

**UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
MESTRADO PROFISSIONAL**

GUSTAVO PERINI

**ESTUDO DE CASO: APLICAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA NO
DESENVOLVIMENTO DE UM PROTÓTIPO DE CUBO DE RODA**

CAXIAS DO SUL

2013

GUSTAVO PERINI

**ESTUDO DE CASO: APLICAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA NO
DESENVOLVIMENTO DE UM PROTÓTIPO DE CUBO DE RODA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade de Caxias do Sul, visando à obtenção do grau de mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Projeto e Fabricação.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Luis Corso.

Coorientador: Prof. Dr. Marcos A. Luciano.

CAXIAS DO SUL

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Universidade de Caxias do Sul
UCS - BICE - Processamento Técnico

P445e Perini, Gustavo
Estudo de caso: aplicação de otimização topológica no desenvolvimento de um protótipo de cubo de roda / Gustavo Perini. - 2013.
70 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado) – Universidade de Caxias do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2013.
“Orientação: Prof. Dr. Leandro Luis Corso”

1. Cubos de roda. 2. Mecânica. 3. Indústria automotiva. I. Título.

CDU 2.ed. : 629.3.027.485

Índice para o catálogo sistemático:

1. Cubos de roda	629.3.027.485
2. Mecânica	531
3. Indústria automotiva	629.3

Catalogação na fonte elaborada pela bibliotecária
Márcia Servi Gonçalves – CRB 10/1500

"Estudo de caso: aplicação de otimização topológica no desenvolvimento de um protótipo de cubo de roda".

Gustavo Perini

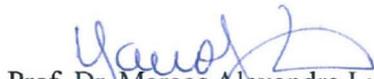
Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade de Caxias do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, Área de Concentração: Projeto e Fabricação.

Caxias do Sul, 26 de novembro de 2013.

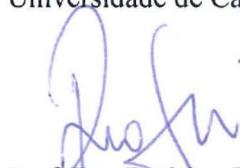
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Leandro Luís Corso (orientador)
Universidade de Caxias do Sul



Prof. Dr. Marcos Alexandre Luciano (coorientador)
Universidade de Caxias do Sul



Prof. Dr. Rodrigo Rossi
Universidade Federal do Rio Grande do Sul



Prof. Dr. Alexandre Vieceli
Universidade de Caxias do Sul



Prof. Dr. Oscar Alfredo Garcia de Suarez
Universidade de Caxias do Sul

Aos meus avós, Primo e Maria.
Exemplos de simplicidade e amor incondicional.

AGRADECIMENTOS

À Krisciê, por ser especial em minha vida, minha fonte de motivação, apoio, estímulo, carinho e amor. Por acreditar e partilhar de meus sonhos, por estar comigo, aprendendo a compartilhar a vida. Obrigado.

À minha família, que sempre me apoiaram e estiveram no meu lado em todos os momentos da minha vida.

Ao meu orientador, Prof. Leandro Luis. Corso, pelos ensinamentos, apoio, confiança, motivação, companheirismo e amizade.

Ao Prof. Marcos Alexandre Luciano, pela orientação deste trabalho e amizade.

Ao Prof. Oscar Alfredo Garcia de Suarez, pelos conhecimentos transmitidos, palavras de motivação e amizade.

À empresa Suspensys Sistemas Automotivos Ltda, pela concessão da bolsa de estudos, confiança em mim depositada e financiamento do investimento para realização deste trabalho.

À empresa Altair Engineering, por disponibilizar a licença do software *Altair Optistruct* para a realização da Otimização Topológica no estudo de caso, e ao Engenheiro Adriano Akio Koga, pelas informações técnicas referentes ao software.

Ao Engenheiro João Felipe Souza de Araujo pelo apoio, auxílio na organização, entusiasmo, motivação e amizade.

Aos Engenheiros Luciano André Zanol e Gabriel Radaelli Piazza, pelo auxílio prático no modelamento do sistema de teste.

Aos Engenheiros Leonardo Hoss, Ari Nardello, Marcos Antonio Pansera e Maicon Molon, pelo auxílio na organização e condução dos ensaios experimentais.

E finalmente a todos os demais que direta ou indiretamente contribuíram para realização deste trabalho, meu muito obrigado.

Se o engenheiro não sabe modelar o problema
sem ter o computador, ele não deve fazê-lo
tendo o computador.

Avelino Alves Filho

RESUMO

A Otimização Topológica (OT) tem se mostrado uma ferramenta eficiente na busca de produtos de baixo custo, alta qualidade e alto desempenho. Esta dissertação trata da aplicação da OT, por meio do *software Altair Optistruct*, no desenvolvimento do projeto de um Cubo de Roda. O objetivo da aplicação da OT foi auxiliar na busca por um componente mecânico otimizado atendendo os requisitos da aplicação. Utilizou-se de ensaios experimentais para validação das análises estruturais, realizadas por meio do Método de Elementos Finitos, onde as diferenças encontradas entre os valores medidos e calculados foram considerados satisfatórios. Para tanto, foi fundamental os cuidados na realização da discretização do sistema, a escolha dos pontos de instrumentação baseado nas direções principais e baixo gradiente de tensões. Também foi realizado o ensaio de aprovação do desenvolvimento de um protótipo de Cubo de Roda, utilizando-se da norma SAE J1095 como critério de homologação, onde o componente otimizado foi aprovado.

Palavras-chave: Otimização Estrutural. Otimização Topológica. Método de Elementos Finitos. Desenvolvimento de produto.

ABSTRACT

This dissertation presents an application of Topology Optimization (TO) on Wheel Hub project development, through the software Altair Optistruct. The objective of the application of TO was to minimize the Wheel Hub mass meeting the application requirements. This work employs experimental validation of structural analysis, where the differences between the measured and calculated values were considered satisfactory, therefore, the way performing the discretization of the system and the choice of instrumentation points based on the principal stresses directions and low gradient were essential. The optimized Wheel Hub was also submitted to the fatigue test (SAE J1095) as a criterion for approval of the prototype, where the optimized component was considered approved.

Keywords: Topology Optimization. Structural Optimization. Finite Element Method. Product Development.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Cubo de Roda.....	16
Figura 2.1 – Deformação de um corpo	19
Figura 2.2 – Estado de tensões em torno do ponto P, em um corpo tridimensional	20
Figura 2.3 – Exemplo de Discretização.....	24
Figura 2.4 – Tipos de otimização	26
Figura 2.5 – Otimização paramétrica	26
Figura 2.6 – Otimização de forma	27
Figura 2.7 – Otimização topológica	28
Figura 2.8 – Esquema gráfico de uma otimização.....	30
Figura 2.9 – Representação geométrica do vetor gradiente.....	31
Figura 2.10 – Mínimo local e global de uma expressão	33
Figura 2.11 – Representação geométrica das condições KKT no ponto x^*	35
Figura 2.12 – Representação de um problema de OT	36
Figura 2.13 – Representação do Ω em um problema de OT	37
Figura 2.14 – Microestruturas para método de homogeneização	39
Figura 2.15 – Efeito da penalização na relação dos tensores constitutivos.....	40
Figura 2.16 – Influência da malha	41
Figura 2.17 – Exemplo de não unicidade da solução	42
Figura 2.18 – Exemplo de instabilidade de tabuleiro	42
Figura 2.19 – Representação geométrica do raio de abrangência, independente da malha	44
Figura 2.20 – Representação geométrica da ponderação das pseudo-densidades.....	45

CÓPIA CEGA

Figura B.1 – Tamanhos típicos de tamanho de grande de extensômetros.....	93
--	----

CÓPIA CEGA

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Condições para otimização sem restrição.....	33
---	----

CÓPIA CEGA

LISTA DE SÍMBOLOS

∇	Vetor gradiente
λ	Coefficiente de Lamé [N/m ²] Multiplicador de Lagrange
μ	Coefficiente de Lamé [N/m ²] Multiplicador de Lagrange
Ω	Domínio
ν	Coefficiente de Poisson
w	Função de teste Função peso
\mathcal{D}	Conjunto das funções de teste e funções peso
ρ	Densidade de material
ε	Valor de perturbação aplicada às restrições de tensão
η	Valor de penalização dos elementos semi-densos
Ω^e	Domínio do elemento
σ_{ij}	Tensão na direção de j perpendicular ao eixo i [N/m ²]
ε_{ij}	Deformação infinitesimal direção de j perpendicular ao eixo i
Γ_u	Superfície de aplicação das condições de contorno de Dirichlet [m ²]
Γ_t	Superfície de aplicação das condições de contorno de Neumann [m ²]
\cdot^T	Transposta de uma matriz ou vetor
b	Vetor das forças de corpo
E	Módulo de elasticidade [GPa] Tensor constitutivo do material [N/m ²]
E_{ijkl}^0	Tensor constitutivo do material de base [N/m ²]
E_{ijkl}	Tensor constitutivo do material homogeneizado [N/m ²]
$f(x)$	Função objetivo
$g(x)$	Conjunto das restrições de desigualdade
$h(x)$	Conjunto das restrições de igualdade
H^1	Espaço de Hilbert das funções com primeira derivada contínua com norma de energia

L	Função de Lagrange
L^∞	Espaço de norma $\ \cdot\ _{L^\infty(\Omega)} = \max_{x \in \Omega}(\cdot) < \infty$
n	Vetor normal unitário a uma superfície
t	Vetor das trações superficiais
u	Vetor deslocamentos

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
1.1 Contextualização do trabalho	15
1.1.1 Empresa	16
1.1.2 Caracterização do Cubo de Roda	16
1.2 Justificativas	17
1.3 Objetivos	17
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
2.1 Elasticidade Linear Infinitesimal Isotrópica	19
2.2 Método dos Elementos Finitos (MEF)	21
2.2.1 Conceitos Básicos do MEF	21
2.3 Otimização Estrutural	25
2.3.1 Modelo geral de otimização	29
2.3.1.1 Região viável	30
2.3.1.2 Vetor gradiente e matriz Hessiana.....	31
2.3.1.3 Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)	32
2.3.1.3.1 Condições necessárias	32
2.3.1.3.2 Condições suficientes	34
2.4 Otimização Topológica	35
2.4.1 Domínio fixo estendido de projeto	36
2.4.2 Modelo de Material	37
2.4.3 Aspectos da implementação do MOT	41
2.4.3.1 Dependência da malha.....	41
2.4.3.2 Instabilidade de tabuleiro	42
2.4.4 Técnica de projeção	43
2.5 Formulação da OT para o Cubo de Roda	46
2.5.1 Minimização da flexibilidade	46
2.5.2 Restrição de fração de volume de material.....	47
2.5.3 Repetição circular	47
2.5.4 Otimização Topológica do problema do Cubo de Roda	47
3 MATERIAIS E MÉTODOS	49

CÓPIA CEGA

4 RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA METODOLOGIA PROPOSTA.....	62
---	-----------

CÓPIA CEGA

5 CONCLUSÃO.....	84
5.1 Considerações finais	84
5.2 Sugestões de trabalhos futuros	86
REFERÊNCIAS	87
APÊNDICE A – RESTRIÇÃO GLOBAL DE TENSÕES	91
APÊNDICE B – EXTENSOMETRIA	92
APÊNDICE C – ANÁLISES COMPLEMENTARES	94
ANEXO A – PROCEDIMENTO INTERNO MERITOR (2009)	97
ANEXO B – RELATÓRIO DE TESTE: COLETA DE TENSÕES.....	107
ANEXO C – REGISTRO DE PETIÇÃO DA PATENTE	113
ANEXO D – RELATÓRIO DE MATERIAL DOS PROTÓTIPOS	116
ANEXO E – RELATÓRIOS DIMENSIONAIS DOS PROTÓTIPOS.....	117
ANEXO F – RELATÓRIO DE TESTE SAE J1095.....	129

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização do trabalho

Atualmente, a indústria automotiva está inserida em um mercado caracterizado pela forte concorrência, devido à globalização e a abertura dos mercados internacionais, onde clientes buscam fornecedores que sejam capazes de fornecer soluções tecnológicas de forma viável e rápida, e não apenas produtos. Associados à essas necessidades, os engenheiros e projetistas necessitam constantemente desenvolver melhorias nos produtos e processos atuais.

Para tanto, pode-se fazer uso da Otimização Estrutural aplicada no desenvolvimento de produtos, onde se consiste em avaliar o comportamento de um componente quando o mesmo está submetido a carregamentos externos. Com base nessas informações desenvolve uma geometria ótima que atenda as solicitações de trabalho ou restrições de processo.

O Método Otimização Topológica (MOT), um tipo de otimização estrutural, foi introduzido por Bendsøe e Kikuchi (1988), que de forma sistemática realiza a otimização baseada na melhor distribuição do material para os carregamentos e condições de contorno aplicados. Normalmente, objetiva-se uma estrutura mais leve, retirando material de áreas com menor nível de solicitação e reforçando as áreas mais exigidas, ou seja, racionalizando a utilização do material em função das cargas que a estrutura deve suportar.

O método, cada vez mais utilizado, tem por objetivo auxiliar projetos de novos produtos, onde existe a necessidade de baixo custo, alta qualidade e maior segurança, em um curto período de desenvolvimento. O MOT normalmente é aplicado em casos onde o componente possui custo de matéria-prima mais representativo, porém, é possível viabilizar sua utilização em casos onde o custo esteja concentrado no processo de manufatura, otimizando a topologia do componente ao processo de fabricação (HARZHEIM; GRAF, 2005, HARZHEIM; GRAF, 2006).

Aliado à isso, com o avanço tecnológico dos *softwares* e *hardwares* nos últimos anos, as análises estruturais pelo método de elementos finitos (MEF) passaram a fazer parte do desenvolvimento de produtos. Atualmente, a aplicação de estudos de otimização estrutural, tem se difundido no ambiente de desenvolvimento de produtos como forma de acelerar a conceituação do produto (ZHOU et al, 2011).

1.1.1 Empresa

O trabalho foi desenvolvido na empresa Suspensys Sistemas Automotivos Ltda. A empresa iniciou as suas atividades comerciais no segmento de autopeças, em 1997. Atualmente, com sede em Caxias do Sul, é um moderno centro de soluções em sistemas de suspensão, fornecendo para a indústria automotiva, suspensões mecânicas e pneumáticas, eixos, cubos e tambores de freio, além de componentes para caminhões, ônibus e semi-reboques, e ainda, peças de reposição. Certificada pelas normas da qualidade ISO 9001, ISO 14000 e ISO/TS 16949, possui aproximadamente 1700 funcionários.

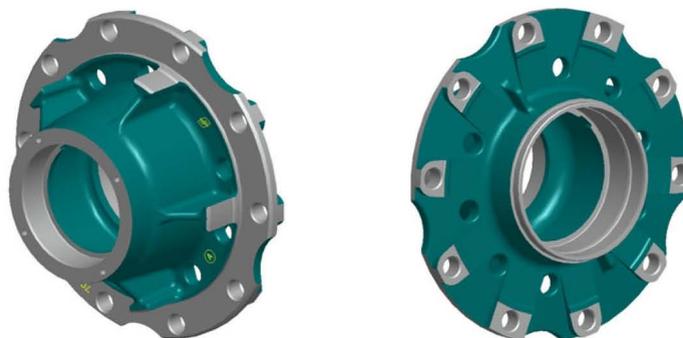
Na Suspensys, o trabalho foi desenvolvido no setor de Engenharia de Desenvolvimento de Produto para Implementos rodoviários (ENIM). Atualmente, a equipe é composta por sete profissionais direcionados à concepção e validação de novos produtos, liderança de projetos, atendimento direto às engenharias dos clientes no que diz respeito ao desenvolvimento.

As análises de Otimização Topológica (OT) foram realizadas no laboratório da Universidade de Caxias do Sul.

1.1.2 Caracterização do Cubo de Roda

O componente utilizado no estudo de caso da aplicação da OT foi o Cubo de Roda. Está apresentado na figura 1.1 o modelo tridimensional do conceito atual do componente.

Figura 1.1 – Cubo de Roda



Fonte: O Autor (2013)

O produto atualmente fabricado é aceito pelo mercado e não há histórico de qualquer falha do produto em quinze anos no mercado. Os principais pontos desfavoráveis observados

pelos clientes, internos e externos, são: a massa elevada do componente e o preço acima dos concorrentes.

1.2 Justificativas

O atual crescimento da economia do país gera a necessidade de aumento na produção de bens e das frotas para seu transporte. Isso significa oportunidades e também concorrência globalizada. Portanto, é importante desenvolver novos produtos que atendam às necessidades e as expectativas dos clientes em um curto intervalo de tempo.

Com o uso do MEF e do MOT, pode-se realizar simulações durante o período de desenvolvimento, a fim de obter produtos considerados ótimos para suas especificações, aumentando a confiabilidade estrutural nos requisitos de projeto, reduzindo a quantidade de protótipos necessários e gerando economia de recursos em um intervalo de tempo reduzido. Segundo Perini e Luciano (2013), em um estudo de caso realizado em uma indústria automotiva, observaram que existe grande potencial do uso da OT no desenvolvimento de projetos, aproximadamente 50%. Alguns exemplos são observados nos trabalhos de Rao (2007), Cervellera (2004) e Nomura et al (2003), que apresentam reduções de massa. Na aplicação apresentada em Rao (2007), foi obtida uma redução de 45% da massa da asa de um avião, em Cervellera (2004) alcançou de 10% a 40% de redução em diversos componentes para helicópteros, já em Nomura et al (2003) obtiveram aproximadamente 15% em componentes estruturais de automóveis. Cabe destacar que os autores observaram que os componentes atendem aos requisitos de projeto.

A partir das definições obtidas, visa-se desenvolver um Cubo de Roda de estrutura otimizada, com base no MOT e MEF, utilizando o *software* comercial *Altair Optistruct*. A escolha do Cubo de Roda contempla dois principais fatores: a defasagem do projeto, uma vez que o mesmo possui mais de quinze anos, e a significativa participação do produto no mercado de implementos rodoviários, fatos que podem representar um grande potencial de redução da massa.

1.3 Objetivos

O objetivo geral desta pesquisa é desenvolver um novo Cubo de Roda otimizado, visando maior racionalização do aproveitamento de material, sem que isso dificulte ou altere o processo de manufatura do componente. Propõe-se alcançar esse objetivo com a utilização

do *software* comercial Altair Optistruct, auxiliado de rotinas de OT existentes no próprio *software*.

Para que a pesquisa atinja seu objetivo geral, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- a) avaliar norma SAE J1095 e definir as condições de contorno do problema;
- b) definir as restrições do problema de otimização;
- c) aplicar a OT por meio do *software* comercial *Altair Optistruct*;
- d) realizar análises estruturais utilizando MEF e experimentos em bancada do conceito otimizado;
- e) discutir os resultados dos testes e análises realizadas.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

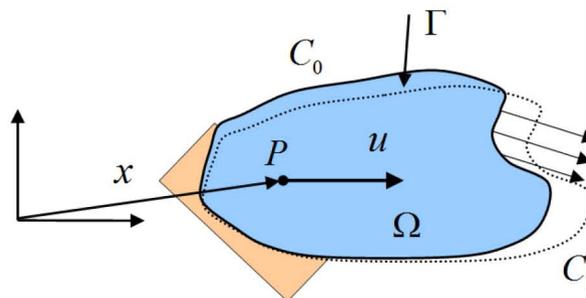
Este capítulo apresenta a fundamentação teórica necessária ao desenvolvimento do trabalho proposto. Inicialmente são apresentados os principais conceitos da Elasticidade Linear Infinitesimal Isotrópica, os conceitos básicos do MEF e os conceitos básicos da otimização estrutural. Em seguida, são discutidos os principais conceitos da OT, tais como modelo de material, instabilidade de tabuleiro de xadrez, escalas de cinza, técnica de projeção e a penalização.

2.1 Elasticidade Linear Infinitesimal Isotrópica

Neste trabalho utiliza-se da Teoria da Elasticidade Linear Infinitesimal Isotrópica para o cálculo da resposta estrutural do sistema, cuja teoria tem sua aplicação restrita a pequenas deformações. Nesta seção apresentam-se os principais conceitos e equações da elasticidade.

No meio contínuo, pode-se assumir que o corpo deformável C_0 atinge a configuração deformada C_1 por meio da ação de um sistema de forças. Na figura 2.1 verifica-se o deslocamento de um ponto qualquer, P , do corpo deformável de sua posição inicial para a nova posição deformada. O vetor u denota este deslocamento, existindo para cada ponto x um vetor deslocamento $u(x)$.

Figura 2.1 – Deformação de um corpo

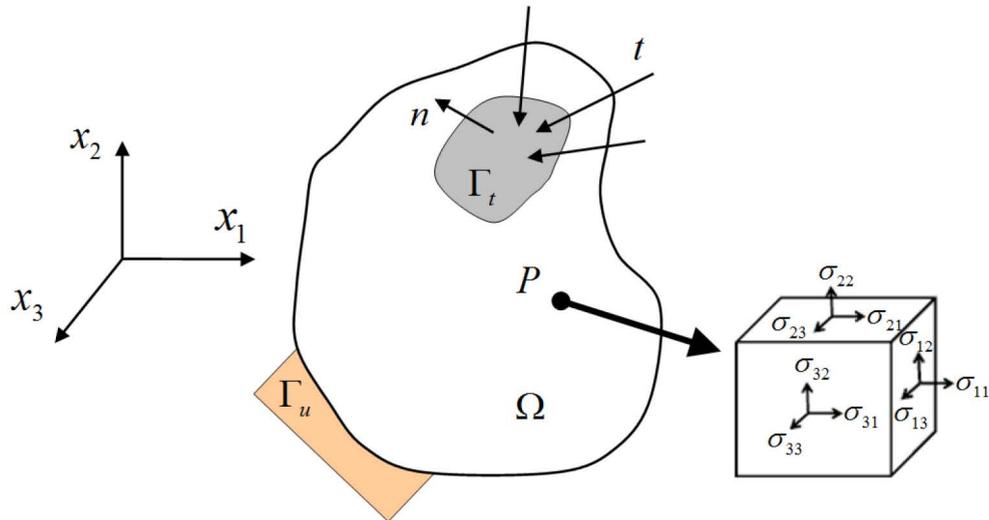


Fonte: O Autor (2013)

A solução de um problema de elasticidade linear infinitesimal isotrópica para um corpo do espaço R^3 envolve 15 incógnitas: 6 tensões, 6 deformações e 3 deslocamentos. Estas funções devem satisfazer a 3 equações de equilíbrio (derivadas das Leis de Newton), 6

equações que relacionam deformação com deslocamento (relações cinemáticas) e 6 equações que relacionam tensão com deformação (equações constitutivas, que dependem das características dos materiais). A figura 2.2 ilustra o estado de tensões em um ponto P qualquer de um corpo deformado.

Figura 2.2 – Estado de tensões em torno do ponto P , em um corpo tridimensional



Fonte: O Autor (2013)

Em notação vetorial, as equações de equilíbrio são apresentadas na equação 1:

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \text{ em } \Omega \quad (1)$$

Onde b são as forças de corpo por unidade de volume e cada componente do tensor σ é denotada por σ_{ij} . Observa-se que, o sistema da figura 2.2 deve respeitar o princípio da conservação da quantidade de momento angular, deve ser satisfeita a equação 2:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2)$$

Sendo σ_{ij} a componente da tensão na direção j perpendicular ao eixo i . Seja $\Gamma_t \in \Omega$, a região da superfície do corpo que são aplicadas as forças, e seja $\Gamma_u \in \Omega$ outra região do corpo onde há deslocamentos prescritos são denotados em notação vetorial por:

$$u = u^0(x_1, x_2, x_3) \quad (3)$$

onde u^0 são funções deslocamento prescritas em Γ_u .

O vetor t representado na figura 2.2, é o vetor das forças superficiais (pontos de aplicação de tensão na superfície), já o vetor n é unitário e normal a superfície. A Tensão de Cauchy (σ) é um tensor de segunda ordem, definida na equação 4, por:

$$t = \sigma n \quad (4)$$

Por meio da relação cinemática podem ser calculadas as componentes de deformação infinitesimal (ε) em qualquer ponto x da estrutura, é denotado na equação 5, por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

A equação que relaciona as tensões com as deformações infinitesimais (relação constitutiva), em sua forma tensorial é definida pela equação 6:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (6)$$

Onde E é o tensor constitutivo de quarta ordem das propriedades elásticas do material. Para este trabalho foram utilizados somente materiais isotrópicos. Dessa forma, em domínios tridimensionais, a equação 6 pode ser expandida, definido na equação 7.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé.

Dentro do processo de otimização, as equações de equilíbrio funcionam como restrições de igualdade, que devem ser satisfeitas em cada iteração sob pena de a estrutura otimizada não se encontrar em equilíbrio estático. Em Mase (1970) e Boresi e Chong (1987), encontram-se maiores informações da Teoria da Elasticidade.

2.2 Método dos Elementos Finitos (MEF)

Por este trabalho se tratar de um estudo de caso onde a geometria do componente e os carregamentos foram considerados complexos, de difícil solução analítica, utilizou-se do MEF.

2.2.1 Conceitos Básicos do MEF

Segundo Hughes (1987), os principais constituintes do MEF para a solução aproximada do problema de valor de contorno são: a forma variacional ou fraca do problema,

discretização do campo de deslocamento e a solução aproximada das equações variacionais usando funções que definem uma base de elementos finitos.

Resumidamente, o problema em sua forma clássica ou forte de um problema de valor de contorno, resulta no seguinte sistema de equações, denotado pela equação 8.

Satisfaça u tal que:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma(u) + b = 0 \\ u = \bar{u} & \text{em } \Gamma_u \\ t = \sigma n & \text{em } \Gamma_t \end{cases} \quad (8)$$

Ao solucionar-se o sistema da equação 8 obtém-se a resposta exata da função deslocamento u . Porém, para geometrias complexas sua solução torna-se muito difícil de obter uma solução analítica. Desta forma, busca-se então uma solução aproximada. Para tanto, uma formulação diferente é necessária, denominada formulação fraca ou variacional.

A formulação fraca é adequada para a aproximação por Elementos Finitos, matematicamente esta aproximação significa a solução de um sistema de equações algébricas, obtido pela formulação fraca do problema em um subespaço dimensional finito $H^1(\Omega)$. A formulação fraca pode ser definida, na equação 9.

$$\int_{\Omega} E \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(w) d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot w d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot w d\Gamma \quad \forall w \in \vartheta \quad (9)$$

onde os conjuntos das funções dos deslocamentos e variações admissíveis (ϑ) são definidos pela equação 10:

$$\vartheta = \{u \mid u \in H^1, u = 0 \text{ em } \Gamma_u\} \quad (10)$$

onde H^1 é o espaço de Hilbert de ordem 1.

No cálculo de estruturas utilizando MEF, uma das etapas fundamentais consiste na obtenção da equação de equilíbrio da estrutura analisada, relacionando as forças atuantes com os deslocamentos nodais. O Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) é bastante utilizado em estruturas complexas, na definição das equações de equilíbrio no formato diferencial. Este método é a condição necessária e suficiente para garantir o equilíbrio de toda a estrutura, bem como qualquer uma de suas partes, este pode ser enunciado da seguinte maneira: “Uma estrutura submetida à ação de forças externas está em equilíbrio quando, ao se imporem deslocamentos arbitrários (virtuais) compatíveis com as condições de contorno, o trabalho realizado pelas forças externas sobre os deslocamentos virtuais é igual ao trabalho que realizam as tensões sobre as deformações produzidas pelos deslocamentos virtuais” (de NAVARRA, 1995).

Neste caso, são consideradas apenas as deformações infinitesimais, em que a relação entre a deformação ε e o deslocamento u é dada pelo operador diferencial $L(\cdot)$, definida pela equação 11 para o caso da elasticidade tridimensional.

$$L(\cdot) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Dividindo o domínio em n elementos finitos, obtém-se a seguinte equação:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \Omega_i^e \quad (12)$$

Da mesma forma, interpolando-se os deslocamentos u^e no interior de cada elemento, baseados nos valores nodais de deslocamento q^e , obtém-se:

$$\begin{aligned} u^e &= N^e q^e \\ w^e &= N^e \delta q^e \end{aligned} \quad (13)$$

onde e indica que se está no nível do elemento e N^e é a matriz que contém as funções de interpolação do elemento. Associando as equações 9 e 13, obtém-se:

$$\sum_{e=1}^n \left[\int_{\Omega^e} E^e L(N^e) q^e \cdot L(N^e) \delta q^e d\Omega^e - \int_{\Omega^e} N^e \delta q^e b d\Omega^e - \int_{\Gamma^e} t N^e \delta q^e d\Gamma^e \right] = 0 \quad \forall \delta q^e \quad (14)$$

em que os deslocamentos nodais q^e não dependem da posição e não são influenciados pelo operador $L(\cdot)$.

Para simplificar a notação, adota-se $B^e = L(N^e)$ que é a matriz de derivadas das funções de interpolação. Isolando-se δq^e , obtém-se:

$$\sum_{e=1}^n \delta q^e \left[\int_{\Omega^e} B^{eT} E^e B^e d\Omega^e q^e - \int_{\Gamma^e} N^{eT} t d\Gamma^e - \int_{\Omega^e} N^{eT} b d\Omega^e \right] = 0 \quad \forall \delta q^e \quad (15)$$

Como δq^e pode assumir qualquer valor, desta forma, o somatório da equação 15, obrigatoriamente deve ser zero, chega-se a:

$$\sum_{e=1}^n \int_{\Omega^e} B^{eT} E^e B^e d\Omega^e q^e = \sum_{e=1}^n \int_{\Gamma^e} N^{eT} t d\Gamma^e + \sum_{e=1}^n \int_{\Omega^e} N^{eT} b d\Omega^e \quad (16)$$

A equação 16 representa uma formulação geral (para qualquer tipo de elemento finito), de onde se deduzem a matriz de rigidez e o vetor de forças. Analisando os termos, verifica-se que o lado esquerdo é um produto de matriz por vetor, e o lado direito é um vetor, que de forma matricial, pode ser definida pela equação 17.

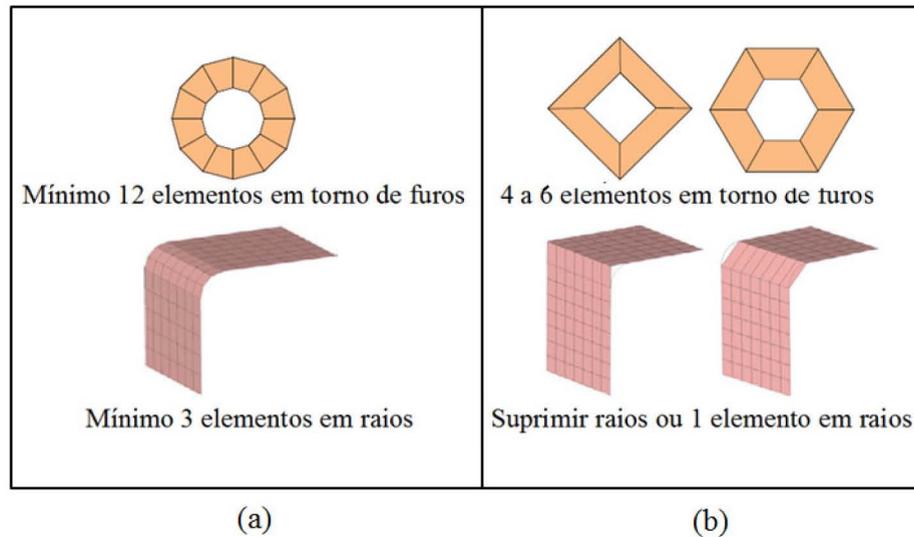
$$Kq = f \quad (17)$$

Para resolver o problema da elasticidade tridimensional, neste trabalho utilizou-se da formulação de elementos finitos existentes, implementados no *software Altair Optistruct*. Os elementos utilizados neste trabalho, são: elemento tetraédrico de quatro nós (C3D4) e o elemento hexaédrico de oito nós (C3D8). A formulação completa dos elementos pode ser encontrada em Altair (2012).

Segundo Altair (2012), para aumento da acuracidade do cálculo, a qualidade da malha é considerada como fundamental, onde há uma grande quantidade de fatores, como: ângulos mínimos e máximos do elemento, tamanho do elemento, *skewness*, *jacobian*, entre outros, que influenciam a qualidade da mesma, e, conseqüentemente no resultado final. Portanto, é importante executar uma verificação da malha, em que a qualidade de cada um dos elementos é medida. Alguns elementos podem não atender a exigências de qualidade especificadas pelo usuário e ações corretivas devem ser tomadas. No entanto, deve-se avaliar caso a caso a malha, dependendo da análise que se pretende realizar (ALVES, 1996). Na figura 2.3 apresentam-se exemplos de discretização, sendo (a) área de interesse da análise e (b) áreas gerais.

Em Hughes (1987) e Bathe (1996), encontram-se maiores informações sobre a formulação matemática do MEF. Nos trabalhos de Alves (2006), Altair (2011) e Altair (2012) observam-se uma abordagem prática referente ao MEF, onde análises estruturais de componentes mecânicos são discutidos.

Figura 2.3 – Exemplo de Discretização: (a) área de interesse da análise (b) áreas gerais



Fonte: Adaptado de Altair (2012)

2.3 Otimização Estrutural

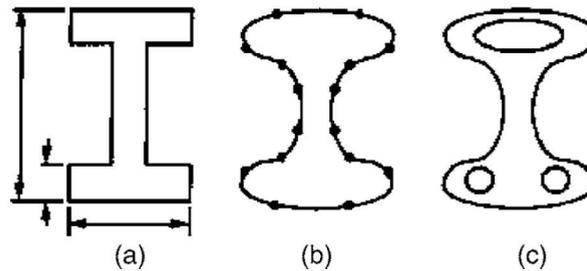
O método de otimização estrutural teve seus estudos iniciados por Maxwell no ano de 1872 e Michell em 1904 (apud ROZVANY; BENDSOE; KIRSCH, 1995), onde foi aplicada, essencialmente, em estruturas do tipo treliça. Seu uso prático teve início em 1960, ainda que com algumas restrições quanto as áreas de aplicação. Entretanto, a aplicação estava restrita a núcleos de pesquisa, sendo esses detentores dos recursos computacionais necessários para solução dos modelos matemáticos.

A partir de 1990, com o avanço tecnológico dos *hardwares* e *softwares* voltados ao desenvolvimento de projetos, as análises estruturais foram inseridas nas fases de desenvolvimento dos produtos, e em alguns segmentos passaram a reduzir ou até mesmo substituir experimentos práticos (SAITOU et al, 2005).

A utilização dos métodos de otimização estrutural continuam aumentando, de tal forma que permitem a obtenção de projetos mais eficientes, onde existe a necessidade de baixo custo, alta qualidade e maior confiabilidade, em um curto período de desenvolvimento, desta forma, economizando recursos e tempo. O problema de otimização pode ser classificado conforme o tipo de variáveis e de restrições. Por meio destas, é possível determinar as mudanças de geometria descritas pela variável de projeto, que podem ser classificadas como paramétrica, de forma ou topológica, sendo cada uma direcionada a diferentes aplicações e diferentes fins. Na figura 2.4, observa-se em ordem crescente dos graus de liberdade as

possíveis mudanças geométricas que podem ocorrer, onde (a) é a otimização paramétrica, (b) forma, (c) topológica (SAITOU et al, 2005).

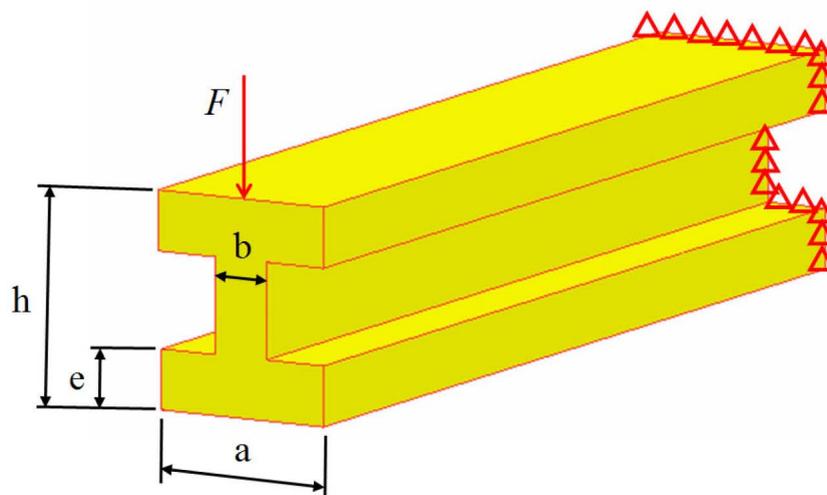
Figura 2.4 – Tipos de otimização: (a) paramétrica, (b) forma, (c) topológica



Fonte: Adaptado de Saitou et al (2005)

A otimização paramétrica, modifica as dimensões que definem a geometria do produto, partindo de uma forma já estabelecida. Na figura 2.5 apresenta-se uma viga “I” com algumas características geométricas, por exemplo, as dimensões a , b , e e h , que podem ser alteradas durante a otimização, ou seja, variáveis de projeto. Desta forma, por meio de um algoritmo otimizador, pode-se, por exemplo, buscar a combinação das dimensões que minimize o volume da viga submetida a um determinado carregamento F e sujeita a uma restrição de deslocamento da viga e/ou tensão.

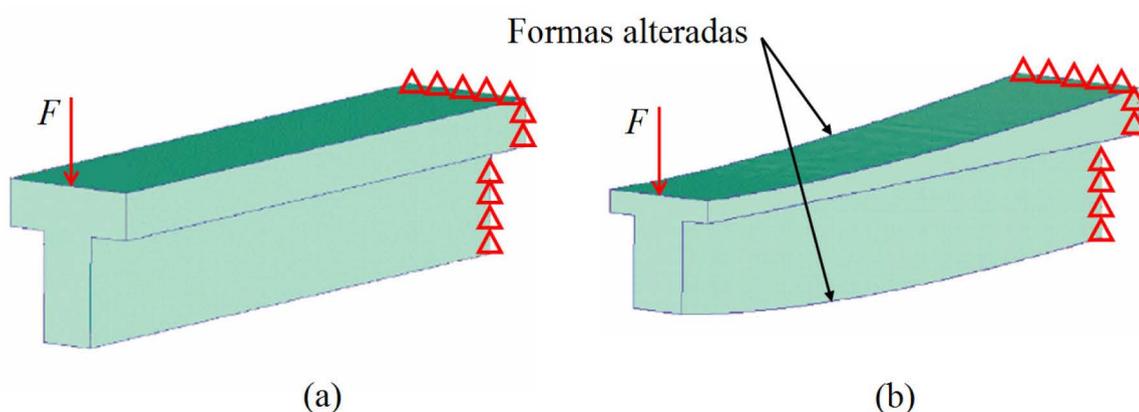
Figura 2.5 – Otimização paramétrica



Fonte: O Autor (2013)

A otimização de forma é semelhante a paramétrica, porém, permite que ocorram variações ao longo do contorno da geometria do produto. Nesse tipo de análise, os contornos podem ser representados como curvas paramétricas suaves, também chamados de "*splines*" e os pontos de controles destas curvas constituem as variáveis de projeto. Desta forma, por meio de um algoritmo otimizador, busca-se a combinação ótima das variáveis de projeto, desde que um contorno irregular não provoque problemas na exatidão do elemento finito que está sendo analisado, ou ainda, gere uma instabilidade no algoritmo que gerencia a otimização. Na figura 2.6, apresenta-se um exemplo, onde (a) é a estrutura antes da otimização e (b) é a estrutura otimizada, com as mudanças na forma externa da viga "T".

Figura 2.6 – Otimização de forma: (a) antes da otimização, (b) após otimização



Fonte: Adaptado de Altair (2011)

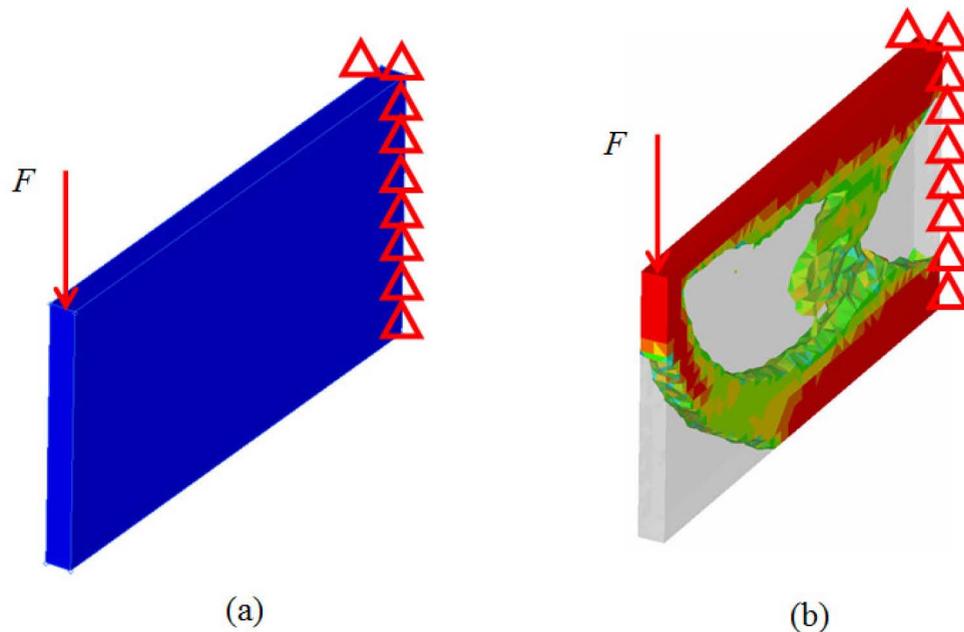
A formulação matemática do modelo de otimização paramétrica pode ser encontrada em Haftka e Gürdal (1992) e Gill, Murray e Wright (2000), já em Kawohl et al (2000) e Haftka e Gürdal (1992), encontram-se maiores informações sobre a formulação matemática da otimização de forma.

A otimização topológica consiste na distribuição ótima de material no domínio, as variáveis do projeto estão relacionadas com a presença do material em cada elemento da malha. O método permite a criação de "vazios" nas regiões do domínio onde não há necessidade do material, ou seja, consiste na busca de uma estrutura homogênea à distribuição das cargas, desta forma, busca-se determinar a quantidade do domínio preenchida de material. Aliado a isso, neste método não é necessário refazer a malha de elementos finitos durante o

processo de otimização, pois o domínio fixo é pré-definido inicialmente com cargas e restrições. Na figura 2.7 pode-se verificar um componente com a aplicação da OT, onde (a) é o domínio fixo do projeto, detalhado na seção 2.4.1, e (b) é a topologia resultante da otimização.

Em Bendsøe e Sigmund (2003), apresenta-se uma ampla revisão bibliográfica da otimização topológica, incluindo outras formas de implementação, como a Otimização Estrutural Evolucionária, proposta por Xie e Steven (1997), realizada pela alteração da malha de elementos finitos baseando-se na retirada de elementos com baixo nível de tensão. Enquanto que, na Otimização Estrutural Evolucionária Reversa, de acordo com Querin, Steven e Xie (2000), onde ocorre a adição de elementos em torno de áreas onde as tensões são altas e, por fim, a Otimização Estrutural Evolucionária Bidirecional, onde Querin et al (2000), combina os dois métodos.

Figura 2.7 – OT: (a) domínio fixo do projeto, (b) resultado da otimização



Fonte: O Autor (2013)

Por exemplo, em um problema de minimização da massa, com mesmo domínio fixo estendido de projeto, para o componente final contendo a mesma rigidez, comparado à outros métodos a OT é a que proporciona a maior remoção de material (SILVA, 2009). O MOT é o método de otimização estrutural utilizado nesta dissertação e será detalhado na seção 2.4.

2.3.1 Modelo geral de otimização

Do ponto de vista matemático, o modelo de otimização é composto por uma ou mais funções que direcionam um ou mais objetivos, os quais podem estar submetidos a restrições.

As variáveis que fazem parte dessas funções, podem ser classificadas em dois grupos: variáveis contínuas que podem assumir qualquer valor dentro de uma faixa previamente determinada; ou variáveis discretas que podem assumir apenas valores estabelecidos dentro de um conjunto finito de possibilidades. A escolha das variáveis na otimização tem papel fundamental no desempenho do método, onde, também, a utilização de um número elevado de variáveis pode inviabilizar a solução numérica do problema (ARORA, 2004).

A função objetivo tem por finalidade definir o parâmetro que se pretende alcançar, por exemplo, na otimização estrutural, por vezes, busca-se minimizar a massa ou maximizar a rigidez do componente. As funções que descrevem as restrições são as que orientam para que o procedimento atenda aos requisitos definidos para o projeto em questão. Estas, basicamente, podem ser divididas em dois tipos: restrições de igualdade, por exemplo, os deslocamentos do componente devem atingir um valor determinado e as restrições de desigualdade, onde, neste mesmo exemplo, a tensão máxima do componente gerada por cargas externas não deve ultrapassar a tensão estipulada como limite de projeto.

No conjunto de equações 18, 19 e 20, apresenta-se o modelo matemático geral para otimização. A equação 18 é a função objetivo e as equações 19 e 20 são as restrições, segundo Haftka e Gürdal (1992) e Arora (2004), procura-se um vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de variáveis do projeto para minimizar ou maximizar a função objetivo $f(x)$.

$$\text{Min/Max } f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (18)$$

sujeito a restrições p de igualdade e m restrições de desigualdade.

$$h(x) = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 ; j = 1, 2, \dots, p \quad (19)$$

$$g(x) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 ; i = 1, 2, \dots, m \quad (20)$$

onde $h_j(x)$ é a j -ésima restrição de igualdade, $g_i(x)$ é a i -ésima restrição de desigualdade, j é o número de restrições de igualdade, i é o número de restrições de desigualdade. Destaca-se que as funções $f(x)$, $h(x)$ e $g(x)$ são dependentes, diretamente ou indiretamente, das variáveis de projeto.

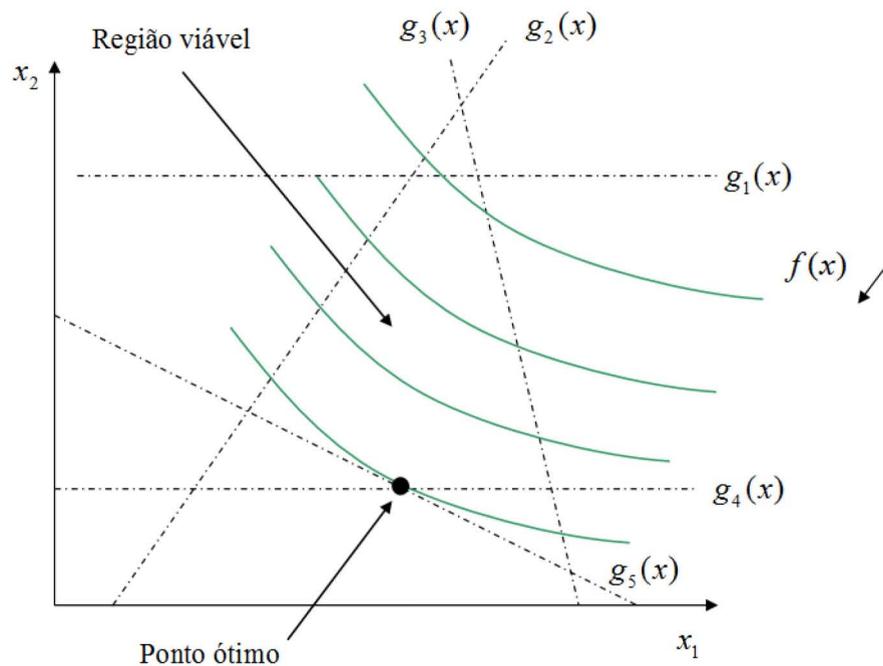
2.3.1.1 Região viável

A região viável de busca na otimização representa o conjunto de todos os pontos que satisfazem as restrições de projeto, ou seja, quando um ponto $x \in R^n$ satisfaz todas as restrições de projeto, diz-se que ele é factível. O conjunto de todos os pontos factíveis é denominado de região viável S , segundo Arora (2004) é denotado na equação 21 por:

$$S = \{x \mid h_j(x) = 0; g_i(x) \leq 0\}; j = 1, 2, \dots, p; i = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

Na figura 2.8, observa-se esquematicamente um sistema gráfico de otimização com duas variáveis de projeto, x_1 e x_2 , com a função objetivo $f(x)$, sujeito a $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $g_4(x)$ e $g_5(x)$ restrições de desigualdade. Também apresenta-se as curvas de nível de $f(x)$.

Figura 2.8 – Esquema gráfico de uma otimização



Fonte: O autor (2013)

A otimização apresentada na figura 2.8 tem como função objetivo $f(x)$, que pode ser considerada, por exemplo, como a redução de massa do componente. Para tanto, o projeto deverá atender os requisitos especificados pelos limites das variáveis de projeto, respeitando as restrições, o ponto ótimo de $f(x)$ encontra-se na intersecção da restrição $g_4(x)$ e $g_5(x)$,

que, por este motivo, são chamadas de restrições ativas. Tal questão será abordada na seção 2.3.1.3.

2.3.1.2 Vetor gradiente e matriz Hessiana

Considerando a função $f(x)$ de n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n . A derivada parcial de $f(x)$ é definida, na equação 22, como:

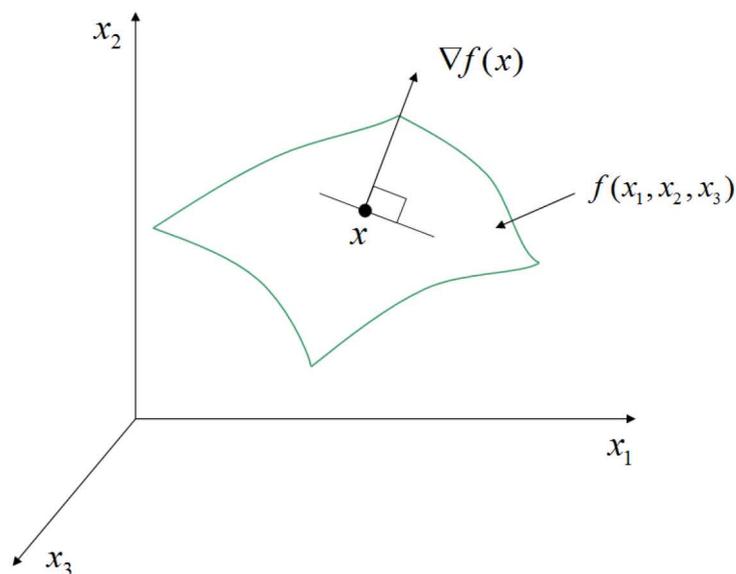
$$c_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} ; i = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

Por conveniência, adota-se o conjunto de derivadas parciais como um vetor coluna, chamado vetor gradiente, denotado na equação 23, por:

$$c = \nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Geometricamente, o vetor gradiente é normal ao plano tangente no ponto x , como mostrado na figura 2.9. É importante salientar que o vetor gradiente indica a direção do maior incremento da função.

Figura 2.9 – Representação geométrica do vetor gradiente



Diferenciando novamente o vetor gradiente, obtém-se uma matriz das segundas derivadas parciais para uma função $f(x)$, chamada matriz Hessiana, tem-se:

$$\nabla^2 f = H = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

onde sabe-se que a matriz Hessiana sempre é quadrada ($n \times n$) e simétrica, desta forma,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

2.3.1.3 Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Nesta seção são apresentadas as condições necessárias e suficientes de KKT, caso estas condições sejam satisfeitas, pode-se garantir que x^* é o ponto de mínimo ou máximo da função.

2.3.1.3.1 Condições necessárias

Uma vez que o projeto não possui restrições, todo o domínio é considerado factível, ou seja, o problema de otimização procura um valor do domínio que retorne o melhor projeto, ou seja, o mínimo ou máximo valor da função objetivo. Segundo Arora (2004), na equação 25, apresenta-se uma função $f(x)$ de n variáveis com um mínimo global em x^* , onde x pertencem ao domínio S .

$$f(x^*) \leq f(x) \quad (25)$$

Uma função $f(x)$ de n variáveis tem um mínimo local, x^* , se a equação 25 for satisfeita para todo x dentro da vizinhança N de x^* , dentro da região viável S e $x^* \neq x$. A vizinhança N do ponto x^* , é definida na equação 26, como:

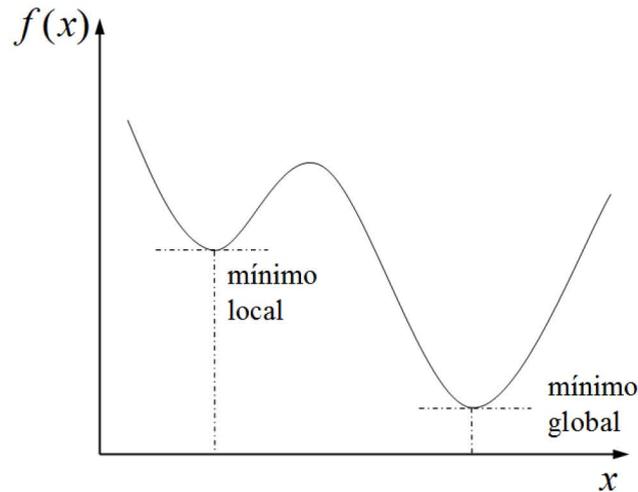
$$N = \{x \mid x \in S \text{ com } \|x - x^*\| < \delta\} \quad (26)$$

na qual, δ é um pequeno valor. Na figura 2.10, pode-se verificar exemplo de mínimo local e global de uma função.

O conceito básico para obtenção das condições ótimas locais é assumir que, estando no ponto mínimo x^* , examina-se a vizinhança para conhecer as propriedades da função e suas derivadas. Basicamente, aplica-se o conceito da equação 25 para determinar as condições

ótimas. Para investigar a sua vizinhança, sendo x um ponto próximo a x^* , definindo incrementos d e Δf em x^* e $f(x^*)$, como $d = x - x^*$ e $\Delta f = f(x) - f(x^*)$.

Figura 2.10 – Mínimo local e global de uma expressão



Fonte: O autor (2013)

Considerando uma função $f(x)$ contínua, para que x^* seja um ponto de mínimo ou máximo local do problema, por definição, é suficiente que o gradiente da função objetivo em x^* seja nulo, que o incremento d não seja nulo e que a matriz Hessiana seja positiva, como mostrado na equação 27.

$$\nabla f(x^*) = 0 ; d \neq 0 ; H(x^*) > 0 \quad (27)$$

Na tabela 2.1, são apresentadas as condições de otimização para funções monovariáveis e multivariáveis para problemas sem restrições.

Tabela 2.1 – Condições para otimização sem restrição

Condições Necessárias	Funções monovariável	Funções multivariável
Primeira Ordem	$f' = 0$	$\nabla f = 0$
Segunda Ordem	Para um mínimo local: $f'' \geq 0$ Para um máximo local: $f'' \leq 0$	Para um mínimo local: H deve ser positiva definida Para um máximo local: H deve ser negativa definida

Fonte: Adaptado de Arora (2004)

Entretanto, mesmo satisfazendo as condições necessárias de primeira e segunda ordem, não é possível afirmar se o ponto é o mínimo global do problema (ARORA, 2004). Para isto, é necessário atender as condições suficientes, a seguir apresentadas.

2.3.1.3.2 Condições suficientes

Para definir as condições suficientes, apresenta-se o conceito dos multiplicadores de Lagrange, que são utilizados para transformar o problema de otimização com restrições em um problema de otimização sem restrições, como pode ser visto na equação a seguir:

$$L(\bar{x}, \lambda, \mu) = f(\bar{x}) + \lambda^T h(\bar{x}) + \mu^T g(\bar{x}) \quad (28)$$

onde, λ e μ são os multiplicadores de Lagrange aplicados as restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente.

Segundo Haftka e Gürdal (1992), nas equações 29 a 32, onde x^* é o ponto ótimo do problema, todos os gradientes das funções de desigualdade ativas e das restrições de igualdade são linearmente independentes, tal que:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + (\lambda^*)^T \nabla h(x^*) + (\mu^*)^T \nabla g(x^*) = 0 \quad (29)$$

$$h(x^*) = 0 \quad (30)$$

$$g(x^*) \leq 0 \quad (31)$$

$$\mu_i^* g_i(x^*) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (32)$$

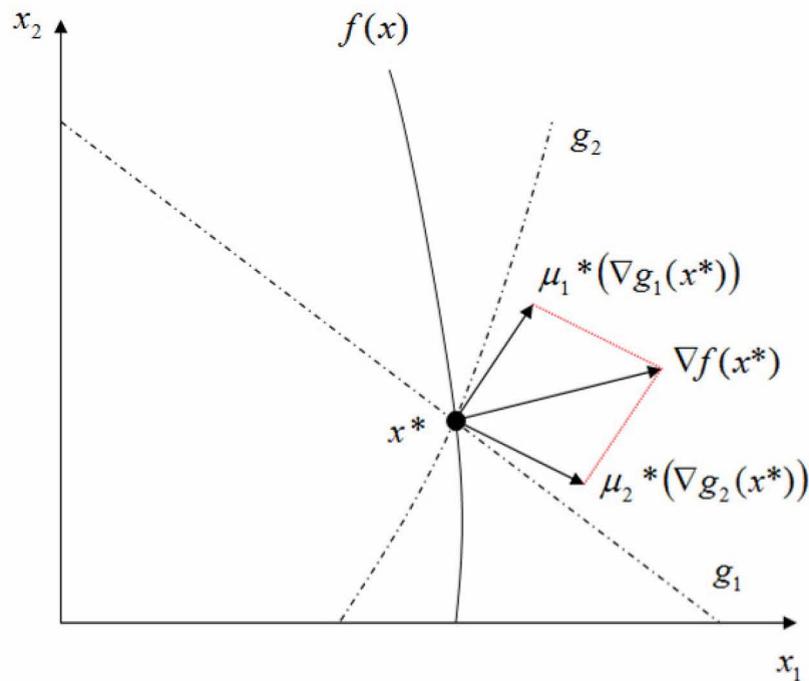
onde, os multiplicadores de Lagrange devem ser iguais a zero para as restrições inativas, chamada de condição de complementaridade, denotada pela equação 32.

Para as restrições de desigualdade, os multiplicadores de Lagrange devem ser maiores ou iguais a zero, ou seja, $\mu^* \geq 0$. Na figura 2.11, pode-se observar geometricamente a representação das condições de KKT no ponto ótimo x^* do problema.

As condições de KKT podem ser resumidas em quatro itens:

- o ponto ótimo deve satisfazer a condição necessária, ou seja, pontos que não satisfazem a condição não podem representar a solução;
- o ponto que satisfaz a condição necessária não é necessariamente o ponto ótimo;
- o ponto que satisfaz a condição suficiente é o ótimo;
- se a condição suficiente não pode ser utilizada ou ela não é satisfeita, não se pode concluir nada sobre o ponto em questão.

Figura 2.11 – Representação geométrica das condições KKT no ponto x^*



Fonte: O Autor (2013)

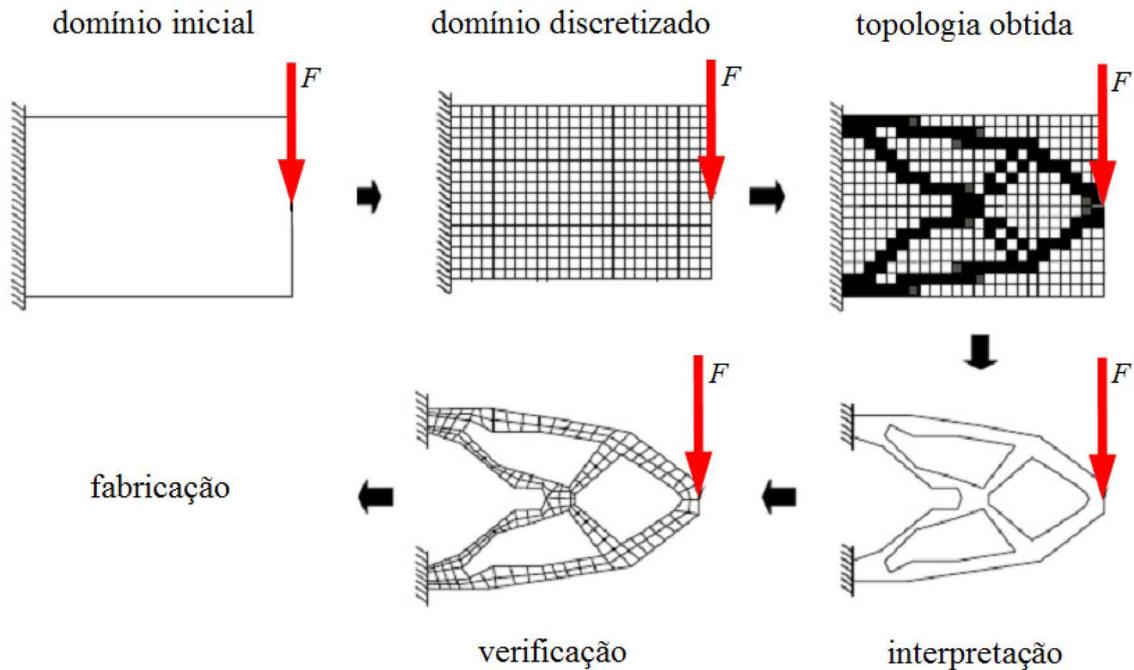
Mais informações sobre os procedimentos da otimização clássica podem ser encontrados em Haftka e Gürdal (1992) e Arora (2004).

2.4 Otimização Topológica

Introduzido por Bendsøe e Kikuchi (1988), o MOT consiste na busca de uma estrutura homogênea à distribuição das cargas, ou seja, retira-se material de áreas com menor nível de solicitação e mantém-se em áreas mais exigidas. Estes autores propuseram a utilização de uma estrutura composta de dois materiais, onde o primeiro possui as propriedades estruturais e o segundo é chamado de vazio, dessa forma, é um material que não possui propriedades estruturais. Após a análise estrutural, um algoritmo modifica a densidade dos elementos sem solicitação para o material vazio e, sem necessidade de alteração na malha, agilizando o processo de otimização. Na OT, busca-se o projeto do componente com topologia ótima, objetivando atender uma característica definida pela função objetivo, como, por exemplo, minimizar flexibilidade de uma estrutura, minimizar a massa, entre outros.

Tipicamente, o desenvolvimento de um projeto estrutural por meio da OT segue algumas etapas básicas, na figura 2.12 apresentam-se essas etapas.

Figura 2.12 – Representação de um problema de OT



Fonte: Adaptado de Silva (2009)

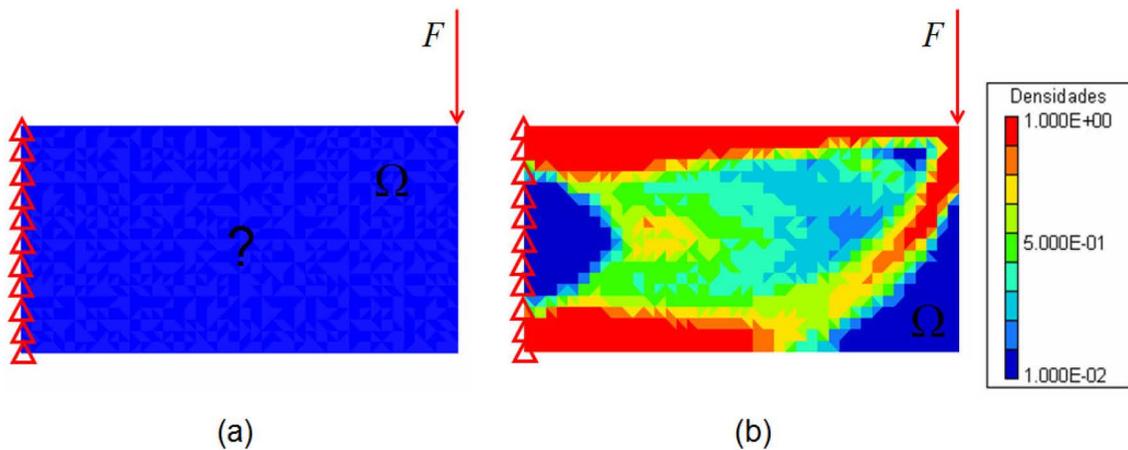
A primeira etapa consiste em definir o domínio, no qual, a estrutura pode existir, esse domínio é limitado pelas condições de contorno e pela aplicação de carga. Em seguida, é realizada a discretização do domínio por meio de uma malha de elementos finitos, com o domínio discretizado o próximo passo é a realização da OT propriamente dita. Após a realização da otimização, normalmente interpreta-se o resultado da topologia obtida, e a mesma é suavizada. Este passo pode ser realizado utilizando-se da otimização de forma, porém, na indústria, é comumente realizada por meio da experiência do engenheiro. No passo de verificação, é realizada a análise estrutural do componente para validação da estrutura otimizada, ou seja, verificação das tensões, rigidez, entre outros, e por fim, é realizada a fabricação do componente.

2.4.1 Domínio fixo estendido de projeto

O domínio fixo estendido do projeto Ω é denominado como um domínio fixo, pois possui as dimensões fixas, pré-definidas, dentro dessas dimensões o material pode ser

adicionado ou removido livremente. Na figura 2.13, apresenta-se um problema de OT, onde (a) é representado o domínio fixo estendido do projeto e em (b) a solução ótima da topologia do problema de otimização do volume, com restrição de deslocamentos. O domínio do componente comumente é discretizado via elementos finitos, desta forma, na OT faz-se a análise para cada elemento da malha, se há a necessidade da existência de material, sem necessidade de adaptações ou alterações na malha durante as iterações, facilitando a implementação. O domínio Ω também possui a aplicação das condições de contorno e carregamentos.

Figura 2.13 – Representação do Ω em um problema de OT: (a) domínio fixo estendido de projeto, (b) solução ótima da topologia



Fonte: O Autor (2013)

O conceito para compreensão da escala de densidades apresentada na figura 2.13 é abordado na seção 2.4.2.

2.4.2 Modelo de Material

Como a OT consiste na distribuição de material no domínio fixo do projeto Ω , as variáveis do projeto estão relacionadas com a presença do material em cada elemento da malha. Busca-se, desta forma, determinar a porção do domínio preenchida de material Ω^m , parametrizado pelo tensor constitutivo do material E_{ijkl} , que é variável no domínio, segundo

Bendsøe e Sigmund (2003) o problema da OT pode ser definido pela equação 33, como segue:

$$\begin{aligned}
 E_{ijkl} &\in L^\infty \\
 E_{ijkl} &= 1_\Omega E_{ijkl}^0 \\
 1_\Omega &= \begin{cases} 1, & x \in \Omega,^m \\ 0, & x \in \Omega/\Omega^m \end{cases} \quad (33)
 \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} 1_{\Omega^m} d\Omega = Vol(\Omega^m) \leq V = Vol(\Omega)$$

onde V é o volume total do domínio, E_{ijkl}^0 é o tensor constitutivo linear de quarta ordem, que define o material isotrópico base e L^∞ representa um espaço de funções integráveis segundo Lebesgue, descartando as funções de medida zero.

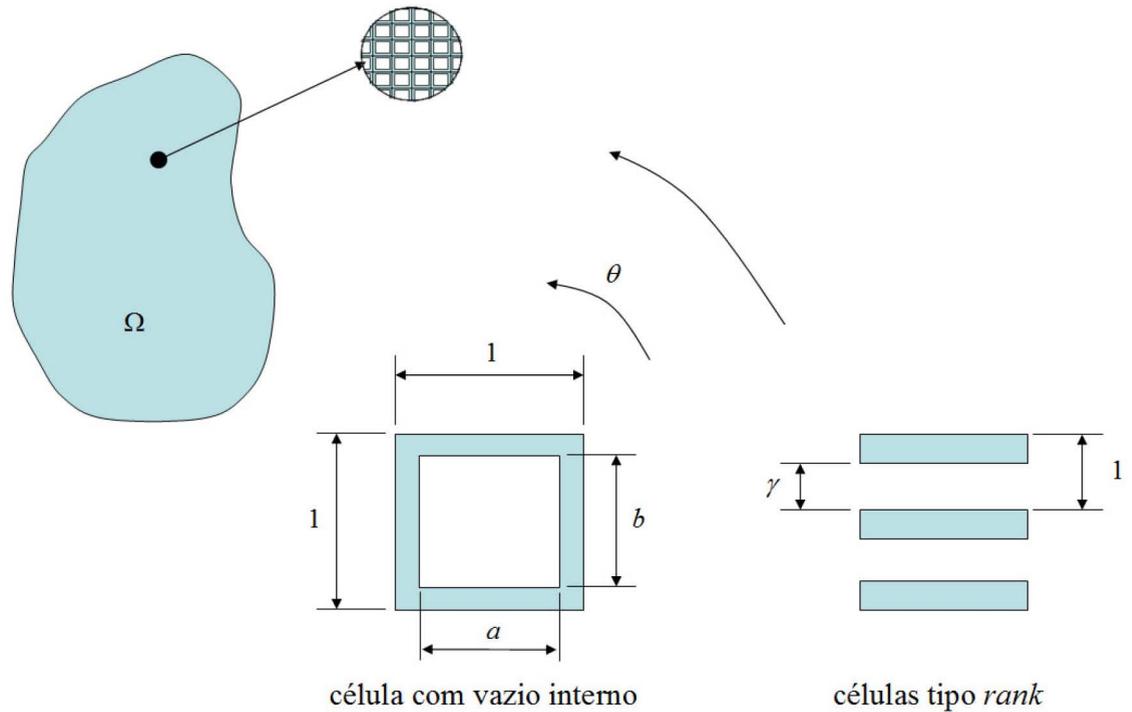
A equação 33 pode ser interpretada fisicamente como a definição se o ponto $x \in \Omega$ possui ou não material, sem estágios intermediários. De acordo com Bendsøe (1989), a utilização da abordagem de material binário pode ser instável, não garantindo a existência de solução. Para resolver a instabilidade, utiliza-se um modelo de material com estágios intermediários, transformando o problema discreto em um contínuo.

Para Bendsøe e Sigmund (2003), qualquer material constituído de uma microestrutura formada pela inclusão vazios (material composto poroso e periódico), com densidade diferentes de 0 ou 1 contribuem para a formação de uma estrutura (macroscópica) com rigidez menor do que a que seria esperada.

Segundo Costa (2003), os modelos materiais podem ser classificados como modelos inspirados em microestruturas e modelos artificiais. Na figura 2.14, verifica-se os materiais inspirados em microestruturas utilizados no método, conhecido como homogeneização.

No caso da célula com vazio interno os parâmetros geométricos a , b e o ângulo de rotação θ passam a ser variáveis na otimização que caracterizam o material, para a célula tipo *rank*, o espaço entre as laminas γ é o parâmetro de caracterização. O material será vazio quando a e $b = 1$ ou $\gamma = 1$, e o material terá as propriedades de E_{ijkl}^0 quando a e $b = 0$ ou $\gamma = 0$. Os trabalhos de Susuki e Kikuchi (1991), Thomsen (1992) e Olhoff et al (1993) utilizaram microestruturas como modelo de material.

Figura 2.14 – Microestruturas para método de homogeneização



Fonte: Adaptado de Fujii et al (2001)

O *software* utilizado neste trabalho faz uso da abordagem de modelo artificial, conhecida como sólido isotrópico com penalização (SIMP - *Simple Isotropic Material with Penalization*), proposta por Bendsøe (1989).

Na equação 34, observa-se a densidade $\rho(x)$ (interpretada como uma função de distribuição de densidades) como parâmetro que caracteriza o material e E_{ijkl}^0 como tensor constitutivo linear de quarta ordem, que define o material isotrópico base. A densidade do material varia entre o material vazio, $E_{ijkl}(\rho = 0) = 0$, e o material base, $E_{ijkl}(\rho = 1) = E_{ijkl}^0$.

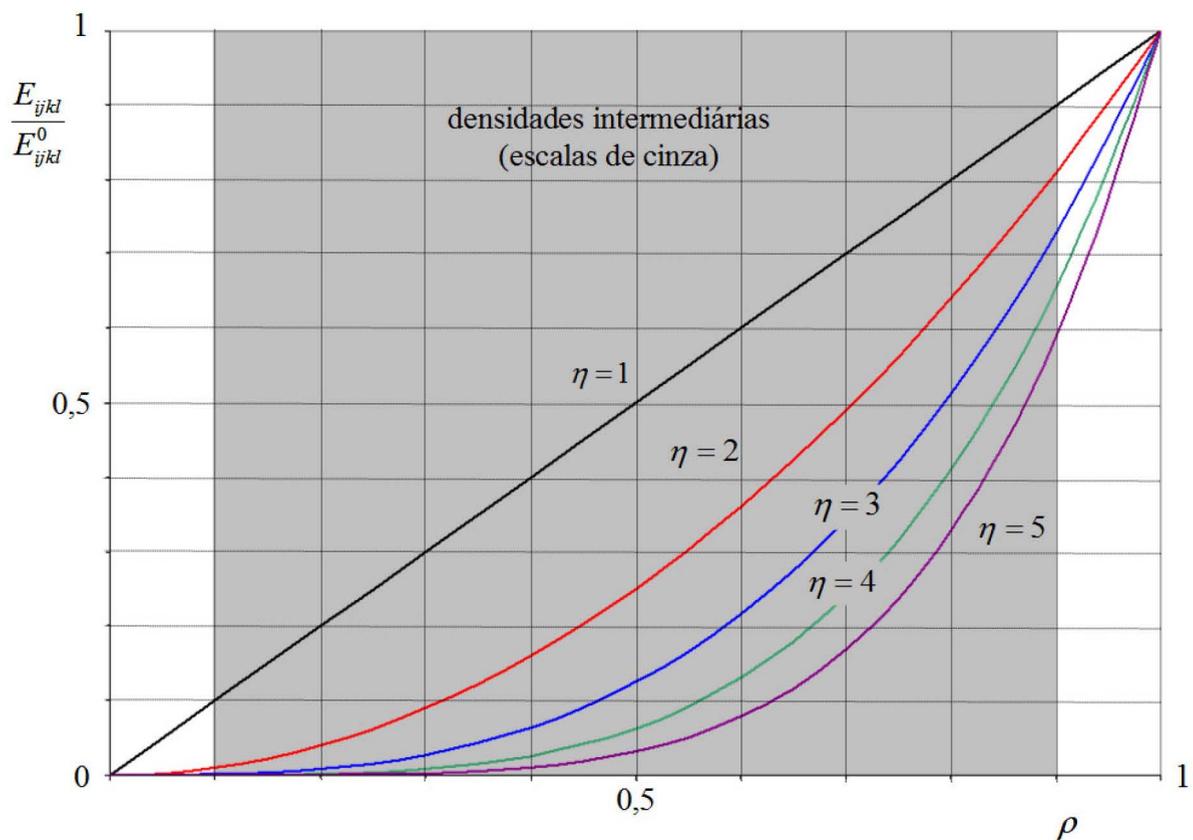
$$\begin{aligned}
 E_{ijkl}(x) &= \rho(x)^\eta E_{ijkl}^0, \quad \eta > 1 \\
 \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega &\leq V \\
 0 &\leq \rho(x) \leq 1 \\
 x &\in \Omega
 \end{aligned} \tag{34}$$

O parâmetro η tem função de penalizar as densidades intermediárias buscando retornar ao problema discreto, assim, o aparecimento de densidades intermediárias é evitado, uma vez que a contribuição estrutural de material com densidade intermediária é pequena se

comparado ao volume de material adicionado. Quanto mais elevado o valor de η , mais próximo da situação discreta, porém, isso pode levar a não solução do problema (BENSØE, 1989). Na figura 2.15, apresenta-se o efeito de η na relação entre os tensores constitutivos.

São denominadas escala de cinza as regiões onde a densidade é intermediária, ou seja, diferentes de 0 e 1, essas fazem parte do MOT proposto por Bendsøe (1989). Na figura 2.15 observa-se a faixa de densidades, qualitativamente, consideradas como escala de cinza.

Figura 2.15 – Efeito da penalização na relação dos tensores constitutivos



Fonte: Adaptado de Koga (2010)

Se existirem grandes regiões de escalas de cinza presentes no modelo com a topologia final, otimizada, a fabricação do componente pode ser dificultada. Por outro lado, utiliza-se a penalização para controlar o surgimento de regiões de escala de cinza, vide figura 2.15. No trabalho de Rozvany (2009), é apresentada uma pesquisa crítica dos métodos estabelecidos de penalização aplicados ao MOT.

2.4.3 Aspectos da implementação do MOT

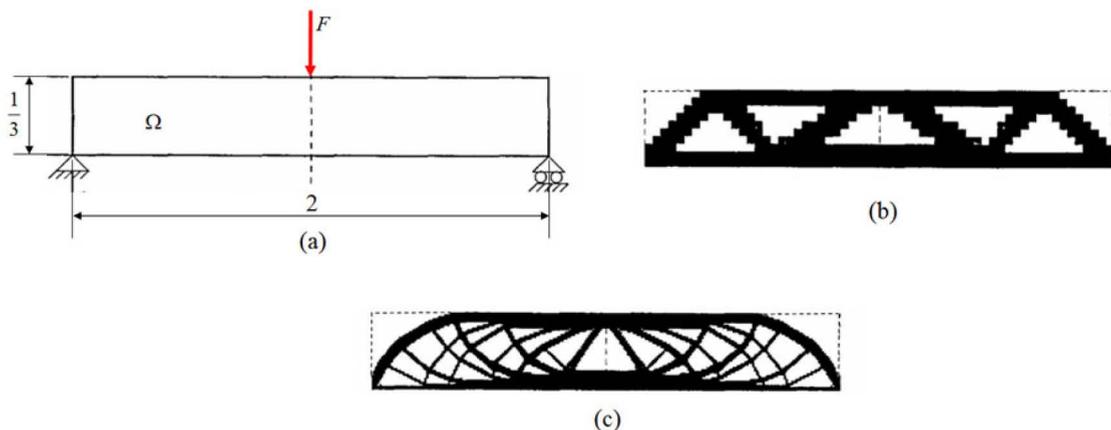
Para Zuo et al. (2006), a OT tem se desenvolvido rapidamente e, com esta maturação da teoria, tornou-se um método robusto na concepção de novos produtos. No entanto, uma série de possíveis problemas deve ser considerados, como, por exemplo, a instabilidade de tabuleiro, dependência de malha, escalas de cinza, entre outros, por vezes conduzindo a uma geometria não fabricável ou de manufaturabilidade dificultada. A seguir serão apresentados alguns problemas encontrados na literatura sobre o funcionamento do MOT.

2.4.3.1 Dependência da malha

O modelo de material SIMP na OT realiza a avaliação dos carregamentos em cada elemento da malha e atribui uma densidade entre 0 e 1, conforme a solicitação mecânica. Modificando o número de elementos de malha em uma estrutura pode-se obter diferentes soluções do mesmo problema, visto que, modifica o número de elementos para avaliação de densidades. Na figura 2.16 verifica-se a influência da malha no resultado do MOT, onde em (b) o domínio fixo estendido de projeto é discretizado com malha de 600 elementos e em (c) é discretizado com malha de 5400 elementos.

Segundo Sigmund e Petersson (1998), o problema da dependência da malha pode ser dividido em duas categorias: Topologias mais complexas a medida que a malha é refinada (exemplificada pela figura 2.16) e a obtenção de diferentes soluções ótimas com mesmo valor da função objetivo (exemplificada pela figura 2.17).

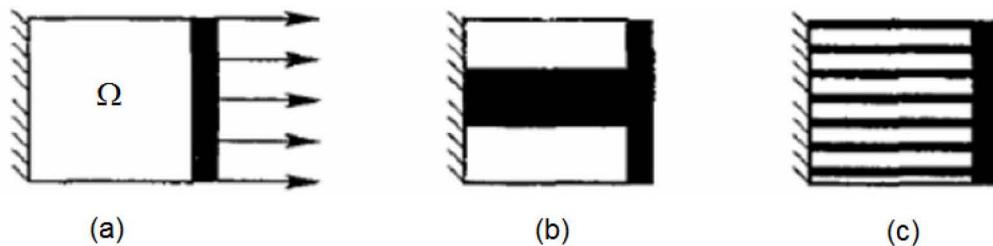
Figura 2.16 – Influência da malha: (a) domínio fixo estendido de projeto, (b) malha com 600 elementos e (c) malha com 5400 elementos



Fonte: Adaptado de Sigmund e Petersson (1998)

No exemplo da barra bi-apoiada, realizado por Sigmund e Petersson (1998), fica evidente que com o refino da malha, figura 2.16 (c), a solução diverge da malha com menor número de elementos, conforme figura 2.16 (b). Nesse caso, a malha refinada produz estrutura que atende melhor o problema de otimização, considerando-se a minimização do volume. Entretanto, podem ocorrer casos onde não exista uma única solução para o problema discretizado. Pode-se verificar na figura 2.17 o exemplo de não unicidade da solução do problema, onde apresentam-se dois exemplos de soluções, (b) e (c), que atendem plenamente o as condições impostas na otimização.

Figura 2.17 – Exemplo de não unicidade da solução: (a) domínio fixo estendido de projeto, (b) e (c) diferentes soluções para o problema



Fonte: Adaptado de Sigmund e Petersson, (1998)

Para solucionar este problema utiliza-se neste trabalho a técnica de projeção, detalhada na seção 2.4.4.

2.4.3.2 Instabilidade de tabuleiro

Outro problema comumente encontrado na implementação do MOT, de acordo com Sigmund e Petersson (1998), é o surgimento de instabilidades similares ao padrão de tabuleiro de xadrez, região com alternância de elementos vazios e cheios, (*checkerboard*), na figura 2.18 observa-se nas extremidades o padrão de tabuleiro.

Figura 2.18 – Exemplo de instabilidade de tabuleiro



Fonte: Adaptado de Sigmund e Petersson, (1998)

A instabilidade de tabuleiro é o problema mais comum em modelos de otimização estrutural, onde se busca maximizar a rigidez. O padrão de tabuleiro apresenta uma falsa rigidez, que numericamente é maior que uma estrutura de mesmo volume, porém homogênea.

Nos trabalhos de Díaz e Sigmund (1995) e Jog e Haber (1996), foi evidenciado que a instabilidade de tabuleiro surge por problemas numéricos na convergência do MEF. No trabalho de Jog e Haber (1996), é proposta a utilização de elementos finitos de alta ordem como meio de prevenir a instabilidade de tabuleiro, buscando melhorar a representação do campo de deslocamentos.

Outra forma de tratar o problema é a utilização de filtros. O filtro proposto por Bendsøe e Sigmund (1999) está entre os mais utilizados atualmente, a ideia baseia-se em verificar variações bruscas nos gradientes das variáveis de projeto e utilizar pseudo-densidades para alterar o gradiente das variáveis do mesmo, alterando a média dos pesos das variáveis de projeto vizinhas e diminuindo o problema de instabilidade de tabuleiro. Entretanto, de acordo com Fonseca (1997), o uso de filtros aumenta o número de iterações até atingir o critério de convergência.

Para solucionar este problema utilizou-se neste trabalho a técnica de projeção, detalhada na seção 2.4.4.

2.4.4 Técnica de projeção

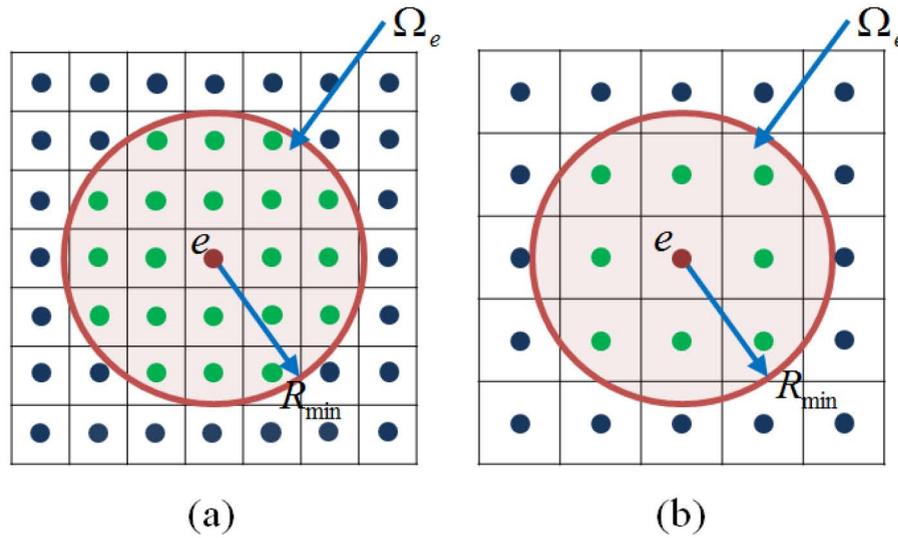
Segundo Sigmund (2007), a técnica de projeção proposta por Guest, Prévost e Belytschko (2004) é a melhor para eliminar a instabilidade de tabuleiro e a dependência da malha, visto que, a técnica consiste em utilizar uma ponderação das pseudo-densidades pertencentes a Ω_e na avaliação da densidade de cada elemento e do domínio fixo estendido do projeto. É importante salientar que com a técnica de projeção obtêm-se estruturas otimizadas com tamanho de membro mínimo definido por $2R_{\min}$.

No trabalho de Guest, Prévost e Belytschko (2004) definiu-se a técnica para variáveis nodais de projeto e Sigmund (2007) expandiu a utilização da técnica para variáveis de projeto por elementos, que é a abordagem utilizada pelo *software Altair OptiStruct*. Verifica-se na figura 2.19, a representação geométrica do raio de abrangência, R_{\min} , utilizado na técnica de projeção.

Embora a técnica de projeção penalize a formação de pequenos membros, os resultados ainda podem conter pequenas geometrias, isto ocorre, pois, uma pequena geometria

pode ser de grande importância na topologia da estrutura, para a transmissão de carga e, por isto, não pode ser removido pela penalização.

Figura 2.19 – Representação geométrica do raio de abrangência, independente da malha: (a) refinada (b) grosseira



Fonte: O Autor (2013)

Na equação 35 é definido o domínio de influência do elemento e , Ω_e .

$$\Omega_e = \{ \bar{x}^i \mid \| \bar{x}^e - \bar{x}^i \| \leq R_{\min} \}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (35)$$

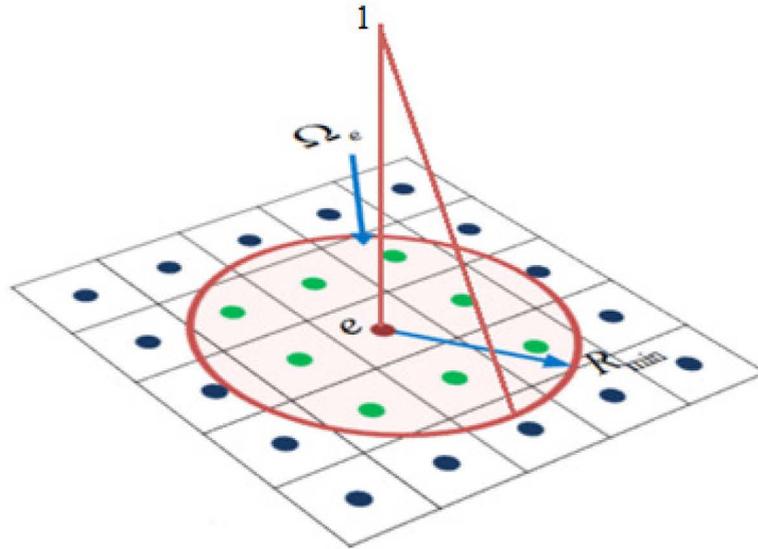
Onde \bar{x}^e são as coordenadas do elemento e e \bar{x}^i são as coordenadas do elemento arbitrário i . A ponderação realizada para definir o elemento e é baseada na proximidade dos elementos pertencentes a Ω_e . Esta ponderação é denominada “função peso” (w), que tem seu valor 1 centro do elemento e e 0 na distância R_{\min} , em todas as direções, ou seja, criando-se um cone de base $2R_{\min}$ e altura 1. Na equação 36 é definido matematicamente w , representada geometricamente na figura 2.20.

$$w(\bar{x}^e - \bar{x}^i) = \begin{cases} \frac{R_{\min} - \| \bar{x}^e - \bar{x}^i \|}{\| \bar{x}^e - \bar{x}^i \|} & \text{se } \bar{x}^i \in \Omega_e \\ 0 & \text{se } \bar{x}^i \notin \Omega_e \end{cases} \quad (36)$$

Segundo Guest, Prévost e Belytschko (2004), com a utilização da técnica de projeção, a pseudo-densidade do elemento e passa a ser uma função linear das variáveis de

projeto dos elementos de sua vizinhança. Logo, as variáveis de projeto do elemento e e sua pseudo-densidade terão valores diferentes.

Figura 2.20 – Representação geométrica da ponderação das pseudo-densidades



Fonte: O Autor (2013)

Definindo-se ρ_e como a pseudo-densidade do elemento e , d_i como as variáveis de projeto dos elementos da vizinhança, deste elemento, tem-se:

$$\rho_e = f(d) \quad (37)$$

Onde f é a função de projeção, definida na equação 38:

$$f(d) = \frac{\sum_{i \in S_e} d_i w(\bar{x}^i - \bar{x}^e)}{\sum_{i \in S_e} w(\bar{x}^i - \bar{x}^e)} \quad (38)$$

E S_e é o conjunto de elementos dentro do domínio de influência do elemento e , Ω_e . A utilização desta técnica garante uma solução livre de instabilidade de tabuleiro, embora com um efeito colateral indesejável que envolve o aparecimento de escalas de cinza nas proximidades de elementos completamente densos. Segundo Altair (2012), recomenda-se a utilização do membro mínimo, $2R_{\min}$, pelo menos 3 vezes, e não maior do que 12 vezes do tamanho médio de todos os elementos. Pois, se utilizar-se de $2R_{\min}$ inferiores a 3 vezes, poucos elementos serão adicionados a Ω_e , desta forma, podendo surgir pequenas

instabilidades de tabuleiro, e se for maior que 12 a ponderação se torna muito extensa, perde-se em desempenho, pois para cada elemento deve-se considerar em conta os vizinhos dentro deste raio e ainda podem gerar uma grande quantidade de elementos de escala de cinza.

A solução é obtida em dois passos iterativos. O primeiro passo converge para uma solução com um grande número de elementos semi-densos, este consiste em encontrar a solução com a penalização inicialmente informada do material. O segundo passo busca refinar esta solução com membros totalmente densos, ou seja, procura-se eliminar a escala de cinza, por meio do aumento da penalização do material. Este procedimento é aplicado a fim de alcançar uma solução com menor número de elementos semi-densos (ALTAIR, 2012).

2.5 Formulação da OT para o Cubo de Roda

Neste trabalho foi realizado o problema clássico de otimização topológica, onde se busca a minimização da flexibilidade com a restrição de volume de material.

Como o Cubo de Roda é um componente rotativo é necessário garantir que o centro da massa do componente esteja no eixo de rotação. Para tanto, utilizou-se da restrição de repetição circular "*cyclical pattern*", que é comumente utilizada como restrição de manufatura garantindo que as repetições ao longo do eixo de simetria cíclica sejam iguais.

2.5.1 Minimização da flexibilidade

A minimização da flexibilidade é um dos objetivos clássicos da otimização estrutural. Na equação 39, apresenta-se a definição de flexibilidade.

$$\text{Flexibilidade} = \int_{\Omega} P(x)u(x)dx \quad (39)$$

Onde $P(x)$ é o carregamento e $u(x)$ é o vetor deslocamento. Normalmente, o carregamento $P(x)$ é fixo, com isso, o problema de minimização da flexibilidade passa a ser a minimização do deslocamento.

Fisicamente, minimizar a equação (39) garante a maximização da rigidez média na direção de $u(x)$ para o carregamento $P(x)$. Quando o objetivo for aumentar a rigidez em pontos específicos do domínio fixo de projeto, será necessária a utilização de uma restrição local.

2.5.2 Restrição de fração de volume de material

A restrição de fração de volume de material determina a porcentagem de volume que se pretende obter ao final da otimização. A equação a seguir define a restrição de fração de volume:

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega \leq \alpha V, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (40)$$

onde α é a fração de volume final desejado da otimização e ρ representa as pseudo-densidades em cada ponto do domínio fixo de projeto.

2.5.3 Repetição circular

A restrição de repetição circular garante que haja repetições ao longo do eixo de simetria cíclica e sejam iguais. Com base no trabalho de Zuo et al. (2006) elaborou-se a equação 41, que define a restrição de repetição circular.

$$\sum_{i=1}^N \left| C(\rho_{r\theta})_i - (\rho_{r\theta k})_i \right|_s \leq \delta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad k = 1, 2, \dots, C, \quad r \in \Omega \quad (41)$$

Onde C é o número de repetições circulares, N é o número de elementos pertencentes ao domínio Ω , $(\rho_{r\theta})_i$ é a densidade do elemento de comparação, $(\rho_{r\theta k})_i$ são as densidades dos elementos correspondentes da repetição cíclica, S representa o eixo de repetição e δ é um valor pequeno.

2.5.4 Otimização Topológica do problema do Cubo de Roda

Com as definições de flexibilidade, fração de volume e repetição circular é possível apresentar o modelo de otimização do Cubo de Roda realizado neste trabalho, desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & P^t U(\rho) = \sum_{i=1}^N p_i u_i(\rho) \\ \text{Sujeito a: } & \sum_{i=1}^N \rho_i v_i \leq \alpha V \\ & \sum_{i=1}^N \left| C(\rho_{r\theta})_i - (\rho_{r\theta k})_i \right|_s \leq \delta \end{aligned} \quad (42)$$

onde P' é o vetor força transposto, U é o vetor deslocamentos, ρ_i representa as pseudo-densidades em cada elemento da malha, v_i é o volume de cada elemento da malha.

Utilizou-se também a técnica de projeção para realização do controle do membro mínimo na topologia final e eliminar a instabilidade de tabuleiro e a dependência da malha.

No APÊNDICE A apresenta-se a formulação da restrição global de tensão, não utilizada neste trabalho, visto que no trabalho foi utilizado como objetivo a minimização da flexibilidade, ou seja, obtendo uma estrutura com a maior rigidez global possível normalmente obtém-se a estrutura com o menor nível de tensões globais possível.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

CÓPIA CEGA

Pg. 49 até pg. 61

4 RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA METODOLOGIA PROPOSTA

CÓPIA CEGA

Pg. 62 até pg. 83

5 CONCLUSÃO

5.1 Considerações finais

Neste trabalho, foi apresentado o estudo de caso da aplicação da otimização topológica no desenvolvimento do Cubo de Roda, auxiliado pelo software *Altair Optistruct*, na busca por um componente de massa reduzida que atenda as especificações de projeto. Analisando os resultados obtidos, e comparando com o componente atual, observou-se que existiam muitas regiões sem influência estrutural que absorviam grandes massas de matéria-prima, agregando custo e não contribuindo estruturalmente.

Em qualquer análise estrutural é importante o conhecimento das condições de contorno do problema. No caso do Cubo de Roda, utilizou-se o critério de cálculo e de aprovação, o teste especificado pela norma SAE J1095. Foi realizado o modelo de elementos finitos do sistema de teste representativo, com aproximadamente 5% de diferença entre os dados medidos no ensaio físico e os valores obtidos com o MEF. Para tanto, foi fundamental os cuidados na realização da discretização do sistema, a escolha dos pontos de instrumentação baseado nas direções principais e baixo gradiente de tensões. É importante comentar que a realização do ensaio de validação foi realizada em ambiente controlado.

Para que o resultado da aplicação da otimização seja adequado, é importante selecionar o objetivo, as restrições e os parâmetros de otimização. Neste trabalho o objetivo da otimização foi a minimização da flexibilidade, sujeito a restrições de fração de volume (com redução de 15% do volume em relação ao componente atual), membro mínimo de 10mm (parede comumente utilizada no processo de fundição) e a repetição circular (como o Cubo de Roda é um componente rotativo é necessário garantir que o centro da massa do componente esteja no eixo de rotação).

A aplicação da técnica de projeção para ponderação de densidades apresentou como principais resultados a serem destacados, a inexistência da instabilidade de tabuleiro, a independência da malha e a baixa quantidade de escala de cinza. Observou-se que com o aumento do número de elementos o tempo de processamento é aumentado consideravelmente. O resultado obtido no estudo de caso, não teve dependência do tamanho dos elementos da malha aplicados, um bom parâmetro para custo benefício de tamanho dos elementos é 3 vezes menor que o tamanho do membro mínimo.

De forma simplificada o *software Altair Optistruct*, calcula as variáveis de projeto (densidades), a partir dos deslocamentos nodais, estado de tensões e flexibilidade. Os valores

de flexibilidade calculados na otimização leva em consideração todos os elementos da malha independentemente de sua densidade, ou seja, matematicamente todos os elementos da malha estão contribuindo para minimizar a flexibilidade. Se a estrutura final apresentar muitas regiões com densidades intermediárias, pode acontecer nos passos seguintes do desenvolvimento a diminuição considerável na rigidez do componente.

Baseado no resultado da otimização realizou-se 3 conceitos de Cubo de Roda, o conceito C foi escolhido para continuar o desenvolvimento do projeto. A escolha foi embasada principalmente no processo produtivo do componente, onde que para o conceito C permanece inalterado em relação ao atual. Além disso, implementou-se as mudanças de vazios entre pontos de fixação e utilizou-se de nervuras em ambos os lados dos raios. Realizou-se o pedido de registro de Patente de Invenção, nomeada "CUBO DE RODA NERVURADO PARA EIXO VEICULAR", com a numeração definitiva correspondente ao pedido BR 10 2013 017572 2. O Exame do pedido deverá ser requerido no prazo de trinta e seis meses contados da data de depósito. Prazo este que expirará em 09 de Julho de 2016.

Durante o decorrer do trabalho, observou-se comparativamente a massa, as tensões principais e os deslocamentos dos Cubos de Roda atual e otimizado objetivando validar o projeto proposto, onde o cubo atual apresentou 27,3 kg, 295 MPa e 0,25 mm e o otimizado 23,6 kg, 250 MPa e 0,21 mm. Considerando as reduções obtidas no desenvolvimento do conceito para o após a OT chegou-se a uma redução de 13,5% da massa em relação ao cubo atual. Desta forma, considerou-se o projeto aprovado e liberado para a fase de prototipagem.

Realizou-se os ensaios de fadiga nas 3 amostras, de acordo com a norma SAE J1095, onde o Cubo de Roda foi considerado aprovado, nenhuma amostra apresentou trincas nos 200.000 ciclos iniciais, todas as amostras completaram os 300.000 ciclos sem trincas e a amostra submetida aos 1.000.000 ciclos completou o teste sem que ocorra fratura. As trincas ocorridas no teste não afetam a aprovação do protótipo do cubo otimizado, visto que pelo processo de obtenção dos protótipos podem haver falhas de material. A primeira trinca foi detectada em 600.000 ciclos e a segunda trinca nos 900.000 ciclos. Comparando as tensões principais obtidas no resultado do cálculo observou-se que a região onde ocorreu a trinca no teste é a região onde ocorrem as maiores tensões principais no cubo otimizado. De qualquer modo, pode-se realizar pequenas modificações na geometria da nervura para diminuição da concentração destas tensões, objetivando aumentar o coeficiente de segurança sem grande impacto na massa do componente.

De modo geral a aplicação da OT no ambiente de engenharia é de grande valia, pois pode auxiliar no desenvolvimento de produtos ótimos que atendam as solicitações de projeto

e suas restrições. Com a aplicação desta ferramenta, é possível avaliar o componente e entender as suas alterações estruturais com a mudança dos parâmetros selecionados, porém este requer um estudo detalhado no desenvolvimento do modelo de elementos finitos para que se possam reproduzir de maneira confiável os resultados obtidos com o componente real do estudo.

5.2 Sugestões de trabalhos futuros

Algumas sugestões podem ser apontadas para futuros trabalhos, dentre as quais:

- a) utilizar os esforços reais da aplicação do componente, para tanto, pode-se realizar a medição dos esforços através de um transdutor de forças acoplado na roda do veículo;
- b) após a aplicação da OT, aplicar a otimização de forma e paramétrica nos estágios seguintes do desenvolvimento do produto; e
- c) utilizar diferentes conjuntos de parâmetros para OT.

REFERÊNCIAS

- Altair Engineering. **HyperWorks: Practical Aspects of Finite Element Simulation**. Troy, MI, 2012.
- Altair Engineering, **Optistruct User's Guide**. Troy, MI, 2011.
- ALVES, Avelino F. **Elementos Finitos, a Base da Tecnologia CAE**. São Paulo, Érica, 2006.
- ARORA, Jasbir S. **Introduction to Optimum Design**. Iowa, Elsevier Inc, 2004.
- BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**, New Jersey. Prentice Hall, 1996.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, v. 1, p 192-202, 1989.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating Optimal Topologies in Optimal Design using a Homogenization Method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier Science Sa Lausanne, v. 71, n.2, p. 197-224, nov. 1988.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archive of Applied Mechanics**. v. 69. n. 9-10. p. 635-654. 1999.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization - Theory, Methods and Applications**. Berlin. Springer-Verlag, 2003.
- BORESI, A. P.; CHONG, K. P. **Elasticity in Engineering Mechanics**. Nova York. Elsevier, 1987.
- CERVELLERA, P. **Optimization Driven Design Process: Practical Experience on Structural Components**. Convegno Nazionale XIV ADM - XXXIII AIAS, set, 2004.
- CHENG, G. D; GUO, X. Epsilon-relaxed approach in structural topology optimization. **Structural Optimization**, v.13, n. 4, p. 258-266, 1997.
- COSTA, J. C. A. **Otimização Topológica com Refinos H-adaptativos**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.
- de NAVARRA, E. O. I. **Calculo de Estructuras por el Metodo de Elementos Finitos – Análisis Estático Lineal**. Artes Gráficas Torres, 2ª ed., 1995.
- DÍAZ, A. R; SIGMUND, O. Checkerboard Patterns in Layout Optimization. **Structural Optimization**, v. 10, p. 40-45, 1995.
- DUYSINX, P; BENDSØE, M. P. Topology Optimization of Continuum Structures with Local Stress Constrains. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 43. p. 1453-1478. 1998.

- DUYSINX, P; SIGMUND O. **New developments in handling stress constraints in optimal material distribution.** 7th Symp. in Multidisc. Analysis and Optimization, AIAA, USAF, NASA, ISSMO, p.1501-1509. 1998.
- FONSECA, J. S. O. **Design of Microstructures of Periodic Composite Materials.** Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), The University of Michigan, 1997.
- FUJII, D; CHEN, B. C; KIKUCHI, N. Composite material design of two-dimensional structures using the homogenization design method. **Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering.** 2001.
- GILL, P. E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M. H. **Practical Optimization.** London. Elsevier Science, 2000.
- GILLESPIE, T. **Fundamentals of vehicle dynamics.** Warrendale: Society of Automotive Engineers. 1992.
- GUEST, J. K; PRÉVOST, J. H; BELYTSCHKO, T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering.** p. 238-254. 2004.
- GUILHERME, C. E. M; FONSECA, J. S. O. Topology optimization of continuum structures with epsilon-relaxed stress constraints. **Mechanics of Solids in Brazil.** 2007.
- HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. **Elements of Structural Optimization,** 3ed. The Netherlands. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers. 1992.
- HARZHEIM, L; GRAF, G. A review of optimization of cast parts using topology optimization. I - Topology Optimization Without Manufacturing Constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization.** p. 491-497. 2005.
- HARZHEIM, L; GRAF, G. A review of optimization of cast parts using topology optimization. II - Topology Optimization With Manufacturing Constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization.** p. 388-399. 2006.
- HOFFMANN K. **An Introduction to Stress Analysis and Transducer Design using Strain Gauges.** Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, 2012.
- HOFFMANN K. **Einführung in die Technik des Messens mit Dehnungsmessstreifen.** Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, 1987.
- HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method - Linear Static And Dynamic Element Analysis.** Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1987.
- JOG, C. S; Haber, R. B. Stability of Finite Element Models for Distributed-Parameter Optimization and Topology Design. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,** v. 130, p. 203-226, 1996.
- KAWOHL, B.; PIRONNEAU, O.; TARTAR, L.; ZOLESIO, J. P. **Optimal Shape Design, Lecture Notes in Mathematics,** Vol. 1740, Springer, Berlin. 2000.

KOGA, A. A. **Projeto de dispositivos de microcanais utilizando o método de otimização topológica**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

MASE, G. E. **Theory and Problems of Continuum Mechanics**. McGraw-Hill, Inc. 1970.

MELO, L. R. T. **Monitoração de modelos físicos reduzidos para investigação do comportamento de estruturas em escala real**. . Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

MERITOR. **TP-926: Hub Rotary Fatigue**. Troy, Michigan, 2009.

NOMURA, A.; MURAKAMI, S.; KURODA, H.; TANAKA, K.; RAMOO, R.; KOSAREK, P.; PARTHASARATHY, M.; CHANDAROY, R. **Improvement of BIW NHW Characteristics Using a Concurrent Design Optimization Approach**. 2003.

OLHOFF, N.; KOG, L.; THOMSEN, J. Bi-material Topology Optimization. **Structural Optimization**. v. 93, p. 327-334. 1993.

PEREIRA, J. **Otimização Topológica de Componentes Mecânicos com Restrição sobre critério de Falha Material**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2001.

PEREIRA, J. T; FANCELLO, E. A; BARCELLOS, C. S. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.26, n. 1-2. p. 50-66. 2004.

PERINI, G.; LUCIANO, M. A. Otimização topológica no processo de desenvolvimento de produtos. Anais do XX Simpósio de Engenharia de Produção, Bauru, 2013.

PORTELA, A.; SILVA, A. **Mecânica dos Materiais**. Editora Platano, Lisboa, 1996.

QUERIN, O. M; STEVEN, G. P; XIE, Y. M. Evolucionary structural optimization using an additive algorithm. **Finite Elements in Analises and Design**. v. 34. p. 291-308. 2000.

QUERIN, O. M; YOUNG, V; STEVEN, G. P; XIE, Y. M. Computacional efficiency and validation of bi-directional evolucionary structural optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 189, p. 559-573. 2000.

RAO, J. S. **Recent Advances in Optimization of Aerospace Structures and Engines**. 2007.

ROZVANY, G. I. N. **A critical review of established methods of structural topology optimization**. Springer-Verlag. 2009.

ROZVANY, G. I. N; BENDSØE, M. P; KIRSCH, U. Layout optimization of structures. **Applied Mechanics Optimization**. p. 41-119, 1995.

SAITOU, K.; IZUI, K.; NISHIWAKI, S.; PAPALAMBROS, P. A Survey of Structural Optimization in Mechanical Product Development. **Journal of Computing and Information Science in Engineering**. set. 2005.

SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. p. 401-421. 2007.

SIGMUND, O; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**. v. 16, p. 68-75, 1998.

SILVA, E. C. N.; **Técnicas de Otimização Aplicadas no Projeto de Peças Mecânicas**. 2009.

SOCIETY OF AUTOMOTIVE ENGINEERS (SAE). **J1095: Fatigue Test Procedures: Hubs and Wheels for Demountable Rims**. 2009.

SUZUKI, K; KIKUCHI, N. A homogenization method for shape and topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 93, n.3, p. 291-319, dez. 1991.

THOMSEN, J. Topology optimization of structures composed of one or 2 materials. **Structural Optimization**, v.5, n. 1-2, p. 108-115, dez. 1992.

XIE, Y. M; STEVEN, G. P. **Evolucionary Structural Optimization**. London. Springer. 1997.

ZHOU, M.; FLEURY, R.; PATTEN, S.; STANNARD, N.; MYLETT, D.; GARDNER, S. **Topology Optimization - Pratical Aspects for Industrial Applications**. 9th Word Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization. Japão, jun. 2011.

ZUO, K. T; CHEN, L. P; ZHANG, Y. Q; YANG, J. Manufacturing- and Machining-based Topology Optimization. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**. p. 531-536. 2006.

APÊNDICE A – RESTRIÇÃO GLOBAL DE TENSÕES

A função de restrição global de tensão, proposta inicialmente por Duysinx e Bendsøe (1998), é dada pela equação A.1:

$$\left\{ \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N \left[\max \left(0, \frac{\sigma_{VM}}{\rho^\eta \sigma_l} - \frac{\varepsilon}{\rho} + \varepsilon \right) \right]^q \right\}^{\frac{1}{q}} \leq 1 \quad (\text{A.1})$$

onde N é o número de elementos da malha do domínio fixo de projeto, σ_{VM} é a tensão média de von Mises no centro do elemento, σ_l é a tensão de limite do problema e ε é a relaxação- ε ou " ε -relaxation" Cheng e Guo (1997), que perturba o problema original resolvendo o problema de ótimo singular.

Entretanto, na literatura, existem outros trabalhos propondo formas alternativas da realização da relaxação- ε , como Duysinx e Sigmund (1998), Pereira (2001), Pereira, Fancello e Barcellos (2004), Guilherme e Fonseca (2007).

Neste trabalho, não utilizou-se a restrição global de tensões no problema de otimização. Entretanto, sempre deve-se observar as aplicações onde a concentração de tensões sejam elevadas e realizar análises localizadas em um segundo estágio.

APÊNDICE B – EXTENSOMETRIA

Muitas vezes, durante o desenvolvimento dos projetos, os carregamentos aplicados na avaliação estrutural são de difícil determinação e comumente estimados. Normalmente para contornar o risco de ocorrer falhas por sobrecarga ou desgaste durante a vida, utiliza-se um coeficiente de segurança. Atualmente, o mercado exige projetos com a menor massa possível, para tanto, torna-se necessário o conhecimento dos carregamentos e tensões na estrutura. As avaliações experimentais dos esforços baseiam-se nas descobertas de Hooke em 1678. Hooke encontrou a relação, denominada Lei de Hooke, entre as tensões na estrutura e a deformação resultante (HOFFMANN, 1987).

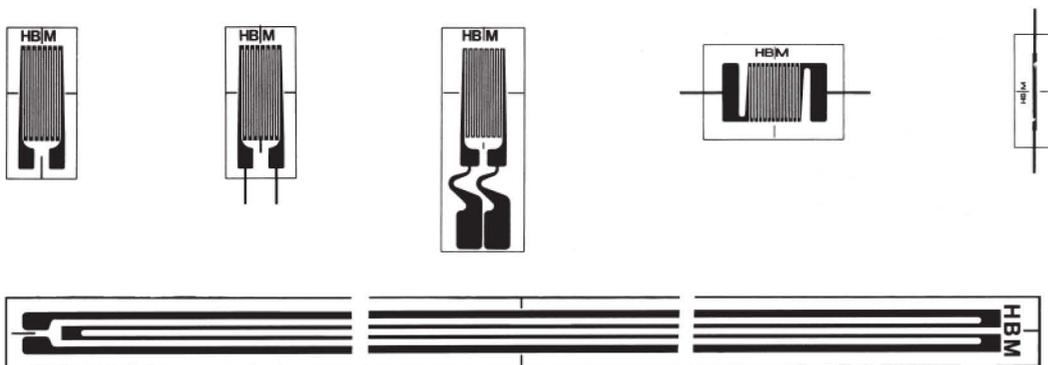
Os extensômetros ou *straingages* são os dispositivos utilizados para realizar as medidas de deformações. São largamente empregados em ensaios estáticos e dinâmicos, proporcionando uma análise quantitativa das deformações da estrutura em condições reais de serviço. Segundo Portela e Silva (1996), por meio de deformações impostas ao extensômetro, ocorrem variações na sua resistência elétrica. Desta forma, ao instalar o sensor na estrutura, pode-se medir as deformações baseando-se nas medidas elétricas. Segundo Melo (2011) as medições realizadas com extensômetros caracterizam-se pela alta precisão de medição, excelente respostas aos fenômenos dinâmicos, excelente linearidade e utilizados como elemento transdutor para medidas de várias quantidades físicas (força, pressão, torque, aceleração e deslocamento). Observa-se em Portela e Silva (1996) e Hoffmann (1987), a abordagem clara e prática referente a teoria de funcionamento do extensômetro, baseado na ponte de Wheatstone.

Segundo Hoffmann (1987), a seleção dos extensômetros para análise de tensões experimental deve considerar, basicamente, as condições mecânicas e as condições ambientais do ponto a ser medido. Para as condições mecânicas no ponto de medição as principais características que devem-se observar são: o estado de tensão do ponto (conhecimento da direção principal das tensões), variação do campo de tensões (conhecimento da existência ou não de gradientes de tensões) e tipo de carregamento (estático, dinâmico). Enquanto para as condições ambientais as principais características que devem-se observar são: a duração da medição, variação da temperatura durante a medição, meio onde o ponto de medição está submetido (umidade, óleo, sob pressão, vácuo, campos elétricos, entre outros) e condições elétricas no ponto de medição (circuito de medição, tensão de alimentação e as características do cabo). Quanto maior o conhecimento do ponto de medição, maior são as chances de sucesso da medição.

Existem extensômetros de várias formas e tamanhos. As formas se diferenciam na posição e quantidade de grades e na posição dos conectores. Existem extensômetros lineares com arranjo simples e duplo, rosetas “X” com grades de medição a 90° em relação uma das outras, rosetas “R” com 3 grades arranjadas por um certo ângulo uma das outras, cadeias de extensômetros, entre outras formas especiais (HOFFMANN, 1987). Apresenta-se na figura B.1, de forma esquemática uma gama de extensômetros lineares de diferentes tamanhos e diferentes posições dos conectores.

É importante salientar que, o comprimento da grade do extensômetro não afeta sua sensibilidade, visto que, a medição realizada é o alongamento relativo, e não o absoluto. O comprimento do extensômetro é definido por meio da avaliação do espaço físico disponível para medição e do campo de deformações. Neste trabalho, procurou-se conhecer os campos de deformação e buscou-se campos homogêneos, onde extensômetros com grade de 3 a 6 mm de comprimento são satisfatórios (HOFFMANN, 2012).

Figura B.1 – Tamanhos típicos de tamanho de grade de extensômetros



Fonte: Adaptado de Hoffmann (2012)

Para casos onde não é conhecido os campos de deformação é recomendado o uso de Rosetas. Em Hoffmann (1987) encontram-se diferentes tipos de extensômetros para diversas aplicações, como investigação de tensões residuais, para alta temperatura, entre outros.

APÊNDICE C – ANÁLISES COMPLEMENTARES

CÓPIA CEGA

Pg. 94 até pg. 96

ANEXO A – PROCEDIMENTO INTERNO MERITOR (2009)

CÓPIA CEGA

Pg. 97 até pg. 106

ANEXO B – RELATÓRIO DE TESTE: COLETA DE TENSÕES

CÓPIA CEGA

Pg. 107 até pg. 112



INPI INSTITUTO
NACIONAL
DA PROPRIEDADE
INDUSTRIAL

INSTITUTO NACIONAL DA PROPRIEDADE INDUSTRIAL
Sistema de Gestão da Qualidade
Diretoria de Patentes

DIRPA	Tipo de Documento: Formulário	DIRPA	Página: 2/3
Título do Documento: Depósito de Pedido de Patente		Código: FQ001	Versão: 2
		Procedimento: DIRPA-PQ006	

6. **Inventor (72):**

Assinale aqui se o(s) mesmo(s) requer(em) a não divulgação de seus nome(s), neste caso não preencher os campos abaixo.

6.1 Nome: GUSTAVO PERINI

6.2 Qualificação: ENG. MECÂNICO

6.3 CPF: 821.203.310-49

6.4 Endereço Completo: RUA GENERAL OSÓRIO 297, BAIRRO PIO X, FARROUPILHA, RS

6.5 CEP: 95180-000

6.6 Telefone:

6.7 FAX:

6.8 E-mail:

continua em folha anexa

7. **Declaração de divulgação anterior não prejudicial.**

Artigo 12 da LPI – período de graça.

Informe no item 11.13 os documentos anexados, se houver.

8. **Declaração na forma do item 3.2 da Instrução Normativa PR nº 17/2013:**

Declaro que os dados fornecidos no presente formulário são idênticos ao da certidão de depósito ou documento equivalente do pedido cuja prioridade está sendo reivindicada.

9. **Procurador (74):**

9.1 Nome: VIEIRA DE MELLO ADVOGADOS

9.2 CNPJ/CPF: 42285056000180

9.3 API/OAB: 1000

9.4 Endereço Completo: Av. Almirante Barroso, 139, 702/703

9.5 CEP: 20031005

9.6 Telefone: (21)2524-0510

9.7 FAX: (21)2240-1524

9.8 E-mail:

continua em folha anexa

10. **Listagem de sequências biológicas.**

Informe nos itens 11.9 ao 11.12 os documentos anexados, se houver.


INPI INSTITUTO NACIONAL DA PROPRIEDADE INDUSTRIAL

 INSTITUTO NACIONAL DA PROPRIEDADE INDUSTRIAL
 Sistema de Gestão da Qualidade
 Diretoria de Patentes

DIRPA	Tipo de Documento:	Formulário	DIRPA	Página:	3/3
	Título do Documento:	Depósito de Pedido de Patente		Código:	FQ001
				Procedimento:	DIRPA-PQ006

11. Documentos Anexados:

(Assinale e indique também o número de folhas):

(Deverá ser indicado o número total de somente uma das vias de cada documento).

Documentos Anexados			folhas
<input checked="" type="checkbox"/>	11.1	Guia de Recolhimento da União (GRU).	1
<input checked="" type="checkbox"/>	11.2	Procuração.	2
<input type="checkbox"/>	11.3	Documentos de Prioridade.	
<input type="checkbox"/>	11.4	Documento de contrato de trabalho.	
<input checked="" type="checkbox"/>	11.5	Relatório descritivo.	7
<input checked="" type="checkbox"/>	11.6	Reivindicações.	1
<input checked="" type="checkbox"/>	11.7	Desenho(s) (se houver). Sugestão de figura a ser publicada com o resumo: nº, _____ por melhor representar a invenção (sujeito à avaliação do INPI).	3
<input checked="" type="checkbox"/>	11.8	Resumo.	1
<input type="checkbox"/>	11.9	Listagem de seqüências em arquivo eletrônico: _____ nº de CDs ou DVDs (original e cópia).	
<input type="checkbox"/>	11.10	Código de controle alfanumérico no formato de código de barras referente às listagem de seqüências.	
<input type="checkbox"/>	11.11	Listagem de seqüências em formato impresso.	
<input type="checkbox"/>	11.12	Declaração relativa à Listagem de seqüências.	
<input type="checkbox"/>	11.13	Outros (especificar)	

12. Total de folhas anexadas: 15 fls.
13. Declaro, sob as penas da Lei que todas as informações acima prestadas são completas e verdadeiras.

 Rio de Janeiro 09/07/2013

Local e Data

VIEIRA DE MELLO ADVOGADOS

42285056000180 1000

Assinatura e Carimbo

 Roberto Pernold Vieira de Mello
 CPF 314.078.137-34 - OAB/RJ 25.163

ANEXO D – RELATÓRIO DE MATERIAL DOS PROTÓTIPOS

CÓPIA CEGA

Pg. 116

ANEXO E – RELATÓRIOS DIMENSIONAIS DOS PROTÓTIPOS

CÓPIA CEGA

Pg. 117 até pg. 128

ANEXO F – RELATÓRIO DE TESTE SAE J1095

CÓPIA CEGA

Pg. 129 até pg. 146