | 0 | 10 | 0 |

Fonte: autora

Gráfico 3 - Análise estrutural dos mapas conceituais finais




Fonte: autora

Ao analisarmos qualitativamente os mapas conceituais finais, desenvolvidos pelos estudantes após a aplicação da UEPS, e comparando com os mapas conceituais feitos nas aulas 1 e 3, podemos perceber uma grande evolução, principalmente no que diz respeito aos conceitos, que anteriormente estavam classificados no Nível 1 e agora, em sua maioria, classifica-se no Nível 5.

Fazendo uma análise dos resultados apresentados no Quadro 5 e no Gráfico 2, obtemos as seguintes informações:

**C1 – Conceitos**

Em relação aos conceitos, 3 estudantes apresentaram conceitos relacionados à Trigonometria abrangendo 50% do seu mapa conceitual, porém 16 estudantes abrangeram mais de 50% do seu mapa conceitual com conceitos relacionados à Trigonometria.

O que podemos destacar é que 9 estudantes além de apresentarem seus mapas conceituais com mais de 50% de conceitos relacionados à Trigonometria, ainda informaram sua aplicabilidade.

**C2 – Termos de ligações e relações entre conceitos**

Dos 30 estudantes que participaram desta UEPS, 5 deles apresentaram em seus mapas conceituais, 50% da presença de tópicos relacionados à conceitos trigonométricos, enquanto que 23 apresentaram relações em todos os conceitos trigonométricos apresentados no mapa conceitual.

**C3 – Grau de ramificações**

Os estudantes que apresentaram de 3 a 4 ramificações foram 12. Porém 16 estudantes utilizaram 5 ou 6 ramificações na confecção de seus mapas conceituais.

**C4 – Profundidade Hierárquica**

A Hierarquia foi utilizada pelos estudantes da seguinte maneira:

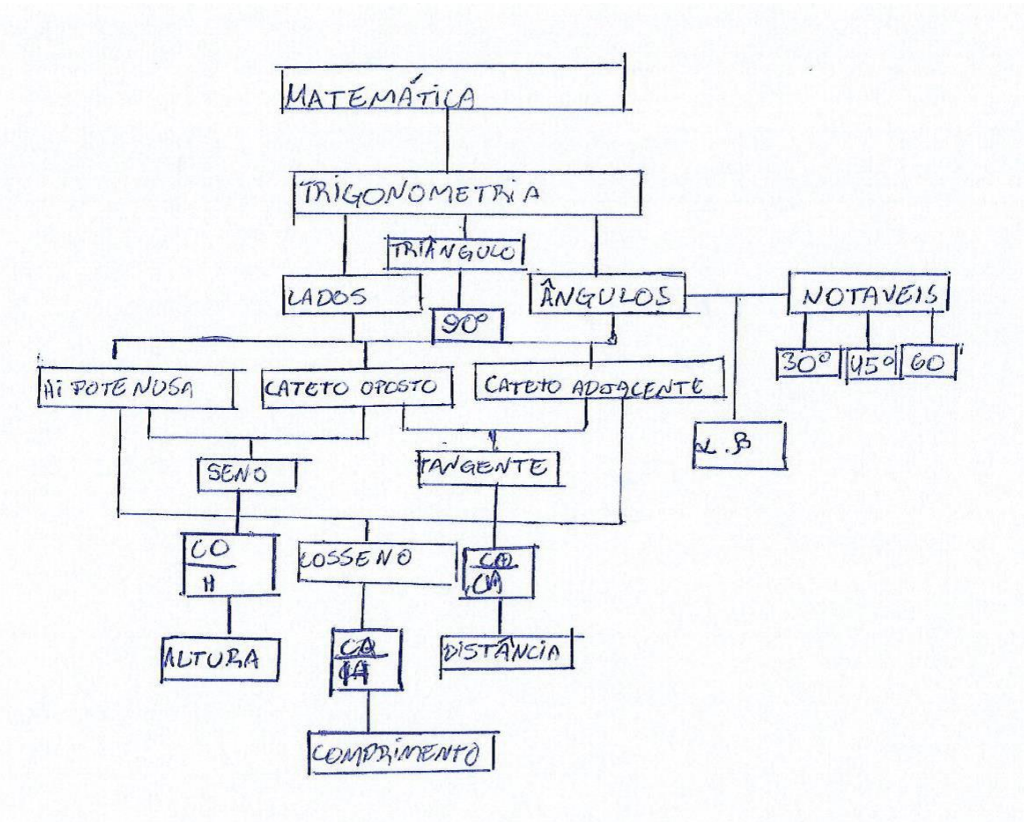
- 2 níveis hierárquicos – 3 estudantes.
- 3 níveis hierárquicos – 6 estudantes.
- 4 níveis hierárquicos – 9 estudantes.
- 5 ou mais níveis hierárquicos – 10 estudantes.

**C5 – Ligações Cruzadas**

As ligações cruzadas não foram utilizadas por 19 estudantes. Porém, pela primeira vez na aplicação da UEPS, 9 estudantes fizeram uso de 1 ou 2 ligações cruzadas.

Podemos perceber também que as ligações estão feitas corretamente, assim como as ramificações, que demonstram que o estudante aprendeu a aplicabilidade de cada uma das fórmulas, ou seja, dependendo da medida que precisa-se descobrir, usa-se uma das razões trigonométricas, como demostra a Figura 53.

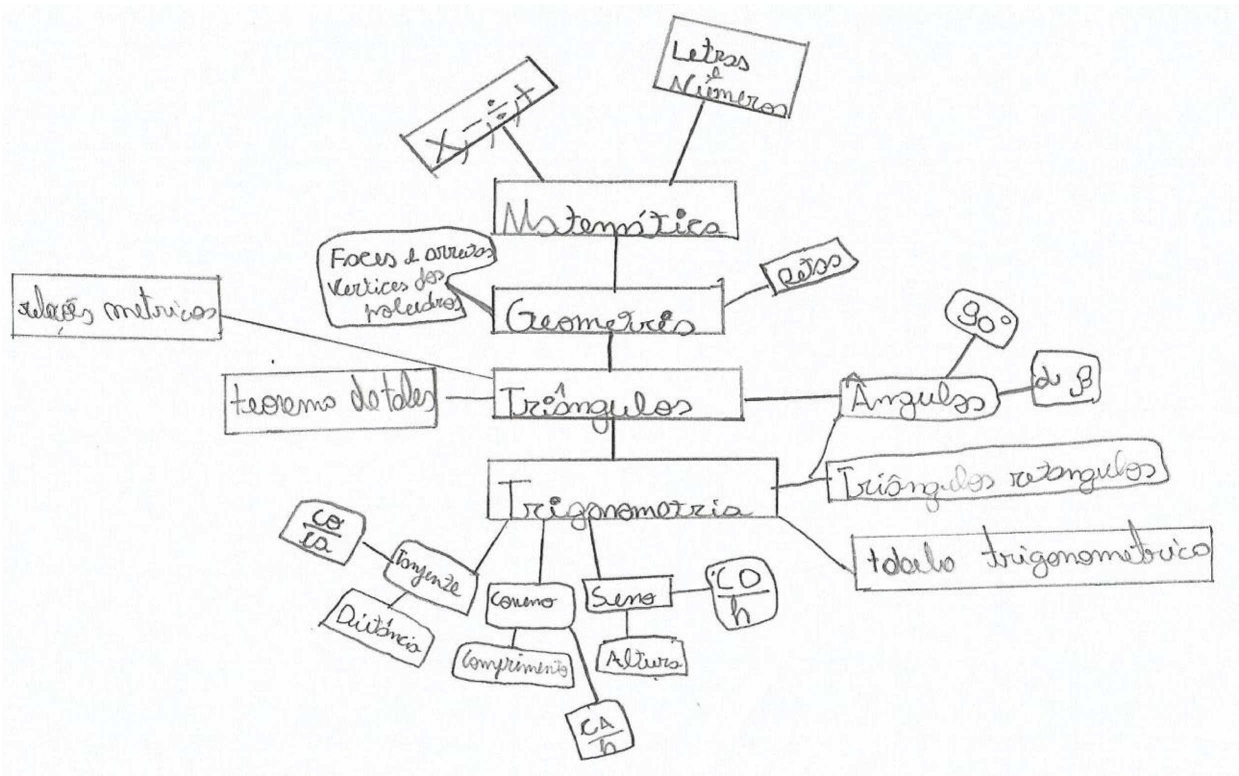
Figura 53 - Mapa conceitual Final - Estudante 11




Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelo estudante

Podemos perceber também que apesar de terem entendido a aplicação das razões trigonométricas, e demostrar corretamente isso no mapa conceitual, alguns estudantes enriqueceram os mapas com subsunçores que anteriormente não haviam sido utilizados, conforme demostrado na Figura 54. Neste, o estudante 12 relaciona a Tabela trigonométrica com a Trigonometria, ou ainda, comenta sobre faces, arestas e vértices ligados a geometria.

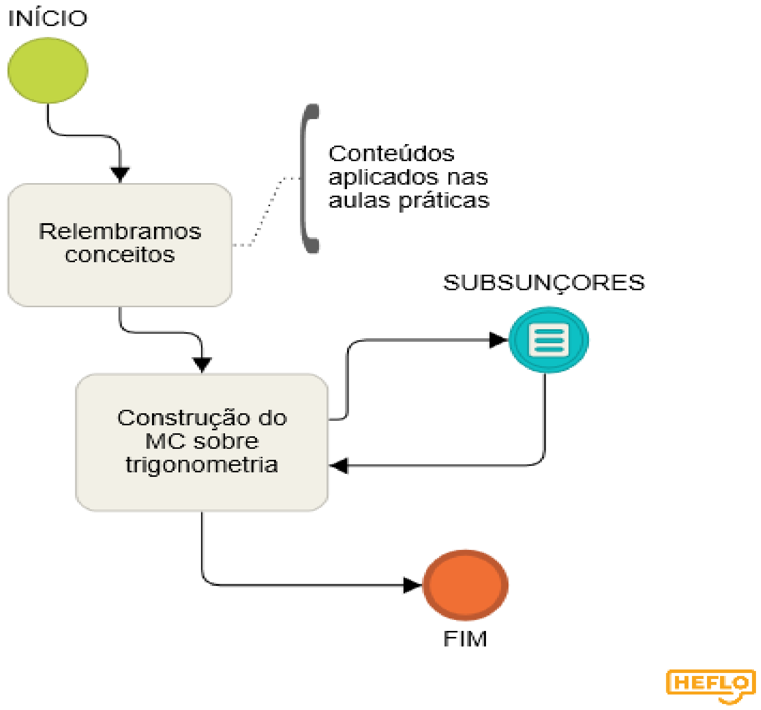
Figura 54 - Mapa conceitual Final - Estudante 12




Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelo estudante

A oitava e última aula, está demostrada de forma resumida através de diagrama na Figura 55.

Figura 55 - Diagrama da aula 8




Fonte: autora

# 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo são apresentados os resultados de uma pesquisa que buscou investigar as contribuições da utilização de uma UEPS como uma forma alternativa para o Ensino de um conteúdo estruturante da área da Matemática, objetivando o processo de construção do conhecimento, apoiada pela teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel.

As questões que envolvem as dificuldades no Ensino e na aprendizagem da Matemática ultrapassam as barreiras do Ensino Fundamental e Médio e chegam ao curso superior, pois, a Matemática é vista como uma ciência afastada da realidade, de difícil compreensão e, principalmente, causadora de uma alta porcentagem de reprovações (D'AMBROSIO, 1986).

Segundo dados levantados nessa pesquisa, conforme Apêndice IV, o conhecimento básico em Matemática dos estudantes ingressantes no ensino superior encontra-se deficiente, o que contribui para o insucesso dos mesmos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

O alto índice de reprovação e desistência das disciplinas, de Cálculo Integral e Diferencial estão diretamente ligados a falta de compreensão, por parte dos estudantes, de conceitos básicos tratados nos Ensinos Fundamental e Médio.

Através de questionários aplicados a monitores, estudantes e professores que ministram aulas nas disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial, em uma universidade comunitária da serra gaúcha, foi possível fazer o levantamento dos conteúdos estruturantes da Matemática, estudados no Ensino Fundamental e Médio, que servem como base para o entendimento e aprendizado do Cálculo, de acordo com o Apêndice IV.

A Trigonometria, identificada nessa pesquisa e demonstrada no Apêndice IV, como o conteúdo de maior dificuldade de compreensão por parte dos estudantes, é abordada no Nono ano do Ensino Fundamental. Desta forma, fizemos uma nova pesquisa com os estudantes do Nono ano, conforme Apêndice VI com o intuito de descobri um passatempo preferido dos mesmos. Essa pesquisa nos trouxe a informação que a maioria da turma gostava de jogar futebol

Com o objetivo de promover a aprendizagem de forma significativa, foi elaborada e aplicada uma UEPS com o tema central "Aprendizagem Significativa da Trigonometria". Nesta Unidade de Ensino Potencialmente Significativa tivemos a preocupação de elaborar aulas práticas com a participação dos estudantes e principalmente, demostrar a utilização das razões trigonométricas no futebol, tema este apontado pelos estudantes como sendo de interesse comum entre eles.

Na elaboração da UEPS fizemos uso da estratégia de aprendizagem ativa de forma a envolver o estudante na construção do seu próprio conhecimento. Desta forma, elaborou-se um ambiente reflexivo, prático e prazeroso de aprender, levando em consideração os subsunçores dos estudantes, demostramos a utilização da Trigonometria no futebol, fazendo com que os estudantes participassem dos exercícios propostos, de forma personalizada, pois cada estudante interagia com o exercício, criando suas próprias questões a serem resolvidas.

Porém, podemos observar a dificuldade dos estudantes em interpretar questões consideradas simples, como por exemplo, o raio de uma bola de futebol, ou ainda o uso de uma trena para medir a quadra de futebol da escola. Percebemos ainda que não estão acostumados a interpretar questões, recebendo-as sempre de forma resumida, fazendo com que os mesmos tenham preguiça de pensar, esperando que o professor, ou mesmo um colega resolva a questão pra poder utilizar a lógica para a resolução da questão.

Mesmo se tratando em Ensino Fundamental, constatamos a deficiência de certos conteúdos estruturantes nos estudantes, conteúdos esses que serviriam como pré-requisitos para o estudo da Trigonometria. Fez-se necessário uma revisão, pois algumas matérias ou foram tratadas de forma muito singela, ou nem ao menos foram vistas pelos estudantes.

Desta forma podemos constatar que a deficiência na educação Matemática não é exclusividade do ensino superior, acontece antes disso, acreditamos que desde os primeiros anos, pois os estudantes demostram dificuldades em interpretar conteúdos básicos, como exemplo, que a metade da bola de futebol é à medida do seu raio, ou seja, eles aprendem a fórmula e a aplicam em problemas objetivos propostos pelos professores, porém no momento que necessitam fazer uso desse conteúdo matemático em questões práticas tem dificuldades na aplicabilidade.

Por outro lado, houve indícios de aprendizagem por parte dos estudantes, pois se compararmos aos anos anteriores, em que os conceitos dos estudantes, em sua maioria, eram medianos, e que o conteúdo era exposto de forma tradicional, com a aplicação da UEPS, percebemos que os estudantes obtiveram conceitos maiores.

Percebemos também, que as questões da prova da Segunda Oportunidade,[3] que foram respondidas com mais êxito, foram às ligadas ao conteúdo de Trigonometria, auxiliando assim, diversos estudantes a encerrarem o ano letivo sendo aprovados para o Ensino Médio.

A forma utilizada para a avaliação da UEPS foi o mapa conceitual. O mesmo foi desenvolvido em três momentos, inicialmente somente fazendo uso dos subsunçores dos estudantes, após a aula expositiva e, por fim, na conclusão das aulas práticas. Analisando os

[3] Segundo o Regimento Escolar da Escola onde a UEPS foi aplicada, a Segunda Oportunidade consiste na nomenclatura da prova de recuperação que é aplicada aos estudantes que não atingiram o conceito para a aprovação durante o ano letivo, para que os mesmos busquem a aprovação nesta oportunidade. Segunda Oportunidade equivale ao termo Prova de Recuperação utilizado nos Regimentos Escolares anteriores.

mapas conceituais, pudemos perceber que o mapa conceitual intermediário revelou avanços em comparação com o primeiro, mas avanços expressivos podemos perceber ao compararmos o mapa conceitual intermediário com o final, pois esta comparação nos forneceu dados que confirmam a aprendizagem dos estudantes. Eles trabalharam intensamente, com dedicação, apresentando crescimentos em níveis bem satisfatórios.

Além dos mapas conceituais, percebemos que os estudantes falavam constantemente na satisfação das aulas práticas, do quanto estavam aprendendo daquela forma, e principalmente, do quanto é importante envolve-los nos conteúdos que a eles forem ensinados. Estes registros, apresentados ao longo do capítulo de Resultados e Discussões, foram resultados motivadores e muito positivos como respostas as questões postas inicialmente nesta dissertação. Valeu-nos interprestar estes registros como a valorização positiva desta proposta e outrossim, a evidência de que aplicações práticas no ensino, caracterizadas como UEPS, são soluções viáveis, efetivas e eficazes para o ensino da Matemática, nos tópicos abordados.

Cabe salientar ainda, que a ideia central do trabalho é que a aprendizagem significativa dos estudantes reflita quando estiverem em um curso superior da área das ciências exatas, mais precisamente na disciplina de Cálculo Integral e Diferencial. Porem no presente momento não é possível validar isso.

# 6. PRODUTO FINAL

Os resultados procedentes dos estudos dessa pesquisa fundamentou a elaboração de um produto que consiste em um material de apoio pedagógico, com planos de aulas de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), a qual se planejou, elaborou, aplicou e avaliou para a promoção da aprendizagem significativa da trigonometria.

O material foi desenvolvido para ser compartilhado, podendo servir de inspiração aos professores, como material didático principal ou complementar, para a abordagem da trigonometria, do nono ano do Ensino Fundamental. Nesse material de apoio pedagógico estão descritas as etapas para o desenvolvimento da UEPS, podendo as atividades e procedimentos serem adaptados para a realidade da escola, na qual a UEPS será aplicada.

## 6.1. Detalhamento das Aulas

O material de apoio pedagógico, com planos de aulas da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa é composto por oito aulas, descritas a seguir.

AULA 1: MAPA CONCEITUAL

Nesta primeira aula foram apresentados aos estudantes os conceitos, exemplos e dicas de construção de Mapa Conceitual. Logo após, foi solicitado que os mesmos, em grupos construíssem um mapa sobre um tema de livre escolha, mas com os conhecimentos que possuíssem naquele momento. Posteriormente, após pesquisa na internet sobre o tema selecionado anteriormente, o mesmo grupo fez e apresentou para a turma, um novo mapa conceitual, evidenciando desta forma o crescimento do mapa conceitual final, em comparação com o inicial.

Ainda neste primeiro encontro, foi solicitado aos estudantes que, individualmente elaborassem um mapa conceitual sobre a Trigonometria. Para o desenvolvimento do trabalho, os estudantes receberam orientações para refletirem sobre o contexto da Trigonometria, para que desta forma mostrassem os conhecimentos que tinham sobre o assunto, ou seja, para que fosse possível analisar quais eram os subsunçores dos estudantes.

Para a análise dos mapas conceituais, optou-se pela adoção da taxonomia topológica elaborada por Cañas et al. (2006) e Miller (2008), utilizada e validada pelo Projeto Conéctate al Conocimiento (MILLER, 2008).

A Taxonomia Topológica expõe uma maneira de classificar e avaliar estruturalmente a heterogeneidade de mapas conceituais através do uso de parâmetros comuns que viabilizem a aferição de avanços no processo de construção de mapas.

Segundo Cañas et al. (2006), essa taxonomia foi criada “[...]para servir como apoio na consecução dos objetivo específicos do projeto e como um instrumento de investigação[...]” .

Esta Topologia é composta por cinco critérios, e cada critério é avaliado em um nível de 0 a 6, sendo nível 0 (o mais simples) e o nível 6 o mais elaborado. Esses critérios são descritos por Boff (2017), como sendo:

- Critério C1 (utilização de conceitos):
  - ✓ Presença de trechos de textos no lugar de conceitos
  - ✓ Poucas palavras (aprendizagem mecânica),
  - ✓ Palavras isoladas.
- Critério C2 (termos de ligação e relações entre conceitos):
  - ✓ Presença ou não de termos de ligação.
  - ✓ Palavras que são utilizadas.
  - ✓ Relações adequadas entre os conceitos.
- Critério C3 (grau de ramificação):
  - ✓ Pontos de ramificações.
  - ✓ Número de conceitos que apresentam ramificações.
- Critério C4 (profundidade hierárquica):
  - ✓ Número de ligações entre o conceito raiz e o conceito mais afastado (este critério só tem sentido se o mapa possuir pelos menos um conceito raiz).
- Critério C5 (presença de ligações cruzadas):
  - ✓ Proposição entre conceitos (formando circuito fechado).

Com base nesses critérios, foi organizado um quadro para realizar a análise estrutural dos mapas conceituais, no qual apresentamos as relações entre critérios e níveis dessa Taxonomia Topológica (Quadro 1).

Quadro 7 - Relação de Critérios e níveis na análise estrutural dos mapas conceituais

| NÍVEL | CRITÉRIO | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **C1 Conceitos** | **C2 Termos de Ligações** | **C3 Grau de Ramificações** | **C4 Profundidade Hierárquica** | **C5 Ligações Cruzadas** |
| **N0** | Nenhuma associação com conceitos relacionados ao tema | Não apresenta | Linear (0 ou 1 ponto) | Nenhuma | Nenhuma |
| **N1** | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (Subsunçores) | Apresenta menos de 50% | Linear (0 ou 1 ponto) | Nenhuma | Nenhuma |
| **N2** | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. | Apresenta menos de 50% | Ramificação baixa (2 pontos) | 1 nível | Nenhuma |
| **N3** | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (inferior a 50%) | Apresenta 50% | Ramificação média (3 ou 4 pontos) | 2 níveis | Nenhuma |
| **N4** | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (igual a 50%) | Apresenta 50% | Ramificação alta (5 ou 6 pontos) | 3 níveis | Nenhuma |
| **N5** | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (Superior a 50%) | Apresenta mais de 50% | Ramificação alta (5 ou 6 pontos) | 4 níveis | 1 ou 2 ligações |
| **N6** | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria e suas aplicações. (Superior a 50%) | Apresenta mais de 50% | Ramificação altíssima (7 ou mais pontos) | 5 ou mais níveis | Mais de 2 ligações |

Fonte: adaptado de Boff (2017).

Importante ressaltar que os níveis, para cada critério foram adaptados para este estudo, considerando os conceitos da Trigonometria.

De forma resumida, o Quadro 2 apresenta os símbolos correspondentes para cada critério e nível.

Quadro 8 – Avaliação estrutural dos mapas conceituais.

| Nível | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 |
|---|---|---|---|---|---|
| N0 | NC | 0 | 0-1 | 0 | 0 |
| N1 | $C_1 < 0,5$ | $C_1 < 0,5$ | 0 - 1 | 0 | 0 |
| N2 | $C_2 < 0,5$ | $C_1 > 0,5$ | 2 | 1 | 0 |
| N3 | $C_1 = 0,5$ | $C_1 = 0,5$ | 3 - 4 | 2 | 0 |
| N4 | $C_2 = 0,5$ | $C_2 = 0,5$ | 5 - 6 | 3 | 0 |
| N5 | $C_1 > 0,5$ | $C_1 > 0,5$ | 5 - 6 | 4 | 1 - 2 |
| N6 | $C_2 > 0,5$ | $C_2 > 0,5$ | ≥ 7 | ≥ 5 | >2 |

Fonte: adaptado de Boff (2017).

O Quadro 3 tem o intuito de descrever o significado atribuído a cada sigla utilizada no Quadro 2.

Quadro 9 – Siglas utilizadas no Quadro 2.

| SIGLAS | Significado |
|---|---|
| NC | Nenhuma associação com conceitos relacionados ao tema |
| $C_1 < 0,5$ | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (subsunçores) |
| $C_2 < 0,5$ | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. |
| $C_1 = 0,5$ | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (inferior a 50%) |
| $C_2 = 0,5$ | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (igual a 50%) |
| $C_1 > 0,5$ | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria. (Superior a 50%) |
| $C_2 > 0,5$ | Presença de tópicos relacionados à Trigonometria e suas aplicações. (Superior a 50%) |

Fonte: adaptado de Boff (2017).

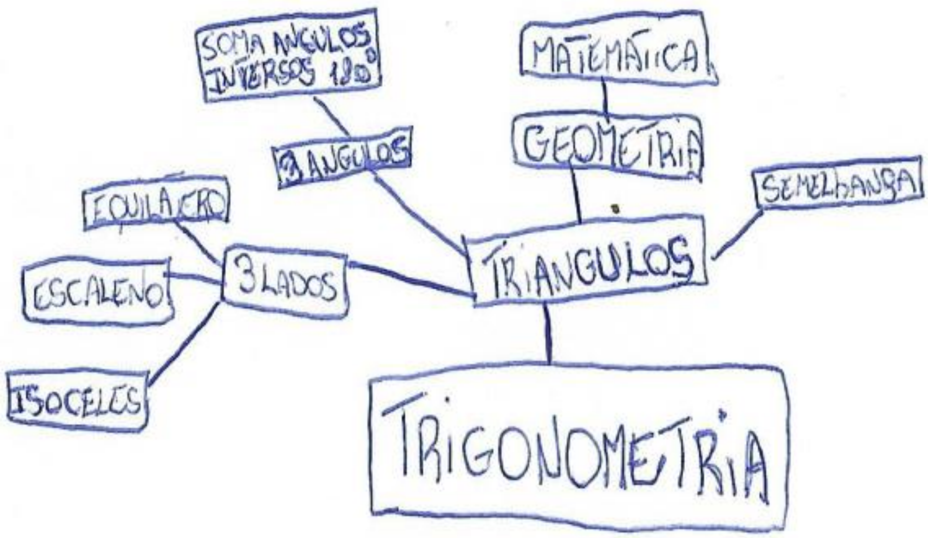
Segundo Boff (2017), quanto ao critério C2, a ausência de termos de ligação é representada por 0 (zero), a presença de metade ou menos de termos de ligação entre conceitos por (< 0,5), a presença de mais da metade por (> 0,5) e o número (1) representa a presença de termos de ligações em todos os conceitos apresentados no mapa conceitual.

Ainda segundo Boff (2017), aos critérios C3, C4, C5, os números indicam a quantidade de pontos de ramificações, os números de ligações entre conceito raiz e o mais afastado, e os números de ligações cruzadas, respectivamente, presentes no mapa conceitual.

Como coloca Moreira (2011), os mapas conceituais são instrumentos que podem levar a profundas modificações na maneira de ensinar, de avaliar e de aprender, por promoverem a Aprendizagem Significativa, principalmente quando comparados com técnicas didáticas voltadas para a aprendizagem mecânica. Porém, é necessário que os estudantes adquiram habilidades que os auxiliem a construção desses mapas.

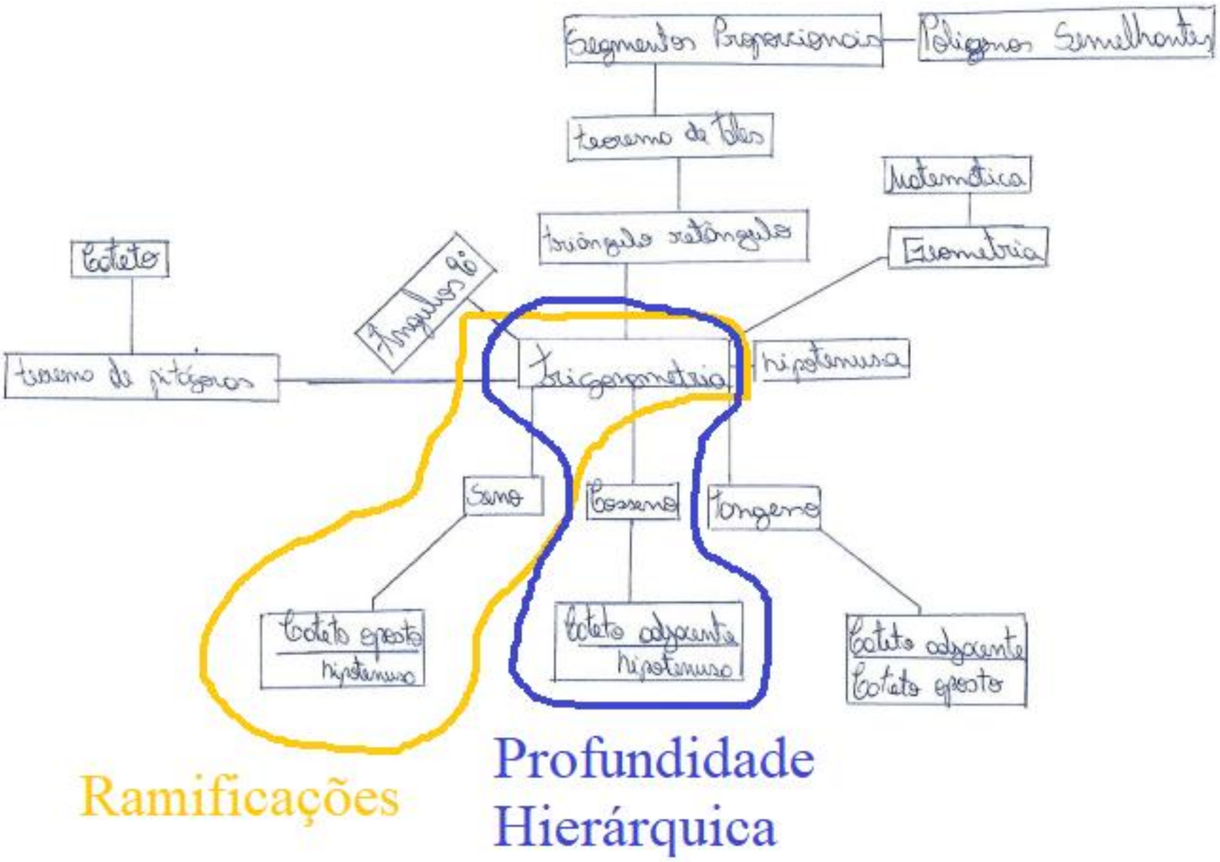
Como modelo de Critérios de análise dos Mapas conceituais confeccionados pelos estudantes e examinados pela autora, apresentamos as Figuras 56 e 57.

Figura 56 - Mapa Conceitual elaborado pelo Estudante 3.




Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelo estudante

Figura 57 - Mapa Conceitual elaborado pelo Estudante 4.

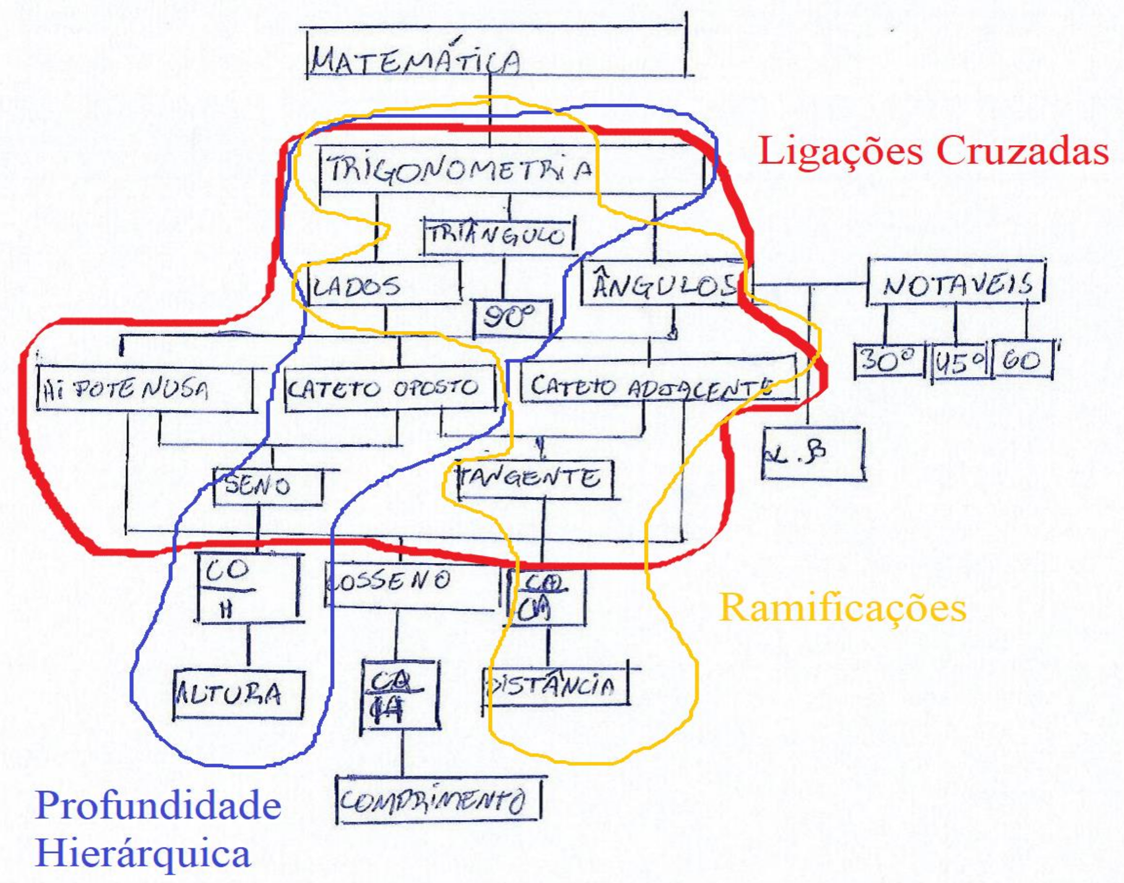



Fonte: autora

Ao Analisarmos o mapa conceitual da Figura 56, percebemos, conforme apresentado no Quadro 1, que o mesmo encontra-se no Nível 0 em relação aos conceito (C1), pois apresenta nenhuma associação com o tema, e nos demais critérios também é classificado como Nível 0 . Já o mapa da Figura 57, em relação aos conceitos está no Nível 4, visto que 50% do mapa conceitual explana sobre conceitos trigonométricos. Em relação às ramificações é classificado como Nível 3, pois possui 3 pontos de ramificações sobre o tema Trigonometria. Possui, ainda 3 níveis de profundidade hierárquica, classificado como Nível 4, e não possui Ligações Cruzadas.

Na Figura 58 apresentamos um exemplo de mapa conceitual com Conceitos N6, pois apresenta aplicabilidades dos conceitos. Os termos de ligações somam mais de 50% do mapa falando em Trigonometria, o Grau de Ramificação é classificado como alto, cerca de 6 pontos e apresenta Ligações Cruzadas.

Figura 58 - Mapa Conceitual explicativo




Fonte: autora

**Plano de Aula 1**

Mapa Conceitual é uma estratégia potencialmente facilitadora da Aprendizagem Significativa. Também é uma técnica muito flexível e em razão disso pode ser usado em diversas situações, para diferentes finalidades: como instrumento de análise do currículo, técnica didática, recurso de aprendizagem e avaliação (MOREIRA; BUCHWEITZ, 1993).

Segundo Moreira (2012b, p.1), “mapas conceituais são diagramas de significados, de relações significativas; de hierarquias conceituais, se for o caso. Mapas conceituais não buscam classificar conceitos, mas sim relacioná-los e hierarquizá-los.”

Na nossa aula sobre mapas conceituais, iniciaremos comentando da importância de fazer anotações nas aulas e de como fazê-las, em seguida mostraremos como o mapa conceitual pode ajudá-los na organização dos conteúdos a serem estudados.

**Desenvolvimento**

O plano de aula será desenvolvido com a duração de um período de 55 minutos.

**Pré requisitos**

Não há pré requisitos.

**Objetivos**

Compreender o que é um mapa conceitual e qual a sua importância.

Identificar as características mais importantes de um mapa conceitual.

Elaborar um mapa conceitual.

Reconhecer o mapa conceitual.

**Avaliação**

Durante a aula observando o interesse e a participação do Estudante, bem como a construção de um mapa conceitual.

**1º aula**

**Duração:** 55 minutos.

**Tema:** Mapa Conceitual

**Procedimento:** Iniciaremos a aula comentando sobre o que devemos anotar enquanto o professor ministra sua aula, será que devemos anotar tudo? E se não conseguirmos anotar tudo que o professor fala, o que devemos fazer? Como devemos proceder?

Logo após abordaremos o tema mapa conceitual, conceito, tipos de mapas conceituais, para que eles servem, como se constrói e como o estudante pode verificar seu próprio nível de aprendizagem à partir da elaboração de um mapa conceitual. Enfatizaremos que não existe “o mapa conceitual correto” mas que sua estrutura pode apontar para o tipo de aprendizagem que se alcançou ao estudar determinado tema. Sugerir aos estudantes que elaborem seus próprios mapas conceituais e apresentá-los para a turma.

**Introdução**

Para que possamos trabalhar juntos, a turma será dividida em grupos de 4 ou 5 estudantes e fazer uma exposição oral, primeiramente sobre a importância de anotar o que o professor fala e também de como anotar o que ele fala.

As porque devo anotar o que meu professor fala se está tudo escrito no livro?

Simples, primeiro porque sempre haverá pontos importantes que não estarão nos livros, e segundo por que as anotações:

- Ajudam a memorizar a matéria
- Ajudam a relembrar os pontos principais
- Importante fonte de material para uma apresentação
- Ajuda na concentração
- Constrói a compreensão
- Ajuda a fazer questionamentos

Então como devo anotar o que meu professor fala? Simples, segue abaixo algumas dicas que irão facilitar você na hora de estudar o conteúdo, bem como na memorização de alguns itens:

- Faça anotações breves
- Use abreviações e símbolos
- Use suas próprias palavras, mas fórmulas, definições e fatos específicos devem ser anotados com exatidão.
- Faça um diagrama
- Ou melhor, faça um mapa conceitual

Você não sabe o que é um mapa conceitual? Vamos conversar um sobre isso!

Neste momento faremos algumas perguntas que levem os estudantes a refletirem sobre o tema que vai ser estudado ao passo que verifica seus conhecimentos prévios sobre o assunto. Exemplos de perguntas:

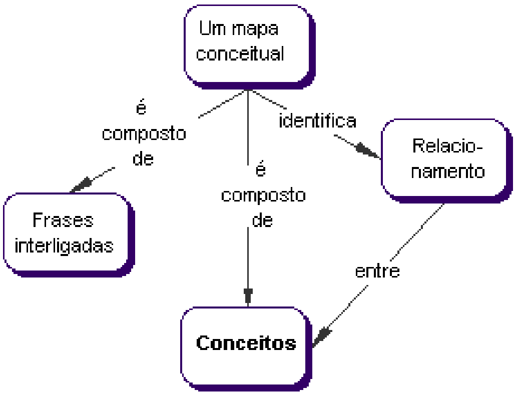
a) Qual é a imagem que vem a sua mente quando você ouve a palavra “mapa”?

b) Você já utilizou um mapa? Para que ele serve?

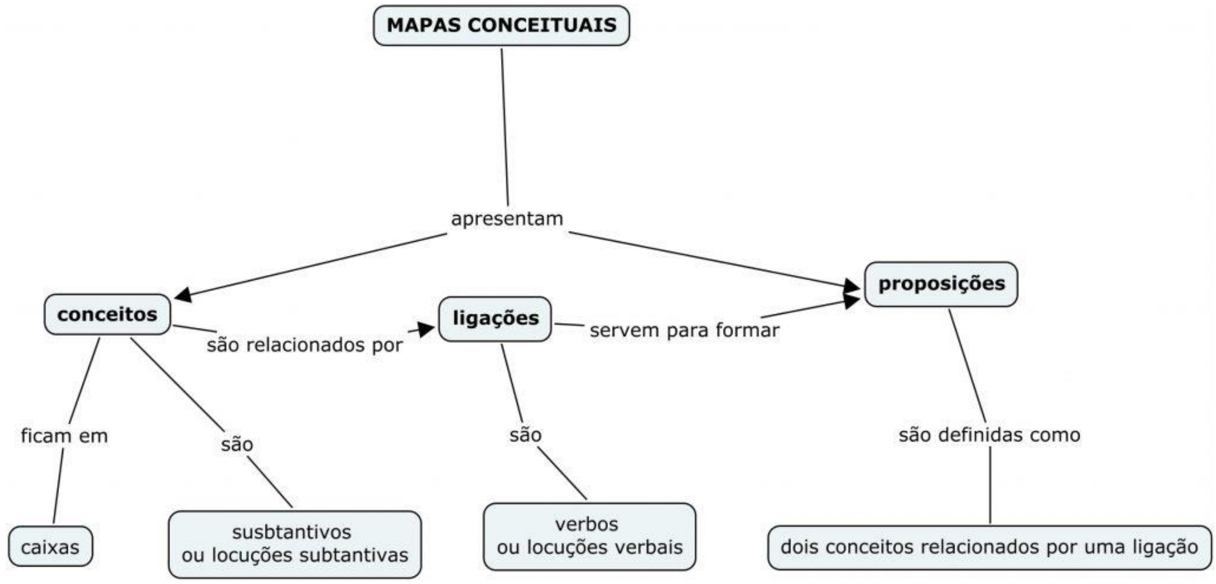
c) Você já conseguiu aprender alguma coisa utilizando um mapa? O quê?

d) Você sabe o que é um mapa conceitual?

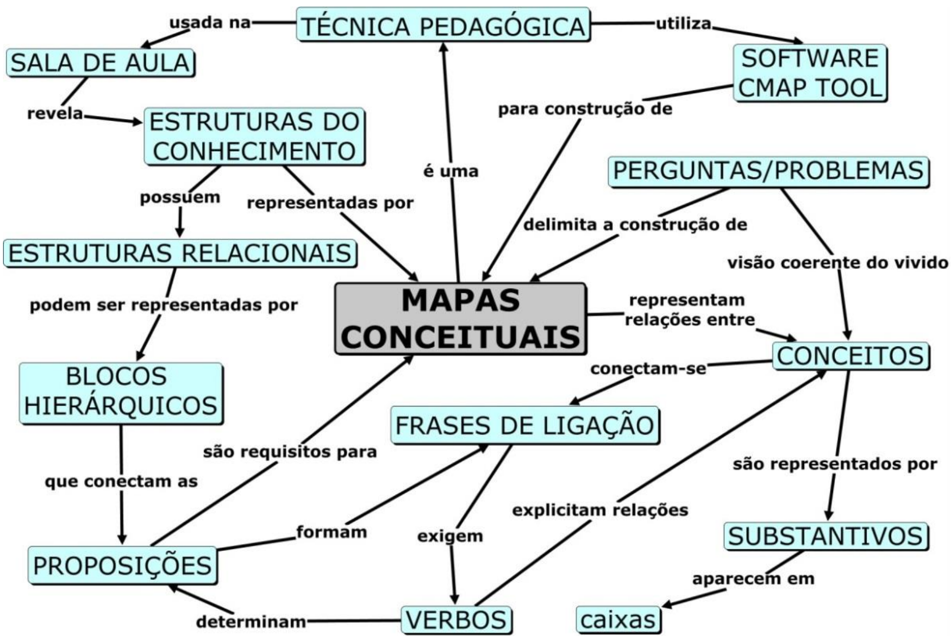
Mapas Conceituais: são diagramas que indicam relações significativas entre conceitos de um conteúdo, um tema ou um assunto de uma disciplina ou um conteúdo específico. Veja alguns exemplos:




Fonte: http://penta.ufrgs.br/tege/mapas4.htm

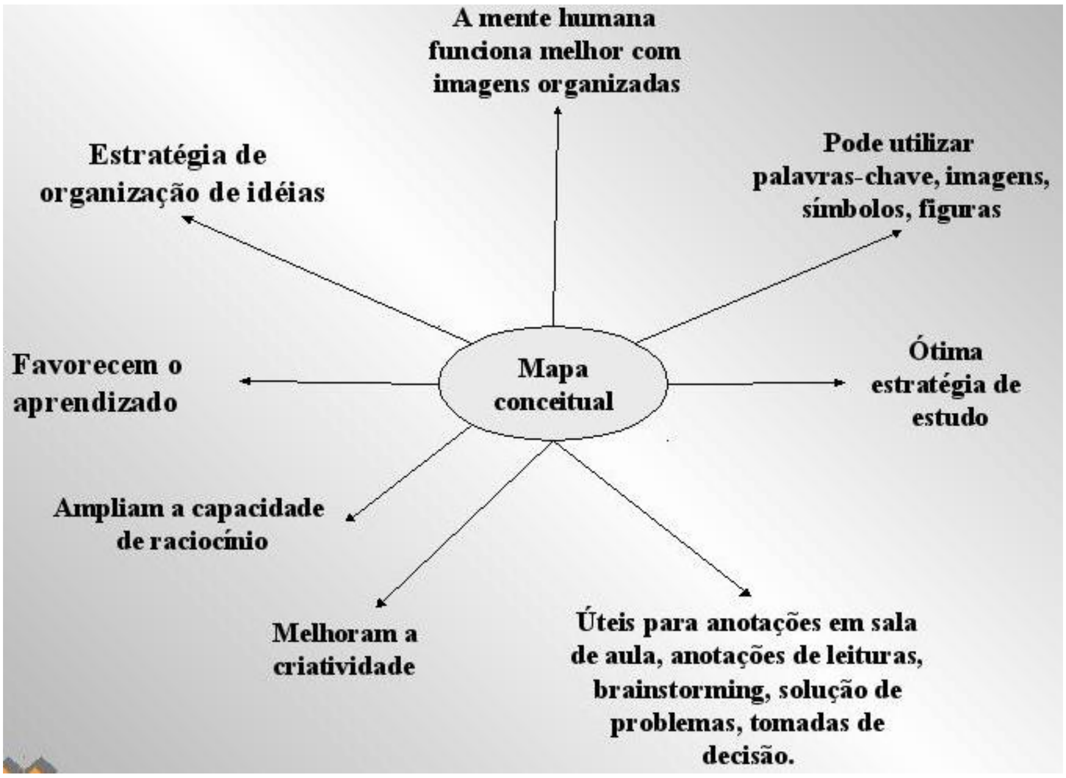



Fonte: http://www.antigomoodle.ufba.br/mod/book/view.php?id=74558




Fonte: http://wwwmdtbcognitiva.blogspot.com/2011/06/mapas-conceituais.html

A estratégia na organização de ideias por meio de palavras chaves, cores, imagens, símbolos, em uma estrutura que se irradia a partir de uma ideia, um conceito, um conteúdo. Os desenhos de mapas conceituais melhoram a criatividade e produtividade pessoal.




Fonte: http://www.webquestfacil.com.br/webquest.php?pg=tarefa&wq=15321

Agora que você já entendeu o que é um mapa conceitual, faremos a construção de um mapa. O procedimento será o seguinte:

a) Juntamente com seu grupo, escolham um tema de interesse comum e construa seu primeiro mapa conceitual, somente com o que você já conhece do assunto.
b) Agora faremos uma pesquisa na internet sobre o tema escolhido, para que possamos aprender mais sobre esse assunto.
c) De posse de novos conhecimentos sobre o tema escolhido, monte um novo mapa conceitual, agora muito mais elabora e rico.
d) Compare os dois mapas, houve mudanças? Aponte-as.
e) Com o mapa que você fez, acredita ser possível aprender sobre o tema escolhido? Justifique.
f) Apresente seu mapa conceitual para a turma.
g) Agora que você já conhece mapa conceitual, elabore um mapa conceitual sobre o tema “Trigonometria”, somente com o conhecimento que você já possui sobre o assunto. Para entregar pra a professora.

AULA 2: INTRODUÇÃO A TRIGONOMETRIA

Iniciamos nossa segunda aula com perguntas com o intuito de despertar o interesse dos estudantes pelo conteúdo. Logo após prosseguimos demonstrando que desde a antiguidade já se utilizava a Trigonometria, com algumas aplicações, para posteriormente seguirmos com as definições. Fizemos ainda, algumas recordações importantes que serviram de pré-requisitos para a aprendizagem de Trigonometria.

O objetivo desde plano de aula foi o Ensino da Trigonometria no triângulo retângulo, onde se introduziu os conceitos das razões trigonométricas, Seno, Cosseno e Tangente. Este plano de aula foi dividido em duas partes, sendo o tempo para a primeira aula de três períodos e a segunda aula de dois períodos. Cada período é de 55 minutos. Na primeira aula, foram apresentadas as definições e alguns exemplos. Na segunda aula, foram apresentados exemplos do cotidiano dos estudantes para que possam compreender melhor a matéria.

**Plano de Aula 2**

A Trigonometria é uma subárea da Matemática no qual se estuda as relações entre ângulos e distancias, usando triângulos retângulos (SILVA 2017). Muito utilizada também em outras áreas de estudo como Engenharia, física, química, biologia, geografia, astronomia, medicina, engenharia, dentre outras, a Trigonometria é fundamental na prática de profissionais dessas áreas.

Através de distâncias e alturas associadas os conhecimentos sobre triângulo retângulo e a ideia de semelhança entre triângulos, é possível fazer uma série de estimativas, por exemplo, com auxilio de sua sombra, podemos estimar a altura de um prédio, desde que saibamos a distância que nos separa de sua base.

O objetivo desde plano de aula é o Ensino da Trigonometria no triângulo retângulo, onde pretende-se introduzir os conceitos das razões trigonométricas, Seno, Cosseno e Tangente.

**Desenvolvimento**

O plano de aula está dividido em duas partes, sendo o tempo para a primeira aula é de três períodos e a segunda aula de dois períodos, sendo cada período de 55 minutos.

Na primeira aula, será apresentado as definições e alguns exemplos.

Na segunda aula, apresentaremos exemplos do cotidiano para que possam compreender melhor a matéria.

**Pré requisitos**

Triângulo retângulo ( hipotenusa e catetos)

Critérios de semelhança de triângulos

Matemática do Ensino fundamental

**Objetivos**

Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas.

Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações.

Identificar e usar corretamente as relações.

Resolver situações problemas envolvendo as relações trigonométricas.

**Avaliação**

Atividades em sala.

Listas de exercícios envolvendo aplicações da Trigonometria no cotidiano.

Durante as aulas observando o interesse e a participação do Estudante.

**1º aula**

**Duração:** 165 minutos**.**

**Tema:** Trigonometria

**Procedimento:** Iniciar a aula com perguntas para despertar o interesse dos estudantes no conteúdo, logo após prosseguir com as definições.

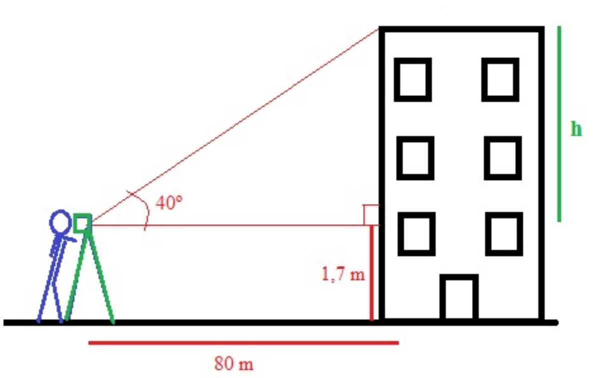
**Introdução**

A Trigonometria possui uma infinidade de aplicações práticas.

Desde a antiguidade já se usava da Trigonometria para obter distâncias impossíveis de serem calculadas por métodos comuns.

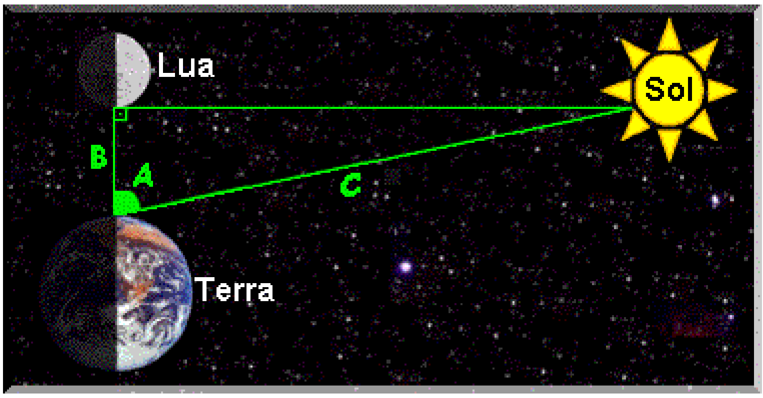
Algumas aplicações da Trigonometria são:

Determinação da altura de certo prédio.



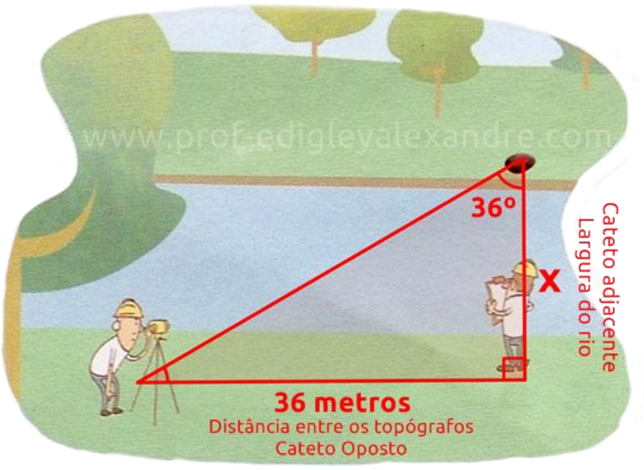

Fonte: http://meteorotica.blogspot.com/2012/01/exercicios-resolvidos-sobre-razoes_4538.html

Como medir a distância da Terra à Lua? Com a Trigonometria.



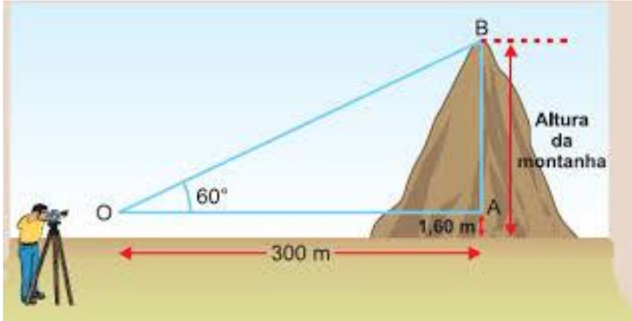

Fonte: http://www.zenite.nu/aristarco-de-samos-e-a-distancia-terra-sol/

Um engenheiro precisa saber a largura de um rio para construir uma ponte, o trabalho dele é mais fácil quando ele usa dos recursos trigonométricos.




Fonte: https://www.prof-edigleyalexandre.com/2012/11/Trigonometria-algumas-aplicacoes.html

Um cartógrafo (desenhista de mapas) precisa saber a altura de uma montanha, o comprimento de um rio, etc. Sem a Trigonometria ele demoraria muito tempo para desenhar um mapa.




Fonte:http://porteiras.s.unipampa.edu.br/pibid/files/2015/11/Sequ%C3%AAncia-Did%C3%A1tica-Trigonometria_IFSulII.pdf

**Relembrando definições de triângulos:**

Para que possamos calcula todos esses nossos exemplos e muitos mais, utilizamos a Trigonometria do triângulo retângulo.

O triângulo é a figura mais simples e uma das mais importantes da Geometria, ele é objeto de estudos desde os povos antigos. O triângulo possui propriedades e definições de acordo com o tamanho de seus lados e medida dos ângulos internos.

Quanto aos lados, o triângulo pode ser classificado como:

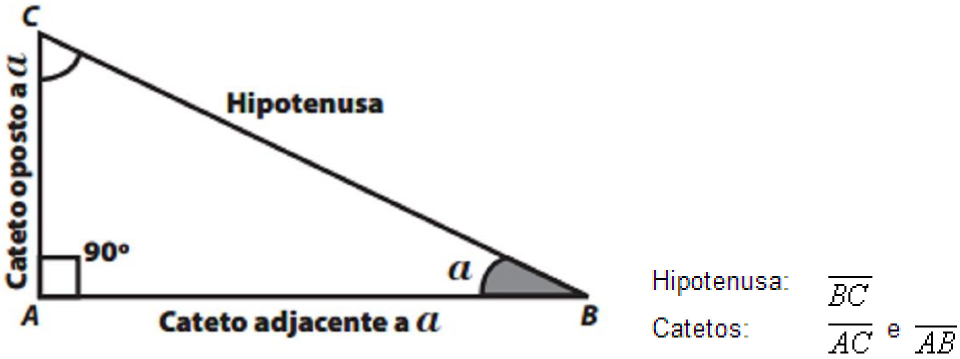
- Equilátero: possui os lados com medidas iguais.
- Isósceles: possui dois lados com medidas iguais.
- Escaleno: possui todos os lados com medidas diferentes.

Quanto aos ângulos, os triângulos podem ser denominados:

- Acutângulo: possui os ângulos internos com medidas menores que 90º
- Obtusângulo: possui um dos ângulos com medida maior que 90º.
- Retângulo: possui um ângulo com medida de 90º, chamado ângulo reto.

No triângulo retângulo existem algumas importantes relações, uma delas é o ***Teorema de Pitágoras***, que diz o seguinte: *"A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa"*. Essa relação é muito importante na Matemática, responsável pela resolução de inúmeros problemas geométricos.

**Seno, Cosseno e Tangente**




Fonte: https://www.altoastral.com.br/geometria-teorema-pitagoras/

Relembrando:

Hipotenusa é o lado oposto ao ângulo de 90º.

Ângulo (b)

Sen (b) = $\frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ (b)}{hipotenusa}$

Cos (b) = $\frac{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ (b)}{hipotenusa}$

Tan (b) = $\frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ (b)}{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ (b)}$

Ângulo (c)

Sen (c) = $\frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ (c)}{hipotenusa}$

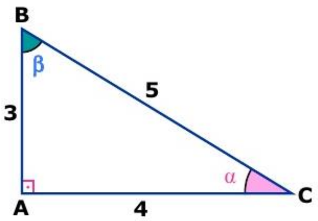
Cos (c) = $\frac{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ (c)}{hipotenusa}$

Tan (c) = $\frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ (c)}{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ (c)}$

Observação: B + C = 90º

Exemplos:

1-Determine os valores de Seno, Cosseno e Tangente dos ângulos β e α




$\text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5}$ $\cos\ \alpha = \frac{4}{5}$ $\text{tg}\ \alpha = \frac{3}{4}$

$\text{sen}\ \beta = \frac{4}{5}$ $\cos\ \beta = \frac{3}{5}$ $\text{tg}\ \beta = \frac{4}{3}$

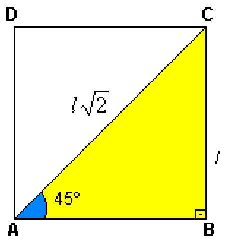
Fonte: https://Estudantesonline.uol.com.br/matematica/relacoes-trigonometricas-no-triangulo-retangulo.html

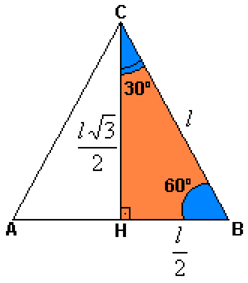
Obs: α + β = 90º

## Seno, Cosseno e Tangente dos ângulos de 30º, 45 e 60º

Apesar de serem muito usados nos cálculos de **Relações Trigonométricas do Triângulo Retângulo**, os valores de Seno Cosseno e Tangente dificilmente podem ser decorados, até mesmo porque são mais de 80. Existem, entretanto, alguns ângulos que são tidos como Notáveis.

Fonte:




https://www.somatematica.com.br/fundam/raztrig/razoes3.php

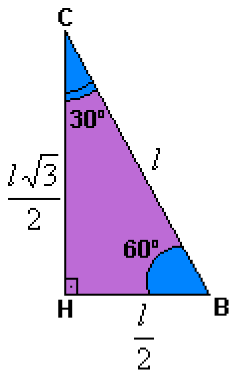
Aplicando o teorema de Pitágoras obtemos os seguintes resultados:

Quadrado de lado ***l***, possui diagonal $l\sqrt{2}$

Triangulo equilátero de lado ***l*** e altura $l\frac{\sqrt{3}}{2}$

### A) Seno, Cosseno e Tangente de 30º

Aplicando as definições de Seno, Cosseno e Tangente para os ângulos de 30º, temos:




$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{1}{2}$$

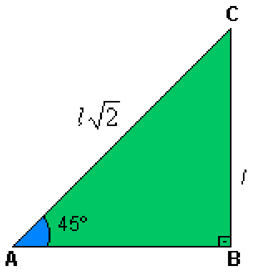
$$\cos 30° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{l} \cdot 2}{2 \cdot \cancel{l}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Fonte: https://www.somatematica.com.br/fundam/raztrig/razoes3.php

### B) Seno, Cosseno e Tangente de 45º

Aplicando as definições de Seno, Cosseno e Tangente para um ângulo de 45º, temos:




$$\text{sen } 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l}.1}{\cancel{l}.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

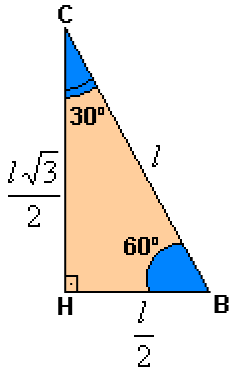
$$\cos 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l}.1}{\cancel{l}.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\cancel{l}}{\cancel{l}} = 1$$

Fonte: https://www.somatematica.com.br/fundam/raztrig/razoes3.php

**C) Seno, Cosseno e Tangente de 60º**

Aplicando as definições de Seno, Cosseno e Tangente para um ângulo de 60º, temos:




$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}}{2}.\frac{1}{\cancel{l}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{\cancel{2}}.\frac{\cancel{2}}{\cancel{l}} = \sqrt{3}$$

Fonte: https://www.somatematica.com.br/fundam/raztrig/razoes3.php

Esses ângulos são muito frequentes e por isso formam uma tabela bem mais simples que quando decorada, ajuda muito na resolução dos exercícios.

| | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| Seno | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| Cosseno | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| Tangente | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

Fonte:https://www.matematicagenial.com/2017/05/dica-como-lembrar-facilmente-tabela-trigonometrica.html

Música para Decorar Tabela de Seno Cosseno e Tangente de 30°, 45° e 60°.

***Um, dois três,***

***Três, dois, um,***

***Tudo sobre dois!***

***Depois vem a raiz,***

***Sobre o três e o dois!***

***A Tangente é diferente,***

***Vejam só vocês!***

***Raiz de três sobre três,***

***Um raiz de três!***

Essa letra deve ser cantada no ritmo e melodia da canção de natal Jigle Bells

**Utilizar exercícios do livro didático**

**2º aula**

**Duração:** 110 minutos.

**Tema:** aplicações das razões trigonométricas

APLICAÇÕES DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

As razões trigonométricas são utilizadas principalmente na determinação de distâncias incessíveis. Assim, para calcular a altura de uma montanha ou a distância entre as margens de um rio, por exemplo, usa-se um instrumento de precisão para medir ângulos ou aplica-se as razões trigonométricas.

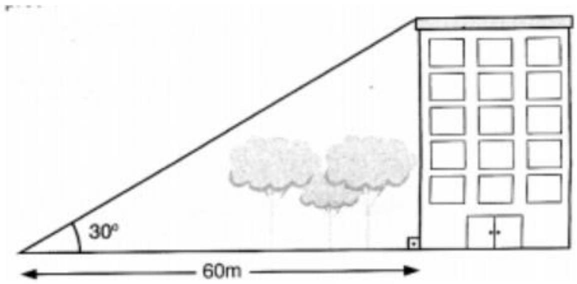
Existe uma tabela já estabelecida com os valores dos ângulos. (entregar tabela xerocada para cada Estudante). Explicar como fazer uso da tabela.

| Ângulo | Seno | Cosseno | Tangente | Ângulo | Seno | Cosseno | Tangente |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° | 0,017 5 | 0,999 8 | 0,017 5 | 46° | 0,719 3 | 0,694 7 | 1,035 5 |
| 2° | 0,034 9 | 0,999 4 | 0,034 9 | 47° | 0,731 4 | 0,682 0 | 1,072 4 |
| 3° | 0,052 3 | 0,998 6 | 0,052 4 | 48° | 0,743 1 | 0,669 1 | 1,110 6 |
| 4° | 0,069 8 | 0,997 6 | 0,069 9 | 49° | 0,754 7 | 0,656 1 | 1,150 4 |
| 5° | 0,087 2 | 0,996 2 | 0,087 5 | 50° | 0,766 0 | 0,642 8 | 1,191 8 |
| 6° | 0,104 5 | 0,994 5 | 0,105 1 | 51° | 0,777 1 | 0,629 3 | 1,234 9 |
| 7° | 0,121 9 | 0,992 5 | 0,122 8 | 52° | 0,788 0 | 0,615 7 | 1,279 9 |
| 8° | 0,139 2 | 0,990 3 | 0,140 5 | 53° | 0,798 6 | 0,601 8 | 1,327 0 |
| 9° | 0,156 4 | 0,987 7 | 0,158 4 | 54° | 0,809 0 | 0,587 8 | 1,376 4 |
| 10° | 0,173 6 | 0,984 8 | 0,176 3 | 55° | 0,819 2 | 0,573 6 | 1,428 1 |
| 11° | 0,190 8 | 0,981 6 | 0,194 4 | 56° | 0,829 0 | 0,559 2 | 1,482 6 |
| 12° | 0,207 9 | 0,978 1 | 0,212 6 | 57° | 0,838 7 | 0,544 6 | 1,539 9 |
| 13° | 0,225 0 | 0,974 4 | 0,230 9 | 58° | 0,848 0 | 0,529 9 | 1,600 3 |
| 14° | 0,241 9 | 0,970 3 | 0.249 3 | 59° | 0,857 2 | 0,515 0 | 1.664 3 |
| 15° | 0,258 8 | 0,965 9 | 0,267 9 | 60° | 0,866 0 | 0,500 0 | 1,732 1 |
| 16° | 0,275 6 | 0,961 3 | 0,286 7 | 61° | 0,874 6 | 0,484 8 | 1,804 0 |
| 17° | 0,292 4 | 0,956 3 | 0,305 7 | 62° | 0,882 9 | 0,469 5 | 1,880 7 |
| 18° | 0,309 0 | 0,951 1 | 0,324 9 | 63° | 0,891 0 | 0,454 0 | 1,962 6 |
| 19° | 0,325 6 | 0,945 5 | 0,344 3 | 64° | 0,898 8 | 0,438 4 | 2,050 3 |
| 20° | 0,342 0 | 0,939 7 | 0,364 0 | 65° | 0,906 3 | 0,422 6 | 2,144 5 |
| 21° | 0,358 4 | 0,933 6 | 0,383 9 | 66° | 0,913 5 | 0,406 7 | 2,246 0 |
| 22° | 0,374 6 | 0,927 2 | 0,404 0 | 67° | 0,920 5 | 0,390 7 | 2,355 9 |
| 23° | 0,390 7 | 0,920 5 | 0,424 5 | 68° | 0,927 2 | 0,374 6 | 2,475 1 |
| 24° | 0,406 7 | 0,913 5 | 0,445 2 | 69° | 0,933 6 | 0,358 4 | 2,605 1 |
| 25° | 0,422 6 | 0,906 3 | 0,466 3 | 70° | 0,939 7 | 0,342 0 | 2,747 5 |
| 26° | 0,438 4 | 0,898 8 | 0,487 7 | 71° | 0,945 5 | 0,325 6 | 2,904 2 |
| 27° | 0,454 0 | 0,891 0 | 0,509 5 | 72° | 0,951 1 | 0,309 0 | 3,077 7 |
| 28° | 0,469 5 | 0,882 9 | 0,531 7 | 73° | 0,956 3 | 0,292 4 | 3,270 9 |
| 29° | 0,484 8 | 0,874 6 | 0,554 3 | 74° | 0,961 3 | 0,275 6 | 3,487 4 |
| 30° | 0,500 0 | 0,866 0 | 0,577 4 | 75° | 0,965 9 | 0,258 8 | 3,732 1 |
| 31° | 0,515 0 | 0,857 2 | 0,600 9 | 76° | 0,970 3 | 0,241 9 | 4,010 8 |
| 32° | 0,529 9 | 0,848 0 | 0,624 9 | 77° | 0,974 4 | 0,225 0 | 4,331 5 |
| 33° | 0,544 6 | 0,838 7 | 0,649 4 | 78° | 0,978 1 | 0,207 9 | 4,704 6 |
| 34° | 0,559 2 | 0,829 0 | 0,674 5 | 79° | 0,981 6 | 0,190 8 | 5,144 6 |
| 35° | 0,573 6 | 0,819 2 | 0,700 2 | 80° | 0,984 8 | 0,173 6 | 5,671 3 |
| 36° | 0,587 8 | 0,809 0 | 0,726 5 | 81° | 0,987 7 | 0,156 4 | 6,313 8 |
| 37° | 0,601 8 | 0,798 6 | 0,753 6 | 82° | 0,990 3 | 0,139 2 | 7,115 4 |
| 38° | 0,615 7 | 0,788 0 | 0,781 3 | 83° | 0,992 5 | 0,121 9 | 8,144 3 |
| 39° | 0,629 3 | 0,777 1 | 0,809 8 | 84° | 0,994 5 | 0,104 5 | 9,514 4 |
| 40° | 0,642 8 | 0,766 0 | 0,839 1 | 85° | 0,996 2 | 0,087 2 | 11,430 1 |
| 41° | 0,656 1 | 0,754 7 | 0,869 3 | 86° | 0,997 6 | 0,069 8 | 14,300 7 |
| 42° | 0,669 1 | 0,743 1 | 0,900 4 | 87° | 0,998 6 | 0,052 3 | 19,081 1 |
| 43° | 0,682 0 | 0,731 4 | 0,932 5 | 88° | 0,999 4 | 0,034 9 | 28,636 3 |
| 44° | 0,694 7 | 0,719 3 | 0,965 7 | 89° | 0,999 8 | 0,017 5 | 57,290 0 |
| 45° | 0,707 1 | 0,707 1 | 1.000 0 | | | | |

Fonte: http://mileidestonsis.blogspot.com/2011/04/tabela-de-razoes-trigonometricas.html

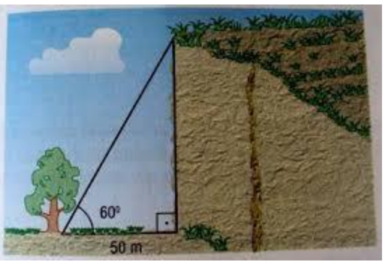
Exemplos

1- Uma pessoa está distante 60m de um prédio e vê o ponto mais alto do prédio sob um ângulo de 30º em relação à horizontal. Qual é a Altura do prédio?




Fonte: https://pt-static.z-dn.net/files/d92/93f9460966e6628429dc3014cf53436a.png

2- O ângulo de elevação do pé de uma árvore, a 50m da base de uma encosta, ao topo da encosta é de 60º. Que medida deve ter um cabo que ligue o pé da árvore ao topo da encosta?




Fonte: http://mscabral.pro.br/sitemauro/praticas/trigo.htm

Resolução: Ele quer saber a hipotenusa do triângulo.

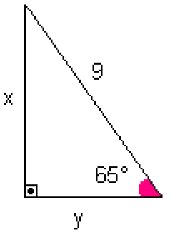
Cos 60º = $\frac{50}{x}$

Substituindo cos 60º por $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{50}{x}$ então, x = 100 m

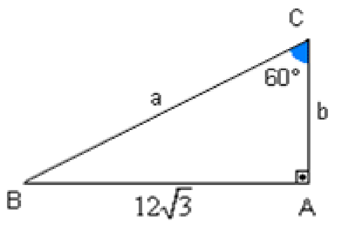
A medida de um cabo que ligue o pé da árvore ao topo da encosta é de 100m.

a) No triângulo retângulo da figura abaixo, determine as medidas de x e y indicadas (Use: sen 65° = 0,91; cos 65° = 0,42 ; tg 65° = 2,14)




Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

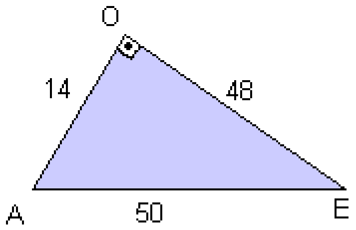
b) Considerando o triângulo retângulo ABC da figura, determine as medidas a e b indicadas. (Sen 60° = 0,866)

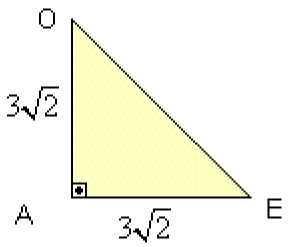



Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

c) Sabe-se que, em um triângulo retângulo isósceles, cada lado congruente mede 30 cm. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

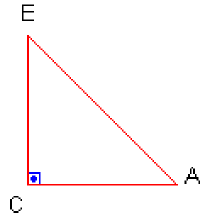
d) Nos triângulos das figuras abaixo, calcule tg Â, tg Ê, tg Ô:



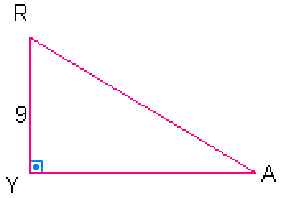

Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

e) Sabendo que o triângulo retângulo da figura abaixo é isósceles, quais são os valores de tg Â e tg Ê?



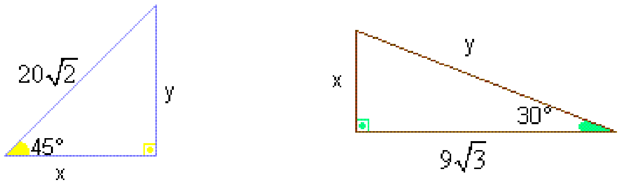

Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

f) Encontre a medida RA sabendo que tg Â = 3




Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

g) Encontre **x** e **y**:




Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

AULA 3: MAPAS CONCEITUAIS intermediários

**Plano de aula 3**

Após a apresentação do conteúdo de Trigonometria de forma tradicional, solicitamos aos estudantes que elaborassem um novo Mapa Conceitual sobre Trigonometria.

AULA 4: PÊNALTI

Esta foi à primeira aula utilizando a Trigonometria no futebol. O trabalho foi desenvolvido em sala de aula fazendo o estudante pensar em cada movimento utilizado para a realização de uma cobrança de pênalti. Para isso utilizamos as dimensões do gol, distância da marca do pênalti até o gol, diâmetro da bola de futebol, ângulos formados pelas trajetórias das bolas e o solo, em uma cobrança, dentre outros.

Com o intuito de aumentarmos a participação e o interesse dos estudantes nas atividades, fizemos uso de uma linguagem informal e lúdica, e lançamos diversas perguntas, que submeteram os estudantes a estudar cada informação para que conseguissem desenvolver as questões.

**Plano de Aula 4**

Na nossa primeira aula utilizando a Trigonometria no futebol, trabalharemos em sala de aula fazendo o estudante pensar em cada movimento utilizado para a realização de uma cobrança de pênalti, faremos uso das dimensões do gol, distância da marca do pênalti ate o gol, diâmetro da bola de futebol, ângulos formados pelas trajetórias das bolas e o solo em uma cobrança, dentre outros.

Com o intuito de aumentarmos a participação e o interesse dos estudantes pelas atividades, faremos uso de uma linguagem informal e lúdica.

**Desenvolvimento**

O plano de aula será desenvolvido com a duração de um período de 55 minutos.

**Pré requisitos**

Triângulo retângulo (hipotenusa e catetos)

Critérios de semelhança de triângulos

Matemática do Ensino fundamental

Seno, Cosseno e Tangente.

Raio e diâmetro

**Objetivos**

Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas no futebol.

Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações e demais conteúdos geométricos.

Identificar e usar corretamente as relações.

Resolver situações problemas do futebol envolvendo as relações trigonométricas.

**Avaliação**

Durante as aulas observando o interesse e a participação do Estudante.

**1º aula**

**Duração:** 55 minutos.

**Tema:** Trigonometria no futebol

**Procedimento:** Iniciaremos a aula com a "Questão 1" onde será lançada a pergunta principal, e posteriormente iremos fazendo outros questionamentos para inserir o estudante, gradativamente, na questão.

**1.1 Introdução**

No campo de futebol, dentro da grande área, há uma marca a 11 metros do ponto médio até a linha do gol, para que seja feita a cobrança de uma falta chamada "pênalti". O goleiro fica sobre essa linha, entre duas traves que são paralelas, com uma distância entre elas de 7,3 metros, e com altura de 2,4 metros do solo. Sabemos ainda, que o diâmetro da bola de futebol é de 22 centímetros. Com base nas informações acima responda:

**<u>QUESTÃO 1</u>**

Olá Galera! Vou apresentar para vocês o nosso amigo Théo. Théo é ótimo em futebol, mas não tão bom em Matemática, por isso precisa de nossa ajuda. Ele quer fazer uma cobrança de pênalti sem a presença do goleiro, e decidiu chutar a bola na direção central do gol. Qual deve ser o ângulo máximo de elevação da bola, para que o Théo consiga fazer o gol?


Fonte: http://professor.bio.br/matematica/comentarios.asp?q=6445&t=Trigonometria

Bom, para que possamos ajudar o Théo, precisamos de alguns dados, que serão coletados a partir de algumas respostas.

Vamos pensar juntos!

a) Se Théo chutar a bola a uma altura de 2,4 metros, conseguirá fazer o gol? Justifique.
b) Qual o raio da bola?
c) Qual a altura máxima que o centro da bola pode atingir para que Théo consiga fazer o gol?
d) Agora desenhe um triângulo representando a situação descrita acima com os valores que você descobriu.
e) Vamos chamar de **α** esse ângulo de elevação, ou seja, o ângulo que a trajetória da bola faz com o solo. Qual é a relação trigonométrica que você usaria para determinar esse ângulo?
f) Utilizando a tabela trigonométrica fornecida na aula anterior, encontre a melhor aproximação inteira para o ângulo **α.**
g) Agora que você já descobriu o valor aproximado do ângulo, encontre a distância que a bola percorreu até atingir o plano que contém as traves do gol.
h) Theo, ao cobrar um novo pênalti, chuta a bola na linha central do gol com uma inclinação de 10º. Com que altura a bola atingirá a linha central do gol? Qual a relação trigonométrica você utilizará para resolver essa questão?

AULA 5: ESCANTEIO

Nesta etapa o nosso trabalho teve inicio na sala de aula, onde trouxemos um jogador fictício (personagem Théo) que executava diversas cobranças de escanteio. Mostramos aos estudantes que para calcular a distância percorrida pela bola, ao ser chutada pelo nosso jogador, seria necessário conhecer as medidas do campo onde as cobranças seriam feitas. E que as cobranças somente poderiam ser feitas com chutes rasteiros.

Mostramos aos estudantes também que após descobrirmos a distância percorrida pela bola, através da razão trigonométrica Tangente, também era possível descobrirmos o ângulo formado pela bola com as linhas que demarcam o campo de futebol.

Após calcularem diversos exemplos de cobranças de escanteios feitos pelo nosso jogador fictício, convidamos os estudantes para que fossemos até a quadra de futebol da escola e medíssemos suas distâncias. Depois, os estudantes formaram duplas, para que pudessem cobrar os escanteios e medir a distância percorrida pela bola. Enquanto um se colocava na posição do escanteio para fazer a cobrança, o outro estudante posicionava-se do outro lado do campo, para fazer a marcação do ponto, no qual a bola cruzou a linha lateral, saindo do campo.

Desta forma, cada Estudante chutou 5 cobranças de escanteio, e calculou a distância que a bola percorreu e o ângulo que a mesma fez com a linha de escanteio.

**Plano de Aula 5**

Nosso trabalho se iniciará em sala de aula, para que o estudante entenda o exercício proposto, logo após o estudante fará a medida completa da quadra de futebol da sua escola, conforme exemplo. Com o intuito de facilitar as medidas das bolas chutadas em escanteio, a atividade será feita em duplas, o que acreditamos aumentar participação e o interesse dos estudantes.

**Desenvolvimento**

O plano de aula será desenvolvido com a duração de um período de 55 minutos.

**Pré requisitos**

Triângulo retângulo (hipotenusa e catetos)

Teorema de Pitágoras

Critérios de semelhança de triângulos

Matemática do Ensino fundamental

Seno, Cosseno e Tangente.

Noções de medidas

**Objetivos**

Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas no futebol.

Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações e demais conteúdos geométricos.

Identificar e usar corretamente as relações.

Resolver situações problemas do futebol envolvendo as relações trigonométricas.

**Avaliação**

Durante as aulas observando o interesse e a participação do Estudante.

**1º aula**

**Duração:** 55 minutos.

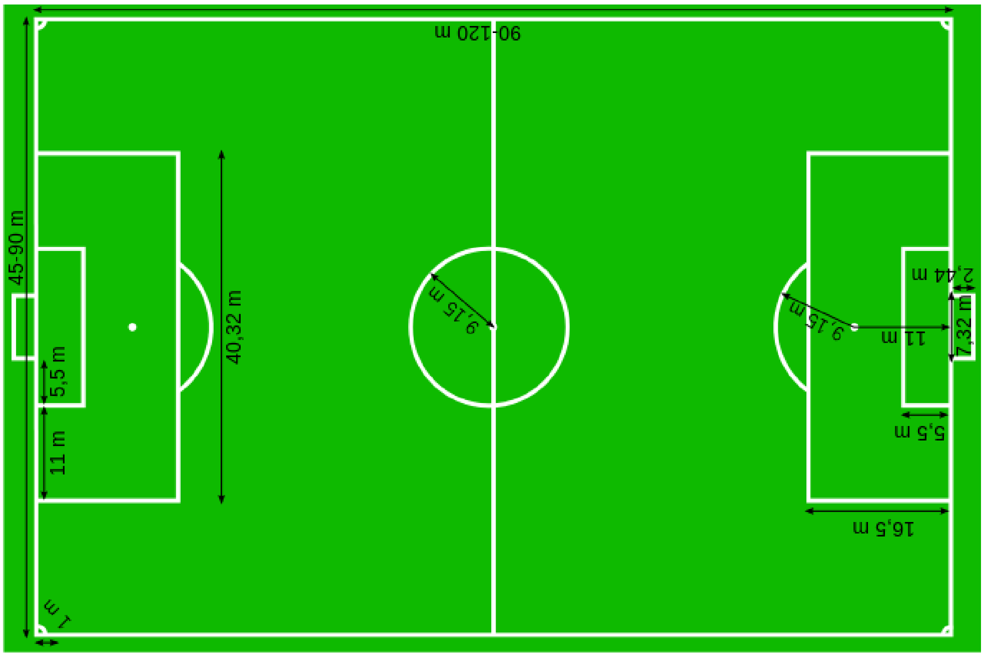
**Tema:** Trigonometria no futebol

**1.1 Introdução**

O campo de futebol é feito com medidas exatas, podendo variar de campo para campo. Tomaremos como base para os exercícios em questão o campo com as medidas fornecido. O escanteio é a cobrança de uma falta, devendo o jogador posicionar-se junto à bandeira em um dos quatro cantos do campo, para retornar a bola ao jogo.

**<u>QUESTÃO 2</u>**

Beleza turma?! Agora nosso amigo Théo decidiu verificar suas habilidades no chute de escanteio. Fez diversas cobranças, o que é demonstrado com uma linha vermelha nas figuras abaixo. Mas primeiro ele teve o trabalho de medir todo o campo para facilitar o nosso trabalho, deixando tudo prontinho. Agora é sua vez, Calcule, em cada caso, qual a distância que a bola percorreu em cada chupe de escanteio, e logo após determine o ângulo formado.

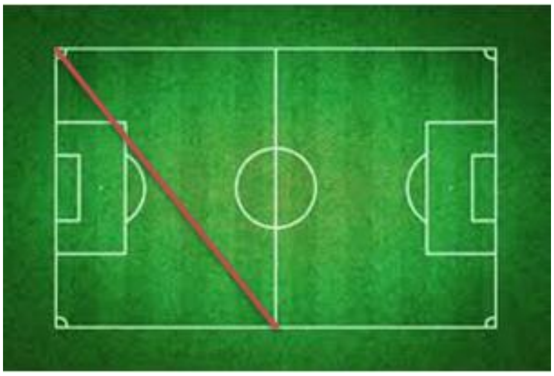



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Campo_de_futebol_medidas.jpg

Imagem ilustrativa com as medidas do campo onde Théo fez as cobranças de escanteio. Utilize as medidas de 120 metros de comprimento e de 90 metros de largura,

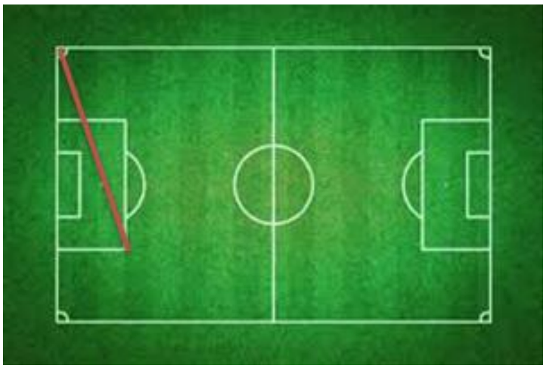
Em cada uma das situações abaixo calcule a distância que a bola percorreu, logo após calcule o ângulo.

a)



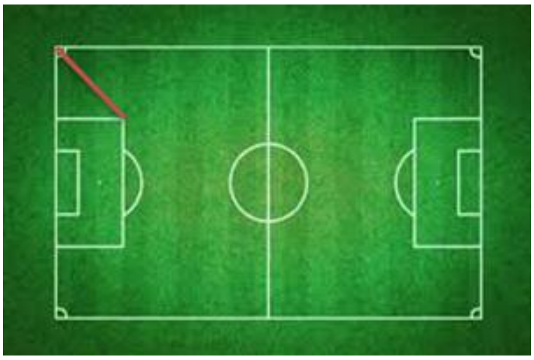
Fonte: autora

b)



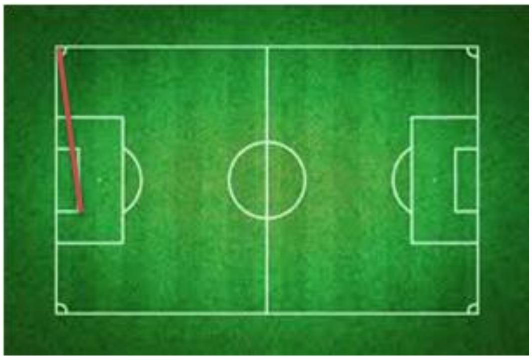
Fonte: autora

c)



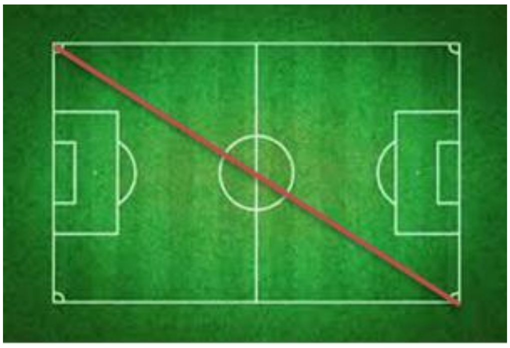
Fonte: autora

d)



Fonte: autora

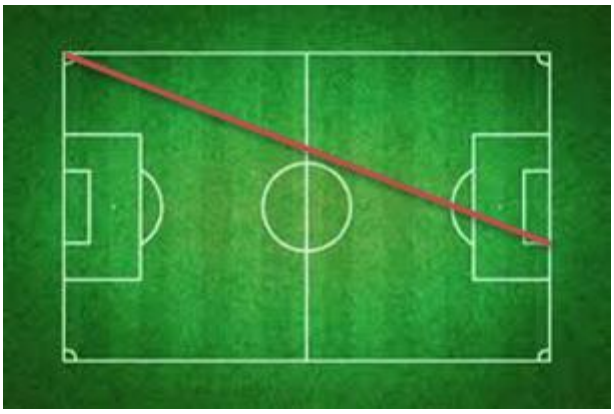
e)



Fonte: autora

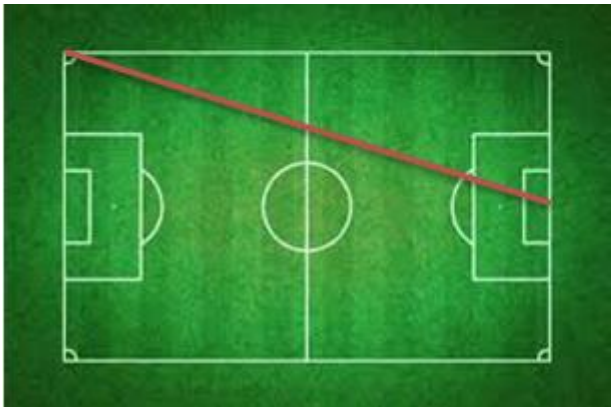
Não satisfeito com todas as cobranças feias, Théo resolveu tentar o gol na goleira oposta à cobrança do escanteio, e ele conseguiu fazer o gol na outra goleira de duas maneiras, como mostra nas figuras a seguir. Calcule a distância que a bola percorreu e o ângulo formado pela mesma com o campo.

a)



Fonte: autora

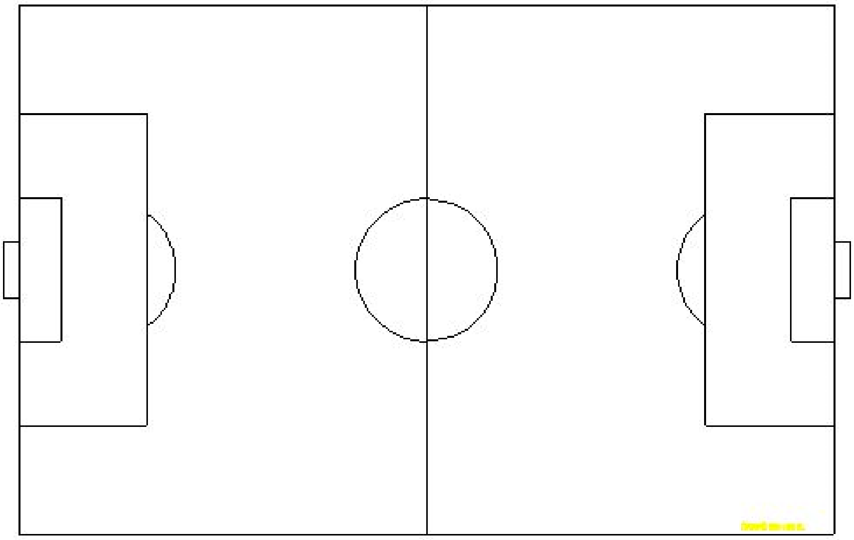
b)



Fonte: autora

Agora chegou a sua vez! Forme dupla com outro colega e vamos a quadra da escola!

Para que possamos faz as cobranças de escanteio, calcular a distância e o ângulo primeiramente precisamos das medidas da quadra, utilize o modelo abaixo e mãos a obra!



Fonte: https://blocoautocad.com/campo-de-futebol-simples/.

Agora que já temos todas as medidas, peça para sua dupla ficar no lado oposto de onde você irá cobrar o escanteio, e a cada chute seu, sua dupla fará a marcação de onde a bola cruzou a linha lateral , saindo do campo.

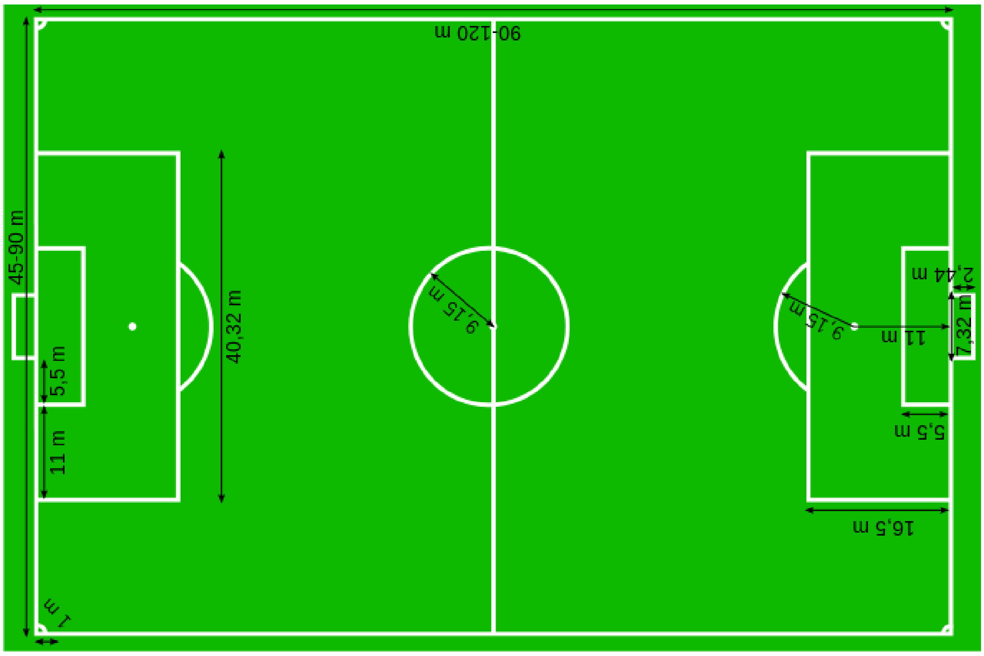
Cada Estudante fará 5 cobranças de escanteio, e calculará a distancia que a bola percorreu e o ângulo que a mesma fará com a linha de escanteio.

**Lembre-se que as cobranças só podem ser rasteira!**

*MATERIAL ENTREGUE PARA OS ESTUDANTES – AULA5*

**QUESTÃO 2**

Beleza turma?! Agora nosso amigo Théo decidiu verificar suas habilidades no chute de escanteio. Fez diversas cobranças, o que é demonstrado com uma linha vermelha nas figuras abaixo. Mas primeiro ele teve o trabalho de medir todo o campo para facilitar o nosso trabalho, deixando tudo prontinho. Agora é sua vez, Calcule, em cada caso, qual a distância que a bola percorreu em cada chupe de escanteio, e logo após determine o ângulo formado.

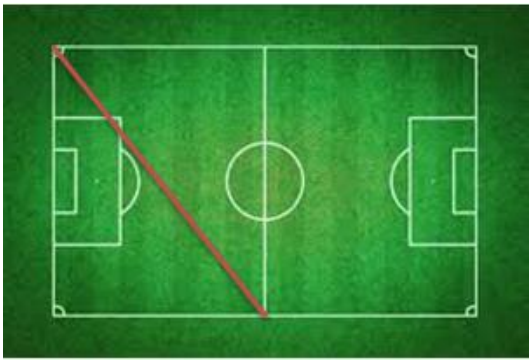



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Campo_de_futebol_medidas.jpg

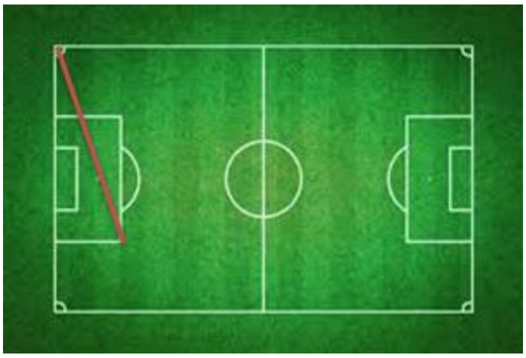
Imagem ilustrativa com as medidas do campo onde Théo fez as cobranças de escanteio. Utilize as medidas de 120 metros de comprimento e de 90 metros de largura,

Em cada uma das situações abaixo calcule a distância que a bola percorreu, logo após calcule o ângulo.

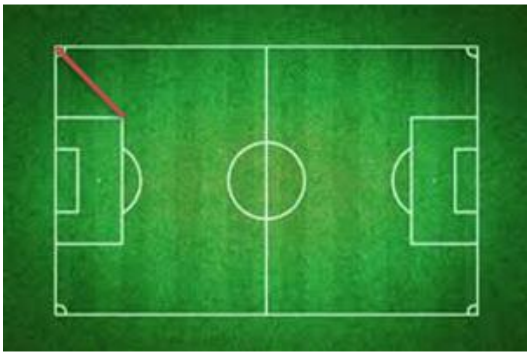
a)



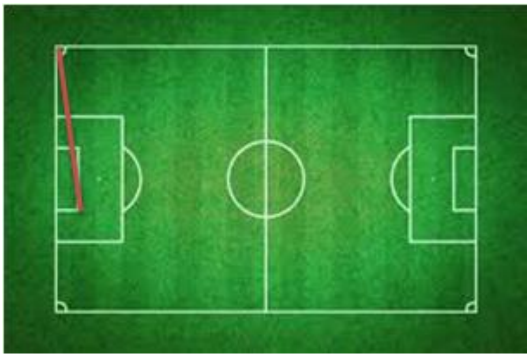
b)



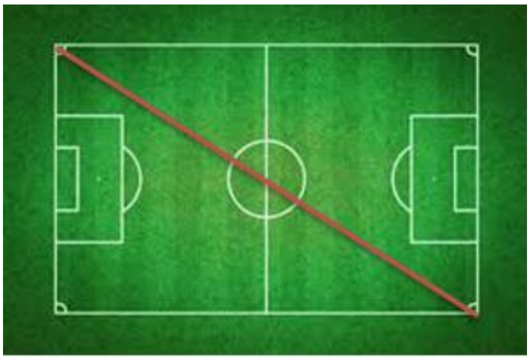
c)



d)

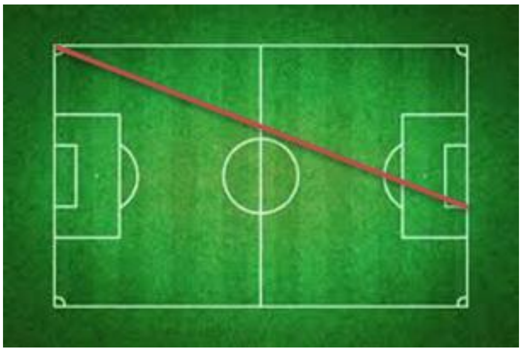


e)

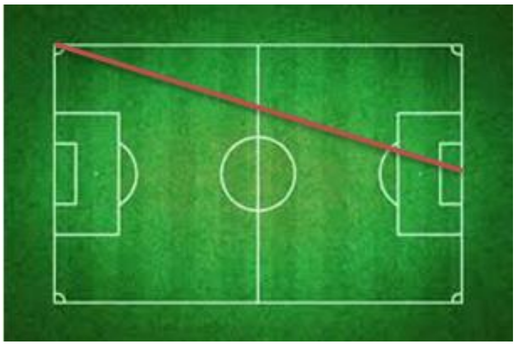


Não satisfeito com todas as cobranças feias, agora Théo resolveu tentar o gol na goleira oposta à cobrança do escanteio, e ele conseguiu fazer o gol na outra goleira de duas maneiras, como mostra nas figuras abaixo. Calcule a distância que a bola percorreu e o ângulo formado pela mesma com o campo.

a)

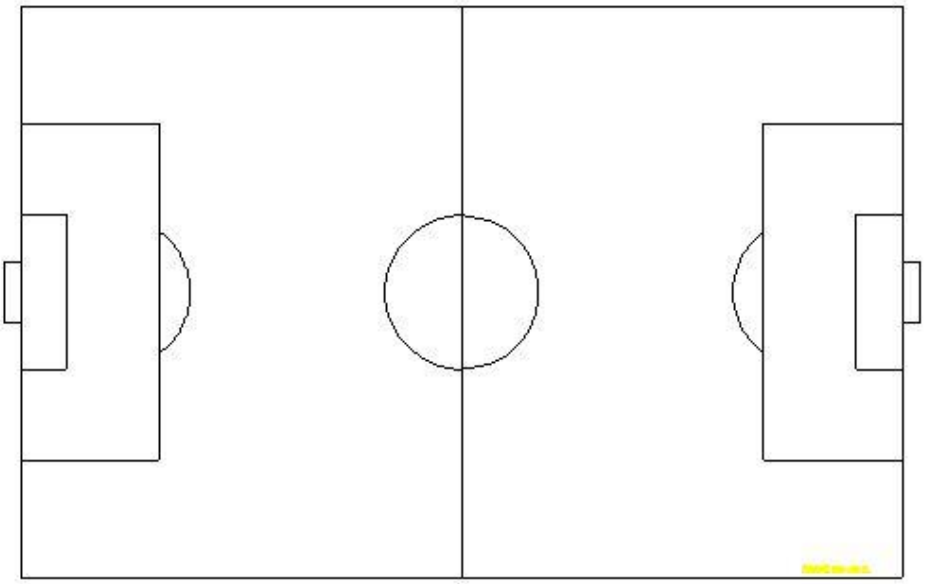


b)



Agora chegou a sua vez! Forme dupla com outro colega e vamos à quadra da escola!

Para que possamos faz as cobranças de escanteio, calcular a distância e o ângulo primeiramente precisamos das medidas da quadra, utilize o modelo abaixo e mãos a obra!



Fonte: https://blocoautocad.com/campo-de-futebol-simples/.

Agora que já temos todas as medidas, peça para sua dupla ficar no lado oposto de onde você irá cobrar o escanteio, e a cada chute seu, sua dupla fará a marcação de onde a bola cruzou a linha lateral, saindo do campo.

Cada Estudante fará 5 cobranças de escanteio, e calculará a distancia que a bola percorreu e o ângulo que a mesma fará com a linha de escanteio.

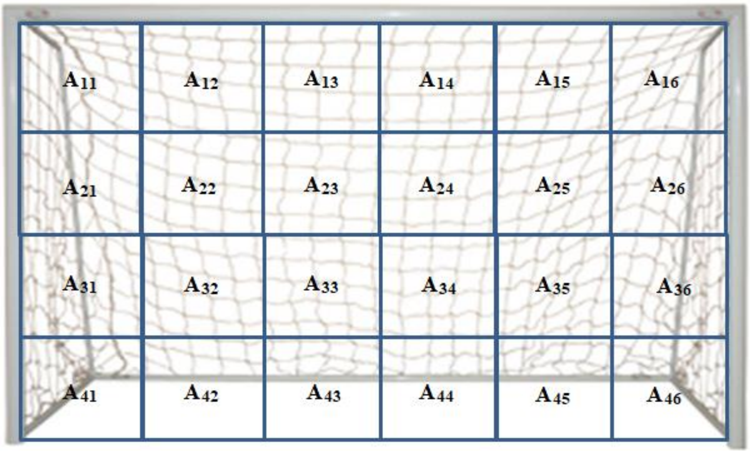
**Lembre-se que as cobranças só podem ser rasteira!**

## AULA 6: PÊNALTI E QUADRANTES

Nesta aula trouxemos a seguinte questão para nossos estudantes: “Galera, nosso amigo Théo quer fazer uma nova cobrança de pênalti, mas resolveu trocar o futebol de campo pelo futebol de salão. Neste caso, a goleira do futebol de salão mede 2 metros de altura por 3 de comprimento e há uma marca a 6 metros do ponto médio até a linha do gol, para que seja feita a cobrança da falta chamada "pênalti". A cobrança da falta será novamente sem a presença do goleiro, mas agora Théo irá chutar a bola em qualquer direção do gol, e desta forma teremos que ajudá-lo a determinar 2 ângulos, um formado pela elevação da bola, e outro pelo deslocamento lateral que a mesma fará. Para facilitar o nosso trabalho, Théo dividiu a goleira em 24 partes iguais, e irá chamar cada uma delas de quadrante. O primeiro número indica a linha, e o segundo a coluna a qual pertence.”

A Figura 1 representa um modelo de goleira dividida em 24 quadrantes e cada quadrante é um quadrado de lado medindo 50 cm.

Figura 1 – Goleira dividida em quadrantes




Fonte: a autora

Para que a atividade desenvolvida ficasse mais próximo possível da realidade projetada, determinamos que a bola sempre entraria no centro de cada quadrante. Assim, a primeira atividade foi solicitar que os estudantes determinassem o centro de cada quadrante, dando como exemplo que o ponto central do quadrante **$A_{41}$**, que encontra-se a uma altura de 25 cm do chão e uma distância do centro da goleira de 125 cm. Baseado neste exemplo poderiam calcular os demais.

Logo após calcularem os pontos centrais dos quadrantes, perguntamos para os estudantes se foi necessário calcular cada individualmente como feito no exemplo do quadrante $\mathbf{A_{41}}$ ou se descobriram alguma outra maneira de achar o ponto central de cada quadrante.

Depois de calcularem os pontos centrais, solicitamos que calculassem os ângulos que a bola chutada por Théo fez, imaginando que a bola possa entrar em qualquer um dos quadrantes, foi necessário calcular o ângulo de todos os quadrantes, sendo que para cada quadrante 2 ângulos foram calculados, um referente a altura da bola, e outro referente ao deslocamento lateral da mesma.

Na Figura 2, temos o exemplo da marca do pênalti localizada a 6 metros da linha do gol, e de um ângulo formado por uma possível cobrança de pênalti de forma rasteira.

Figura 2 – Exemplo de distância e ângulo lateral


Fonte: a autora

Depois de todo esse trabalho desenvolvido em sala de aula, mais uma vez nos deslocamos até a quadra da escola para, primeiramente, verificar as medidas da goleira e a distância da marca de cobrança do pênalti até a goleira.

Com a goleira já devidamente dividida em quadrantes, selecionamos um estudante para ser o "Juiz" e informar em qual quadrante cada estudante acertou o gol. Cada estudante teve direito a chutar a falta 5 vezes. Cada um, com suas próprias medidas, pode fazer novamente os cálculos de distância e ângulo, dos seus chutes a gol, e o mesmo fez, e com as medidas da quadra de sua escola.

**Plano de Aula 6**

O futebol é o esporte mais popular do mundo. Ele é jogado em todos os países nos mais diferentes níveis. As Regras dos Jogos são as mesmas praticadas pelo mundo afora, desde a final da Copa do Mundo FIFA até uma partida entre crianças em um pequeno vilarejo (CBF, 2017).

Um tiro penal (pênalti) será marcado se um jogador cometer uma infração punível com tiro livre direto dentro de sua própria área penal (CBF, 2017).

Neste trabalho será cobrado o tiro penal sem a presença do goleiro, com o intuito de analisar em qual parte da goleira a bola chutada entrou.

Nosso trabalho iniciará em sala de aula para que possamos explicar para o estudante como será calculado a distância e o ângulo tanto na altura como na lateral, da bola chutada na cobrança de falta denominada Pênalti.

**Desenvolvimento**

O plano de aula será desenvolvido com a duração de um período de 55 minutos.

**Pré requisitos**

Triângulo retângulo ( hitpotenusa e  acatetos)

Teorema de Pitágoras

Critérios de semelhança de triângulos

Matemática do Ensino fundamental

Seno, Cosseno e Tangente.

**Objetivos**

Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas no futebol.

Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações e demais conteúdos geométricos.

Identificar e usar corretamente as relações.

Resolver situações problemas do futebol envolvendo as relações trigonométricas.

**Avaliação**

Durante as aulas observando o interesse e a participação do Estudante.

**1º aula**

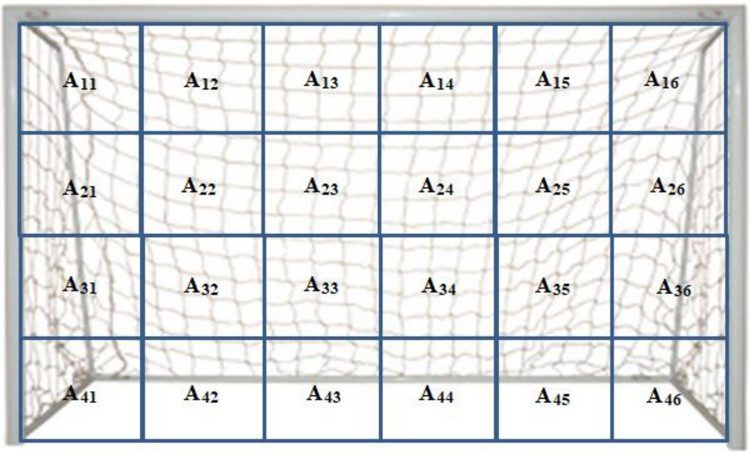
**Duração:** 55 minutos.

**Tema:** Trigonometria no futebol

**Procedimento:** Nesta aula resolveremos a “Questão 3” onde será inicialmente explicado para o estudante como iremos calcular a distância e o ângulo tanto na altura como na lateral, da bola chutada na cobrança de falta denominada Pênalti. Daremos sequencia a aula com diversos questionamentos para o aprendizado do estudante, e posteriormente faremos o exercício em questão na prática.

**QUESTÃO 3**

Galera, nosso amigo Théo quer fazer uma nova cobrança de pênalti, mas resolveu trocar o futebol de campo pelo futebol de salão, sendo que a goleira do futebol de salão mede 2 metros de altura por 3 de comprimento e há uma marca a 6 metros do ponto médio até a linha do gol, para que seja feita a cobrança da falta chamada "pênalti". A cobrança da falta será novamente sem a presença do goleiro, mas agora irá chutar a bola em qualquer direção do gol, e desta forma teremos que ajudá-lo a determinar 2 ângulos, um formado pela elevação da bola, e outro pelo deslocamento lateral que a mesma fará. Para facilitar o nosso trabalho, Théo dividiu a goleira em 24 partes iguais, e irá chamar cada uma delas de quadrante, como mostra na figura abaixo. O primeiro número indica a linha, e o segundo a coluna a qual pertence.




Fonte: autora

**Importante:** Será definido como certo, que a bola sempre entrará no centro de cada quadrante.

Vamos trabalhar?!

Primeiramente precisamos descobrir qual o ponto central de cada um dos quadrantes, como você fará isso?

Ex: Se cada quadrante é um quadrado de 50 X 50 cm então:

O ponto central do quadrante $\mathbf{A_{41}}$ encontra-se a uma altura de 25 cm do chão e uma distância do centro da goleira de 125 cm.

Baseando-se no exemplo calcule o ponto central de todos os outros quadrantes.

- Foi necessário calcular o ponto central de todos os 24 quadrantes? Justifique.

- Agora que você já sabe todos os pontos centrais, calcule quais serão os ângulos que fará a bola chutada por Théo, imaginando que ele chute em todos os quadrantes. (para cada quadrante 2 ângulos, um referente a altura da bola, e outro referente ao deslocamento lateral )
- Temos 24 quadrantes, teremos 24 ângulos? Justifique.

Exemplo de distância e ângulo lateral


Fonte: a autora

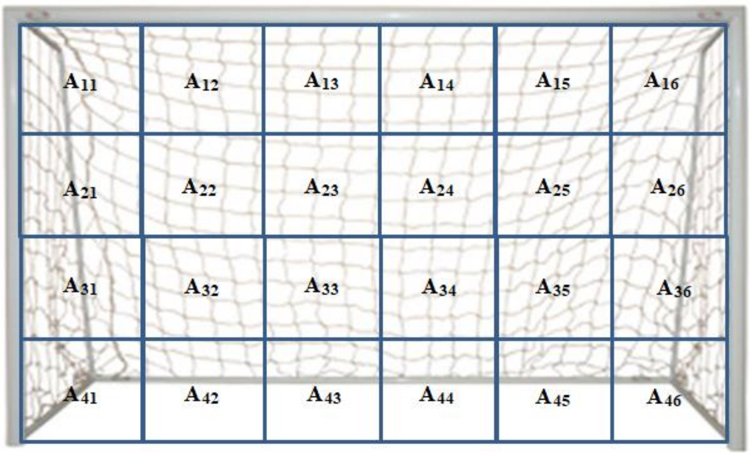
Agora que você já calculou os chutes do Théo, que tal irmos para a quadra da escola e chutarmos nossas próprias faltas?

- Primeiramente será necessário verificar as medidas da goleira e a distância da marca de cobrança do pênalti até a goleira, da quadra da escola.
- Com a goleira da quadra devidamente dividida já, cada Estudante chutará 5 vezes ao gol, da marca de cobrança do pênalti, o “juiz” irá informar qual quadrante o Estudante acertou, e o mesmo fará novamente os cálculos de distância e ângulo agora dos seus chutes a gol, e com as medidas da quadra de sua escola.

*MATERIAL ENTREGUE PARA OS ESTUDANTES*

**QUESTÃO 3**

Galera, nosso amigo Théo quer fazer uma nova cobrança de pênalti, mas resolveu trocar o futebol de campo pelo futebol de salão, sendo que a goleira do futebol de salão mede 2 metros de altura por 3 de comprimento e há uma marca a 6 metros do ponto médio até a linha do gol, para que seja feita a cobrança da falta chamada "pênalti". A cobrança da falta será novamente sem a presença do goleiro, mas agora irá chutar a bola em qualquer direção do gol, e desta forma teremos que ajudá-lo a determinar 2 ângulos, um formado pela elevação da bola, e outro pelo deslocamento lateral que a mesma fará. Para facilitar o nosso trabalho, Théo dividiu a goleira em 24 partes iguais, e irá chamar cada uma delas de quadrante, como mostra na figura abaixo. O primeiro número indica a linha, e o segundo a coluna a qual pertence.




Fonte: a autora

**IMPORTANTE:** Será definido como certo, que a bola sempre entrará no centro de cada quadrante.

Vamos trabalhar?!

Primeiramente precisamos descobrir qual o ponto central de cada um dos quadrantes, como você fará isso?

Ex:

Se cada quadrante é um quadrado de 50 X 50 cm então:

O ponto central do quadrante $\mathbf{A_{41}}$ encontra-se a uma altura de 25 cm do chão e uma distância do centro da goleira de 125 cm.

Baseando-se no exemplo calcule o ponto central de todos os outros quadrantes.

- Foi necessário calcular o ponto central de todos os 24 quadrantes? Justifique.
- Agora que você já sabe todos os pontos centrais, calcule quais serão os ângulos que fará a bola chutada por Théo, imaginando que ele chute em todos os quadrantes. (para cada quadrante 2 ângulos, um referente a altura da bola, e outro referente ao deslocamento lateral )
- Temos 24 quadrantes, teremos 24 ângulos? Justifique.

Exemplo de distância e ângulo lateral


Fonte: a autora

Agora que você já calculou os chutes do Théo, que tal irmos para a quadra da escola e chutarmos nossas próprias faltas?

- Primeiramente será necessário verificar as medidas da goleira e a distância da marca de cobrança do pênalti até a goleira, da quadra da escola.
- Com a goleira da quadra devidamente dividida já, cada Estudante chutará 5 vezes ao gol, da marca de cobrança do pênalti, o "juiz" irá informar qual quadrante o Estudante acertou, e o mesmo fará novamente os cálculos de distância e ângulo agora dos seus chutes a gol, e com as medidas da quadra de sua escola.

AULA 7: ESQUEMA TÁTICO

No futebol, os esquemas táticos são os meios de um treinador escalar sua equipe dentre de campo. Para Melo (2001) "tática é a arte de combinar a técnica individual de cada jogador, em suas diferentes linhas e posições, de modo a obter o máximo de rendimento do conjunto, em um determinado jogo."

Segundo Drubscky (2003), é tática no futebol tudo aquilo que é realizado com o intuito de alcançar a vitória em uma partida.

Por isso, os treinadores quando chegam a uma determinada equipe, planejam através de seus conhecimentos, adotar esquemas táticos que auxiliem essa equipe a alcançar a vitória.

Desta forma, pretendemos mostrar aos estudantes que os esquemas táticos do futebol também utilizam a Trigonometria para se beneficiar.

No esquema tático, demonstrado para os estudantes, utilizado no futebol de campo conhecido como 4-3-3 (4 zagueiros, 3 jogadores de meio de campo e 3 atacantes) podemos observar várias figuras geométricas, assim como diversos ângulos. Utilizamos essas figuras geométricas e ângulos para demonstrarmos a Trigonometria nesse esquema.

**Plano de Aula 7**

**Desenvolvimento**

O plano de aula será desenvolvido com a duração de um período de 55 minutos.

**Pré-requisitos**

Pontos e Retas

Ponto médio

Circunferência

Vértice

Triângulo retângulo ( hipotenusa e catetos)

Teorema de Pitágoras

Critérios de semelhança de triângulos

Matemática do Ensino fundamental

Seno, Cosseno e Tangente.

**Objetivos**

Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas no futebol.

Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações e demais conteúdos geométricos.

Identificar e usar corretamente as relações.

Resolver situações problemas do futebol envolvendo as relações trigonométricas.

**Avaliação**

Durante as aulas observando o interesse e a participação do Estudante.

**1º aula**

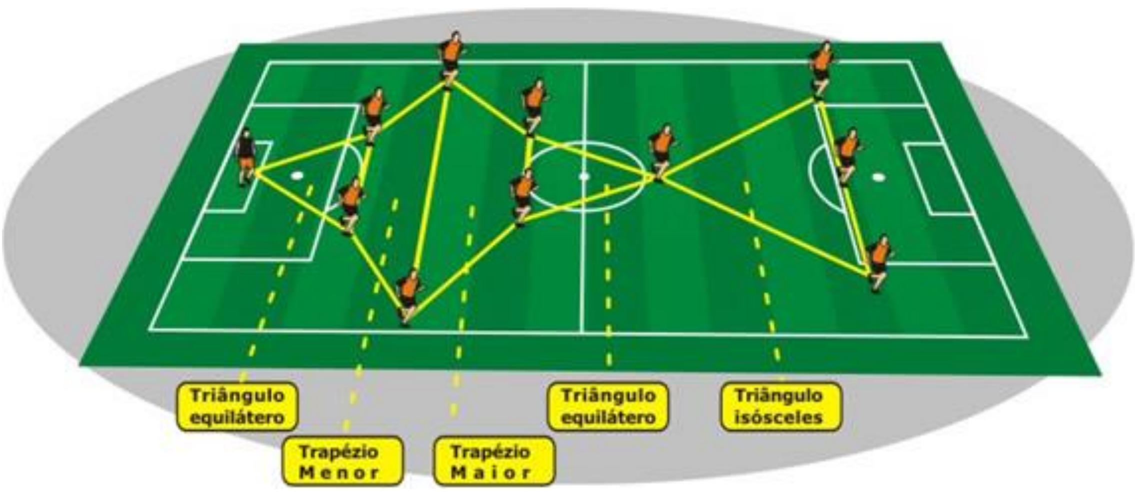
**Duração:** 55 minutos.

**Tema:** Trigonometria no esquema tático do futebol

**Procedimento:** A "Questão 4" será referente ao esquema tático utilizado no futebol de campo conhecido como 4-3-3 (4 zagueiros, 3 jogadores de meio de campo e 3 atacantes). Este esquema foi muito utilizado no passado, quando a prioridade era o ataque, o futebol bonito, chamado futebol arte. Com este esquema podemos observar várias figuras geométricas assim como diversos ângulos. Utilizaremos essas figuras geométricas e ângulos para demonstrarmos a Trigonometria nos esquemas táticos.

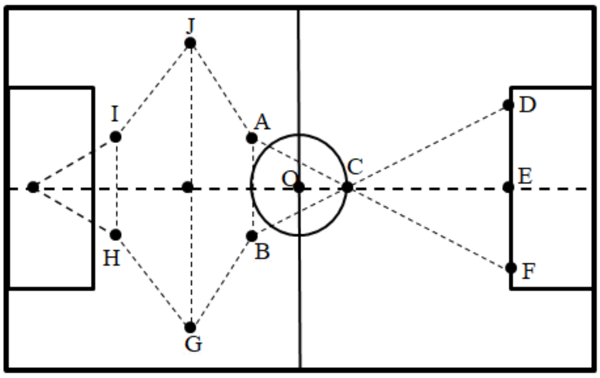
**<u>QUESTÃO 4</u>**

Pessoal, desta vez nosso amigo Théo resolveu convocar todo time pra jogar, e claro ficou com diversas dúvidas Matemáticas que teremos que ajudá-lo a resolver. O treinador do time resolveu adotar o esquema tático 4-3-3 (4 zagueiros, 3 jogadores de meio de campo e 3 atacantes) por ser um esquema muito ofensivo, já que o time precisava reverter algum resultado desfavoráveis. Para explicar melhor o esquema para o time usou a figura abaixo.




Fonte: http://www.pedagogia.com.br/artigos/geometriafutebol/index.php?pagina=6

Mostrando esse esquema tático Pedro, o treinador, informou que seria possível observar diversas figuras geométricas como: triângulos equiláteros, triângulos isósceles, trapézios, hexágonos e retângulos, porém isso não ficou muito claro para alguns jogadores, então Pedro fez um novo desenho do campo.

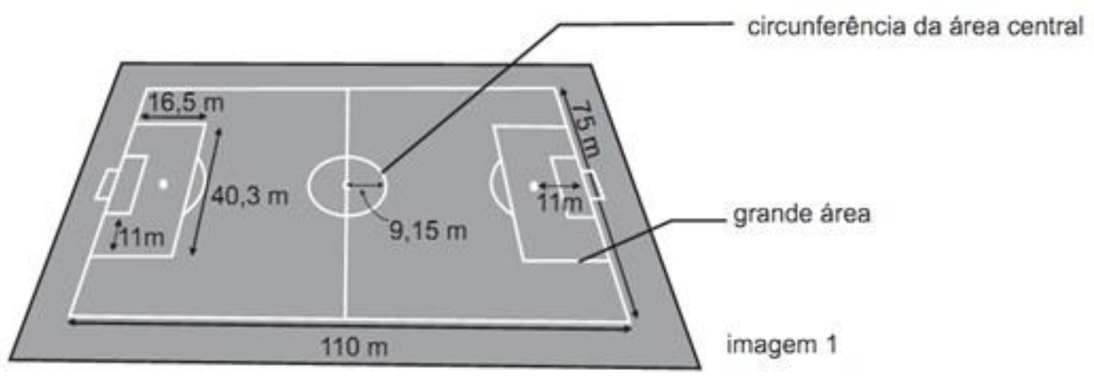



Fonte: autora

E explicou para o time:

- O triângulo ABC é equilátero, e o vértice C pertence à circunferência.
- O ponto O é o centro da circunferência.
- Os pontos D, E e F pertencem ao lado do retângulo que representa a grande área.
- O ponto E é o ponto médio do segmento $\overline{DF}$
- O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{DF}$
- O segmento $\overline{AB}$ é perpendicular a reta $\overline{CE}$.

Para facilitar nossos cálculos, utilizaremos as medidas do campo conforme figura abaixo.




Fonte: http://www.gramassinteticas.com.br/medidas-oficiais-da-quadra-de-futebol/

Porém alguns lances que aconteceram durante o jogo deixaram Théo com duvidas, vamos ajudá-lo?

1) O jogador da posição B chutou a bola para o jogador da posição C, e este para o jogador da posição D, sem interferência de outros jogadores. Qual foi a distancia que a bola percorreu, em metros, saindo do jogador B até o jogador D?

- Algumas perguntas serão feitas ao Estudante para facilitar a interpretação do problema, como por exemplo:

- Você consegue visualizar algum triangulo retângulo?
- Como você conseguirá algumas medidas?
- Você possui medidas do campo?
- Você tem uma tabela com valores de Seno, Cosseno e Tangente, isso pode lhe ajudar?
- Você pode utilizar semelhança de triângulos?
- Você lembra-se de ângulos opostos, complementares?

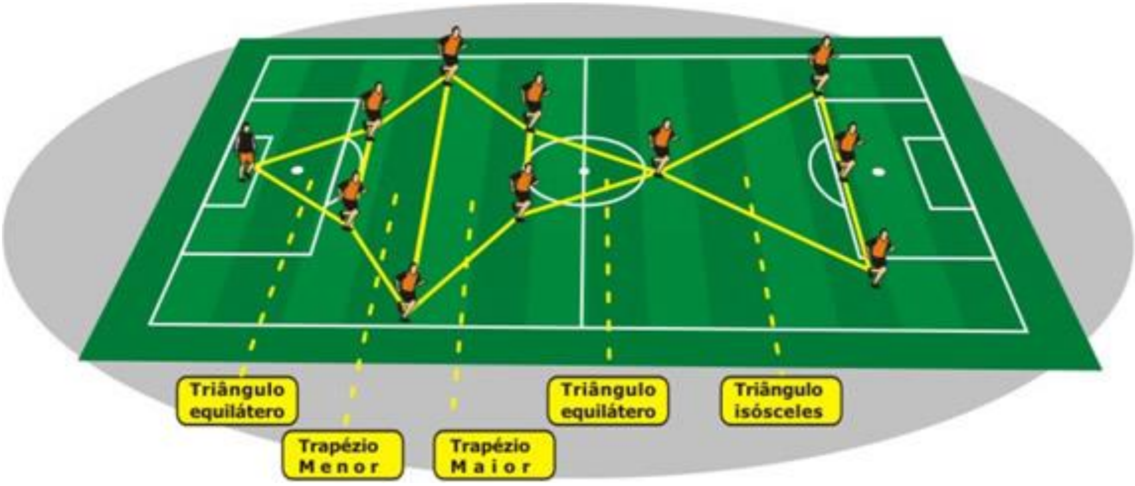
2) Sabendo que os trapézios GHIJ e ABGJ são iguais ajude a descobrir qual a distância que a bola percorreu saído do jogador H até o Jogar B sendo que a distância de G e H é 20 metros e o ângulo HGJ é de 40º.

3) Qual a distância percorrida pela bola saindo do jogador E e chegando até o jogador B?

*MATERIAL ENTREGUE PARA OS ESTUDANTES - AULA 7*

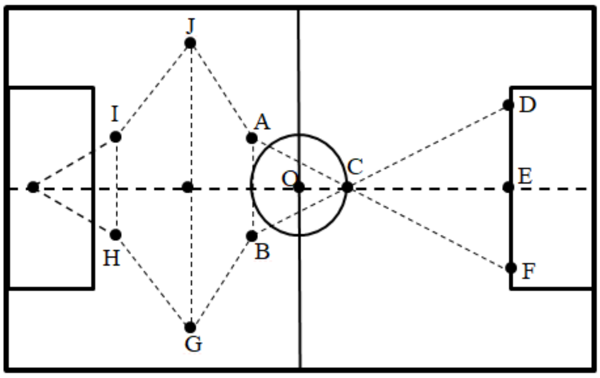
**QUESTÃO 4**

Pessoal, desta vez nosso amigo Théo resolveu convocar todo time pra jogar, e claro ficou com diversas dúvidas Matemáticas que teremos que ajudá-lo a resolver. O treinador do time resolveu adotar o esquema tático 4-3-3 (4 zagueiros, 3 jogadores de meio de campo e 3 atacantes) por ser um esquema muito ofensivo, já que o time precisava reverter algum resultado desfavoráveis. Para explicar melhor o esquema para o time usou a figura abaixo.




Fonte: http://www.pedagogia.com.br/artigos/geometriafutebol/index.php?pagina=6

Mostrando esse esquema tático Pedro, o treinador, informou que seria possível observar diversas figuras geométricas como: triângulos equiláteros, triângulos isósceles, trapézios, hexágonos e retângulos, porém isso não ficou muito claro para alguns jogadores, então Pedro fez um novo desenho do campo.



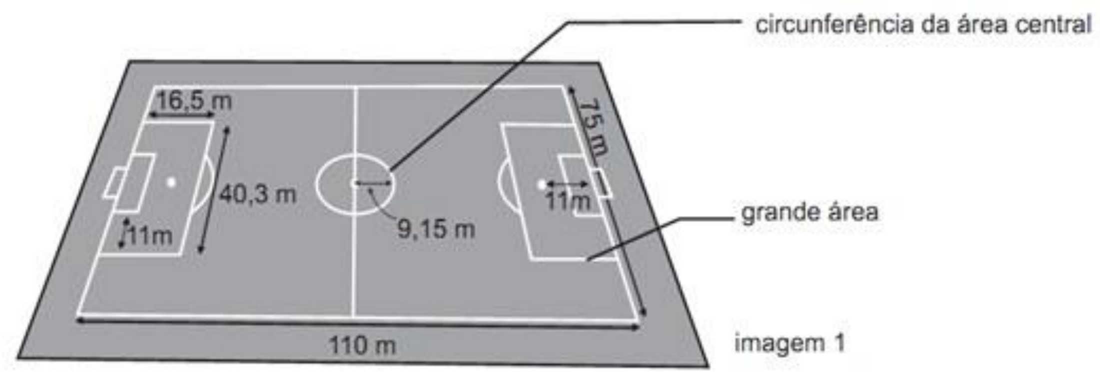

Fonte: autora

E explicou para o time:

- O triângulo ABC é equilátero, e o vértice C pertence à circunferência.
- O ponto O é o centro da circunferência.
- Os pontos D, E e F pertencem ao lado do retângulo que representa a grande área.

- O ponto E é o ponto médio do segmento $\overline{DF}$
- O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{DF}$
- O segmento $\overline{AB}$ é perpendicular a reta $\overline{CE}$.

Para facilitar nossos cálculos, utilizaremos as medidas do campo conforme figura abaixo.




Fonte: http://www.gramassinteticas.com.br/medidas-oficiais-da-quadra-de-futebol/

Porém alguns lances que aconteceram durante o jogo deixaram Théo com duvidas, vamos ajudá-lo?

2) O jogador da posição B chutou a bola para o jogador da posição C, e este para o jogador da posição D, sem interferência de outros jogadores. Qual foi a distancia que a bola percorreu, em metros, saindo do jogador B até o jogador D?
    - Algumas perguntas serão feitas ao Estudante para facilitar a interpretação do problema, como por exemplo:
        - Você consegue visualizar algum triangulo retângulo?
        - Como você conseguirá algumas medidas?
        - Você possui medidas do campo?
        - Você tem uma tabela com valores de Seno, Cosseno e Tangente, isso pode lhe ajudar?
        - Você pode utilizar semelhança de triângulos?
        - Você lembra-se de ângulos opostos, complementares?
3) Sabendo que os trapézios GHIJ e ABGJ são iguais ajude a descobrir qual a distância que a bola percorreu saído do jogador H até o Jogar B sendo que a distância de G e H é 20 metros e o ângulo HGJ é de 40º.
4) Qual a distância percorrida pela bola saindo do jogador E e chegando até o jogador B?

## AULA 8: MAPA CONCEITUAL FINAL

Após finalizar a aplicação da UEPS, ensinando a Trigonometria de forma diferenciada aos estudantes, com a prática no futebol, solicitamos aos mesmos que elaborassem o último Mapa Conceitual sobre Trigonometria, e entregassem esse desenvolvimento para mais uma vez pudéssemos avaliar a aprendizagem dos estudantes.

# 7. BIBLIOGRAFIA

ALVES-MAZZOTTI, A. J., GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. São Paulo: Pioneira, 1998.

AUSUBEL, D. et al. **Psicologia Educacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1968.

AUSUBEL, DAVID P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva**. Lisboa: Paralelo Editora, 2003.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional.** Tradução Eva Nick. Rio de Janeiro: 2 ed. Melhoramentos. 1980.

BALDINO, R.R.; CIANI A.B.; ANEMARIE, R. L.; CYRINO M. C.C. T. **Do coeficiente angular da reta ao conceito de diferencial: crítica ao Ensino atual e proposta alternativa**, Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática, vol.6, n.1, p. 29-50, 1997.

BARBOSA, O.B., NETO, H.B. **Raciocínio lógico formal e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral: O caso da Universidade Federal do Ceará.** Temas e Debates, Blumenau: SBEM, v. VIII, n.6, p.61-69, 1995.

BARROS, A. J. P.; LEHFELD, N. A. S. **Projeto de Pesquisa: propostas metodológicas.** 12 ed. revisada e atualizada. Petrópolis: Vozes, 2001.

BICUDO, M. A. V.; CHAMIE, L. M. S. **Compreendendo e interpretando as dificuldades sentidas pelos estudantes ao estarem com a Matemática.** Revista Zetetiké, Campinas, ano 2, n. 2. 1994.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BOFF, B. C. **Matemática para Engenharia: Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para superar lacunas em Matemática básica.** Dissertação (Mestrado)-Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade de Caxias do Sul. 2017.
BOYER, C.B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher Ltda,1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília, MEC, 2000.

BRITO, A. J.; MOREY, B. B. **Trigonometria: dificuldades dos professores de Matemática do Ensino fundamental**. Revista Horizontes, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 65-70. 2004.

CAÑAS, A. J.; NOVAK, J. D.; MILLER, N. L.; COLLADO, C.; RODRÍGUEZ, M.; CONCEPCIÓN, M.; SANTANA, C.; PEÑA, L. **Confiabilidad de una taxonomia topológica para mapas conceptuales**. In: II International Conference on Concept Mapping, San José, Costa Rica, 2006.

CBF – Confederação Brasileira de Futebol – **Regras de Futebol 2017/18**. https://conteudo.cbf.com.br/cdn/201712/20171221124545_0.pdf . Acessado em 30/10/18.

CURY, H.N. **Aprendizagem em Cálculo: uma experiência com avaliação formativa**. In: XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. Santo Amaro, 2005.

D'AMBRÓSIO, U. **Da Realidade à ação: reflexões sobre Educação e Matemática**. São Paulo: Universidade Estadual de Campinas,1986.

DRUBSCKY, R. **O Universo Tático do Futebol, Escola Brasileira**. Belo Horizonte: Health, 2003.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática.** Campinas: Unicamp,1995.

FLEMMING, D.M. E LUZ, E.F. **Tendências atuais no Ensino das disciplinas da área de Matemática nos cursos de engenharia.** In: XXVII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, Natal, 1999.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica.** Fortaleza: UEC, 2002.

GIKOVATE, Flávio. **A arte de educar**. Curitiba: Nova Didática, 2001.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

GOWIN D. Educating, 2nd ed. Ithaca, N.I: Cornell University Press.1990

KAMMI, C. **Desvendando a aritmética: implicações na teoria de Piaget**. Campinas-SP: Papirus, 1995.

LIMA, I.G.; SAUER, L.Z. **Uma proposta metodológica e sua contribuição para a aprendizagem de Matemática na formação de engenheiros**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 2003. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Ensino de Engenharia, 2003.

LUZ, S. V. **Aprendizagem Significativa de Função do 1º Grau: uma investigação por meio da modelagem Matemática e dos mapas conceituais.** 2010. Dissertação (Mestrado)-Mestrado em Educação para as Ciências e Ensino de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá. Paraná, 2010.

MARQUES, Paulo; **Matemática: Trigonometria**. São Paulo; Moderna, 2008.

MASETTO, M.T. **Aulas Vivas.** São Paulo: MG Editores Associados, 1992.

MASINI, E. F. S. **Aprendizagem Significativa: condições para ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos.** Aprendizagem Significativa em Revista/Meaningful Learning Review – V1(1), pp. 16-24, 2011.

MELO, R. S. **Sistemas e táticas para futebo**l. Rio de Janeiro: Sprint, 2. ed., 1999.

MILLER, N. L. **An exploration of computer-mediated skill acquisition in concept mapping by in-service Panamanian public elementary school teachers**. Doctoral Program on the Information and Knowledge Society, Universitat Oberta de Catalunya, 2008.

MORAES, R. **Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva.** Porto Alegre, 2003.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem Significativa: a Teoria de David Ausubel**. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2009.

MOREIRA, M. A. Unidades de ensenanza potencialmente significativas. **Aprendizagem Significativa em Revista**, V1(2) p.43-63, 2011.

MOREIRA, M. A. **Mapas conceituais e Aprendizagem Significativa**. 2012. Disponível em: http://www.if.UFRGS.br/~moreira/mapasport.pdf. Acesso em 28 jan 2017.

MOREIRA, M.A.; BUCHWEITZ, B. **Novas estratégias de Ensino e aprendizagem: os mapas conceituais e o Vê epistemológico.** Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 1993

MORELATTI, M.R.M. **Criando um ambiente construcionista de aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral I.** São Paulo, 2001. Tese ( Doutorado em Educação )- PUCSP.

MORESI, E. **Metodologia da pesquisa**. Brasília: Universidade Católica de Brasília, 2003.

NASCIMENTO, J.L. **Matemática: conceitos e pré-conceitos.** In: Educação em Engenharia: metodologia (Pinto, D.P. e Nascimento, J.L, eds) pp 247-295, São Paulo: Mackenzie, 2002

NASSER, L.; FREIRE, J. L.; CARDADOR, D. Preenchendo Lacunas de Aprendizagem em Educação Matemática no Ensino Superior por meio da Educação a Distância. In: **VI SIPEM – Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro.** UNIRIO, 2008

NOVAK, J. D.; GOWIN, D. B. **Aprender a aprender**. Lisboa, Plátano edições técnicas, 1984. Tradução Carla Valadares.

NOVAK, A. J.; CAÑAS, J. D. **Confiabilidad de una taxonomia topológica para mapas conceptuales. Proceedings of the Second International Conference on Concept Mapping.** Universidad de Costa Rica, San Jose: vo. 1, 2006.

PAIVA, M. R. **Matemática 1,** Ed; Moderna, São Paulo, 1995.

PAIVA, M. **Matemática**, Volume único, Ed; São Paulo: Moderna, 2003.

PARRA, C. SAIZ, I. **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógica**. Porto Alegre, Artmed (Artes Médicas). 1996.

PARASURAMAN, A. **Marketing research**. 2 ed. Addison Wesley Publishing Company, 1991.

PERRENOUD, Ph. **Dez Novas Competências para Ensinar**. Porto Alegre: Artmed Editora. 2000.

ROBERT, A.. **Quelques outils d'analyse epistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université**. Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques. p.192-212, Houlgate, França.1997.

ROCHA, A. C. F. **A Matemática como instrumental no currículo de cursos técnicos: um estudo de caso no CEFET-MG**. Belo Horizonte: Dissertação (Mestrado em Tecnologia ) Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. 2003.

SARAVALI, E. G. B. **Dificuldades de aprendizagem no Ensino Superior: reflexões a partir da perspectiva piagetiana**. ETD Educação Temática Digital, Campinas, v. 6, n. 2, p. 99-127, 2005. Disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/etd/article/view/1660>. Acesso em: 8 abr. 2016.

SILVA, F. A. **Curso de Pré-Cálculo**. Organização de Eric Robalinho. 2.ed. Bento Gonçalves: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, 2017.

SOARES, E. M. S.; SAUER, L. Z. Um novo olhar sobre a aprendizagem de Matemática para a engenharia. **In: Disciplinas Matemáticas em cursos Superiores.** (CURY, H. N. ed) pp 245-270, Porto Alegre: Edipucrs, 2004.

TONELOTTO, J. M. **Aceitação e rejeição: Percepção de escolares desatentos no ambiente escolar. Psicologia Escolar e Educacional**. 2002. http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?pid=S1413-572002000200004&script=sci_arttext&tlng=es. Acessado em: 15 dez. 2018

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 1987.

VASCONCELOS, C. C. **Ensino-aprendizagem da Matemática: velhos problemas, novos desafios.** Revista Millenium nº 20 São Paulo, SP, 2009.

VASCONCELOS, M. B. F. **A contextualização e o Ensino de Matemática: Um estudo de caso,** João Pessoa, PB: Dissertação, 2008.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

# 8. APÊNDICE I – PRIMEIRO QUESTIONÁRIO

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Universidade de Caxias do Sul
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática
Mestranda: Daiana Bordin

**Questionário de pesquisa para estudantes das disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial**

1. Nome (opcional):__________________________________________________________
2. Idade:________________________________________________________________
3. Instituição de Ensino:_______________________________________________________
4. Onde você concluiu seu Ensino Médio? (Caso tenha sido na modalidade EJA, Supletivo ou outro, favor identificar)______________________________________________________

   ______________________________________________________________________
5. Há quanto tempo você concluiu o Ensino Médio?___________________________________
6. Você possui dificuldades para a aprendizagem de Cálculo?

   ( ) Sim ( ) Não(neste caso não há necessidade de responder as demais questões)

7. Suas dificuldades para o aprendizado de Cálculo são pelo próprio conteúdo da disciplina ou por deficiência em conteúdos de Ensino Fundamental e/ou Médio?__________________________

   ______________________________________________________________________
8. Se as dificuldades são em conteúdos de Ensino Fundamental e/ou Médio, quais são esses conteúdos?____________________________________________________________

   ______________________________________________________________________
9. Você aprendeu esses conteúdos no Ensino Fundamental e/ou Médio?____________________

   ______________________________________________________________________
10. Quando você está com dificuldades, onde costuma pedir ajuda?

    ( )Professor da disciplina ( )Professores de outras disciplinas

    ( )Colegas ( )Monitores

    ( )Outros. Quais? _________________________________________________________

    ______________________________________________________________________

Universidade de Caxias do Sul
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática
Mestranda: Daiana Bordin

**Questionário de pesquisa para monitores das disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial**

1. Nome (opcional):________________________________________________
2. Idade:________________________________________________________
3. Qual seu curso de graduação?_________________________________________
4. Qual semestre você está cursando?_____________________________________
5. Disciplinas das quais é monitor(a):_____________________________________
6. Quantos estudantes atende em média semanalmente?_____________________________

_______________________________________________________________

7. Quais as maiores dúvidas atendidas?____________________________________

_______________________________________________________________

8. Dentre as dúvidas atendidas, qual a porcentagem (aproximada) das que são referentes aos conteúdos de Ensino Fundamental e Médio?_______________________________

_______________________________________________________________

9. Quais os conteúdos de Ensino Fundamental e Médio que os estudantes possuem maior carência?_______________________________________________________

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

10. Quais as técnicas e/ou métodos utilizados para auxiliar os estudantes com as dúvidas?

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

Universidade de Caxias do Sul
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática
Mestranda: Daiana Bordin

**Questionário de pesquisa para professores das disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial**

1. Nome (opcional):__________________________________________________
2. Local de trabalho:__________________________________________________
3. Disciplina(s) que ministra:____________________________________________
4. Há quanto tempo ministra essa(s) disciplina(s)?______________________________
5. Quantos estudantes possuem as turmas em questão?
6. Qual a idade média dos estudantes?______________________________________
7. Qual a porcentagem de aprovação de estudantes?____________________________
8. Em sua opinião, quais os principais problemas de aprendizagem dos estudantes nas disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial?__________________________________
9. Quais os conteúdos de Ensino Fundamental e Médio, considerados pré-requisitos das disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial, que os estudantes apresentam maior carência?____________________________________________________________
10. Quando detectada dificuldades no aprendizado, oriundas de conteúdos de Ensino Fundamental e Médio, quais recursos são utilizados para sanar essas dificuldades? (colegas, monitorias, professor particular)____________________________________________

# 9. APÊNDICE II – COMPILAÇÃO DE DADOS DO PRIMEIRO QUESTIONÁRIO

Este questionário foi aplicado a 137 estudantes, 2 professoras e 2 monitores da disciplina de Calculo 1, de uma universidade comunitária na cidade de Bento Gonçalves. Porém o mesmo se mostrou insuficiente para suprir as necessidades que tínhamos em levantarmos os conteúdos estruturantes da Matemática para aprendizagem de Cálculo, nos quais os estudantes apresentam carência, pois por se tratar de um questionário com questões descritivas, podemos perceber que os estudantes não conseguem explicar em qual conteúdo eles possuem mais dificuldades, utilizando de termos como "Matemática básica" para descrever os conteúdos.

Por parte dos professores também não foi obtido o resultado esperado, pois acabaram não apontando com precisão os conteúdos que os estudantes não possuem domínio, causadores do insucesso da aprendizagem de Cálculo. Os monitores das disciplinas em questão mostraram-se um pouco mais precisos, apontando as principais dificuldades dos estudantes que procuram a monitoria, conteúdos como Trigonometria, Fatoração e Polinômios, porém afirmam que os estudantes só procuram ajuda para a resolução de exercícios.

## 10. APÊNDICE III - SEGUNDO QUESTIONÁRIO

Universidade de Caxias do Sul
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática
Mestranda: Daiana Bordin

**Questionário/entrevista de pesquisa para ESTUDANTES das disciplinas de Cálculo I, para fundamentar a dissertação com o título "*As dificuldades apresentadas em Cálculo Integral e Diferencial e atribuídas aos conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental e Médio.*".**

1. Nome (opcional):______________________________ _________________________
2. Idade:_________________________________________________________________
3. Você trabalha? Se afirmativo, quantas horas diárias?__________________________
4. Onde você concluiu seu Ensino Médio? (Caso tenha sido na modalidade EJA, Supletivo ou outro, favor identificar)______________________________________________________
5. Há quanto tempo você concluiu o Ensino Médio?________________________________
6. Selecione a seguir até 3 conteúdos que você entende que tenha mais dificuldades na aprendizagem da Matemática?

   ( ) Trigonometria    ( ) Funções

   ( ) Fatoração    ( ) Produto Notável

   ( ) Polinômios    ( ) Logaritmos

7. O seu rendimento escolar em Cálculo está classificado como:

   ( ) Ótimo ( 80-100% )

   ( ) Bom ( 60-80% )

   ( ) Regular (40-60% )

   ( ) Insuficiente ( 20-40% )

   ( ) Péssimo (0-20% )

8. Quando você está com dificuldades em Cálculo, como costuma resolver? (pode marcar mais de uma alternativa)

   ( ) Com o professor da disciplina

   ( ) Com os professores de outras disciplinas

   ( ) Com os colegas

   ( ) Com os monitores

   ( ) Através dos livros

   ( ) Usando a internet

   ( )Outros. Quais? _______________________________________________________

9. Quais as práticas para o Ensino o professor aplica na sala de aula? (pode marcar mais de uma alternativa)

( ) somente aula expositiva

( ) aula expositiva e data show

( ) utiliza laboratório

( ) oferece exercícios para resolver em casa

( ) aplica provas frequentemente

( )Outros. Quais? ____________________________________________________

10. Quais as formas de avaliação são utilizadas pelo professor? (pode marcar mais de uma alternativa)

( ) Avaliação Contínua

( ) Provas

( ) Trabalhos em sala de aula

( ) Trabalhos para serem resolvidos em casa

( )Outras. Quais? ____________________________________________________

11. Quantas horas semanais de estudo você dedica para a disciplina de Cálculo?

( ) Não estudo

( ) Até 3 horas

( ) De 3 a 5 horas

( ) De 5 a 8 horas

( ) De 8 a 11 horas

( ) Mais de 12 horas

12. Como você percebe a relação do professor com a turma?

( ) Excelente – ( 80-100% )

( ) Ótima - ( 60-80% )

( ) Boa – (40-60% )

( ) Insatisfatória – ( 20-40% )

( ) Péssima - (0-20% )

13. Qual sua frequência em sala de aula?

( ) Excelente – ( 80-100% )

( ) Ótima - ( 60-80% )

( ) Boa – (40-60% )

( ) Insatisfatória – ( 20-40% )

( ) Péssima - (0-20% )

14. Qual sua sugestão para melhorar sua aprendizagem nos conteúdos de Cálculo?

Universidade de Caxias do Sul

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática
Mestranda: Daiana Bordin

**Questionário/entrevista de pesquisa para MONITORES das disciplinas de Cálculo I, para fundamentar a dissertação com o título "*As dificuldades apresentadas em Cálculo Integral e Diferencial e atribuídas aos conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental e Médio.*".**

1. Nome (opcional):____________________________________________
2. Idade:____________________________________________________
3. Qual seu curso de graduação?_____________________________________
4. Qual semestre você está cursando?_________________________________
5. Disciplinas das quais é monitor (a):_________________________________

6. Quantos estudantes atende em média semanalmente?

( ) Menos de 5 estudantes
( ) De 5 a 10 estudantes
( ) De 10 a 15 estudantes
( ) De 15 a 20 estudantes
( ) De 20 a 25 estudantes
( ) Mais de 25 estudantes

7. Quais os conteúdos de Ensino Fundamental e Médio que os estudantes possuem maior carência? Marcar os dois itens principais

( ) Trigonometria
( ) Fatoração
( ) Polinômios
( ) Funções
( ) Produto Notável
( ) Logaritmos

Outros. Quais?
______________________________________________________________

8. Quais as técnicas e/ou métodos utilizados para auxiliar os estudantes com as dúvidas? Múltiplas alternativas

( ) Resolução de exercícios
( ) Explicação do conteúdo
( ) Explicação de conteúdos de Ensino médio
( ) Indicação de Livros/ Revistas/ Sites
( ) Outros. Quais?
__________________________________________________________

9. Você conhece a metodologia que o professor aplica na sala de aula?
   ( ) Somente aula expositiva
   ( ) Somente aula expositiva e data show
   ( ) Utiliza laboratório
   ( ) Oferece exercícios para resolver em casa
   ( ) Aplica provas frequentes
   ( ) Outro método. Qual?_____________________________________________

10. Quantos estudantes você atende regularmente e mostram evolução no período?

( ) Menos de 5 estudantes
( ) De 5 a 10 estudantes
( ) De 10 a 15 estudantes
( ) De 15 a 20 estudantes
( ) De 20 a 25 estudantes
( ) Mais de 25 estudantes

11. Quantos estudantes aparecem um dia antes da prova?

( ) Menos de 5 estudantes
( ) De 5 a 10 estudantes
( ) De 10 a 15 estudantes
( ) De 15 a 20 estudantes
( ) De 20 a 25 estudantes
( ) Mais de 25 estudantes

Universidade de Caxias do Sul
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática
Mestranda: Daiana Bordin

**Questionário/entrevista de pesquisa para PROFESSORES das disciplinas de Cálculo I, para fundamentar a dissertação com o título "*As dificuldades apresentadas em Cálculo Integral e Diferencial e atribuídas aos conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental e Médio.*".**

1. Nome (opcional):______________________________________________________

2. Há quanto tempo ministra a disciplina de Cálculo I?

( ) Menos de 3 anos
( ) De 3 a 6 anos
( ) De 5 a 8 anos
( ) De 8 a 10 anos
( ) De 10 a 15 anos
( ) Mais de 15 anos

3. Quantos estudantes possuem as turmas em questão?

( ) Menos de 15 estudantes
( ) De 15 a 30 estudantes
( ) De 30 a 45 estudantes
( ) De 45 a 60 estudantes
( ) Mais de 60 estudantes

4. Qual a porcentagem de aprovação de estudantes, em média, neste período que você ministra a disciplina?

( ) Menos de 20%
( ) De 20 a 40%
( ) De 40 a 60%
( ) De 60 a 80%
( ) De 80 a 100%

5. Em sua opinião, quais os principais problemas de aprendizagem dos estudantes nas disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial? Múltiplas respostas

( ) Carência nos conteúdos do Ensino Fundamental
( ) Carência nos conteúdos do Ensino Médio
( ) Conteúdos do Cálculo Integral e Diferencial
( ) Outros. Quais?______________________________________________________
____________________________________________________________________

6. Em quais conteúdos do Ensino Fundamental e Médio, considerados pré-requisitos das disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial, você acredita que os estudantes apresentam maior carência?

( ) Trigonometria
( ) Fatoração
( ) Polinômios
( ) Funções
( ) Produto Notável
( ) Logaritmos

7. Dos conteúdos supracitados, podendo selecionar apenas um, qual você acredita que necessitaria de um método específico para seu Ensino e aprendizagem, com o objetivo de suprir as carências dos estudantes de Cálculo?

( ) Trigonometria
( ) Fatoração
( ) Polinômios
( ) Funções
( ) Produto Notável
( ) Logaritmos

8. Em sua opinião, quais os fatores que mais dificultam a aprendizagem dos estudantes nas disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial? Múltiplas respostas

( ) Dúvidas em relação ao conteúdo
( ) Infrequência
( ) Desinteresse
( ) Não resolvem os exercícios propostos
( ) Não acompanham as explicações
( ) Não buscam ajuda

9. Em sua opinião, o que facilitaria a aprendizagem dos estudantes nas disciplinas de Cálculo Integral e Diferencial? Múltiplas respostas

( ) Um Ensino Fundamental e Médio mais incisivo.
( ) Maior carga horária da disciplina de Cálculo I.
( ) Mais tempo de estudo por parte dos estudantes.
( ) Disciplina de pré-cálculo.

# 11. APÊNDICE IV – COMPILAÇÃO DE DADOS DO SEGUNDO QUESTIONÁRIO

Este questionário foi aplicado a cinco turmas da disciplina de Cálculo 1, com uma média de 55 estudantes por turma, de uma universidade comunitária nas cidades de Bento Gonçalves e Caxias do Sul. Juntamente com os estudantes, 3 professores que ministram a disciplina em questão e 2 monitores da mesma, responderam ao questionário.

Quanto ao perfil dos estudantes que participaram da resolução do questionário, a faixa etária dos pesquisados é de 18 a 34 anos, porém sua grande maioria concentra-se entre 20 e 26 anos. Dentre os mesmos, 96% afirmam ter estudado em escolas públicas, e apenas 8% finalizou o Ensino Médio a mais de dois anos.

Pode-se perceber uma grande assiduidade por parte dos estudantes, porém constatou-se que poucos conseguem dedicar-se aos estudos fora da sala de aula.

Dentre as diversas constatações de relevância encontra-se também o questionamento em relação aos conteúdos que os estudantes apresentavam dificuldades. Por se tratar de uma questão com opção de três respostas, obtivemos a como resposta com maior percentual, o conteúdo de Trigonometria com 63%, seguido do conteúdo Logaritmo com 59%,conforme Tabela 1.

Tabela 1- Conteúdos com maiores dificuldades de entendimento pelos estudantes

| **Conteúdo** | **Porcentagem de estudantes com dificuldades** | **Conteúdo** | **Porcentagem de estudantes com dificuldades** |
|---|---|---|---|
| Trigonometria | 63% | Funções | 31% |
| Fatoração | 32% | Produto Notável | 24% |
| Polinômios | 33% | Logaritmos | 59% |

Fonte: autora

Constatado, desta forma, que a Trigonometria foi o conteúdo de maior dificuldade de compreensão por parte dos estudantes.

Os questionários aplicados geraram dados que não foram utilizados totalmente nessa pesquisa em função do direcionamento do problema proposto.

## 12. APÊNDICE V – TERCEIRO QUESTIONÁRIO

Universidade de Caxias do Sul
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática Mestranda: Daiana Bordin

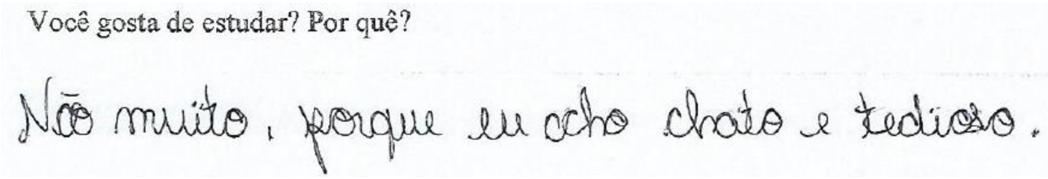
**Questionário de pesquisa para estudantes do Nono ano de Escola Estadual da Cidade de Bento Gonçalves**

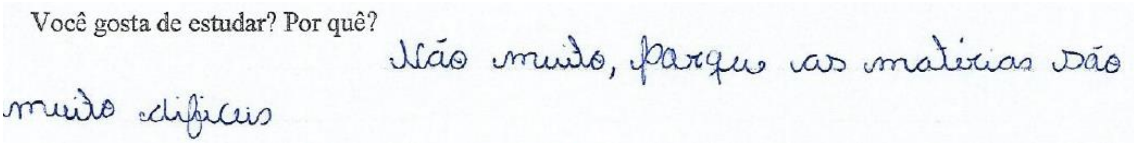
1. Nome (opcional):______________________________________________
2. Idade:_______________________________________________________
3. Qual seu passatempo preferido?
_____________________________________________________________
4. Você gosta de música? Qual ritmo prefere?
_____________________________________________________________
5. Você gosta de dançar? Qual ritmo prefere?
_____________________________________________________________
6. Você gosta de estudar? Por quê?
_____________________________________________________________
7. Você gosta de Matemática? Por quê?
_____________________________________________________________
8. O que deixaria a Matemática mais interessante para você?
_____________________________________________________________
9. Você acredita que aprenderia mais facilmente se o conteúdo matemático estivesse ligado a algo do seu interesse? Por quê?
_____________________________________________________________
10. E se a Matemática fosse ensinada através da dança, você se interessaria mais pela matéria? Por quê?
_____________________________________________________________

## 13. APÊNDICE VI – COMPILAÇÃO DOS DADOS DO TERCEIRO

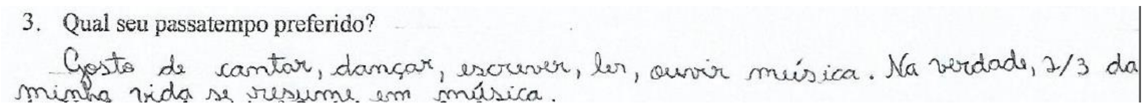
Este questionário foi aplicado a 30 estudantes do Nono ano do Ensino Fundamental, em uma escola Estadual na cidade de Bento Gonçalves.

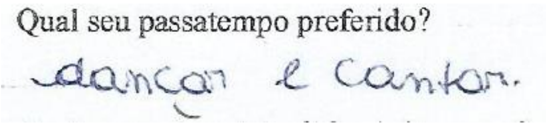
Esta pesquisa nos relatou a falta de interesse dos estudantes tanto nos estudos em geral, como na disciplina de Matemática.


Você gosta de estudar? Por quê?
Não muito, porque eu acho chato e tedioso.

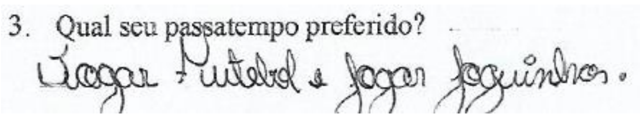

Você gosta de estudar? Por quê? Não muito, porque as matérias são muito difíceis

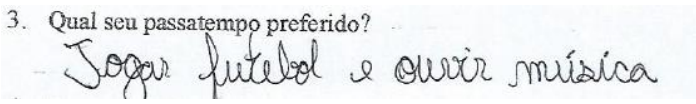
Um dos questionamentos realizados foi referente ao passatempo preferido dos estudantes, e acreditávamos que a Música e a Dança fossem interesses comuns da maioria, observe alguns relatos:

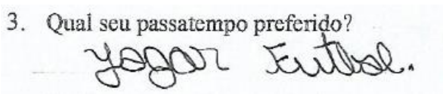

3. Qual seu passatempo preferido?
Gosto de cantar, dançar, escrever, ler, ouvir música. Na verdade, 2/3 da minha vida se resume em música.

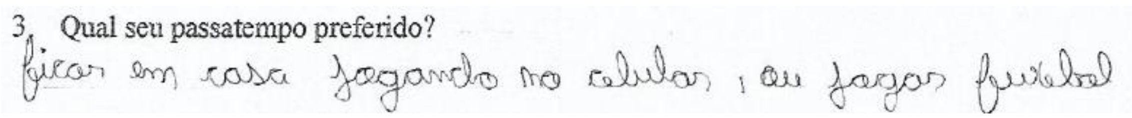

Qual seu passatempo preferido?
dançar e cantar.

Porém, nos surpreendendo, cerca de 66% dos entrevistados, tem como passatempo preferido jogar futebol. Veja relatos


3. Qual seu passatempo preferido?
Jogar futebol e jogar joguinhos.


3. Qual seu passatempo preferido?
Jogar futebol e ouvir música


3. Qual seu passatempo preferido?
Jogar Futebol.


3. Qual seu passatempo preferido?
ficar em casa jogando no celular, ou jogar futebol

Os estudantes acreditam ainda, que para que a Matemática venha a se tornar mais interessante, a mesma deveria estar ligada a algo do seu interesse, 88% dos entrevistados acreditam que seu aprendizado aconteceria de forma mais eficaz. Acreditam, ainda, que se a

Matemática estivesse relacionada ao futebol, seu aprendizado seria mais fácil.

8. O que deixaria a matemática mais interessante para você?

Relacioná-lo há assuntos diversos, no meu caso futebol.

Você acredita que aprenderia mais facilmente se o conteúdo matemático estivesse ligado a algo do seu interesse? Por quê?

Sim, acredito que seria mais fácil e interes-se.

Você acredita que aprenderia mais facilmente se o conteúdo matemático estivesse ligado a algo do seu interesse? Por quê?

Sim, porque eu ia me dedicar mais.

Você acredita que aprenderia mais facilmente se o conteúdo matemático estivesse ligado a algo do seu interesse? Por quê?

Sim, pois seria muito mais fácil de memorizar as lições.

# 14. APÊNDICE VII – PLANO DE AULA DE MAPA CONCEITUAL

## AULA 1

Mapa Conceitual é uma estratégia potencialmente facilitadora da Aprendizagem Significativa. Também é uma técnica muito flexível e em razão disso pode ser usado em diversas situações, para diferentes finalidades: como instrumento de análise do currículo, técnica didática, recurso de aprendizagem e avaliação (MOREIRA; BUCHWEITZ, 1993).

Segundo Moreira (2012, p. 1), “mapas conceituais são diagramas de significados, de relações significativas; de hierarquias conceituais, se for o caso. Mapas conceituais não buscam classificar conceitos, mas sim relacioná-los e hierarquizá-los.”

Na nossa aula sobre mapas conceituais, iniciaremos comentando da importância de fazer anotações nas aulas e de como fazê-las, em seguida mostraremos como o mapa conceitual pode ajuda-los na organização dos conteúdos a serem estudados.

**DESENVOLVIMENTO:**

O plano de aula será desenvolvido com a duração de um período de 55 minutos.

**Pré requisitos:**

Não há pré requisitos.

**Objetivos:**

Compreender o que é um mapa conceitual e qual a sua importância.

Identificar as características mais importantes de um mapa conceitual.

Elaborar um mapa conceitual

Reconhecer o mapa conceitual

**AVALIAÇÃO.**

Durante as aulas observando o interesse e a participação do Estudante, bem como a construção de um mapa conceitual.

**1º aula**

**Duração: 55 minutos.**

**Tema: Mapa Conceitual**

**Procedimento:** Iniciaremos a aula comentando sobre o que devemos anotar enquanto o professor ministra sua aula, será que devemos anotar tudo? E se não conseguirmos anotar tudo que o professor fala, o que devemos fazer? Como devemos proceder?

Logo após abordaremos o tema mapa conceitual, conceito, tipos de mapas conceituais, para que eles servem, como se constrói e como o estudante pode verificar seu próprio nível de aprendizagem à partir da elaboração de um mapa conceitual. Enfatizaremos que não existe "o mapa conceitual correto" mas que sua estrutura pode apontar para o tipo de aprendizagem que se alcançou ao estudar determinado tema. Sugerir aos estudantes que elaborem seus próprios mapas conceituais e apresentá-los para a turma.

## 1.1 Introdução

Para que possamos trabalhar juntos, a turma será dividida em grupos de 4 ou 5 estudantes e fazer uma exposição oral, primeiramente sobre a importância de anotar o que o professor fala e também de como anotar o que ele fala.

Mas porque devo anotar o que meu professor fala se está tudo escrito no livro?

Simples, primeiro porque sempre haverá pontos importantes que não estarão nos livros, e segundo por que as anotações:

- Ajudam a memorizar a matéria
- Ajudam a relembrar os pontos principais
- Importante fonte de material para uma apresentação
- Ajuda na concentração
- Constrói a compreensão
- Ajuda a fazer questionamentos

Então como devo anotar o que meu professor fala?

Simples, segue abaixo algumas dicas que irão facilitar você na hora de estudar o conteúdo, bem como na memorização de alguns itens:

- Faça anotações breves;
- Use abreviações e símbolos;
- Use suas próprias palavras, mas fórmulas, definições e fatos específicos devem ser anotados com exatidão;
- Faça um diagrama;
- Ou melhor ainda, faça um mapa conceitual.

Você não sabe o que é um mapa conceitual? Vamos conversar um pouco sobre isso!

Neste momento faremos algumas perguntas que levem os estudantes a refletirem sobre o tema que vai ser estudado ao passo que verifica seus conhecimentos prévios sobre o assunto. Exemplos de perguntas:

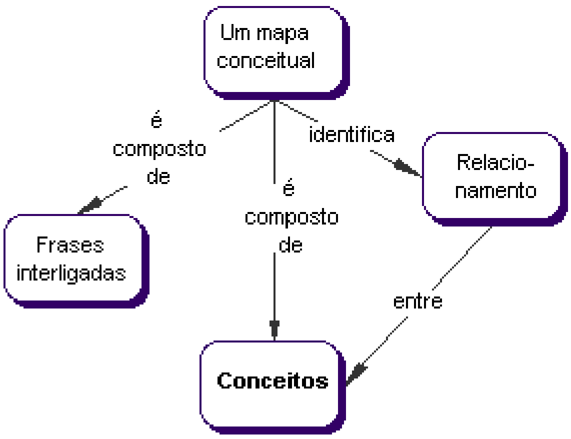
a) Qual é a imagem que vem a sua mente quando você ouve a palavra "mapa"?

b) Você já utilizou um mapa? Para que ele serve?

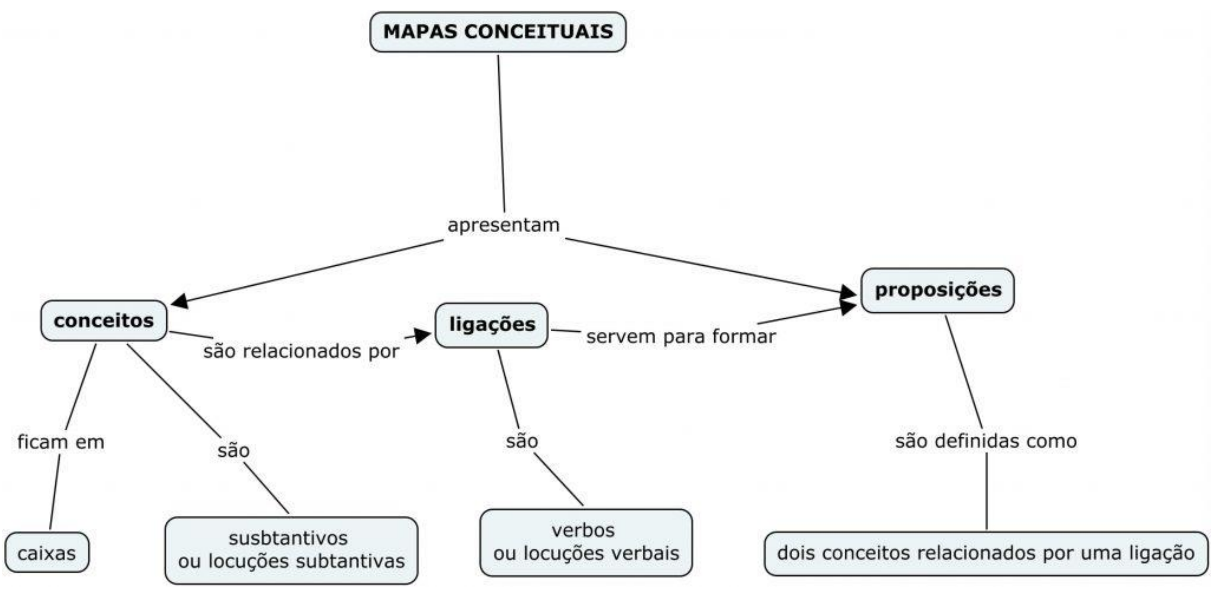
c) Você já conseguiu aprender alguma coisa utilizando um mapa? O quê?

d) Você sabe o que é um mapa conceitual?

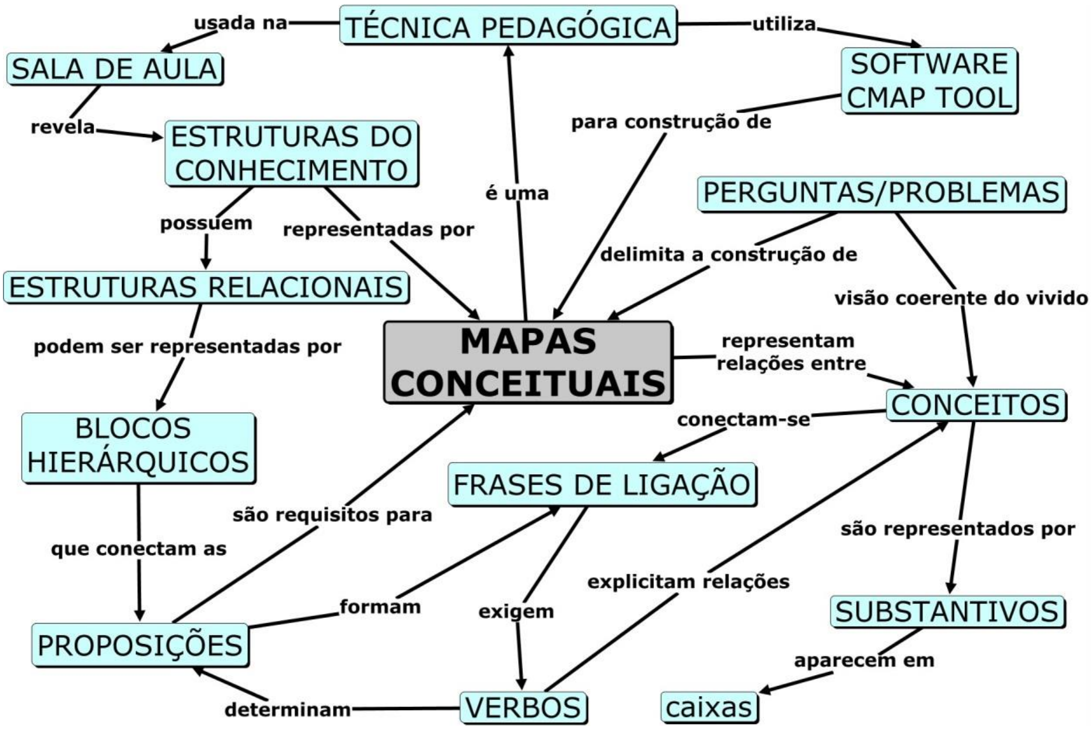
Mapas Conceituais: são diagramas que indicam relações significativas entre conceitos de um conteúdo, um tema ou um assunto de uma disciplina ou um conteúdo específico. Veja alguns exemplos:




Fonte: [http://penta.ufrgs.br/tege/mapas4.htm](http://penta.ufrgs.br/tege/mapas4.htm)



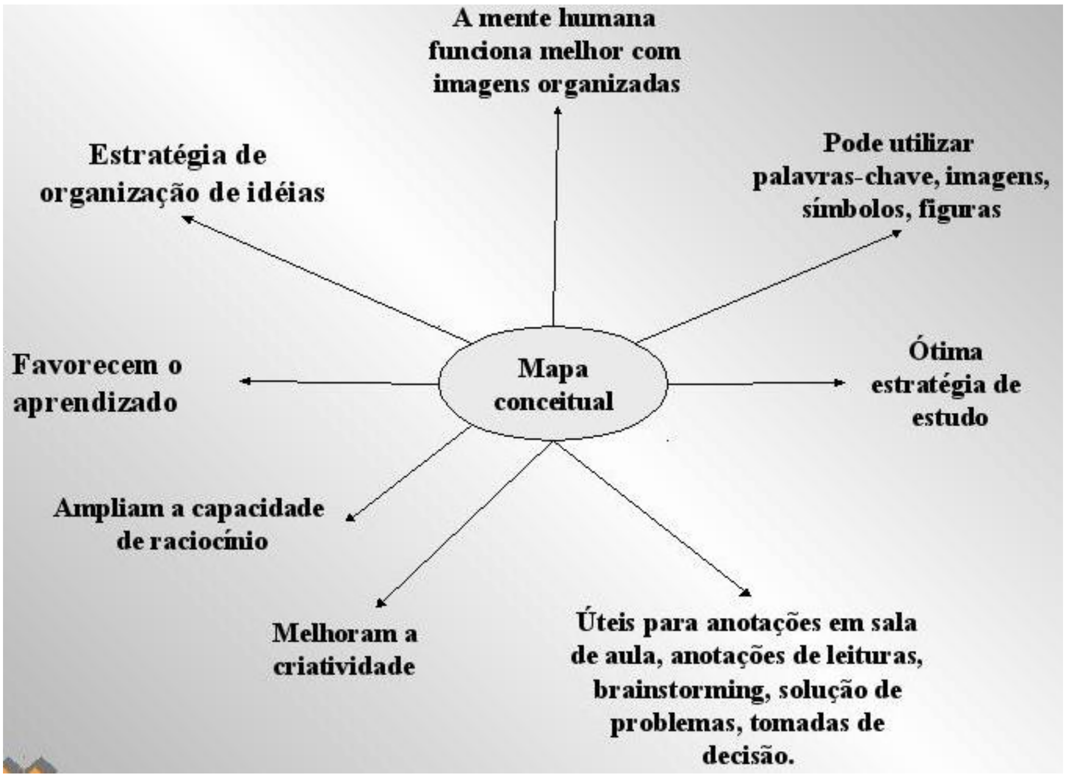

Fonte: http://www.antigomoodle.ufba.br/mod/book/view.php?id=74558




Fonte: http://wwwmdtbcognitiva.blogspot.com/2011/06/mapas-conceituais.html

A estratégia na organização de ideias por meio de palavras chaves, cores, imagens, símbolos, em uma estrutura que se irradia a partir de uma ideia, um conceito, um conteúdo.

Os desenhos de mapas conceituais melhoram a criatividade e produtividade pessoal.




Fonte: http://www.webquestfacil.com.br/webquest.php?pg=tarefa&wq=15321

Agora que você já entendeu o que é um mapa conceitual, faremos a construção de um mapa. O procedimento será o seguinte:

h) Juntamente com seu grupo, escolham um tema de interesse comum e construa seu primeiro mapa conceitual, somente com o que você já conhece do assunto.
i) Agora faremos uma pesquisa na internet sobre o tema escolhido, para que possamos aprender mais sobre esse assunto.
j) De posse de novos conhecimentos sobre o tema escolhido, monte um novo mapa conceitual, agora muito mais elaborado e rico.
k) Compare os dois mapas, houve mudanças? Aponte-as.
l) Com o mapa que você fez, acredita ser possível aprender sobre o tema escolhido? Justifique.
m) Apresente seu mapa conceitual para a turma.
n) Agora que você já conhece mapa conceitual, elabore um mapa conceitual sobre o tema "Trigonometria", somente com o conhecimento que você já possui sobre o assunto. Para entregar pra a professora.

# 15. APÊNDICE VIII – PLANO DE AULA 2 – INTRODUÇÃO A TRIGONOMETRIA

## AULA 2

**INTRODUÇÃO:**

A Trigonometria é uma subárea da Matemática na qual se estuda as relações entre ângulos e distâncias, usando triângulos retângulos (SILVA 2017). Muito utilizada também em outras áreas de estudo como Engenharia, física, química, biologia, geografia, astronomia, medicina, engenharia, dentre outras, a Trigonometria é fundamental na prática de profissionais dessas áreas.

Através de distâncias e alturas associadas os conhecimentos sobre triângulo retângulo e a ideia de semelhança entre triângulos, é possível fazer uma série de estimativas, por exemplo, com auxílio de sua sombra, podemos estimar a altura de um prédio, desde que saibamos a distância que nos separa de sua base.

O objetivo desde plano de aula é o Ensino da Trigonometria no triângulo retângulo, onde pretende-se introduzir os conceitos das razões trigonométricas, Seno, Cosseno e Tangente.

**DESENVOLVIMENTO:**

O plano de aula está dividido em duas partes, sendo o tempo para a primeira aula é de três períodos e a segunda aula de dois períodos, sendo cada período de 55 minutos.

Na primeira aula, será apresentado as definições e alguns exemplos.

Na segunda aula, apresentaremos exemplos do cotidiano para que possam compreender melhor a matéria.

**Pré requisitos:**

Conhecimento sobre triângulo retângulo (hipotenusa e catetos)

Critérios de semelhança de triângulos

Matemática do Ensino fundamental

**Objetivos:**

Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas.

Calcular medidas desconhecidas utilizando as razões trigonométricas.

Identificar e usar corretamente as razões trigonométricas.

Resolver situações problemas envolvendo as relações trigonométricas.

**AVALIAÇÃO.**

Atividades em sala.

Listas de exercícios envolvendo aplicações da Trigonometria no cotidiano.

Durante as aulas observando o interesse e a participação do Estudante.

**1º aula**

**Duração: 165 minutos.**

**Tema: Trigonometria**

**Procedimento:**

Iniciar a aula com perguntas para despertar o interesse dos estudantes no conteúdo, logo após prosseguir com as definições.

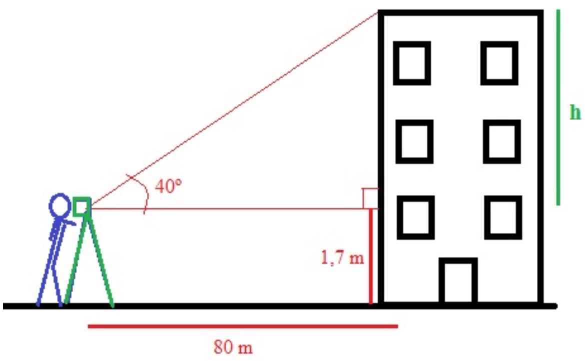
**1.1 Introdução**

A Trigonometria possui uma infinidade de aplicações práticas.

Desde a antiguidade já se usava da Trigonometria para obter distâncias impossíveis de serem calculadas por métodos comuns.

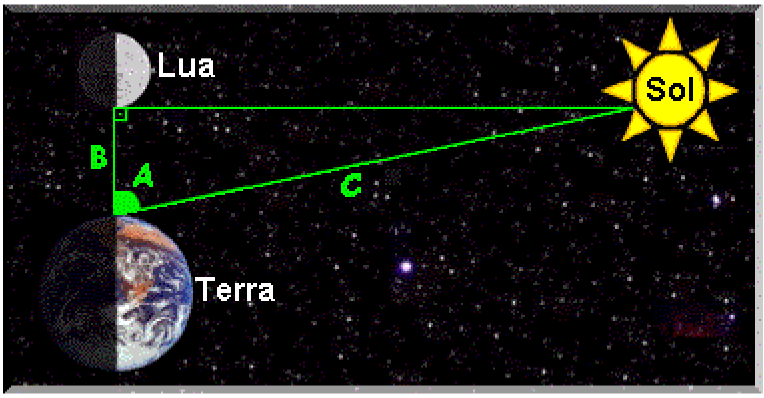
Algumas aplicações da Trigonometria são:

Determinação da altura de certo prédio.



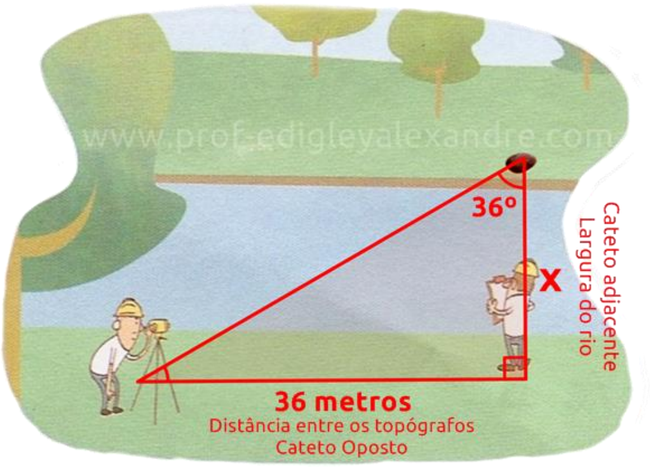

Fonte: http://meteorotica.blogspot.com/2012/01/exercicios-resolvidos-sobre-razoes_4538.html

Como medir a distância da Terra à Lua? Com a Trigonometria.



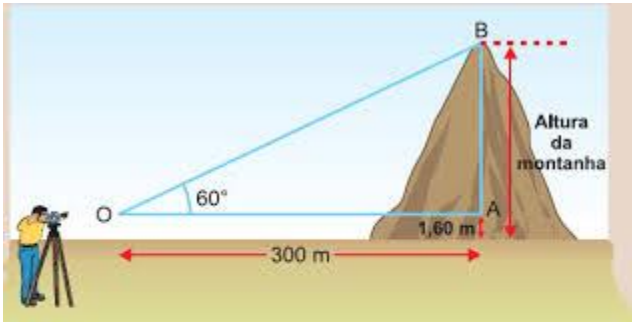

Fonte: http://www.zenite.nu/aristarco-de-samos-e-a-distancia-terra-sol/

Um engenheiro precisa saber a largura de um rio para construir uma ponte, o trabalho dele é mais fácil quando ele usa dos recursos trigonométricos.




Fonte: https://www.prof-edigleyalexandre.com/2012/11/Trigonometria-algumas-aplicacoes.html

Um cartógrafo (desenhista de mapas) precisa saber a altura de uma montanha, o comprimento de um rio, etc. Sem a Trigonometria ele demoraria muito tempo para desenhar um mapa.




Fonte:http://porteiras.s.unipampa.edu.br/pibid/files/2015/11/Sequ%C3%AAncia-Did%C3%A1tica-Trigonometria_IFSulII.pdf

**1.2 Relembrando definições de triângulos:**

Para que possamos calcular todos esses nossos exemplos e muitos mais, utilizamos a Trigonometria do triângulo retângulo.

O triângulo é a figura mais simples e uma das mais importantes da Geometria, ele é objeto de estudos desde os povos antigos. O triângulo possui propriedades e definições de acordo com o tamanho de seus lados e medida dos ângulos internos.

Quanto aos lados, o triângulo pode ser classificado como:

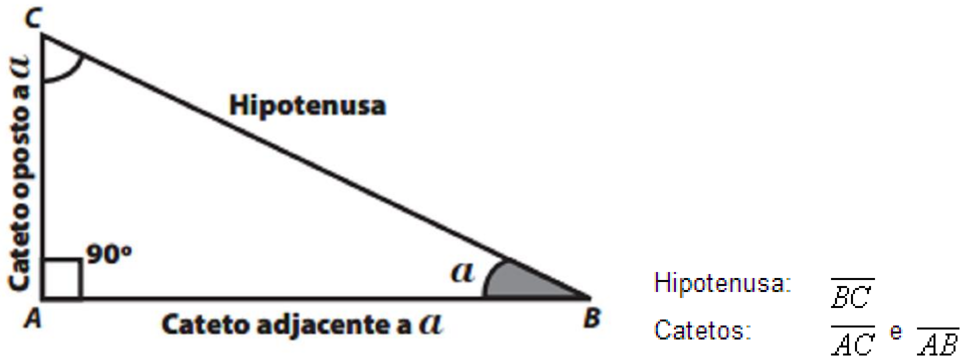
- Equilátero: possui os lados com medidas iguais.
- Isósceles: possui dois lados com medidas iguais.
- Escaleno: possui todos os lados com medidas diferentes.

Quanto aos ângulos, os triângulos podem ser denominados:

- Acutângulo: possui os ângulos internos com medidas menores que 90º
- Obtusângulo: possui um dos ângulos com medida maior que 90º.
- Retângulo: possui um ângulo com medida de 90º, chamado ângulo reto.

No triângulo retângulo existem algumas importantes relações, uma delas é o ***Teorema de Pitágoras***, que diz o seguinte: *"A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa"*. Essa relação é muito importante na Matemática, responsável pela resolução de inúmeros problemas geométricos.

**1.3 Seno, Cosseno e Tangente**




Fonte: https://www.altoastral.com.br/geometria-teorema-pitagoras/

Relembrando:

Hipotenusa é o lado oposto ao ângulo de 90º.

Ângulo (b)

Sen (b) = $\frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{A}ngulo\ (b)}{hipotenusa}$

Cos (b) = $\frac{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{A}ngulo\ (b)}{hipotenusa}$

Tan (b) = $\frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{A}ngulo\ (b)}{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{A}ngulo\ (b)}$

Ângulo (c)

Sen (c) = $\frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{A}ngulo\ (c)}{hipotenusa}$

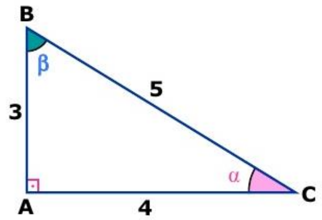
Cos (c) = $\frac{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{A}ngulo\ (c)}{hipotenusa}$

Tan (c) = $\frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{A}ngulo\ (c)}{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{A}ngulo\ (c)}$

Observação: B + C = 90º

Exemplos:

1-Determine os valores de Seno, Cosseno e Tangente dos ângulos β e α




$$\text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad \text{tg}\ \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\text{sen}\ \beta = \frac{4}{5} \qquad \cos\beta = \frac{3}{5} \qquad \text{tg}\ \beta = \frac{4}{3}$$

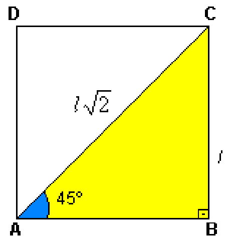
Fonte: https://Estudantesonline.uol.com.br/matematica/relacoes-trigonometricas-no-triangulo-retangulo.html

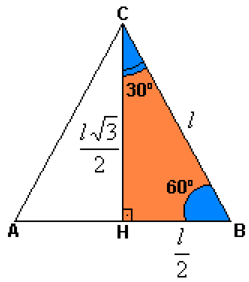
Obs: $\alpha + \beta = 90^\circ$

## 1.4 SENO, COSSENO E TANGENTE DOS ÂNGULOS DE 30º, 45 E 60º

Apesar de serem muito usados nos cálculos de **Relações Trigonométricas do Triângulo Retângulo**, os valores de Seno Cosseno e Tangente dificilmente podem ser decorados, até mesmo porque são mais de 80. Existem, entretanto, alguns ângulos que são tidos como Notáveis.

Fonte:




https://www.somatematica.com.br/fundam/raztrig/razoes3.php

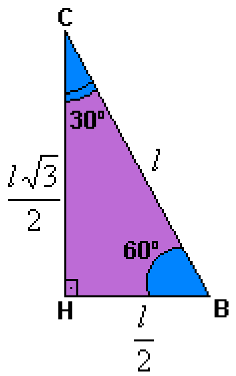
Aplicando o teorema de Pitágoras obtemos os seguintes resultados:

Quadrado de lado ***l***, possui diagonal $l\sqrt{2}$

Triangulo equilátero de lado ***l*** e altura $l\frac{\sqrt{3}}{2}$

### A) Seno, Cosseno e Tangente de 30º

Aplicando as definições de Seno, Cosseno e Tangente para os ângulos de 30º, temos:




$$\text{sen}\ 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{l}} = \frac{1}{2}$$

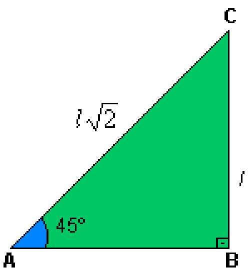
$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}\ 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{l}\cdot 2}{2\cdot\cancel{l}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Fonte: https://www.somatematica.com.br/fundam/raztrig/razoes3.php

**B) Seno, Cosseno e Tangente de 45º**

Aplicando as definições de Seno, Cosseno e Tangente para um ângulo de 45º, temos:




$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l}\,.1}{\cancel{l}.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

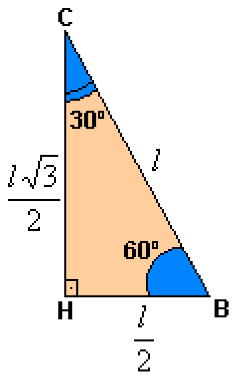
$$\cos 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l}\,.1}{\cancel{l}.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\cancel{l}}{\cancel{l}} = 1$$

Fonte: https://www.somatematica.com.br/fundam/raztrig/razoes3.php

**C) Seno, Cosseno e Tangente de 60º**

Aplicando as definições de Seno, Cosseno e Tangente para um ângulo de 60º, temos:




$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}}{2}.\frac{1}{\cancel{l}} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{\cancel{2}}.\frac{\cancel{2}}{\cancel{l}} = \sqrt{3}$$

Fonte: https://www.somatematica.com.br/fundam/raztrig/razoes3.php

Esses ângulos são muito frequentes e por isso formam uma tabela bem mais simples que quando decorada, ajuda muito na resolução dos exercícios.

| | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| Seno | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| Cosseno | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| Tangente | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

Fonte:https://www.matematicagenial.com/2017/05/dica-como-lembrar-facilmente-tabela-trigonometrica.html

**Música para Decorar Tabela de Seno Cosseno e Tangente de 30°, 45° e 60°**.

Música de Seno, Cosseno e Tangente

***Um, dois três,***

***Três, dois, um,***

***Tudo sobre dois!***

***Depois vem a raiz,***

***Sobre o três e o dois!***

***A Tangente é diferente,***

***Vejam só vocês!***

***Raiz de três sobre três,***

***Um raiz de três!***

Essa letra deve ser cantada no ritmo e melodia da canção de natal Jigle Bells

**Utilizar exercícios do livro didático**

**2º aula**

**Duração: 110 minutos.**

**Tema: aplicações das razões trigonométricas**

## 2.1 APLICAÇÕES DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

As razões trigonométricas são utilizadas principalmente na determinação de distâncias incessíveis. Assim, para calcular a altura de uma montanha ou a distância entre as margens de um rio, por exemplo, usa-se um instrumento de precisão para medir ângulos ou aplica-se as razões trigonométricas.

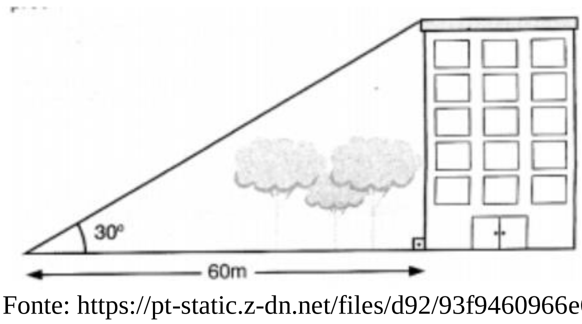
Existe uma tabela já estabelecida com os valores dos ângulos. (entregar tabela fotocopiada para cada Estudante). Explicar como fazer uso da tabela.

| Ângulo | Seno | Cosseno | Tangente | Ângulo | Seno | Cosseno | Tangente |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° | 0,017 5 | 0,999 8 | 0,017 5 | 46° | 0,719 3 | 0,694 7 | 1,035 5 |
| 2° | 0,034 9 | 0,999 4 | 0,034 9 | 47° | 0,731 4 | 0,682 0 | 1,072 4 |
| 3° | 0,052 3 | 0,998 6 | 0,052 4 | 48° | 0,743 1 | 0,669 1 | 1,110 6 |
| 4° | 0,069 8 | 0,997 6 | 0,069 9 | 49° | 0,754 7 | 0,656 1 | 1,150 4 |
| 5° | 0,087 2 | 0,996 2 | 0,087 5 | 50° | 0,766 0 | 0,642 8 | 1,191 8 |
| 6° | 0,104 5 | 0,994 5 | 0,105 1 | 51° | 0,777 1 | 0,629 3 | 1,234 9 |
| 7° | 0,121 9 | 0,992 5 | 0,122 8 | 52° | 0,788 0 | 0,615 7 | 1,279 9 |
| 8° | 0,139 2 | 0,990 3 | 0,140 5 | 53° | 0,798 6 | 0,601 8 | 1,327 0 |
| 9° | 0,156 4 | 0,987 7 | 0,158 4 | 54° | 0,809 0 | 0,587 8 | 1,376 4 |
| 10° | 0,173 6 | 0,984 8 | 0,176 3 | 55° | 0,819 2 | 0,573 6 | 1,428 1 |
| 11° | 0,190 8 | 0,981 6 | 0,194 4 | 56° | 0,829 0 | 0,559 2 | 1,482 6 |
| 12° | 0,207 9 | 0,978 1 | 0,212 6 | 57° | 0,838 7 | 0,544 6 | 1,539 9 |
| 13° | 0,225 0 | 0,974 4 | 0,230 9 | 58° | 0,848 0 | 0,529 9 | 1,600 3 |
| 14° | 0,241 9 | 0,970 3 | 0,249 3 | 59° | 0,857 2 | 0,515 0 | 1,664 3 |
| 15° | 0,258 8 | 0,965 9 | 0,267 9 | 60° | 0,866 0 | 0,500 0 | 1,732 1 |
| 16° | 0,275 6 | 0,961 3 | 0,286 7 | 61° | 0,874 6 | 0,484 8 | 1,804 0 |
| 17° | 0,292 4 | 0,956 3 | 0,305 7 | 62° | 0,882 9 | 0,469 5 | 1,880 7 |
| 18° | 0,309 0 | 0,951 1 | 0,324 9 | 63° | 0,891 0 | 0,454 0 | 1,962 6 |
| 19° | 0,325 6 | 0,945 5 | 0,344 3 | 64° | 0,898 8 | 0,438 4 | 2,050 3 |
| 20° | 0,342 0 | 0,939 7 | 0,364 0 | 65° | 0,906 3 | 0,422 6 | 2,144 5 |
| 21° | 0,358 4 | 0,933 6 | 0,383 9 | 66° | 0,913 5 | 0,406 7 | 2,246 0 |
| 22° | 0,374 6 | 0,927 2 | 0,404 0 | 67° | 0,920 5 | 0,390 7 | 2,355 9 |
| 23° | 0,390 7 | 0,920 5 | 0,424 5 | 68° | 0,927 2 | 0,374 6 | 2,475 1 |
| 24° | 0,406 7 | 0,913 5 | 0,445 2 | 69° | 0,933 6 | 0,358 4 | 2,605 1 |
| 25° | 0,422 6 | 0,906 3 | 0,466 3 | 70° | 0,939 7 | 0,342 0 | 2,747 5 |
| 26° | 0,438 4 | 0,898 8 | 0,487 7 | 71° | 0,945 5 | 0,325 6 | 2,904 2 |
| 27° | 0,454 0 | 0,891 0 | 0,509 5 | 72° | 0,951 1 | 0,309 0 | 3,077 7 |
| 28° | 0,469 5 | 0,882 9 | 0,531 7 | 73° | 0,956 3 | 0,292 4 | 3,270 9 |
| 29° | 0,484 8 | 0,874 6 | 0,554 3 | 74° | 0,961 3 | 0,275 6 | 3,487 4 |
| 30° | 0,500 0 | 0,866 0 | 0,577 4 | 75° | 0,965 9 | 0,258 8 | 3,732 1 |
| 31° | 0,515 0 | 0,857 2 | 0,600 9 | 76° | 0,970 3 | 0,241 9 | 4,010 8 |
| 32° | 0,529 9 | 0,848 0 | 0,624 9 | 77° | 0,974 4 | 0,225 0 | 4,331 5 |
| 33° | 0,544 6 | 0,838 7 | 0,649 4 | 78° | 0,978 1 | 0,207 9 | 4,704 6 |
| 34° | 0,559 2 | 0,829 0 | 0,674 5 | 79° | 0,981 6 | 0,190 8 | 5,144 6 |
| 35° | 0,573 6 | 0,819 2 | 0,700 2 | 80° | 0,984 8 | 0,173 6 | 5,671 3 |
| 36° | 0,587 8 | 0,809 0 | 0,726 5 | 81° | 0,987 7 | 0,156 4 | 6,313 8 |
| 37° | 0,601 8 | 0,798 6 | 0,753 6 | 82° | 0,990 3 | 0,139 2 | 7,115 4 |
| 38° | 0,615 7 | 0,788 0 | 0,781 3 | 83° | 0,992 5 | 0,121 9 | 8,144 3 |
| 39° | 0,629 3 | 0,777 1 | 0,809 8 | 84° | 0,994 5 | 0,104 5 | 9,514 4 |
| 40° | 0,642 8 | 0,766 0 | 0,839 1 | 85° | 0,996 2 | 0,087 2 | 11,430 1 |
| 41° | 0,656 1 | 0,754 7 | 0,869 3 | 86° | 0,997 6 | 0,069 8 | 14,300 7 |
| 42° | 0,669 1 | 0,743 1 | 0,900 4 | 87° | 0,998 6 | 0,052 3 | 19,081 1 |
| 43° | 0,682 0 | 0,731 4 | 0,932 5 | 88° | 0,999 4 | 0,034 9 | 28,636 3 |
| 44° | 0,694 7 | 0,719 3 | 0,965 7 | 89° | 0,999 8 | 0,017 5 | 57,290 0 |
| 45° | 0,707 1 | 0,707 1 | 1,000 0 | | | | |

Fonte: http://mileidestonsis.blogspot.com/2011/04/tabela-de-razoes-trigonometricas.html

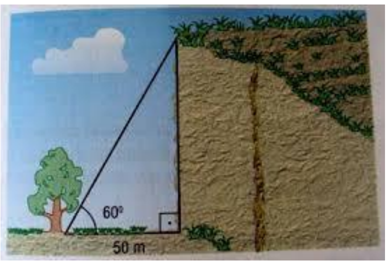
Exemplos

1- Uma pessoa está distante 60m de um prédio e vê o ponto mais alto do prédio sob um ângulo de 30º em relação à horizontal. Qual é a Altura do prédio?




Fonte: https://pt-static.z-dn.net/files/d92/93f9460966e6628429dc3014cf53436a.png

2- O ângulo de elevação do pé de uma árvore, a 50m da base de uma encosta, ao topo da encosta é de 60º. Que medida deve ter um cabo que ligue o pé da árvore ao topo da encosta?




Fonte: http://mscabral.pro.br/sitemauro/praticas/trigo.html

Resolução: Ele quer saber a hipotenusa do triângulo.

Cos 60º = $\frac{50}{x}$

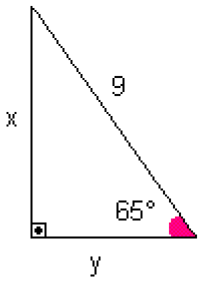
Substituindo cos60º por $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{50}{x}$

x = 100 m

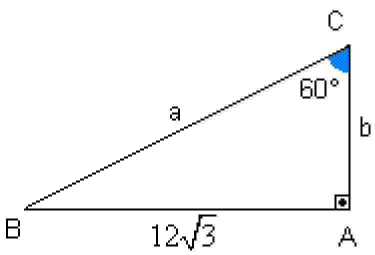
A medida de um cabo que ligue o pé da árvore ao topo da encosta é de 100m.

a) No triângulo retângulo da figura abaixo, determine as medidas de x e y indicadas (Use: sen 65° = 0,91; cos 65° = 0,42 ; tg 65° = 2,14)




Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

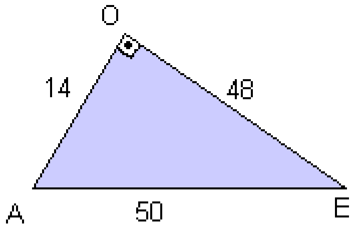
b) Considerando o triângulo retângulo ABC da figura, determine as medidas a e b indicadas. (Sen 60° = 0,866*)*

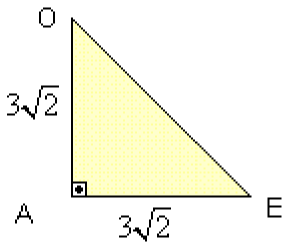



Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

c) Sabe-se que, em um triângulo retângulo isósceles, cada lado congruente mede 30 cm. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

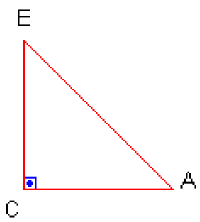
d) Nos triângulos das figuras abaixo, calcule tg Â, tg Ê, tg Ô:



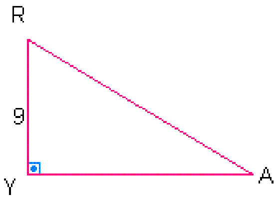

Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

e) Sabendo que o triângulo retângulo da figura abaixo é isósceles, quais são os valores de tg Â e tg Ê?



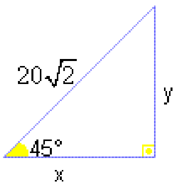

Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

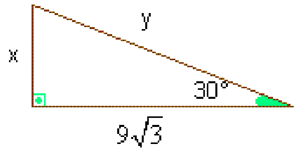
f) Encontre a medida RA sabendo que tg Â = 3




Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

g) Encontre **x** e **y**:

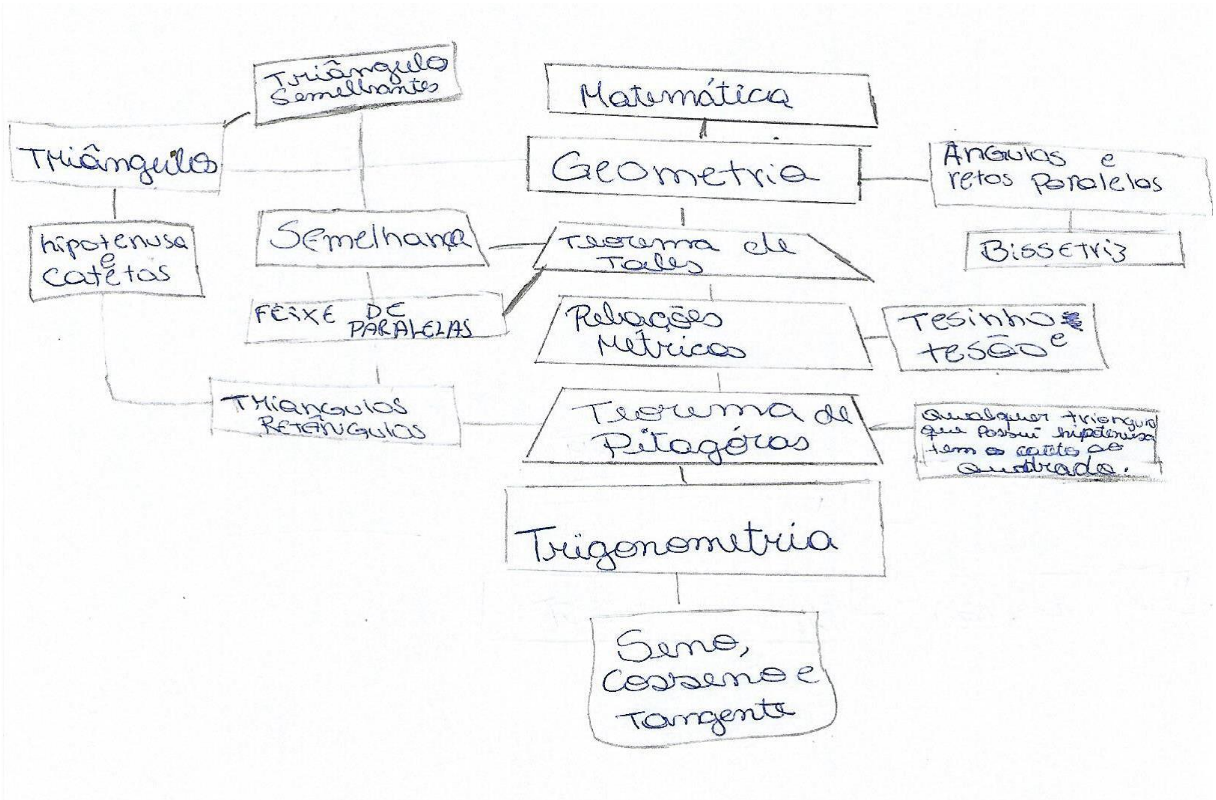


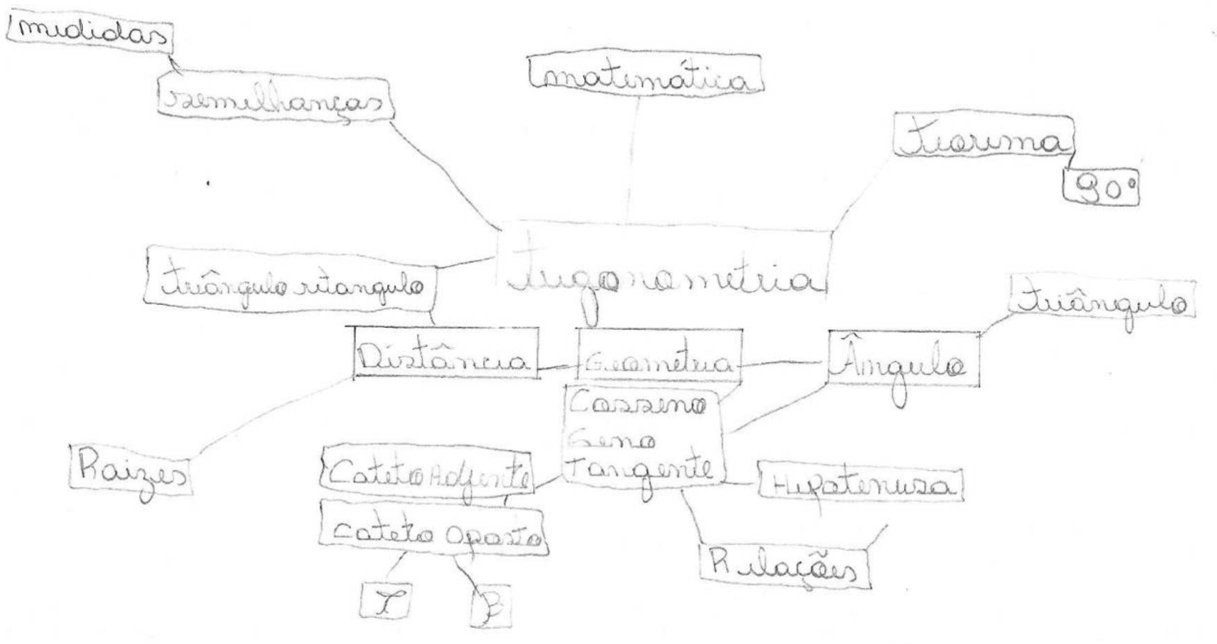

Fonte: https://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php

# 16. APÊNDICE IX – EXEMPLOS DE MAPAS CONCEITUAIS – AULA 3

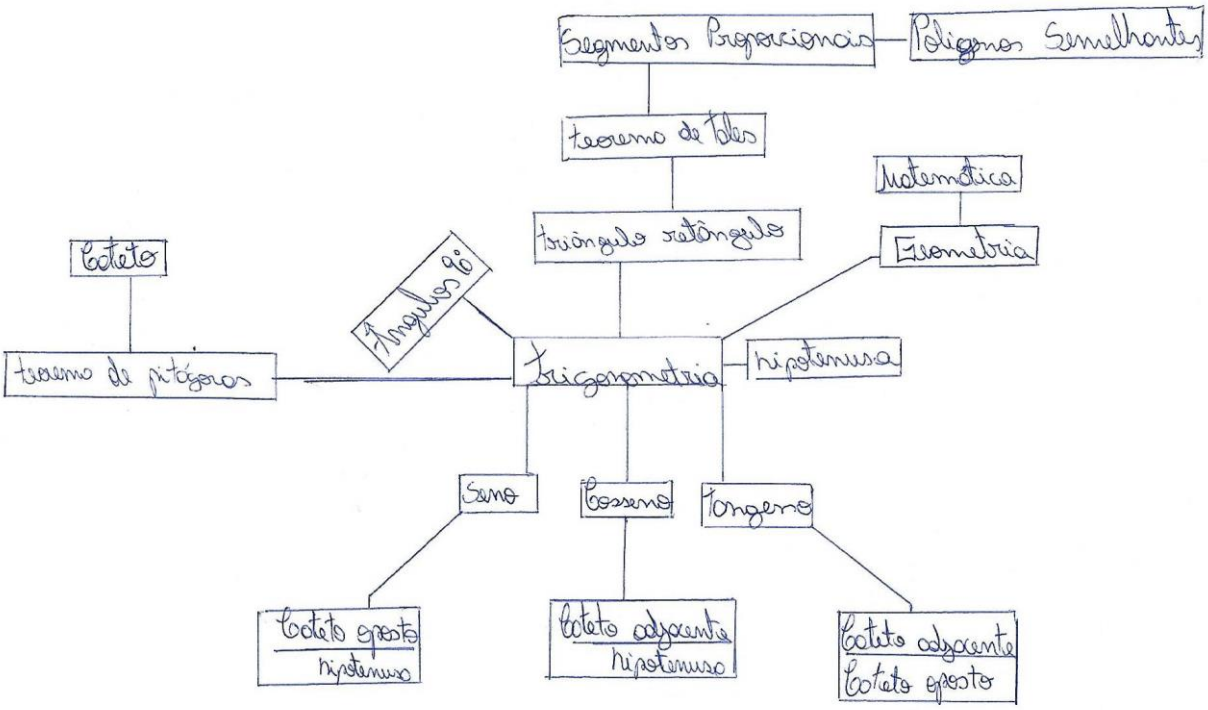
Após a apresentação do conteúdo de Trigonometria de forma tradicional, solicitamos aos estudantes que elaborassem um novo Mapa Conceitual sobre Trigonometria.




Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelo estudante




Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelo estudante




Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelo estudante

# 17. APÊNDICE X – PLANO DE AULA 4 – PÊNALTI

## AULA 4

Na nossa primeira aula utilizando a Trigonometria no futebol, trabalharemos em sala de aula fazendo o estudante pensar em cada movimento utilizado para a realização de uma cobrança de pênalti, faremos uso das dimensões do gol, distância da marca do pênalti ate o gol, diâmetro da bola de futebol, ângulos formados pelas trajetórias das bolas e o solo em uma cobrança, dentre outros.

Com o intuito de aumentarmos a participação e o interesse dos estudantes pelas atividades, faremos uso de uma linguagem informal e lúdica.

**DESENVOLVIMENTO:**

O plano de aula será desenvolvido com a duração de um período de 55 minutos.

**Pré requisitos:**

Triângulo retângulo (hipotenusa e catetos).

Critérios de semelhança de triângulos.

Matemática do Ensino fundamental.

Seno, Cosseno e Tangente.

Raio e diâmetro.

**Objetivos:**

Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas no futebol.

Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações e demais conteúdos geométricos.

Identificar e usar corretamente as razões trigonométricas.

Resolver situações problemas do futebol envolvendo as relações trigonométricas.

**AVALIAÇÃO.**

Durante as aulas observando o interesse e a participação do Estudante.

**1º aula**

**Duração: 55 minutos.**

**Tema: Trigonometria no futebol**

**Procedimento:**

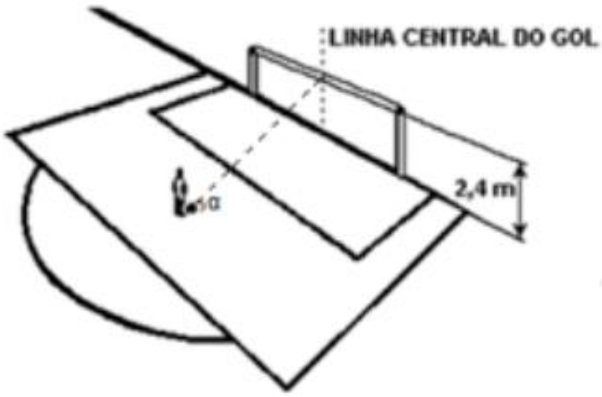
Iniciaremos a aula com a “Questão 1” onde será lançada a pergunta principal, e posteriormente iremos fazendo outros questionamentos para inserir o estudante, gradativamente, na questão.

**1.1 Introdução**

No campo de futebol, dentro da grande área, há uma marca a 11 metros do ponto médio até a linha do gol, para que seja feita a cobrança de uma falta chamada "pênalti". O goleiro fica sobre essa linha, entre duas traves que são paralelas, com uma distância entre elas de 7,3 metros, e com altura de 2,4 metros do solo. Sabemos ainda, que o diâmetro da bola de futebol é de 22 centímetros. Com base nas informações acima responda:

**<u>QUESTÃO 1</u>**

Olá Galera! Vou apresentar para vocês o nosso amigo Théo. Théo é ótimo em futebol, mas não tão bom em Matemática, por isso precisa de nossa ajuda. Ele quer fazer uma cobrança de pênalti sem a presença do goleiro, e decidiu chutar a bola na direção central do gol.  Qual deve ser o ângulo máximo de elevação da bola, para que o Théo consiga fazer o gol?




Fonte: http://professor.bio.br/matematica/comentarios.asp?q=6445&t=Trigonometria

Bom, para que possamos ajudar o Théo, precisamos de alguns dados, que serão coletados a partir de algumas respostas.

Vamos pensar juntos!

i) Se Théo chutar a bola a uma altura de 2,4 metros, conseguirá fazer o gol? Justifique.
j) Qual o raio da bola?
k) Qual a altura máxima que o centro da bola pode atingir para que Théo consiga fazer o gol?

l) Agora desenhe um triângulo representando a situação descrita acima com os valores que você descobriu.

m) Vamos chamar de **α** esse ângulo de elevação, ou seja, o ângulo que a trajetória da bola faz com o solo. Qual é a relação trigonométrica que você usaria para determinar esse ângulo?

n) Utilizando a tabela trigonométrica fornecida na aula anterior, encontre a melhor aproximação inteira para o ângulo **α.**

o) Agora que você já descobriu o valor aproximado do ângulo, encontre a distância que a bola percorreu até atingir o plano que contém as traves do gol.

p) Theo, ao cobrar um novo pênalti, chuta a bola na linha central do gol com uma inclinação de 10º. Com que altura a bola atingirá a linha central do gol? Qual a relação trigonométrica você utilizará para resolver essa questão?

# 18. APÊNDICE XI – PLANO DE AULA 5 – ESCANTEIO

## AULA 5

Nosso trabalho se iniciará em sala de aula, para que o estudante entenda o exercício proposto, logo após o estudante fará a medida completa da quadra de futebol da sua escola, conforme exemplo. Com o intuito de facilitar as medidas das bolas chutadas em escanteio, a atividade será feita em duplas, o que acreditamos aumentar participação e o interesse dos estudantes.

**DESENVOLVIMENTO:**

O plano de aula será desenvolvido com a duração de um período de 55 minutos.

**Pré requisitos:**

Triângulo retângulo (hipotenusa e catetos).

Teorema de Pitágoras.

Critérios de semelhança de triângulos.

Matemática do Ensino fundamental.

Seno, Cosseno e Tangente.

Noções de medidas.

**Objetivos:**

Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas no futebol.

Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações e demais conteúdos geométricos.

Identificar e usar corretamente as relações.

Resolver situações problemas do futebol envolvendo as relações trigonométricas.

**AVALIAÇÃO.**

Durante as aulas observando o interesse e a participação do Estudante.

**1º aula**

**Duração: 55 minutos.**

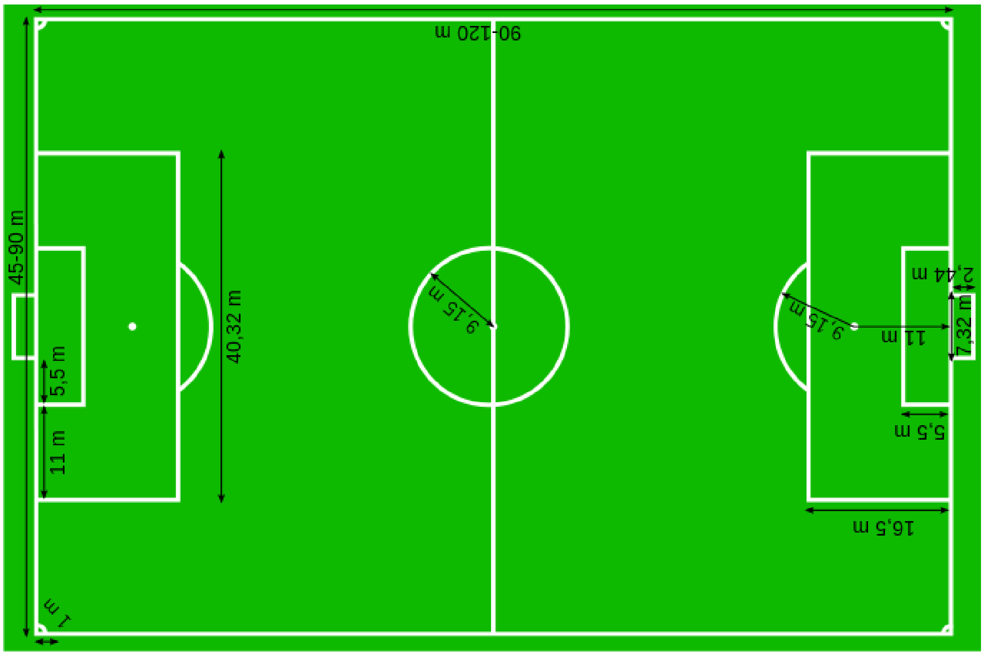
**Tema: Trigonometria no futebol**

**1.1 Introdução**

O campo de futebol é feito com medidas exatas, podendo variar de campo para campo. Tomaremos como base para os exercícios em questão o campo com as medidas fornecido. O escanteio é a cobrança de uma falta, devendo o jogador posicionar-se junto à bandeira em um dos quatro cantos do campo, para retornar a bola ao jogo.

**QUESTÃO 2**

Beleza turma?! Agora nosso amigo Théo decidiu verificar suas habilidades no chute de escanteio. Fez diversas cobranças, o que é demonstrado com uma linha vermelha nas figuras abaixo. Mas primeiro ele teve o trabalho de medir todo o campo para facilitar o nosso trabalho, deixando tudo prontinho. Agora é sua vez, Calcule, em cada caso, qual a distância que a bola percorreu em cada chupe de escanteio, e logo após determine o ângulo formado.

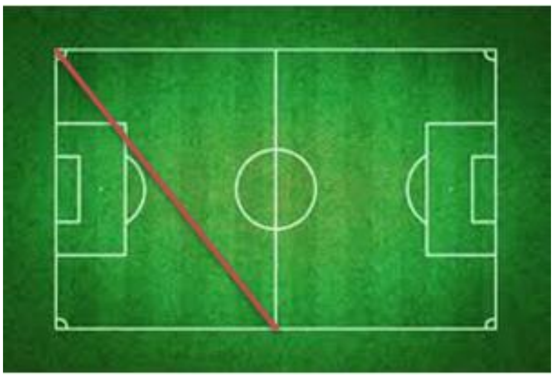



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Campo_de_futebol_medidas.jpg

Imagem ilustrativa com as medidas do campo onde Théo fez as cobranças de escanteio. Utilize as medidas de 120 metros de comprimento e de 90 metros de largura,

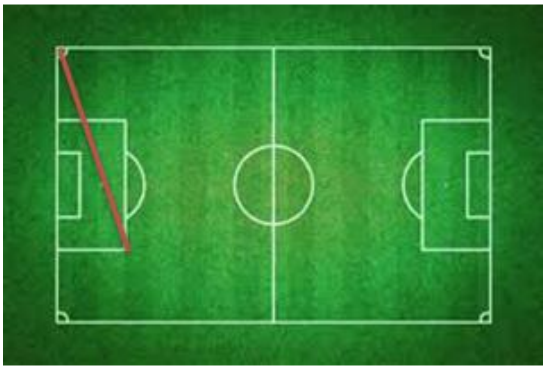
Em cada uma das situações abaixo calcule a distância que a bola percorreu, logo após calcule o ângulo.

a)



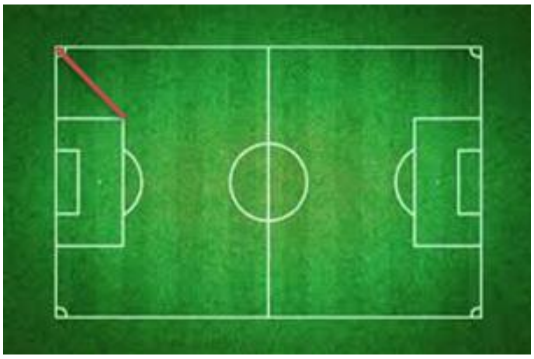
Fonte: autora

b)



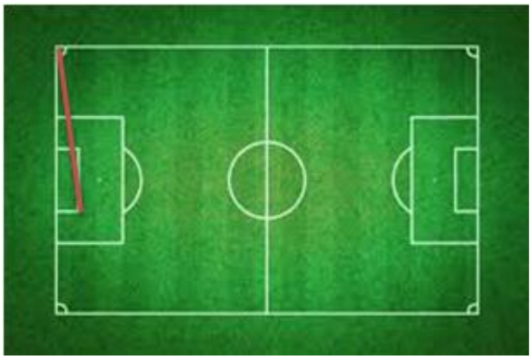
Fonte: autora

c)



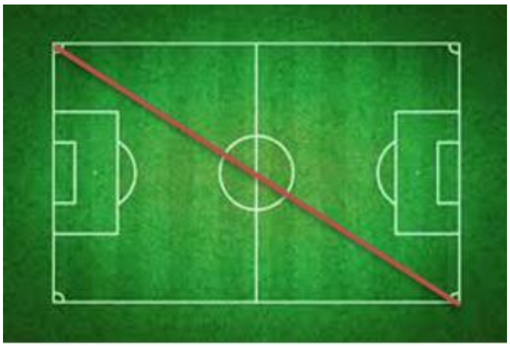
Fonte: autora

d)



Fonte: autora

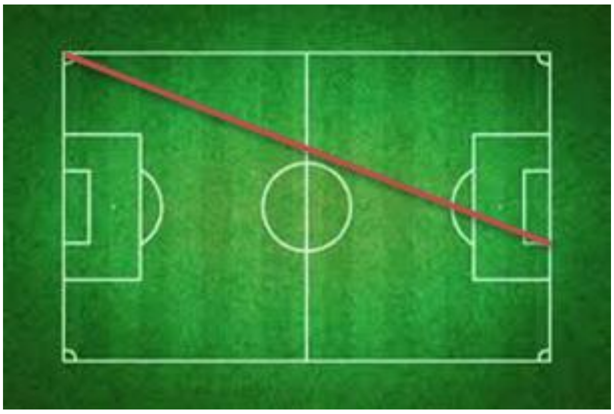
e)



Fonte: autora

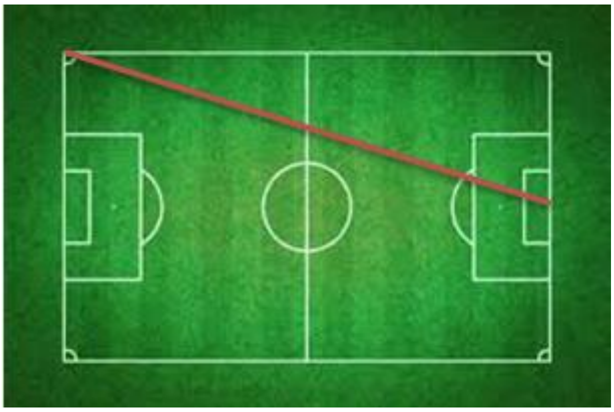
Não satisfeito com todas as cobranças feias, Théo resolveu tentar o gol na goleira oposta à cobrança do escanteio, e ele conseguiu fazer o gol na outra goleira de duas maneiras, como mostra nas figuras a seguir. Calcule a distância que a bola percorreu e o ângulo formado pela mesma com o campo.

a)



Fonte: autora

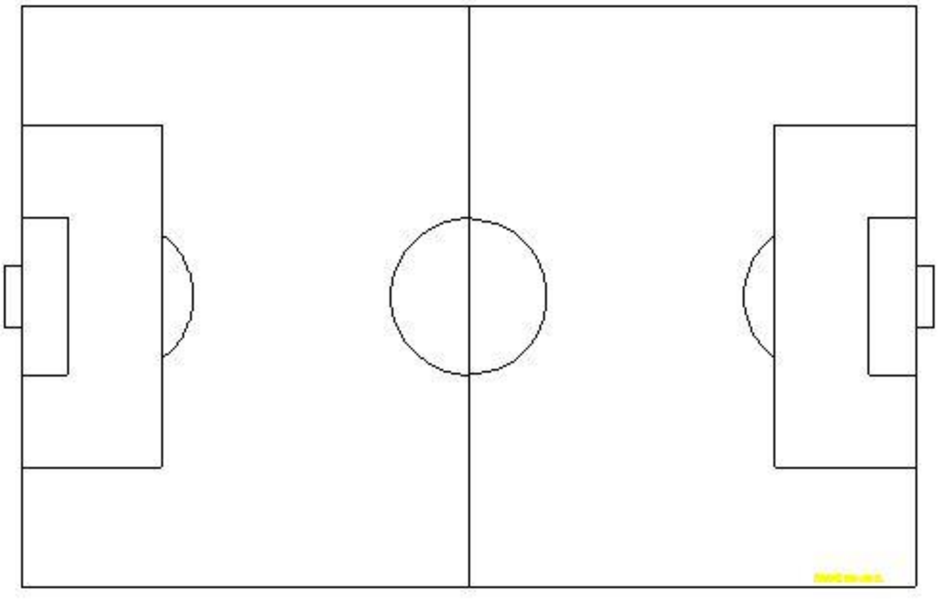
b)



Fonte: autora

Agora chegou a sua vez! Forme dupla com outro colega e vamos a quadra da escola!

Para que possamos faz as cobranças de escanteio, calcular a distância e o ângulo primeiramente precisamos das medidas da quadra, utilize o modelo abaixo e mãos a obra!



Fonte: https://blocoautocad.com/campo-de-futebol-simples/.

Agora que já temos todas as medidas, peça para sua dupla ficar no lado oposto de onde você irá cobrar o escanteio, e a cada chute seu, sua dupla fará a marcação de onde a bola cruzou a linha lateral , saindo do campo.

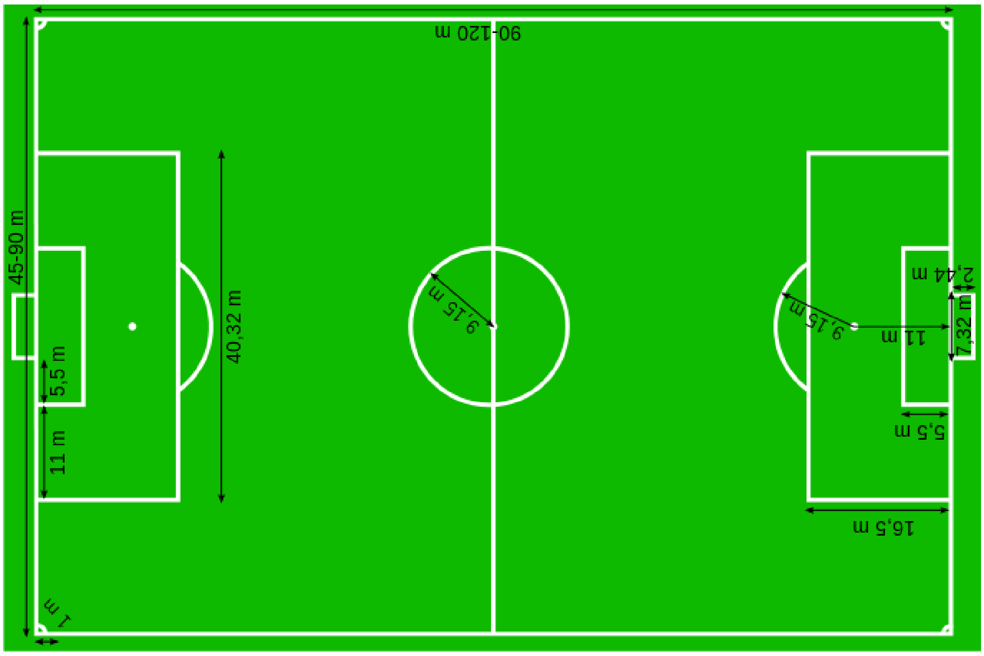
Cada Estudante fará 5 cobranças de escanteio, e calculará a distancia que a bola percorreu e o ângulo que a mesma fará com a linha de escanteio.

**Lembre-se que as cobranças só podem ser rasteira!**

## 19. APÊNDICE XII – MATERIAL ENTREGUE PARA OS ESTUDANTES – AULA5

**<u>QUESTÃO 2</u>**

Beleza turma?! Agora nosso amigo Théo decidiu verificar suas habilidades no chute de escanteio. Fez diversas cobranças, o que é demonstrado com uma linha vermelha nas figuras abaixo. Mas primeiro ele teve o trabalho de medir todo o campo para facilitar o nosso trabalho, deixando tudo prontinho. Agora é sua vez, Calcule, em cada caso, qual a distância que a bola percorreu em cada chupe de escanteio, e logo após determine o ângulo formado.

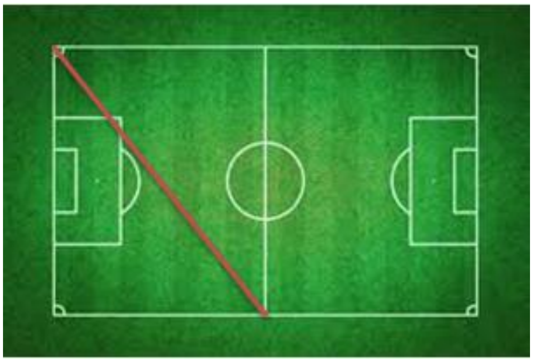



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Campo_de_futebol_medidas.jpg

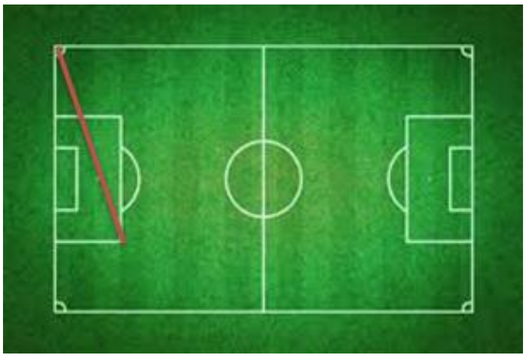
Imagem ilustrativa com as medidas do campo onde Théo fez as cobranças de escanteio. Utilize as medidas de 120 metros de comprimento e de 90 metros de largura,

Em cada uma das situações abaixo calcule a distância que a bola percorreu, logo após calcule o ângulo.

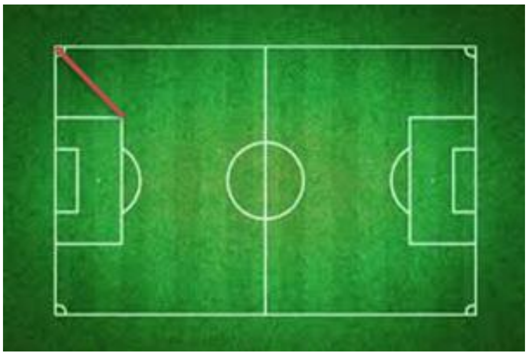
a)



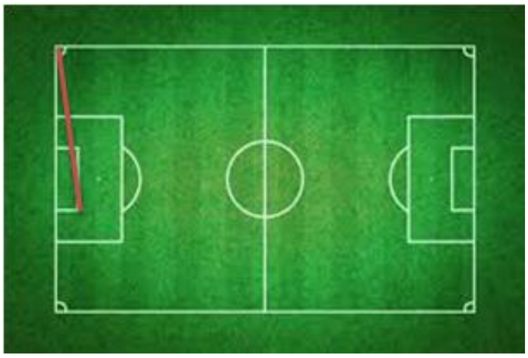
b)



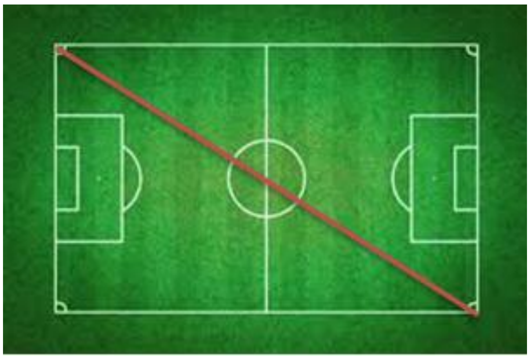
c)



d)

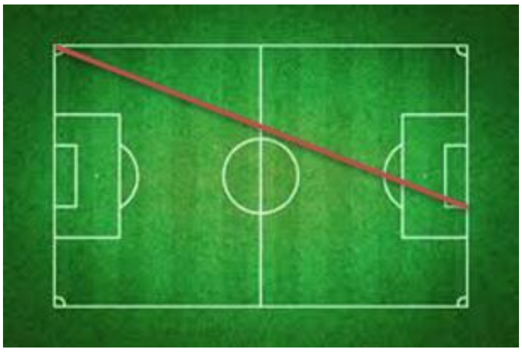


e)

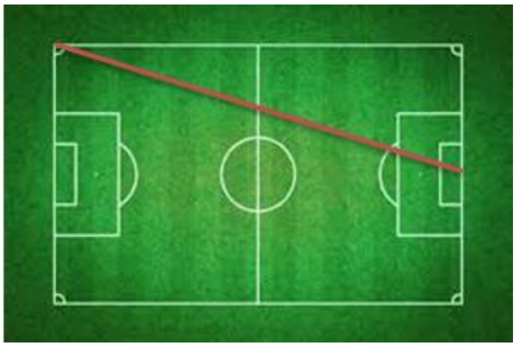


Não satisfeito com todas as cobranças feias, agora Théo resolveu tentar o gol na goleira oposta à cobrança do escanteio, e ele conseguiu fazer o gol na outra goleira de duas maneiras, como mostra nas figuras abaixo. Calcule a distância que a bola percorreu e o ângulo formado pela mesma com o campo.

a)

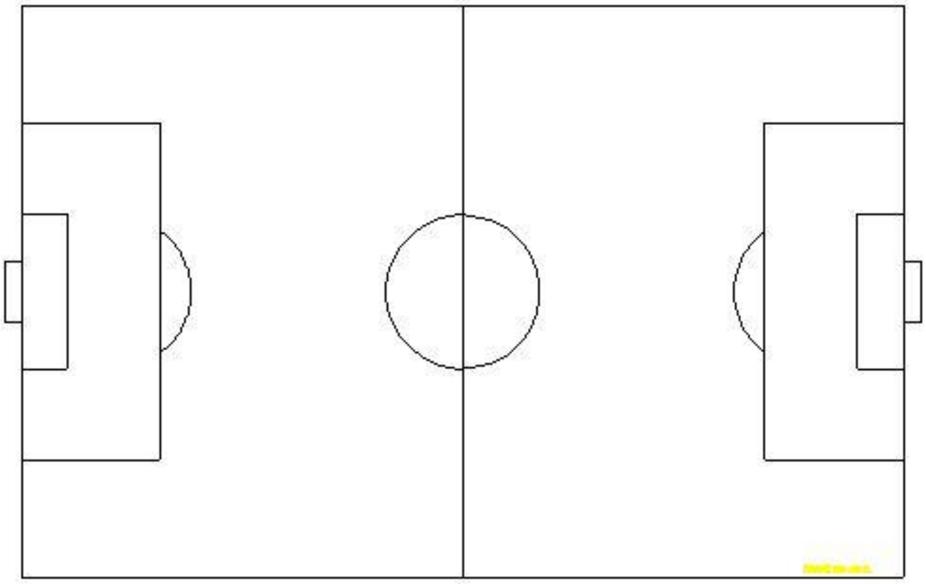


b)



Agora chegou a sua vez! Forme dupla com outro colega e vamos à quadra da escola!

Para que possamos faz as cobranças de escanteio, calcular a distância e o ângulo primeiramente precisamos das medidas da quadra, utilize o modelo abaixo e mãos a obra!



Fonte: https://blocoautocad.com/campo-de-futebol-simples/.

Agora que já temos todas as medidas, peça para sua dupla ficar no lado oposto de onde você irá cobrar o escanteio, e a cada chute seu, sua dupla fará a marcação de onde a bola cruzou a linha lateral, saindo do campo.

Cada Estudante fará 5 cobranças de escanteio, e calculará a distancia que a bola percorreu e o ângulo que a mesma fará com a linha de escanteio.

**Lembre-se que as cobranças só podem ser rasteira!**

## 20. APÊNDICE XIII – PLANO DE AULA 6 – PÊNALTI E QUADRANTES

### AULA 6

O futebol é o esporte mais popular do mundo. Ele é jogado em todos os países nos mais diferentes níveis. As Regras dos Jogos são as mesmas praticadas pelo mundo afora, desde a final da Copa do Mundo FIFA até uma partida entre crianças em um pequeno vilarejo (CBF, 2017).

Um tiro penal (pênalti) será marcado se um jogador cometer uma infração punível com tiro livre direto dentro de sua própria área penal (CBF, 2017).

Neste trabalho será cobrado o tiro penal sem a presença do goleiro, com o intuito de analisar em qual parte da goleira a bola chutada entrou.

Nosso trabalho iniciará em sala de aula para que possamos explicar para o estudante como será calculado a distância e o ângulo tanto na altura como na lateral, da bola chutada na cobrança de falta denominada Pênalti.

**DESENVOLVIMENTO:**

O plano de aula será desenvolvido com a duração de um período de 55 minutos.

**Pré requisitos:**

Triângulo retângulo (hipotenusa e catetos).

Teorema de Pitágoras.

Critérios de semelhança de triângulos.

Matemática do Ensino fundamental.

Seno, Cosseno e Tangente.

**Objetivos:**

Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas no futebol.

Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações e demais conteúdos geométricos.

Identificar e usar corretamente as relações.

Resolver situações problemas do futebol envolvendo as relações trigonométricas.

**AVALIAÇÃO.**

Durante as aulas observando o interesse e a participação do Estudante.

**1º aula**

**Duração: 55 minutos.**

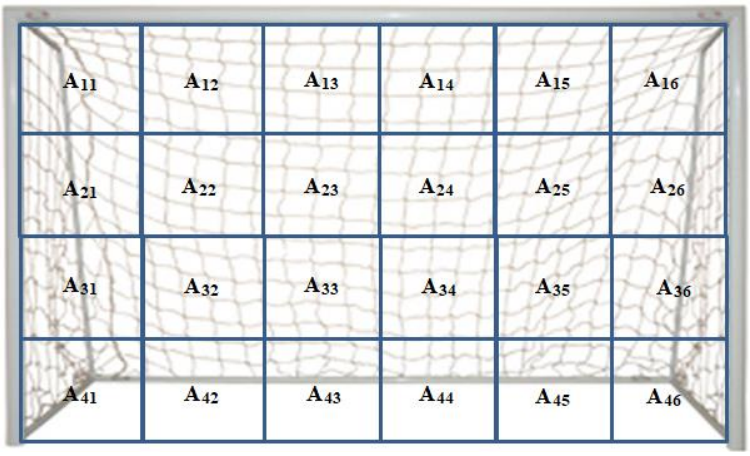
**Tema: Trigonometria no futebol**

**Procedimento:**

Nesta aula resolveremos a “Questão 3” onde será inicialmente explicado para o estudante como iremos calcular a distância e o ângulo tanto na altura como na lateral, da bola chutada na cobrança de falta denominada Pênalti. Daremos sequencia a aula com diversos questionamentos para o aprendizado do estudante, e posteriormente faremos o exercício em questão na prática.

**<u>QUESTÃO 3</u>**

Galera, nosso amigo Théo quer fazer uma nova cobrança de pênalti, mas resolveu trocar o futebol de campo pelo futebol de salão, sendo que a goleira do futebol de salão mede 2 metros de altura por 3 de comprimento e há uma marca a 6 metros do ponto médio até a linha do gol, para que seja feita a cobrança da falta chamada "pênalti". A cobrança da falta será novamente sem a presença do goleiro, mas agora irá chutar a bola em qualquer direção do gol, e desta forma teremos que ajudá-lo a determinar 2 ângulos, um formado pela elevação da bola, e outro pelo deslocamento lateral que a mesma fará. Para facilitar o nosso trabalho, Théo dividiu a goleira em 24 partes iguais, e irá chamar cada uma delas de quadrante, como mostra na figura abaixo. O primeiro número indica a linha, e o segundo a coluna a qual pertence.




Fonte: autora

**IMPORTANTE:** Será definido como certo, que a bola sempre entrará no centro de cada quadrante.

Vamos trabalhar?!

Primeiramente precisamos descobrir qual o ponto central de cada um dos quadrantes, como você fará isso?

Ex: Se cada quadrante é um quadrado de 50 X 50 cm então:

O ponto central do quadrante $\mathbf{A_{41}}$ encontra-se a uma altura de 25 cm do chão e uma distância do centro da goleira de 125 cm.

Baseando-se no exemplo calcule o ponto central de todos os outros quadrantes.

- Foi necessário calcular o ponto central de todos os 24 quadrantes? Justifique.
- Agora que você já sabe todos os pontos centrais, calcule quais serão os ângulos que fará a bola chutada por Théo, imaginando que ele chute em todos os quadrantes. (para cada quadrante 2 ângulos, um referente a altura da bola, e outro referente ao deslocamento lateral )
- Temos 24 quadrantes, teremos 24 ângulos? Justifique.

Exemplo de distância e ângulo lateral


Fonte: a autora

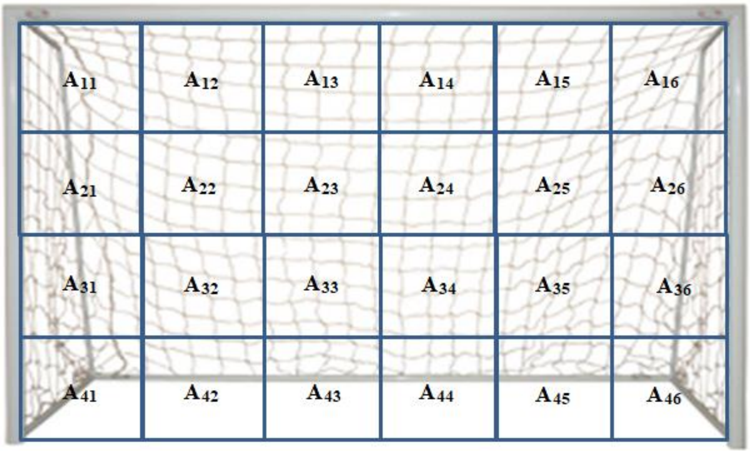
Agora que você já calculou os chutes do Théo, que tal irmos para a quadra da escola e chutarmos nossas próprias faltas?

- Primeiramente será necessário verificar as medidas da goleira e a distância da marca de cobrança do pênalti até a goleira, da quadra da escola.
- Com a goleira da quadra devidamente dividida já, cada Estudante chutará 5 vezes ao gol, da marca de cobrança do pênalti, o “juiz” irá informar qual quadrante o Estudante acertou, e o mesmo fará novamente os cálculos de distância e ângulo agora dos seus chutes a gol, e com as medidas da quadra de sua escola.

## 21. APÊNDICE XIV – MATERIAL ENTREGUE PARA OS ESTUDANTES - AULA 6

### QUESTÃO 3

Galera, nosso amigo Théo quer fazer uma nova cobrança de pênalti, mas resolveu trocar o futebol de campo pelo futebol de salão, sendo que a goleira do futebol de salão mede 2 metros de altura por 3 de comprimento e há uma marca a 6 metros do ponto médio até a linha do gol, para que seja feita a cobrança da falta chamada "pênalti". A cobrança da falta será novamente sem a presença do goleiro, mas agora irá chutar a bola em qualquer direção do gol, e desta forma teremos que ajudá-lo a determinar 2 ângulos, um formado pela elevação da bola, e outro pelo deslocamento lateral que a mesma fará. Para facilitar o nosso trabalho, Théo dividiu a goleira em 24 partes iguais, e irá chamar cada uma delas de quadrante, como mostra na figura abaixo. O primeiro número indica a linha, e o segundo a coluna a qual pertence.




Fonte: a autora

**IMPORTANTE:** Será definido como certo, que a bola sempre entrará no centro de cada quadrante.

Vamos trabalhar?!

Primeiramente precisamos descobrir qual o ponto central de cada um dos quadrantes, como você fará isso?

Ex:

Se cada quadrante é um quadrado de 50 X 50 cm então:

O ponto central do quadrante $\mathbf{A_{41}}$ encontra-se a uma altura de 25 cm do chão e uma distância do centro da goleira de 125 cm.

Baseando-se no exemplo calcule o ponto central de todos os outros quadrantes.

- Foi necessário calcular o ponto central de todos os 24 quadrantes? Justifique.

- Agora que você já sabe todos os pontos centrais, calcule quais serão os ângulos que fará a bola chutada por Théo, imaginando que ele chute em todos os quadrantes. (Para cada quadrante 2 ângulos, um referente a altura da bola, e outro referente ao deslocamento lateral )
- Temos 24 quadrantes, teremos 24 ângulos? Justifique.

Exemplo de distância e ângulo lateral


Fonte: a autora

Agora que você já calculou os chutes do Théo, que tal irmos para a quadra da escola e chutarmos nossas próprias faltas?

- Primeiramente será necessário verificar as medidas da goleira e a distância da marca de cobrança do pênalti até a goleira, da quadra da escola.
- Com a goleira da quadra devidamente dividida já, cada Estudante chutará 5 vezes ao gol, da marca de cobrança do pênalti, o “juiz” irá informar qual quadrante o Estudante acertou, e o mesmo fará novamente os cálculos de distância e ângulo agora dos seus chutes a gol, e com as medidas da quadra de sua escola.

## 22. APÊNDICE XV – PLANO DE AULA 7 – ESQUEMA TÁTICO

**AULA 7**

No futebol, os esquemas táticos são os meios de um treinador escalar sua equipe dentre de campo. Para Melo (1999, p. 38) “tática é a arte de combinar a técnica individual de cada jogador, em suas diferentes linhas e posições, de modo a obter o máximo de rendimento do conjunto, em um determinado jogo.”

Segundo Drubscky (2003), é tática no futebol tudo aquilo que é realizado com o intuito de alcançar a vitória em uma partida.

Por isso, os treinadores quando chegam a uma determinada equipe, planejam através de seus conhecimentos, adotar esquemas táticos que auxiliem essa equipe a alcançar a vitória.

Desta forma, pretendemos mostrar aos estudantes que os esquemas táticos do futebol também utilizam a Trigonometria para se beneficiar.

**DESENVOLVIMENTO:**

O plano de aula será desenvolvido com a duração de um período de 55 minutos.

**Pré-requisitos:**

Pontos e Retas

Ponto médio

Circunferência

Vértice

Triângulo retângulo ( hipotenusa e catetos)

Teorema de Pitágoras

Critérios de semelhança de triângulos

Matemática do Ensino fundamental

Seno, Cosseno e Tangente.

**Objetivos:**

Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas no futebol.

Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações e demais conteúdos geométricos.

Identificar e usar corretamente as relações.

Resolver situações problemas do futebol envolvendo as relações trigonométricas.

**AVALIAÇÃO.**

Durante as aulas observando o interesse e a participação do Estudante.

**1º aula**

**Duração: 55 minutos.**

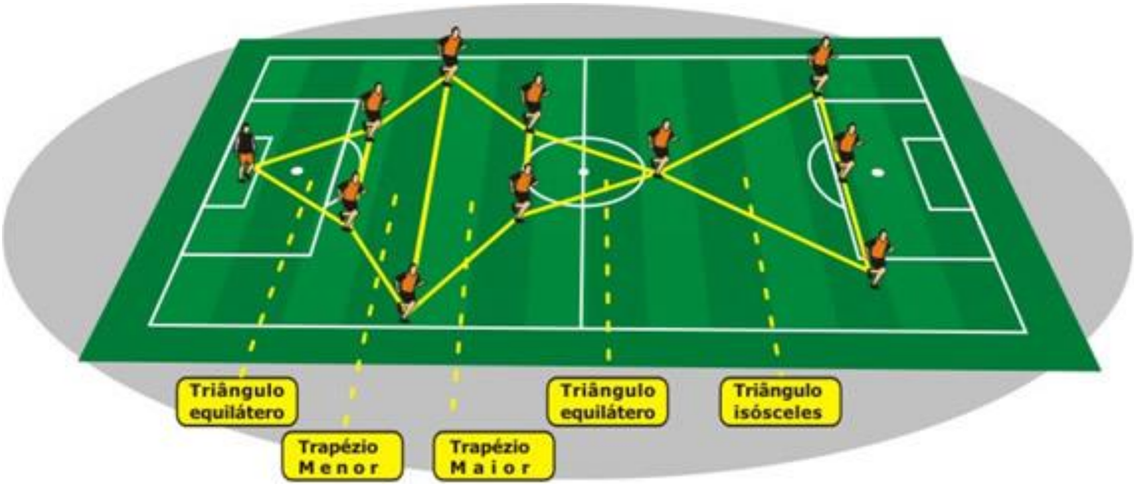
**Tema: Trigonometria no esquema tático do futebol**

**Procedimento:**

A “Questão 4” será referente ao esquema tático utilizado no futebol de campo conhecido como 4-3-3 (4 zagueiros, 3 jogadores de meio de campo e 3 atacantes). Este esquema foi muito utilizado no passado, quando a prioridade era o ataque, o futebol bonito, chamado futebol arte. Com este esquema podemos observar várias figuras geométricas assim como diversos ângulos. Utilizaremos essas figuras geométricas e ângulos para demonstrarmos a Trigonometria nos esquemas táticos.

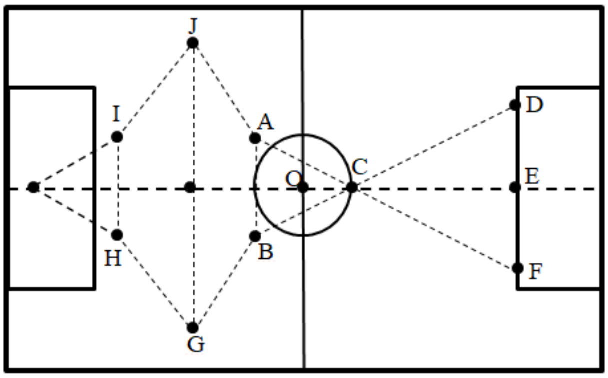
**QUESTÃO 4**

Pessoal, desta vez nosso amigo Théo resolveu convocar todo time pra jogar, e claro ficou com diversas dúvidas Matemáticas que teremos que ajudá-lo a resolver. O treinador do time resolveu adotar o esquema tático 4-3-3 (4 zagueiros, 3 jogadores de meio de campo e 3 atacantes) por ser um esquema muito ofensivo, já que o time precisava reverter algum resultado desfavoráveis. Para explicar melhor o esquema para o time usou a figura abaixo.




Fonte: http://www.pedagogia.com.br/artigos/geometriafutebol/index.php?pagina=6

Mostrando esse esquema tático Pedro, o treinador, informou que seria possível observar diversas figuras geométricas como: triângulos equiláteros, triângulos isósceles, trapézios, hexágonos e retângulos, porém isso não ficou muito claro para alguns jogadores, então Pedro fez um novo desenho do campo.

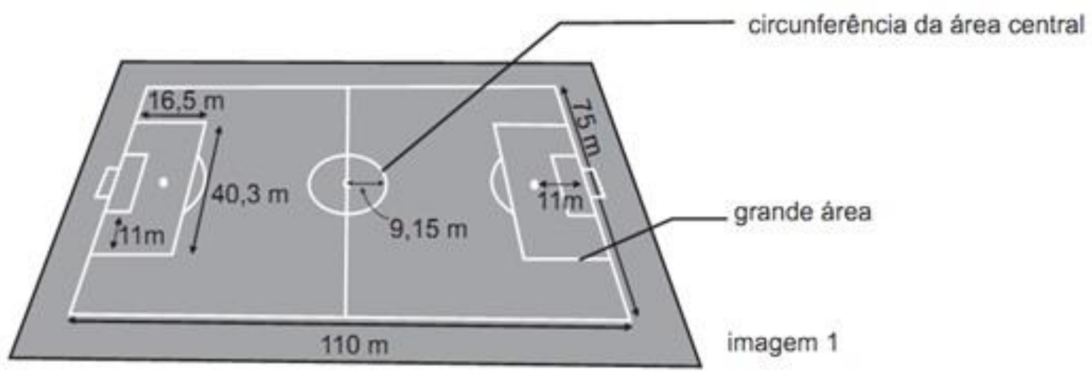



Fonte: autora

E explicou para o time:

- O triângulo ABC é equilátero, e o vértice C pertence à circunferência.
- O ponto O é o centro da circunferência.
- Os pontos D, E e F pertencem ao lado do retângulo que representa a grande área.
- O ponto E é o ponto médio do segmento $\overline{DF}$
- O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{DF}$
- O segmento $\overline{AB}$ é perpendicular a reta $\overline{CE}$.

Para facilitar nossos cálculos, utilizaremos as medidas do campo conforme figura abaixo.




Fonte: http://www.gramassinteticas.com.br/medidas-oficiais-da-quadra-de-futebol/

Porém alguns lances que aconteceram durante o jogo deixaram Théo com dúvidas, vamos ajudá-lo?

4) O jogador da posição B chutou a bola para o jogador da posição C, e este para o jogador da posição D, sem interferência de outros jogadores. Qual foi a distância que a bola percorreu, em metros, saindo do jogador B até o jogador D?

- Algumas perguntas serão feitas ao Estudante para facilitar a interpretação do problema, como por exemplo:
    - Você consegue visualizar algum triângulo retângulo?
    - Como você conseguirá algumas medidas?
    - Você possui medidas do campo?
    - Você tem uma tabela com valores de Seno, Cosseno e Tangente, isso pode lhe ajudar?
    - Você pode utilizar semelhança de triângulos?
    - Você lembra-se de ângulos opostos, complementares?

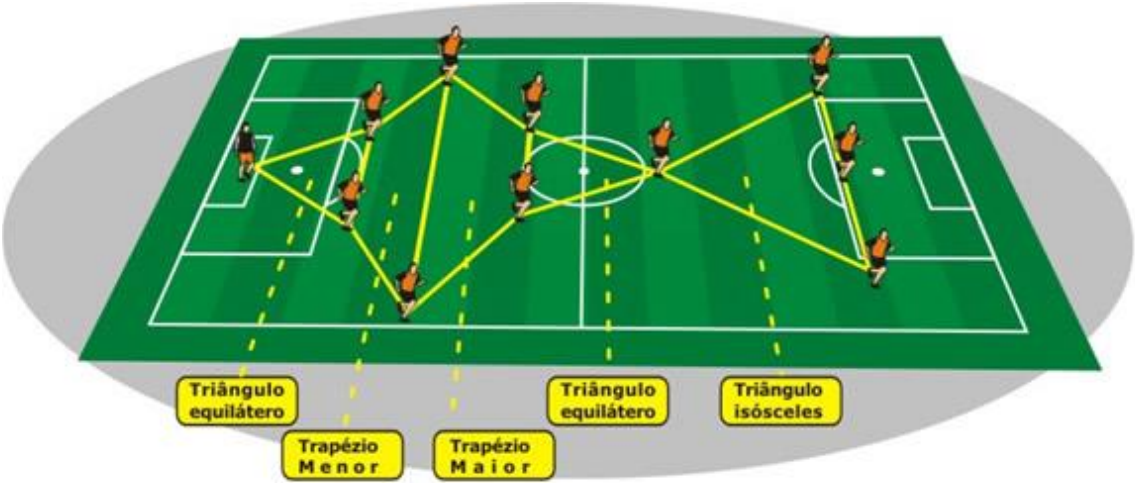
5) Sabendo que os trapézios GHIJ e ABGJ são iguais ajude a descobrir qual a distância que a bola percorreu saído do jogador H até o Jogar B sendo que a distância de G e H é 20 metros e o ângulo HGJ é de 40º.

6) Qual a distância percorrida pela bola saindo do jogador E e chegando até o jogador B?

## 23. APÊNDICE XVI – MATERIAL ENTREGUE PARA OS ESTUDANTES - AULA 7

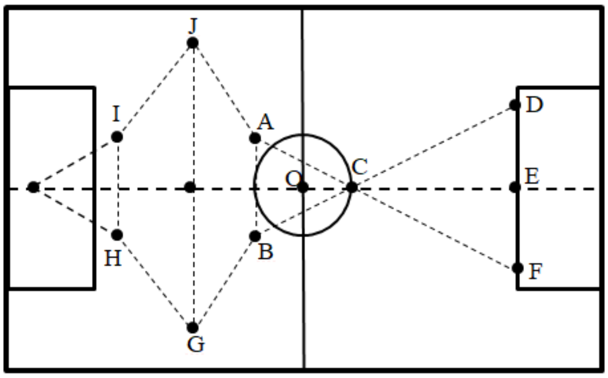
**QUESTÃO 4**

Pessoal, desta vez nosso amigo Théo resolveu convocar todo time pra jogar, e claro ficou com diversas dúvidas Matemáticas que teremos que ajuda-lo a resolver. O treinador do time resolveu adotar o esquema tático 4-3-3 (4 zagueiros, 3 jogadores de meio de campo e 3 atacantes) por ser um esquema muito ofensivo, já que o time precisava reverter algum resultado desfavoráveis. Para explicar melhor o esquema para o time usou a figura abaixo.




Fonte: http://www.pedagogia.com.br/artigos/geometriafutebol/index.php?pagina=6

Mostrando esse esquema tático Pedro, o treinador, informou que seria possível observar diversas figuras geométricas como: triângulos equiláteros, triângulos isósceles, trapézios, hexágonos e retângulos, porém isso não ficou muito claro para alguns jogadores, então Pedro fez um novo desenho do campo.



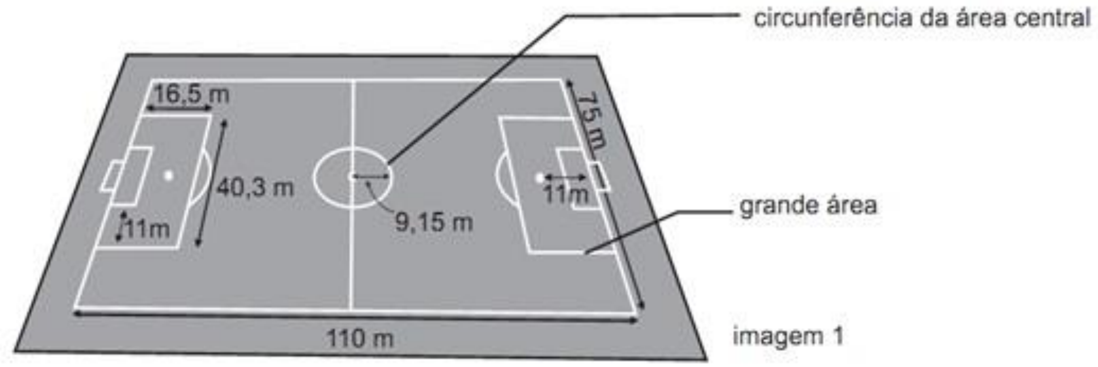

Fonte: autora

E explicou para o time:

- O triângulo ABC é equilátero, e o vértice C pertence à circunferência.

- O ponto O é o centro da circunferência.
- Os pontos D, E e F pertencem ao lado do retângulo que representa a grande área.
- O ponto E é o ponto médio do segmento $\overline{DF}$
- O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{DF}$
- O segmento $\overline{AB}$ é perpendicular a reta $\overline{CE}$.

Para facilitar nossos cálculos, utilizaremos as medidas do campo conforme figura abaixo.



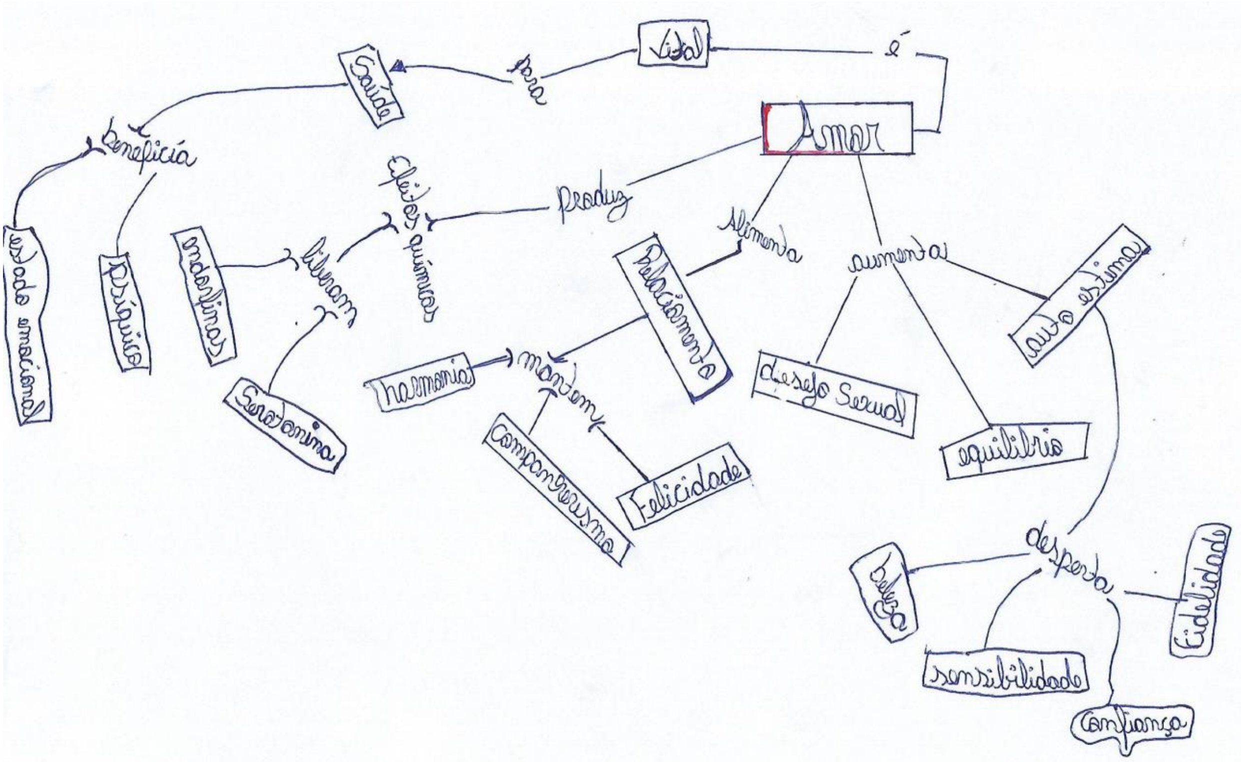

Fonte: http://www.gramassinteticas.com.br/medidas-oficiais-da-quadra-de-futebol/

Porém alguns lances que aconteceram durante o jogo deixaram Théo com duvidas, vamos ajuda-lo?

5) O jogador da posição B chutou a bola para o jogador da posição C, e este para o jogador da posição D, sem interferência de outros jogadores. Qual foi a distancia que a bola percorreu, em metros, saindo do jogador B até o jogador D?
    - Algumas perguntas serão feitas ao Estudante para facilitar a interpretação do problema, como por exemplo:
        - Você consegue visualizar algum triangulo retângulo?
        - Como você conseguirá algumas medidas?
        - Você possui medidas do campo?
        - Você tem uma tabela com valores de Seno, Cosseno e Tangente, isso pode lhe ajudar?
        - Você pode utilizar semelhança de triângulos?
        - Você lembra-se de ângulos opostos, complementares?
6) Sabendo que os trapézios GHIJ e ABGJ são iguais ajude a descobrir qual a distância que a bola percorreu saído do jogador H até o Jogar B sendo que a distância de G e H é 20 metros e o ângulo HGJ é de 40º.
7) Qual a distância percorrida pela bola saindo do jogador E e chegando até o jogador B?

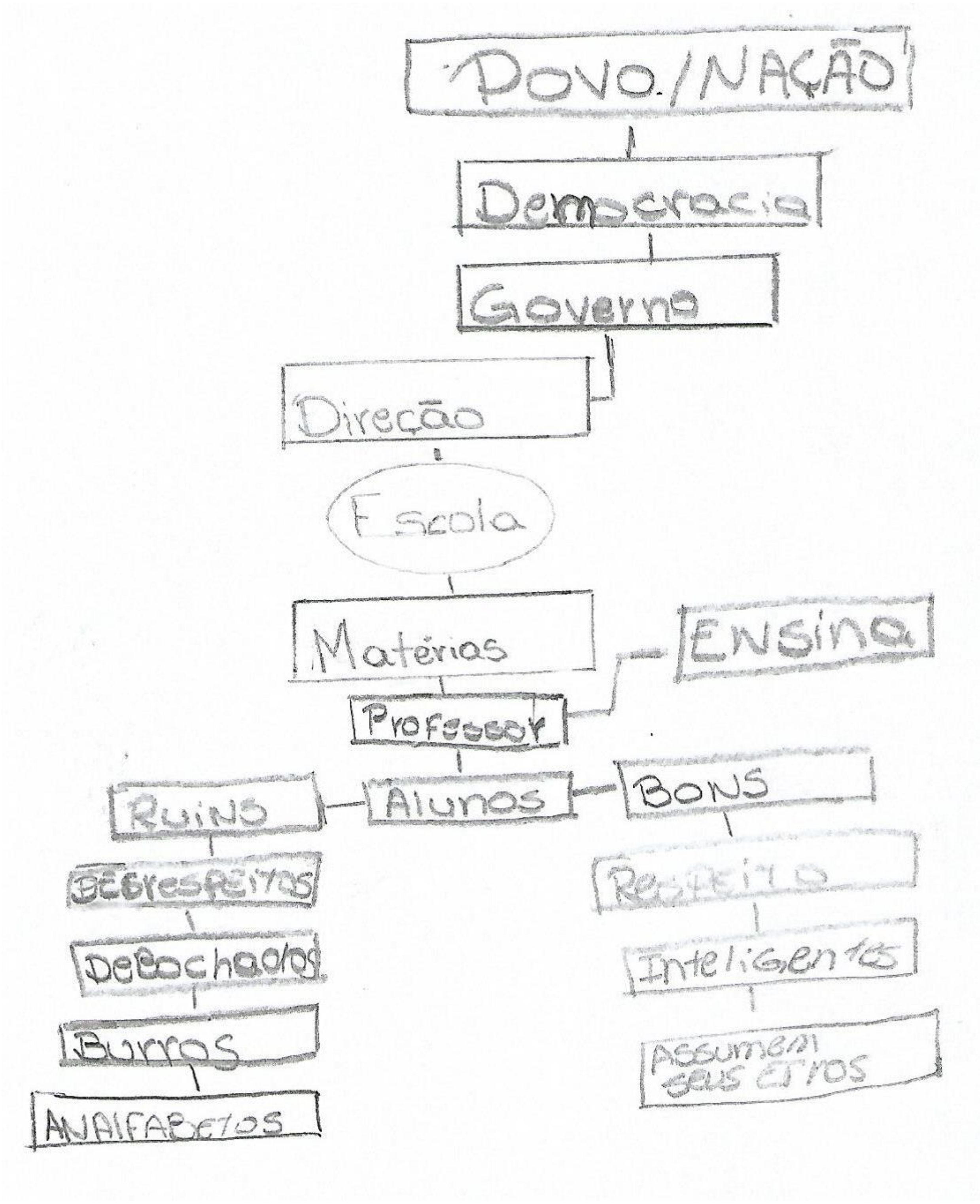
## 24. APÊNDICE XVII – 1º MAPAS CONCEITUAIS DOS ESTUDANTES DO 9º ANO

Na primeira aula sobre mapas conceituais, os estudantes foram divididos em 5 grupos, o primeiro grupo escolheu o tema Amor para construção do Mapa.



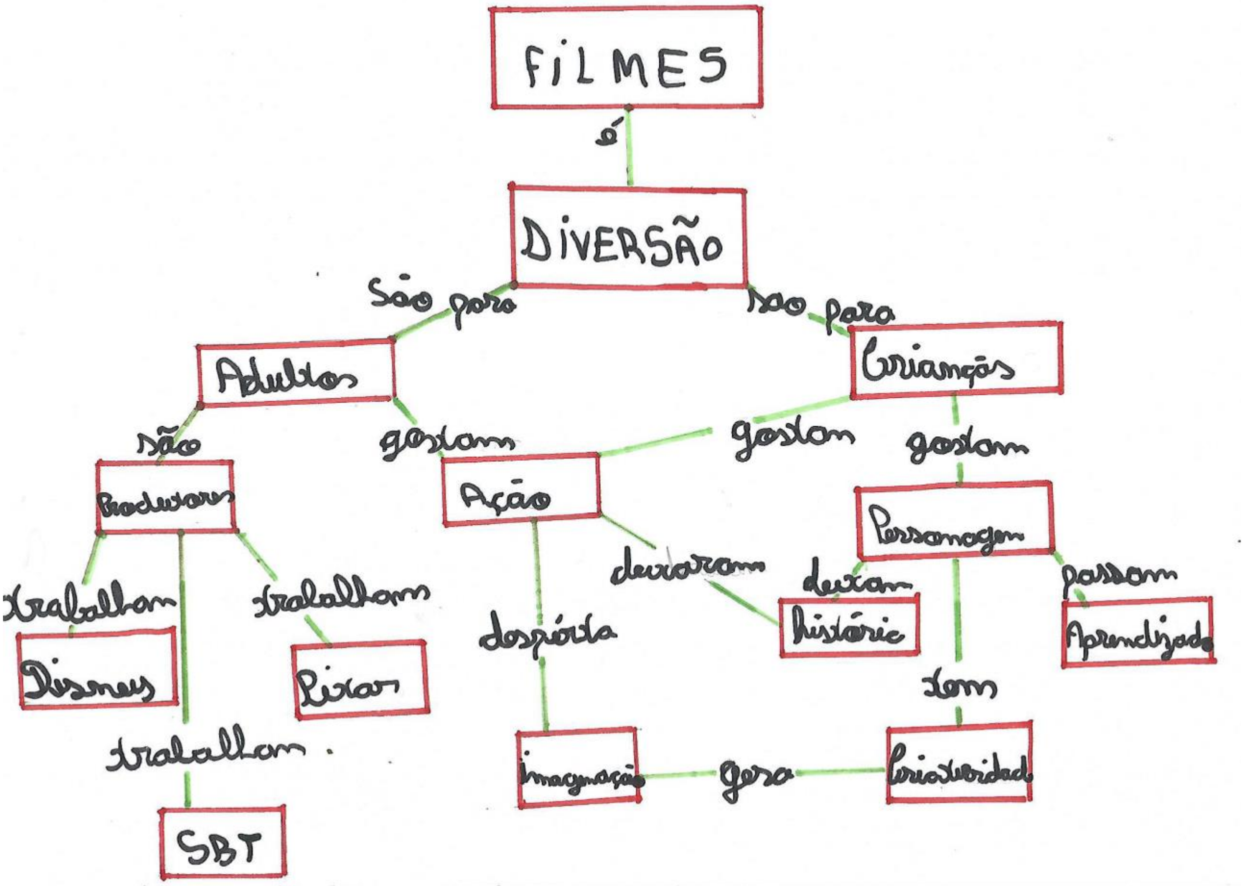

Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelos estudantes

O tema escolhido pelo segundo grupo de estudantes foi Escola.



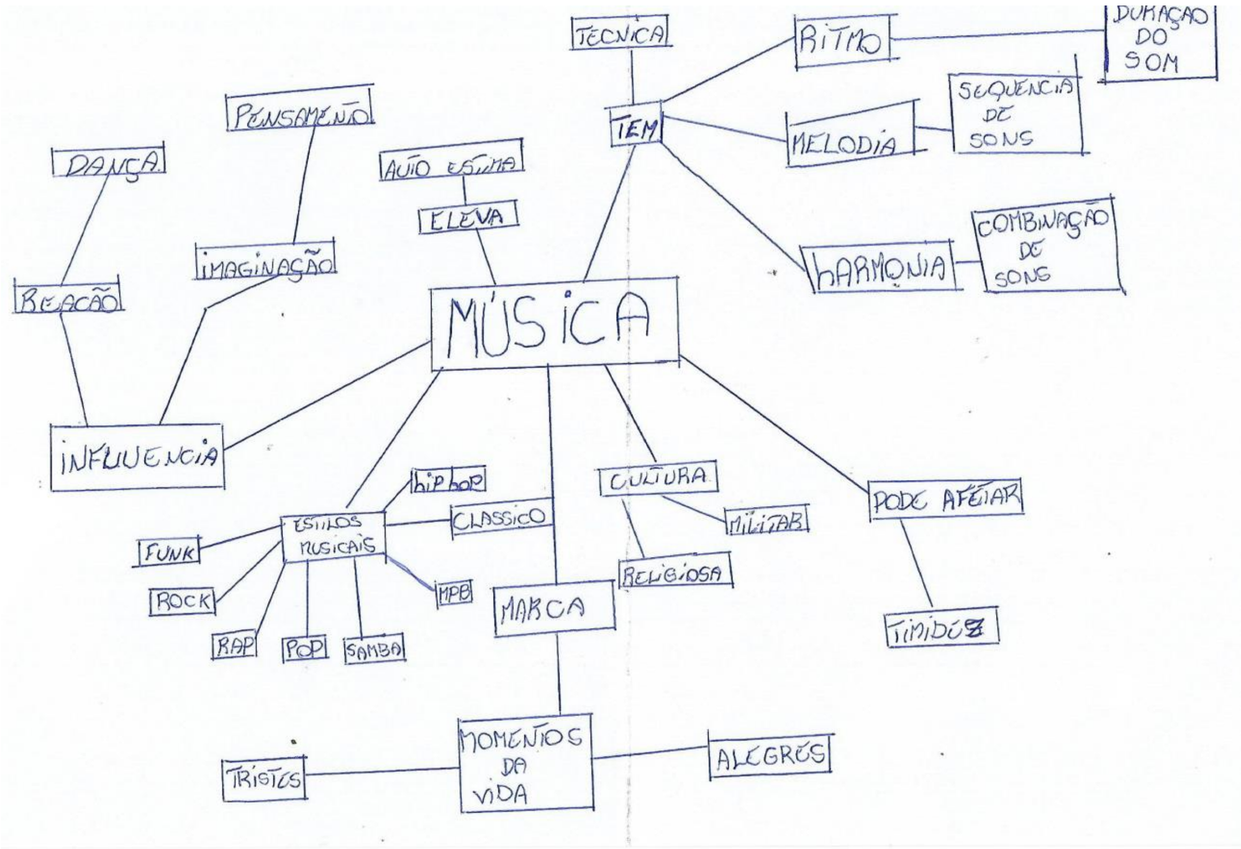

Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelos estudantes

O mapa conceitual construído pelo terceiro grupo foi sobre o tema Filmes.



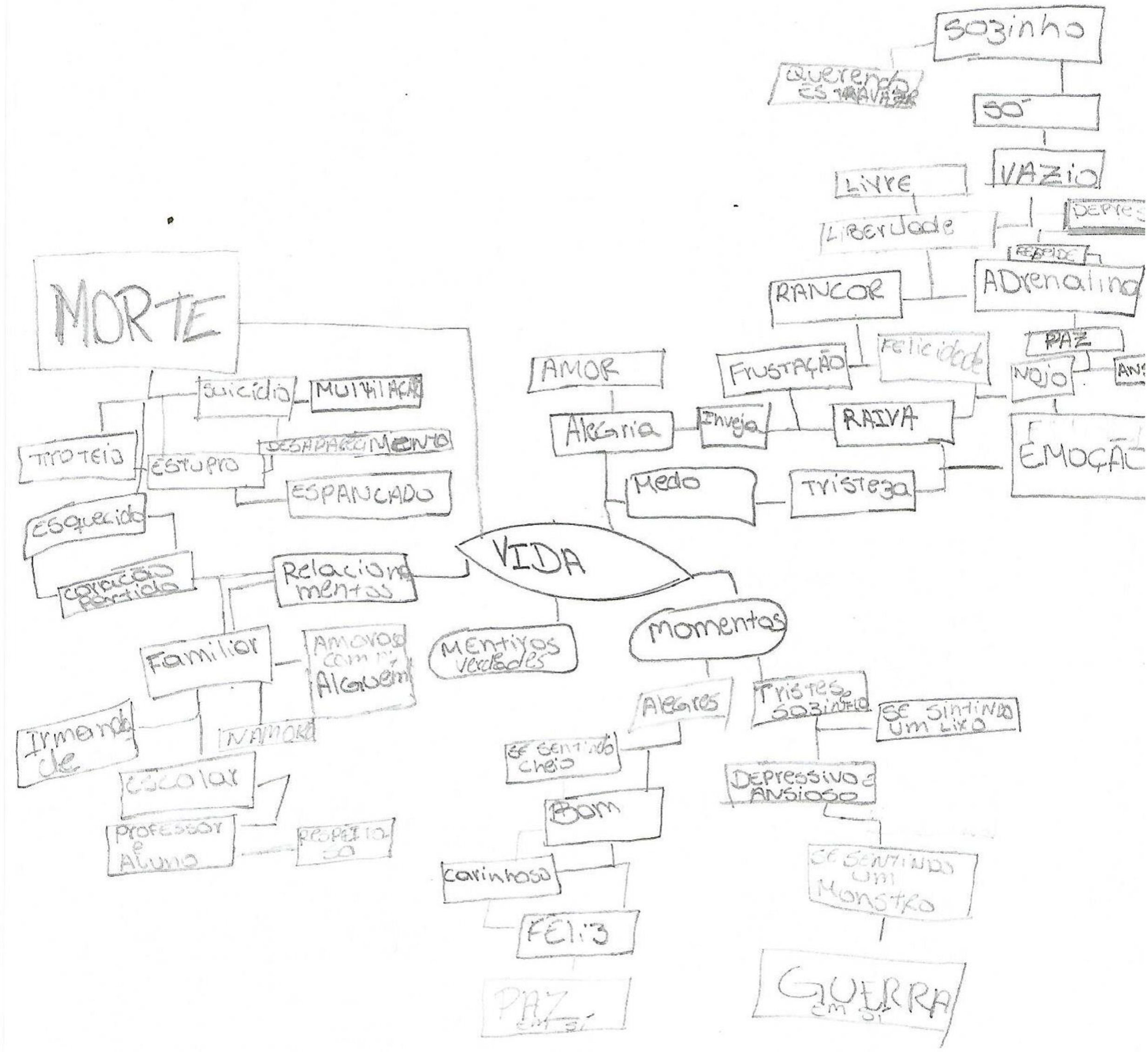

Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelos estudantes

Um dos temas selecionados para a construção do Mapa conceitual foi a Música, e a construção do mesmo ficou de responsabilidade do grupo 4.



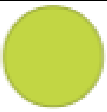
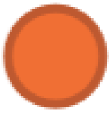
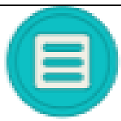
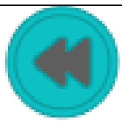
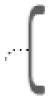

Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelos estudantes

O Quinto e último grupo apresentou o mapa conceitual sobre o tema Vida.




Fonte: autora com base no trabalho desenvolvido pelos estudantes

## 25. APÊNDICE XVIII – ÍNDICE DOS DIAGRAMAS DE BLOCOS

| Imagem | Descrição |
|---|---|
|  | Início do digrama de blocos |
|  | Fim do digrama de blocos |
|  | Caixa de texto |
|  | Subsunçores |
|  | Aula 2 |
|  | Dúvidas |
|  | Solução de Dúvidas |
|  | Observações |

Fonte: a autora

## 26. APÊNDICE XIX – CARTA DE ANUÊNCIA

UCS UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

**Universidade de Caxias do Sul**
**Centro de Ciências Exatas e Tecnologia**
**Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática**
**Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática**

**CARTA DE ANUÊNCIA**

Escola Estadual de Ensino Fundamental Comendador Carlos Dreher Neto
Ao Diretor (a) Escolar
Assunto: Solicitação de Autorização

Solicitamos autorização para que a mestranda Daiana Bordin, do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Caxias do Sul, sob a orientação da Professora Dra. Marilda Machado Spindola, desenvolva uma pesquisa para a construção da Dissertação de Mestrado intitulada **"UEPS: Aprendizagem Significativa da Trigonometria aplicada ao futebol"** com os docentes do nono ano desta Instituição Pública de Ensino do Município de Bento Gonçalves.

Atenciosamente,

Profª. Dra. Marilda Machado Spindola
Professora Orientadora da Universidade de Caxias do Sul

---

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO**

De acordo com a Carta de Anuência acima autorizamos o feito solicitado a partir **de Janeiro de 2018.**

Isabel Lazzari

Ao Diretor (a) Escolar

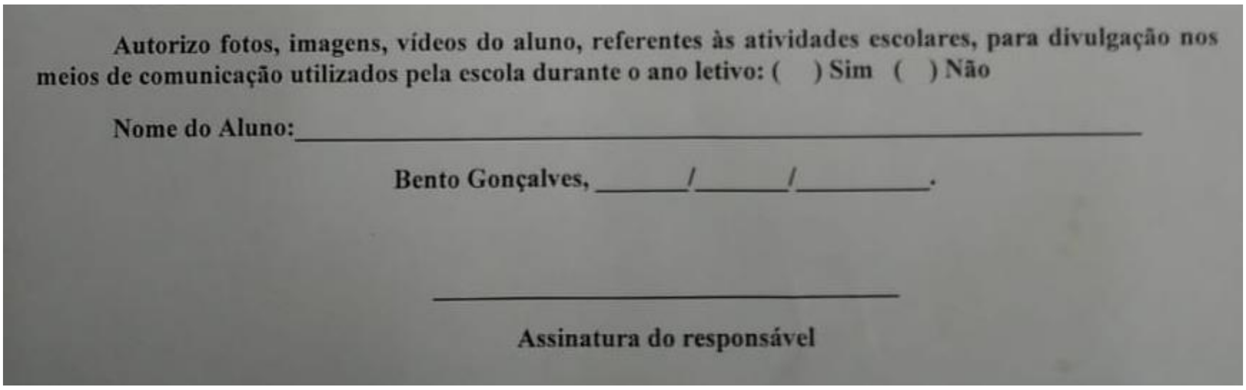
Isabel Joana Foppa Lazzari
ID.Func. 1715178/01
Diretora

Escola Estadual de Ensino Fundamental
Comendador Carlos Dreher Neto
Port. de Reorg. nº 63640 de 02.12.81
Port. de Reorg. nº 00763 de 04.06.90 do 12.06.90
Port. de Alt. da Design. n 314 de 15/12/2000 de 19/12/2000
Bento Gonçalves - RS

## 27. APÊNDICE XX - TERMO DE CONSENTIMENTO

Ao efetuar a matrícula na Escola Estadual de Ensino Fundamental Comendador Carlos Dreher Neto, os responsáveis pelo estudante assinam um documento onde autorizam o uso de imagem do mesmo, referente às atividades escolares, conforme Figura 59.

Figura 59 - Termos de autorização para uso de imagem



**Autorizo fotos, imagens, vídeos do aluno, referentes às atividades escolares, para divulgação nos meios de comunicação utilizados pela escola durante o ano letivo: (   ) Sim   (   ) Não**

**Nome do Aluno:**________________________________________

**Bento Gonçalves,** ______/______/_________.

______________________________

**Assinatura do responsável**

Fonte: banco de dados da escola