

**UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DA REGIÃO DOS VINHEDOS
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

VINÍCIUS CESAR GUZZO TEDESCO

**ANÁLISE ESTRUTURAL PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DE UM
VASO DE PRESSÃO COM SEÇÃO TRANSVERSAL NÃO CIRCULAR**

**BENTO GONÇALVES
2021**

VINÍCIUS CESAR GUZZO TEDESCO

**ANÁLISE ESTRUTURAL PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DE UM
VASO DE PRESSÃO COM SEÇÃO TRANSVERSAL NÃO CIRCULAR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Mecânico, no Campus Universitário da Região dos Vinhedos, da Universidade de Caxias do Sul.

Orientador Prof. Me. Vagner Grison.

**BENTO GONÇALVES
2021**

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo a realização de uma análise estrutural de um vaso de pressão com seção transversal não circular diante de esforços causados por uma pressão maior que 1 atm em seu interior. Construído em aço inox AISI 304, foi inicialmente projetado para atuar como um simples reservatório, não seguindo os requisitos normativos aplicáveis a vasos de pressão. A análise foi realizada por meio do método de elementos finitos (MEF), com o auxílio de ferramentas computacionais. Posteriormente foi realizado o cálculo das forças atuantes em sua seção transversal conforme a norma ASME, seção VIII, apêndice 13, a qual trata de vasos de pressão com seção transversal não circular. Por fim, uma avaliação geral do vaso foi realizada, com o intuito de verificar a influência de adaptações realizadas no projeto na resistência mecânica do componente analisado. Considerando a norma ASME, o reservatório analisado deveria ser submetido a apenas a pressão hidrostática normal de operação, não suportando mais nenhum tipo de carga. Através da análise numérica realizada, pode-se perceber que a operação do equipamento ainda seria possível, caso fosse submetido a pressões internas menores do que 6 kpa. Foi observado que, ao adicionar barras externas de reforço, a resistência do tanque aumenta, suportando uma carga até 67% maior do que a analisada no caso não reforçado.

Palavras-chave: ASME. Vaso de pressão. Análise estrutural. Método dos elementos finitos.

ABSTRACT

The present work aims to carry out a structural analysis of a pressure vessel with a non-circular cross section in the face of efforts caused by a pressure greater than 1 atm in its interior. Built in AISI 304 stainless steel, it was initially designed to act as a simple reservoir, not following the regulatory requirements applicable to pressure vessels. The analysis was performed using the finite element method (FEM), with the aid of computational tools. Subsequently, the calculation of the forces acting on its cross section was performed according to the ASME standard, section VIII, appendix 13, which deals with pressure vessels with a non-circular cross section. Finally, a general evaluation of the vessel was carried out, in order to verify the influence of adaptations made in the project on the mechanical strength of the analyzed component. Considering the ASME standard, the analyzed reservoir should be submitted to only the normal hydrostatic operating pressure, not supporting any other type of load. Through the numerical analysis performed, it can be seen that the operation of the equipment would still be possible if it were subjected to internal pressures lower than 6 KPa. It was observed that, when adding external reinforcement bars, the tank resistance increases, supporting a load up to 67% greater than that analyzed in the unreinforced case.

Keywords: ASME. Pressure vessel. Structural analysis. Finite element method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Deformação de uma placa pela teoria de Kirchoff	14
Figura 2 - Placa sob a ação de um carregamento uniforme em sua lateral	15
Figura 3 - Forças atuantes na seção transversal de uma placa com carregamento em sua superfície	15
Figura 4 - Carregamento hidrostático atuante em uma placa	16
Figura 5 - Carregamento uniforme atuante em uma placa	16
Figura 6 - Tensões primárias atuantes em um vaso de pressão	18
Figura 7 – Representação de tensão secundária	19
Figura 8 - Exemplos de elementos finitos	22
Figura 9 - Exemplo de flexão de placa	23
Figura 10 – Comparação entre malhas (elementos quadriláteros x triangulares)	23
Figura 11 - Adaptação da malha	25
Figura 12 – Mudança dos vetores atuantes na condição de contorno	26
Figura 13 - Representação geral do objeto de estudo	27
Figura 14 - Variações do objeto de estudo	27
Figura 15 – Reservatório padrão para máquinas de envase linear	29
Figura 16 - Propriedades do aço AISI 304	30
Figura 17 - Seção transversal do tanque analisado	30
Figura 18 - Tanque reforçado	31
Figura 19 - Seção transversal do tanque reforçado	31
Figura 20 - Pontos fixos do tanque para análise numérica	33
Figura 21 - Carregamentos atuantes no tanque	33
Figura 22 - Malha primária	34
Figura 23 - Malha refinada nas regiões de acúmulo de tensões	35
Figura 24 - Resultado de tensões da análise numérica com a malha primária	36
Figura 25 - Deslocamento total do vaso com a malha primária	36
Figura 26 - Resultado de tensões da análise numérica com refinamento 01 da malha	37
Figura 27 - Deslocamento total do vaso com refinamento 01 da malha	37
Figura 28 – Resultado de tensões da análise numérica com refinamento 02 da malha	38

Figura 29 - Deslocamento total do vaso com refinamento 02 da malha.....	38
Figura 30 - Tensão obtida com elementos de casca.....	39
Figura 31 - Parede analisada para validação da análise numérica	40
Figura 32 - Tensões equivalentes na placa com pressão hidrostática atuante (MEF)	41
Figura 33 - Deslocamento total da placa com pressão hidrostática atuante (MEF)	41
Figura 34 - Tensões equivalentes na placa com pressão interna atuante (MEF)	42
Figura 35 - Deslocamento total da placa com pressão interna atuante (MEF) .	42
Figura 36 - Resultado de tensões da análise numérica para o tanque reforçado com a malha final	43
Figura 37 - Deslocamento total do vaso reforçado com a malha final.....	44
Figura 38 - Seção transversal do tanque analisado	50
Figura 39 - Sketch (3) norma ASME VIII apêndice 13.....	51
Figura 40 - Sketch (6) da norma ASME VIII apêndice 13.....	54
Figura 41 – Tensões de membrana atuantes na seção transversal do tanque conforme norma ASME	55
Figura 42 - Tensões de flexão atuantes na seção transversal do tanque conforme norma ASME	55
Figura 43 - Tensões totais atuantes na seção transversal do tanque conforme norma ASME	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados da análise	24
Tabela 2 - Características da malha inicial.....	34
Tabela 3 - Características da malha final	35
Tabela 4 – Resultados obtidos para as diferentes malhas.....	38
Tabela 5 - Resultados Elemento sólido x casca.....	39
Tabela 6 - Dados de entrada para cálculo analítico	40
Tabela 7 - Resultados para pressão hidrostática	41
Tabela 8 - Resultados para pressão interna.....	42
Tabela 9 - Comparação dos resultados para os diferentes modelos	44
Tabela 10 - Dados de entrada para cálculos de tensão conforme ASME	45

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UCS	Universidade de Caxias do Sul
ASME	American Society of Mechanical Engineers
MEF	Método dos Elementos Finitos
PMTA	Pressão Máxima de Trabalho Admissível
CAD	Computer Aided Design
IRJET Technology	International Research Journal of Engineering and Technology

LISTA DE SÍMBOLOS

S_m	Tensão de membrana (Pa)
S_b	Tensão de flexão (Pa)
S_T	Tensão total (Pa)
P	Pressão atuante no vaso de pressão (Pa)
p	Distância do passo (mm)
t	Espessura da parede do vaso de pressão (mm)
t_1	Espessura da parede menor do vaso de pressão (mm)
t_2	Espessura da parede maior do vaso de pressão (mm)
R	Raio interno da seção transversal do vaso de pressão (mm)
L_1	Metade do comprimento do lado menor do vaso de pressão (mm)
L_{11}	Comprimento total do lado menor do vaso de pressão (mm)
L_2	Metade do comprimento do lado maior do vaso de pressão (mm)
L_{21}	Comprimento total do lado maior do vaso de pressão (mm)
c	Distância do eixo neutro do vaso até a parede externa da seção transversal (mm)
M_A	Momento no ponto A (N.mm)
I_1	Momento de inércia da parede com espessura t_1 (mm ⁴)
I_2	Momento de inércia da parede com espessura t_2 (mm ⁴)
I_{11}	Momento de inércia da parede de espessura t_1 reforçada (mm ⁴)
I_{21}	Momento de inércia da parede de espessura t_2 reforçada (mm ⁴)
r	Raio ao eixo central do reforço (mm)
θ	Ângulo θ (rad)
W	Deformação (mm)
u	Deslocamento (mm)
ν	Coefficiente de Poisson
ε_x	Deformação do corpo em direção ao eixo x
ε_y	Deformação do corpo em direção ao eixo y
E	Módulo de elasticidade do material (N/m ²)
σ_x	Tensão em direção ao eixo x (Pa)
σ_y	Tensão em direção ao eixo y (Pa)
h	Espessura da chapa (mm)
z	Distância do eixo neutro da chapa até o ponto em análise (mm)
k	Fator de carga axial na placa
σ_{max}	Tensão máxima atuante na placa (Pa)
W_{max}	Deslocamento máximo da placa (mm)
b	Largura da placa (mm)

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	10
1.1 TEMA.....	11
1.2 JUSTIFICATIVA.....	11
1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO.....	12
1.3.1 Objetivo Geral	12
1.3.2 Objetivos específicos	12
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
2.1 TEORIA DE PLACAS	13
2.1.1 Cálculo de tensões em uma placa uniformemente carregada pela teoria clássica de placas	14
2.2 CATEGORIA DE TENSÕES EM UM VASO DE PRESSÃO.....	17
2.2.1 Tensões Primárias	17
2.2.2 Tensões Secundárias	18
2.2.3 Tensões localizadas máximas	19
2.3 REQUISITOS DE PROJETO.....	20
2.3.1 Pressão máxima de trabalho admissível (PMTA)	20
2.3.2 Espessura Mínima Requerida	20
2.3.3 Norma para vasos de pressão com seção transversal não circular	21
2.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	21
2.4.1 Geometria do elemento e graus de liberdade	21
2.4.2 Geração da malha	24
2.4.3 Condições de contorno	25
2.5 TRABALHO CORRELATO	26
2.5.1 Análise estrutural de um vaso de pressão com seção transversal não circular pelo método de elementos finitos	26
2.5.2 Análise estrutural de um vaso de pressão com seção transversal não circular com tamanho finito	27
3 MATERIAIS E MÉTODOS	29
3.1 MATERIAIS	29
3.1.1 Objeto de estudo	29
3.2 MÉTODOS.....	32
3.2.1 Análise teórica através da norma ASME	32
3.2.2 Método de análise numérica	32
3.2.2.1 Pré-processamento	32

4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	36
4.1	AVALIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA DOS RESULTADOS	36
4.1.1	Análise da convergência Numérica	36
4.1.2	Análise da convergência Analítica	39
4.1.3	Análise numérica do reservatório com cinta de reforço	42
4.2	AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS CONFORME NORMA ASME	44
5	CONCLUSÃO	46
6	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	47

1. INTRODUÇÃO

O consumo de produtos industrializados vem crescendo a cada ano e com isso, a busca das empresas pelo aumento da capacidade de produção a fim de atender a demanda e manter a competitividade no mercado é constante no cenário industrial atual. Uma forma de atender a esta necessidade da indústria está no investimento em máquinas capazes de aprimorar o processo produtivo.

A indústria alimentícia e de bebidas possui um papel importante no mundo inteiro. Graças a este segmento é possível ter fácil acesso a alimentos de qualidade, bebidas, produtos sanitários e diversos outros necessários para a vida, sendo eles provenientes de diversas regiões do país e do mundo.

As máquinas de envase fazem parte do segmento industrial dedicado ao ramo de bebidas e de produtos sanitários, líquidos cuja viscosidade é comparável com a da água. A tecnologia envolvida e capacidade produtiva de cada máquina depende da necessidade de produção requerida por cada cliente e tipo de produto que será envasado, podendo atender desde pequenas empresas até multinacionais.

Dentre os diversos conjuntos que compõem uma máquina de envase, o tanque é um dos principais, pois nele é armazenado o produto que será envasado. Portanto, qualquer falha no tanque, como por exemplo uma fissura devido a um mau dimensionamento da espessura de chapa ou até mesmo a seleção incorreta do material para tal aplicação, faria com que a máquina ficasse inoperante até que o problema fosse solucionado. O tempo dedicado à execução de manutenção corretiva é considerado uma perda direta em qualquer segmento industrial, ou seja, prejuízo tanto para a empresa produtora da máquina, quanto para a empresa que a adquiriu.

Um fluido é uma substância que se deforma continuamente sob ação de uma força externa, porém, quanto maior for a viscosidade de um fluido, maior será sua resistência à deformação. Sendo assim, o envase de líquidos viscosos requerem reservatórios pressurizados para atenderem tanto a uniformidade quanto a velocidade de fluxo típicas das linhas de produção industriais. Sendo assim, o tanque atua não somente como um reservatório, mas também como um vaso de pressão.

No presente trabalho foi analisada a possibilidade de utilização de um tanque convencional, utilizado para o envase de água e sucos naturais, em uma aplicação que requer pressurização interna. Nesta análise foi avaliada a geometria de construção do tanque, visando os principais pontos de acúmulo de tensão, espessura da chapa utilizada e adaptações a fim de aumentar a resistência do componente.

Para auxiliar na análise de tensões e comportamento do vaso de pressão adaptado, foi utilizado o método de elementos finitos (MEF) através de uma ferramenta computacional específica para este tipo de análise, o *Ansys®*.

1.1 TEMA

O trabalho em questão aborda temas relacionados à engenharia mecânica, envolvendo a análise estrutural de um tanque, adaptado para ser utilizado como um vaso de pressão em uma máquina de envase. Portanto, envolvendo temas como mecânica dos sólidos, resistência dos materiais e integridade estrutural.

1.2 JUSTIFICATIVA

Todo o tipo de tanque ou reservatório que opera a uma pressão superior à pressão atmosférica é considerado um vaso de pressão. Para produzir este tipo de equipamento deve-se seguir normas construtivas, a fim de garantir a segurança operacional.

O objeto de estudo deste trabalho consiste num reservatório que não foi projetado com base nos requisitos normativos aplicáveis a vasos de pressão. Na aplicação original, de envase de água e sucos naturais, na qual o reservatório fica submetido somente à pressão hidrostática, não há qualquer registro de falha em operação. Por outro lado, a aplicação deste reservatório em linhas para envase de outros produtos, tais como álcool gel, cuja viscosidade maior requereria a aplicação de pressão interna não foi avaliada.

A avaliação se deu através da análise do vaso pelo método de elementos finitos (MEF) com o auxílio de uma ferramenta computacional, identificando os principais pontos de tensão, assim como utilizando a norma ASME e cálculos analíticos baseados na teoria contida na literatura de Timoshenko (1959).

1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

1.3.1 Objetivo Geral

Fazer a análise estrutural, utilizando o método de elementos finitos e a norma ASME, de um vaso de pressão com seção transversal não circular diante de esforços causados por uma pressão maior que 1 atm em seu interior.

1.3.2 Objetivos específicos

O objetivo geral está distribuído nos objetivos específicos citados abaixo:

- a) Aplicar o código ASME para calcular e definir a pressão interna máxima admissível do vaso de pressão;
- b) Aplicar o método de elementos finitos (MEF) para obtenção dos valores de tensão máximas resultantes nas paredes do vaso de pressão;
- c) Obter resultados analíticos de deslocamentos e tensões por meio da teoria de placas para fins de comparação e validação dos obtidos pelo MEF;
- d) Incorporar um reforço do tipo cinta metálica tubular à estrutura do vaso de pressão e avaliar o aumento de capacidade de pressurização.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão introduzidos os conceitos de análise estrutural que serão necessários para a identificação das tensões atuantes no vaso de pressão escolhido para este trabalho, assim como as normas de construção.

2.1 TEORIA DE PLACAS

Em geral, as placas podem ser divididas em três grupos: placas esbeltas com pequenos deslocamentos, placas esbeltas com grandes deslocamentos e placas espessas.

Segundo Ugural (1981), a definição de placas esbeltas se dá pela relação entre a espessura e sua maior dimensão ser inferior a 1/20. São consideradas placas com grandes deslocamentos aquelas em que os deslocamentos transversais se aproximam mais do valor da espessura da placa, porém ainda são pequenos quando comparados com as demais dimensões. Placas que possuem deslocamentos transversais bem menores que a sua espessura, são classificadas como de pequenos deslocamentos.

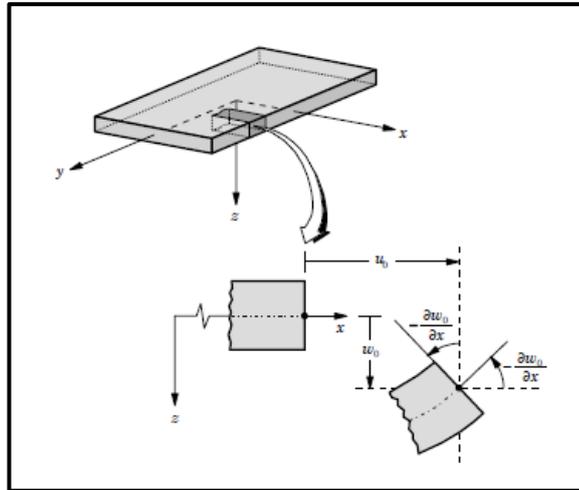
De acordo com Reddy (2006) a teoria clássica de placas é baseada na teoria de Kirchhoff. Essa teoria admite que, na composição dos deslocamentos transversais, apenas as deformações por flexão sejam consideradas, e os efeitos de carga axial normal podem ser analisados separadamente, sendo essa última consideração aceitável somente quando a força normal atuante na placa for muito inferior à sua força crítica compressiva de resistência. A teoria de Kirchhoff é dividida em três partes, indicadas a seguir:

- a) As linhas transversais à superfície indeformada permanecem perpendiculares à superfície média após a deformação da placa;
- b) Não existe deformação no plano médio da placa, o qual permanece plano após a flexão;
- c) A tensão normal transversal (σ_z) pode ser desprezada;

A Figura 1 representa o esquema de deformação de uma placa, de acordo com a teoria de Kirchhoff. O deslocamento de um ponto da placa para suas três dimensões é dado pela expressão (01).

$$u = \begin{bmatrix} \mu x \\ \mu y \\ \mu z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \cdot \theta x \\ -z \cdot \theta y \\ \omega \end{bmatrix} \quad (01)$$

Figura 1 - Deformação de uma placa pela teoria de Kirchoff



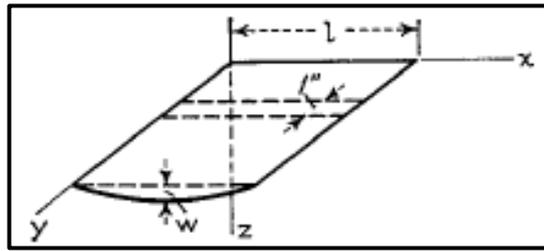
Fonte: Reddy (2006)

A teoria de Kirchhoff é aplicável em casos onde é possível tratar o comportamento da placa como linear geométrico, normalmente em placas esbeltas com pequenos deslocamentos.

2.1.1 Cálculo de tensões em uma placa uniformemente carregada pela teoria clássica de placas

Timoshenko (1959) cita em sua literatura que uma forma de cálculo das tensões de flexão atuantes em uma placa com espessura constante e sujeita a um carregamento uniforme em sua lateral é assumindo que as seções transversais permanecem planas durante a ação destas forças externas, girando apenas em relação aos seus eixos neutros, de modo a serem sempre normais em relação à curva de deflexão, onde a curvatura é representada por w , conforme mostra a Figura 2. O carregamento é considerado positivo quanto atua em direção de Z , para baixo, fazendo com que a parte superior da placa sofra compressão e a parte inferior sofra tensão.

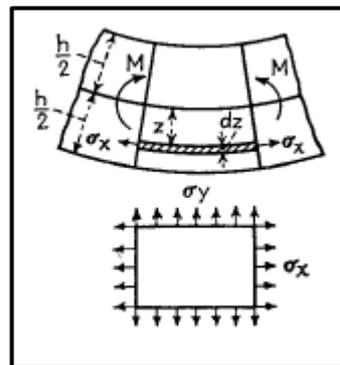
Figura 2 - Placa sob a ação de um carregamento uniforme em sua lateral



Fonte: Timoshenko (1959)

Fazendo uso da lei de Hooke em relação às tensões normais, atuando conforme representado na Figura 3, para obter a deformação do corpo, onde E é o módulo de elasticidade do material da chapa e ν o coeficiente de Poisson, tem-se:

Figura 3 - Forças atuantes na seção transversal de uma placa com carregamento em sua superfície



Fonte: Timoshenko (1959)

$$\varepsilon_x = \frac{(1-\nu)\sigma_x}{E} \quad (02)$$

$$\varepsilon_y = \frac{(1-\nu)\sigma_y}{E} = 0 \quad (03)$$

Considerando a deformação lateral em direção do eixo y zero, a fim de manter a continuidade da placa, tem-se a relação mostrada na equação 04. A partir disso, substituindo os valores na equação 02, é possível obter a equação 05, da tensão em direção do eixo x .

$$\sigma_y = \nu\sigma_x \quad (04)$$

$$\sigma_x = \frac{E\varepsilon_x}{1-\nu^2} = -\frac{E_z}{1-\nu^2} \frac{d^2\omega}{dx^2} \quad (05)$$

A partir da equação da tensão mostrada, é possível, a partir de uma integração, obter o momento fletor atuante na placa.

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -\int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_z}{1-\nu^2} \frac{d^2\omega}{dx^2} dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2\omega}{dx^2} \quad (06)$$

A rigidez flexural da placa analisada pode ser obtida através da equação 07.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (07)$$

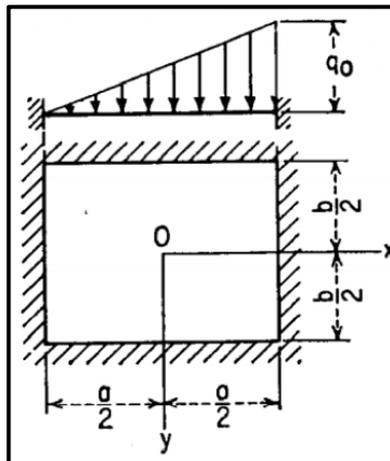
Com as equações apresentadas anteriormente, pode ser obtida a tensão máxima atuante na placa através da seguinte relação.

$$\sigma = \frac{6M_{max}}{h^2} \quad (08)$$

A Figura 4 representa um carregamento hidrostático atuante em uma placa, onde q , neste caso, é a densidade do produto e q_0 o carregamento total, dado pela equação 09, a representa o tamanho da placa analisada.

$$q_0 = aq \quad (09)$$

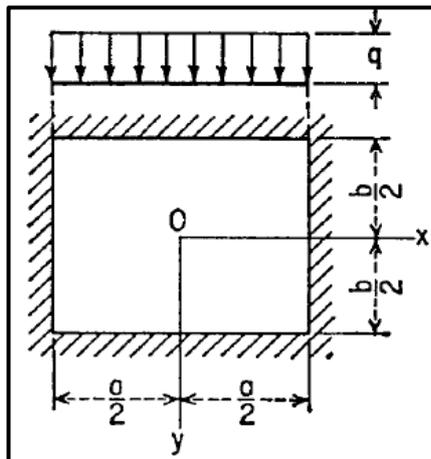
Figura 4 - Carregamento hidrostático atuante em uma placa



Fonte: Timoshenko (1959)

A Figura 5 mostra uma placa uniformemente carregada por um carregamento distribuído representado por q .

Figura 5 - Carregamento uniforme atuante em uma placa



Fonte: Timoshenko (1959)

2.2 CATEGORIA DE TENSÕES EM UM VASO DE PRESSÃO

Segundo Silva Telles (1996) as tensões que atuam em um vaso de pressão, em consequência dos diversos carregamentos solicitantes, podem ser classificadas em três categorias gerais: tensões primárias, tensões secundárias e tensões localizadas máximas.

Dentro das três categorias citadas, as tensões primárias são as únicas que são sempre consideradas em todas as normas de projeto, as outras duas categorias de tensões são levadas em consideração nos cálculos apenas por algumas normas e a elas são atribuídas, nesse caso, tensões admissíveis diferentes das tensões admissíveis para as tensões primárias.

2.2.1 Tensões Primárias

Silva Telles (1996) menciona que as tensões denominadas primárias são aquelas que se desenvolvem no material para satisfazer as condições de equilíbrio estático em relação aos diversos carregamentos atuantes (pressão interna ou externa, pesos, ação do vento, etc.). Estas tensões podem ser normais (tração ou compressão) ou de cisalhamento, isto é, atuando paralela ou perpendicularmente à parede do vaso, respectivamente.

Sua principal característica é não ser autolimitante, ou seja, não é reduzida ou anulada em função de deformações. Essas tensões são proporcionais às cargas de que se originam, portanto quanto maior for a carga atuante no vaso, maior será a tensão. Caso as tensões primárias excedam o limite de elasticidade do material, o equipamento sofrerá uma deformação permanente.

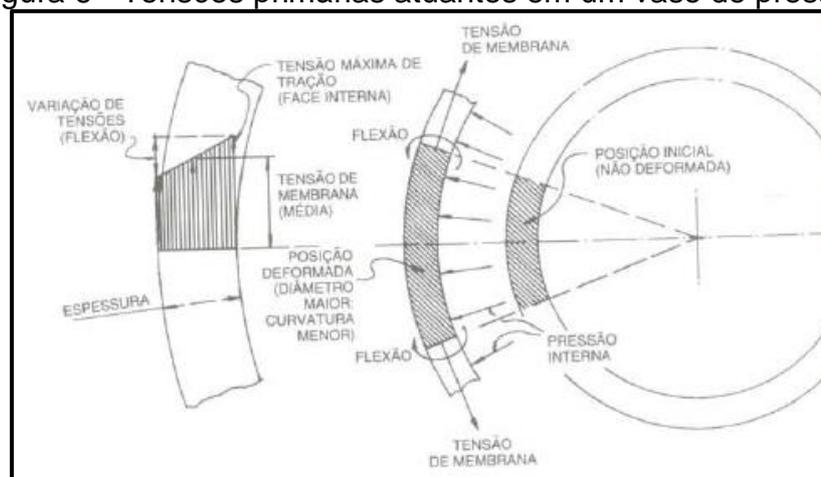
Falcão (2008) menciona que tensões primárias normais podem ser de membrana ou de flexão. Tensão de membrana é a componente da tensão primária que supostamente é constante ao longo de toda a espessura da parede do vaso. Portanto, é o valor que se obtém para essa tensão quando se considera no cálculo a espessura de parede como sendo extremamente fina, tendendo a zero, quase nula. Quando a espessura de parede não é nula, além da tensão de membrana, teremos a tensão de flexão. A pressão interna do vaso gera uma tensão de membrana como sendo de tração, pois o elemento de parede do vaso

tende a aumentar de dimensões. As tensões de flexão surgem, pois, o raio de curvatura da parede tende a aumentar. A tensão de flexão possui um valor variável ao longo da espessura da parede, quando submetido à pressão interna, a tensão é máxima de tração na superfície externa e máxima de compressão na superfície interna. Desta forma, a tensão resultante na superfície interna será a tensão de membrana menos a tensão de flexão, e na superfície externa será a tensão de membrana mais a tensão de flexão.

Falcão (2008) diz que tensões primárias de membrana ainda podem ser divididas em tensões gerais e tensões locais. Tensão geral é aquela distribuída em toda, ou maior parte, da parede do vaso. Tensões locais são aquelas que atuam em uma região limitada da parede do vaso, por exemplo, as tensões resultantes da reação de apoio do próprio vaso.

A Figura 6 mostra a representação das tensões de membrana e de flexão atuantes em um vaso de pressão de seção cilíndrica, sujeito a pressão interna:

Figura 6 - Tensões primárias atuantes em um vaso de pressão



Fonte: Silva Telles (1996)

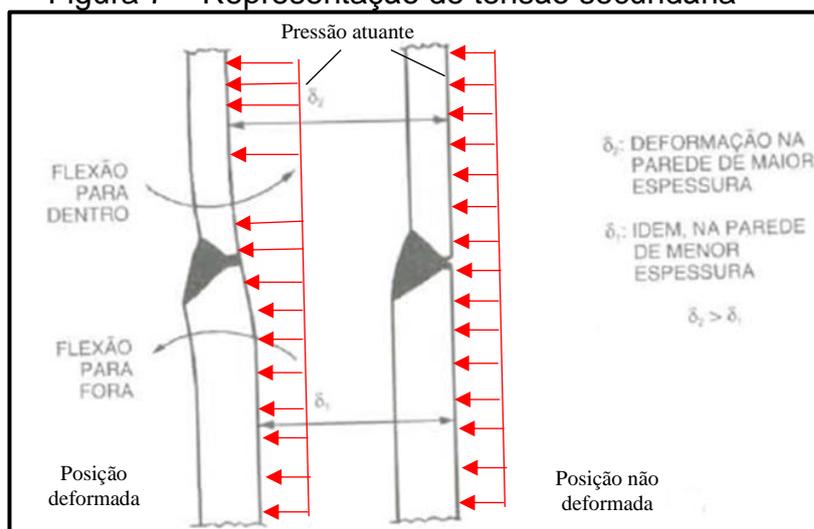
2.2.2 Tensões Secundárias

Falcão (2008) menciona esse tipo de tensões como provenientes das restrições geométricas do vaso ou de estruturas a ele ligadas, incluindo as dilatações diferenciais. As tensões secundárias acontecem, por exemplo, em todas as regiões de transição de um formato para o outro (cilindro-tampo, cilindro-cone, etc.), e em todas as regiões de transição de espessura como consequência da diferença de rigidez das diversas partes.

Silva Telles (1996) cita como a principal característica de todas as tensões secundárias, ser auto limitante, ou seja, caso as tensões secundárias excedam o limite de escoamento, existirá uma redistribuição de tensão e a falha não existirá. Pequenas deformações plásticas locais aliviam estas tensões que, geralmente, não provocam falhas nos equipamentos, e por este motivo têm tensões admissíveis superiores aos das tensões primárias locais.

A Figura 7 ilustra as tensões secundárias em uma região com uma transição brusca de espessura na parede de um vaso de pressão. Caso a parte de menor espessura fosse livre, haveria uma deformação maior (devido à menor resistência), porém, como está soldada à uma parte de maior espessura, a continuidade resulta em uma flexão para dentro na parte de menor espessura e em uma flexão para fora na parte de maior espessura. Essas flexões que originam as tensões secundárias.

Figura 7 – Representação de tensão secundária



Fonte: Adaptado de Silva Telles (1996)

2.2.3 Tensões localizadas máximas

Silva Telles (1996) classifica as tensões localizadas máximas (ou tensões de pico) como sendo as máximas tensões locais ocorridas em regiões limitadas onde acontece uma concentração de tensão. Essas concentrações de tensões dão-se principalmente devido a discontinuidades geométricas no vaso (regiões de transição de formatos, abertura, reforços locais), incluindo discontinuidades de pequena extensão, como por exemplo soldas com penetração incompleta, reforços de solda, desalinhamentos, etc.

Silva Telles (1996), menciona em sua literatura que essas tensões, embora possam atingir valores elevados, geralmente não são perigosas devido ao fato de atuarem em regiões muito pequenas. Entretanto, é necessário evitar valores muito altos dessas tensões pois podem dar origem a trincas por fadiga ou por corrosão sob tensão, ou até causar uma fratura frágil no material.

Alguns exemplos de tensões localizadas (ou tensões de pico):

- a) Tensões nos cantos de descontinuidade;
- b) Tensões devido ao efeito de entalhe;
- c) Tensões térmicas em revestimentos ou sobreposição de solda;

2.3 REQUISITOS DE PROJETO

2.3.1 Pressão máxima de trabalho admissível (PMTA)

Conforme a norma ASME divisão 1, da seção VIII, a Pressão Máxima de Trabalho Admissível (PMTA) é o maior valor permitido para a pressão de trabalho medida no topo do vaso na temperatura e posição normal de operação, considerando o vaso com a espessura corroída. Essa pressão será o menor dos valores de PMTA calculados para as partes essenciais do vaso.

Deve-se subtrair a pressão hidrostática da coluna de líquido da PMTA quando a diferença de altura entre a parte considerada e o topo do vaso for considerada desprezível em relação à pressão interna.

O valor da PMTA é o valor usualmente empregado para a pressão de projeto (P).

2.3.2 Espessura Mínima Requerida

Conforme a norma ASME divisão 1, da seção VIII, a espessura mínima requerida (t) é a espessura mínima do casco e tampos (medida após conformação mecânica e excluindo a sobre espessura de corrosão) necessária para resistir às tensões geradas pela pressão interna e outros esforços a que o vaso vai ser submetido.

Em caso de espessuras muito pequenas, é fundamental verificar a possibilidade de falha por flambagem da parede do vaso durante o projeto.

2.3.3 Norma para vasos de pressão com seção transversal não circular

O apêndice 13 da norma ASME seção VIII traz fórmulas e métodos para o cálculo de tensões de vasos de pressão com seção transversal não circular. O cálculo das tensões atuantes na parede do vaso se dá basicamente pela soma das tensões de membrana com as tensões de flexão.

Conforme a norma ASME seção VIII apêndice 13, para que o vaso possa ser utilizado com segurança, a tensão total calculada (tensão de membrana somada com a tensão de flexão) proveniente de esforços consequentes de pressão ou qualquer outro carregamento mecânico no vaso, não pode exceder os seguintes limites:

- a) A tensão total calculada para as placas que compõem o vaso de seção transversal não circular não deve exceder 1,5 vezes a tensão de projeto permitida (SE);
- b) A tensão total calculada para as placas que compõem o vaso de seção transversal não circular não deve exceder 2/3 do limite de elasticidade do material;

2.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Sendo uma alternativa aos modelos convencionais de análise, o método de elementos finitos (MEF) fornece resultados coerentes com a realidade, podendo ser utilizados para a engenharia e aplicado em qualquer situação, independente da complexidade.

Uma das principais vantagens deste método é que pode ser aplicado em objetos com forma irregular, compostos por diferentes materiais, possuindo condições de contorno variadas.

2.4.1 Geometria do elemento e graus de liberdade

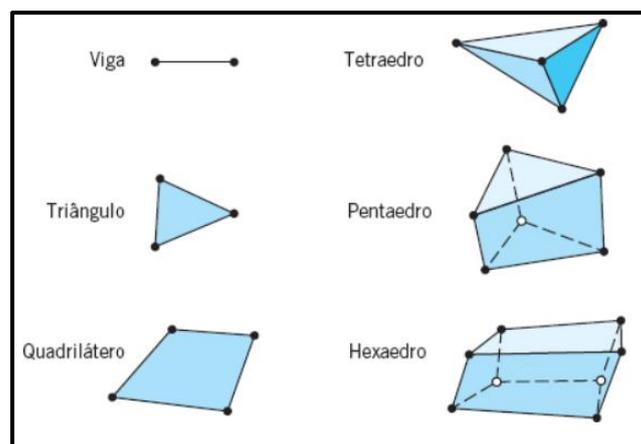
Alves Filho (2013) menciona que uma geometria simplificada, sem detalhes irrelevantes, reduz a necessidade de um computador com alta capacidade de processamento. A simplificação da geometria analisada é uma das etapas mais relevantes na simulação, cabendo ao responsável pela análise

a interpretação do componente, fazendo com que esta simplificação não tenha como consequência erros grosseiros nos resultados finais.

A classificação dos elementos finitos se dá pelo número de dimensões que os constituem. O número de graus de liberdade varia conforme as variáveis dos nós de cada elemento.

Segundo Juvinall (2019), a utilização dos elementos finitos por sua geometria simplificada é importante, mas mesmo assim, pode compor geometricamente os componentes com geometrias complexas. A Figura 8 mostra alguns formatos básicos de elementos utilizados para análise pelo método de elementos finitos. Entendendo a interação física entre os elementos, baseado em seu formato e como eles se distribuem no componente analisado, pode-se chegar a um resultado muito próximo à realidade.

Figura 8 - Exemplos de elementos finitos



Fonte: Juvinall (2019)

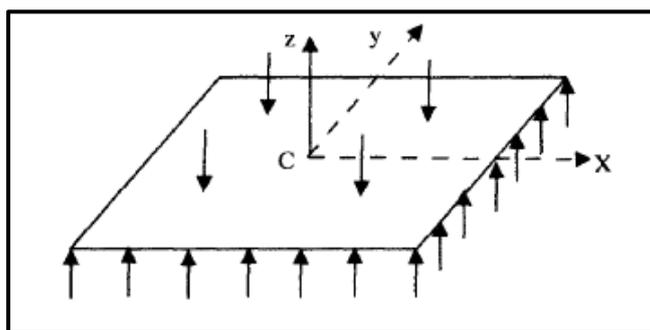
Alves Filho (2013) menciona que uma estrutura pode ser composta por diversos elementos, por este motivo deve-se, inicialmente, identificar o comportamento físico dos trechos da estrutura. A partir deste reconhecimento, pode-se identificar o elemento que melhor representa esse comportamento físico. Normalmente, para a mesma situação, existem várias opções de elementos que podem representar o comportamento do trecho a ser analisado, portanto, cabe ao engenheiro responsável pela análise reconhecer o elemento mais adequado, baseado em seu conhecimento neste tipo de análise.

Alves Filho (2013) cita em sua literatura que para a análise de estruturas metálicas de chapas, por serem corpos que contém uma dimensão (espessura) muito menor do que as outras duas (altura e largura) podem ser representadas

por elementos de estado plano de tensões, placa e casca, visando o cálculo de deformações e tensões.

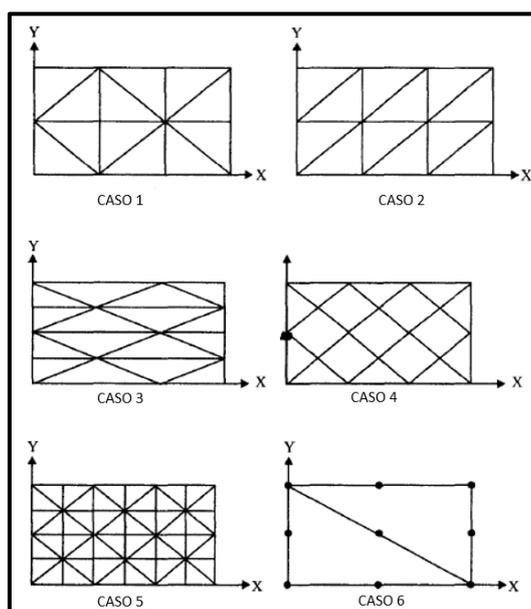
Narasaiah (2008) traz como exemplo em seu livro a comparação entre dois tipos de elementos utilizados para análise de flexão em placas. No caso estudado, a placa está simplesmente engastada em seus quatro lados, sofrendo uma pressão uniforme ao longo de toda a sua extensão, conforme Figura 9. Os elementos utilizados na malha para a análise foram: triangular (casos 4, 5 e 6) e quadrilátero (casos 1, 2 e 3), os quais podem ser observados na Figura 10. Em seguida, a Tabela 1 mostra o número de elementos utilizados, número de nós e a confiabilidade da análise para cada caso, em uma relação entre o resultado teórico dado pela análise pelo MEF e o resultado obtido através de fórmulas teóricas analíticas.

Figura 9 - Exemplo de flexão de placa



Fonte: Narasaiah (2008)

Figura 10 – Comparação entre malhas (elementos quadriláteros x triangulares)



Fonte: Narasaiah (2008)

Tabela 1 - Resultados da análise

CASO →	1	2	3	4	5	6
Tipo de elemento	quadrilátero	quadrilátero	quadrilátero	triangular	triangular	triangular
Nº de nós	9	15	25	9	15	25
Nº de elementos	4	8	16	8	16	32
Deslocamento em Z (relação entre o valor obtido pelo MEF / valor real)	1,07	1,045	1,02	0,966	0,989	0,995

Fonte: Narasaiah (2008)

Analisando a Tabela 1, é constatado que o tipo de elemento que melhor representa a realidade no caso de flexão de placas é o triangular, em especial no caso 3, visto que a relação entre o deslocamento obtido pelo MEF e o valor real é muito próximo de 1. Outra conclusão observada nesse exemplo, é que quanto maior o número de elementos utilizados na malha, mais próximo ao resultado analítico a análise será.

2.4.2 Geração da malha

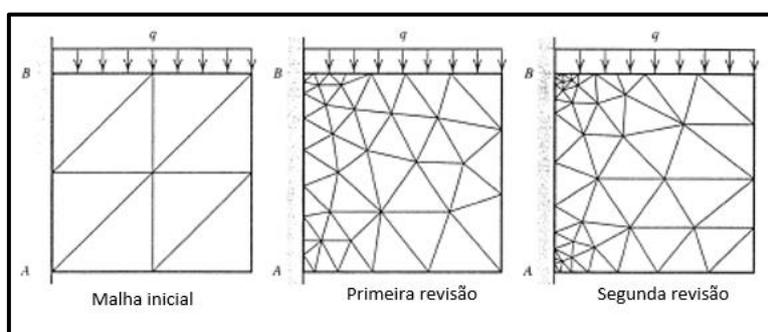
Narasaiah (2008) cita a geração da malha como uma das tarefas mais difíceis do processo de análise por elementos finitos. A maior parte dos programas de análise encontrados no mercado hoje em dia, que utilizam este método para a computação de dados, gera a malha de forma automática, baseado somente na geometria do componente e desconsiderando a sua aplicação prática. Sendo assim, a malha gerada de forma automática pelo próprio *software*, em muitos casos, acaba não representando apropriadamente a situação em análise.

Logan (2007) cita que a malha do componente analisado deve ser revisada e refinada até que seja possível obter resultados satisfatórios que condizem com o comportamento esperado pelo componente em questão. A responsabilidade pela interpretação e adaptação da malha cabe ao profissional que está a fazer a análise, devendo ser mais refinada nas áreas críticas, onde

as cargas atuam de forma mais concentrada. Já nas áreas onde há pouca atuação das cargas no componente, a malha pode ser feita de forma mais grosseira, com menos elementos.

A Figura 11 mostra o caso de uma barra engastada do seu lado esquerdo com uma carga uniforme aplicada em sua parte superior. A malha gerada automaticamente pelo *software* de análise aparece como malha inicial, juntamente com a suas respectivas revisões. Pode ser observado que a malha foi refinada considerando a aplicação prática do componente analisado, se tornando mais fina e detalhada, principalmente nos cantos superior e inferior esquerdo, onde o objeto de estudo sofre mais tensões.

Figura 11 - Adaptação da malha

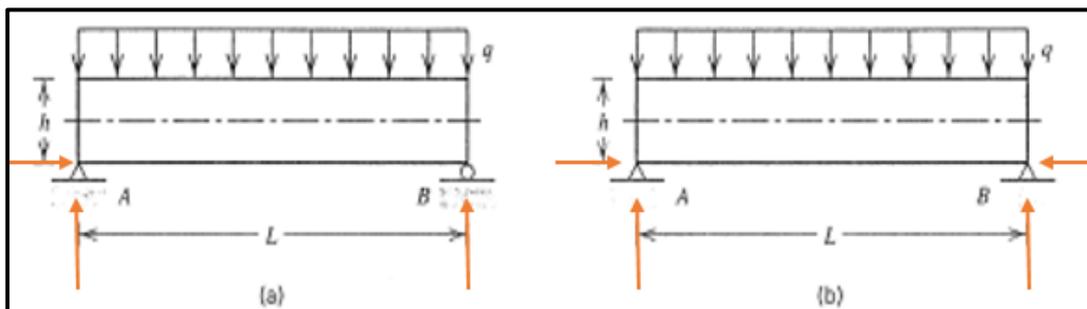


Fonte: Cook (1994)

2.4.3 Condições de contorno

Segundo Cook (1994) as condições de contorno são essenciais para a análise por elementos finitos. Sem elas bem definidas, não haveria estabilidade alguma a fim de proporcionar uma reação no mesmo em relação às forças aplicadas nele. Por este motivo, essas condições de contorno devem ser representadas no *software* o mais fiel possível à situação real, pois qualquer representação equivocada pode comprometer a análise em questão, mostrando resultados não condizentes com a realidade. Conforme mostra a Figura 12, a troca do rolete mostrado em (a) por um apoio, mostrado em (b), faz com que uma força horizontal, que não estava presente em (a), atue no sistema.

Figura 12 – Mudança dos vetores atuantes na condição de contorno



Fonte: Adaptado de Cook (1994)

Logan (2007), traz as condições de contorno classificadas em dois tipos: homogêneas e não-homogêneas. Condições homogêneas limitam qualquer deslocamento, já as condições não-homogêneas, determinam regiões nas quais se espera haver deslocamentos, como a extremidade livre de uma viga engastada, por exemplo.

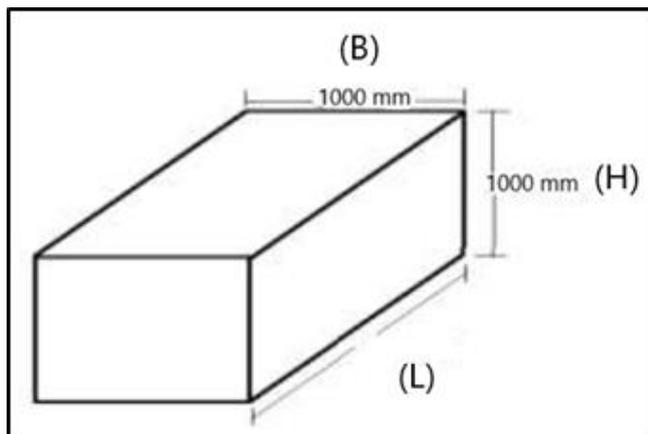
2.5 TRABALHO CORRELATO

2.5.1 Análise estrutural de um vaso de pressão com seção transversal não circular pelo método de elementos finitos

Kumar, Gupta e Singh (2019) realizaram uma análise estrutural, com aplicação do método de elementos finitos, de um vaso de pressão com seção transversal não circular. Neste estudo foi utilizado o método de elementos finitos, juntamente com o auxílio do *software* de análise *Ansys®*, para calcular as tensões equivalentes, assim como a deformação total, em alguns modelos de vaso de pressão.

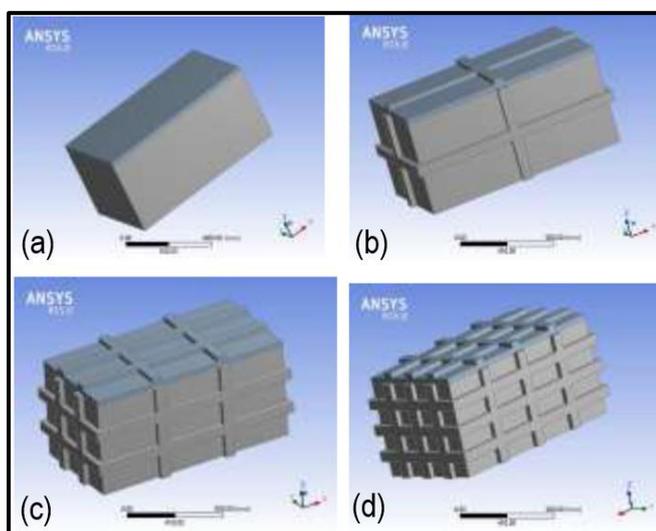
Foram observadas algumas versões do mesmo vaso de pressão, mostrado na Figura 13, o qual manteve sempre a mesma altura, largura, espessura de chapa e pressão interna, variando apenas o seu comprimento (L), desde 1.000 mm até 10.000 mm. Além disso, também foi analisada a influência de barras de reforço externas na deformação e tensão suportada, em modelos com 2, 4 e 6 barras, conforme mostrado na Figura 14.

Figura 13 - Representação geral do objeto de estudo



Fonte: Adaptado de Kumar, Gupta e Singh (2019)

Figura 14 - Variações do objeto de estudo



Fonte: Adaptado de Kumar, Gupta e Singh (2019)

É observado que, quando as barras de reforço são adicionadas ao vaso, a deformação total é reduzida quando comparado com o vaso de pressão simples, sem reforço. Além disso, no caso do vaso simples, a área mais afetada pela pressão interna são os limites das chapas, ou seja, as bordas do vaso. Ao adicionar barras de reforço externas, a região com alta concentração de tensão se desloca para a área onde estão localizados os reforços.

2.5.2 Análise estrutural de um vaso de pressão com seção transversal não circular com tamanho finito

Ahmed, Blach, Hoa, Kwok e Ahmed (1990) trazem diversas análises de um vaso de pressão, de tamanho finito e seção transversal não circular,

questionando o método utilizado para o dimensionamento de vasos de pressão com seção transversal não circular trazido pela norma ASME divisão VIII. Dentro do apêndice 13, a norma traz somente a análise das tensões atuantes na seção transversal, analisando-a como uma estrutura rígida, desprezando as placas das extremidades do vaso. Normalmente os vasos suportam pressões muito maiores do que as permitidas pela norma, o que foi constatado na conclusão do artigo.

O vaso em questão possui uma baixa capacidade de armazenamento de produto e sua aplicação é dada em pequenas pressões, definições para as quais a norma ASME não possui divisão, pelo menos até a data de publicação do artigo.

As análises do vaso foram realizadas por diferentes métodos, teóricos e práticos. Dentro dos métodos teóricos está a análise numérica (MEF) e também cálculos analíticos de tensões e deflexões baseados na norma ASME, divisão VIII, apêndice 13, assim como na teoria de pequenas deflexões de chapa e na teoria de grandes deflexões. Entre os testes realizados para a validação e comparação com as análises teóricas, estão as medições com sensores *Strain Gage* e a técnica de *Brittle Coating*.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Este capítulo abordará os materiais e métodos utilizados para a realização da análise proposta.

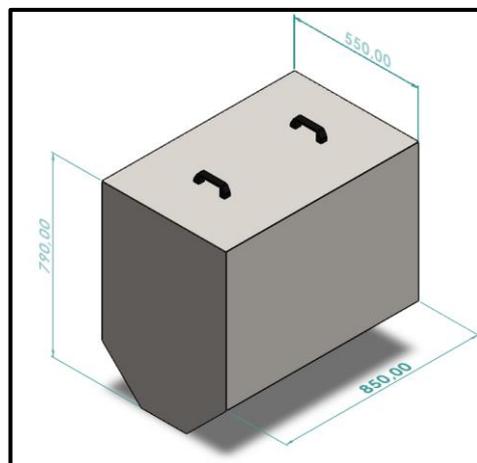
3.1 MATERIAIS

3.1.1 Objeto de estudo

O presente trabalho trata da avaliação estrutural de um tanque com seção transversal não circular, aplicado na indústria alimentícia, originalmente funcionando como um reservatório de produto, normalmente água ou sucos naturais, em máquinas lineares de envase. As principais forças atuantes neste componente são a pressão hidrostática, gerada pela parede de produto armazenado, e a pressão interna ao qual ele teve que ser submetido. Dentro da sua aplicação original, sendo submetido somente à pressão hidrostática, não há histórico de falha em operação.

O reservatório, mostrado na Figura 15, atua como um meio de armazenar produto. Contudo, neste caso, o equipamento, que havia sido projetado para armazenar água e sucos naturais, foi adaptado para o envase de álcool gel. Sabendo que o comportamento do álcool gel se dá de forma diferente ao da água, devido a sua densidade e viscosidade, o tanque foi submetido à pressão interna como uma alternativa para facilitar o escoamento de produto do tanque para o frasco.

Figura 15 – Reservatório padrão para máquinas de envase linear



Fonte: Autor (2021)

Devido à sua aplicação na indústria alimentícia, o material utilizado para construção do tanque foi o aço inoxidável AISI 304. Este aço, além de possuir excelente propriedades mecânicas e ser de fácil aquisição no mercado nacional, se destaca pela maior presença de níquel e cromo em sua composição, o que garante que não haverá contaminação do produto armazenado e uma maior durabilidade do equipamento. A Figura 16 possui informações de composição e propriedades do aço.

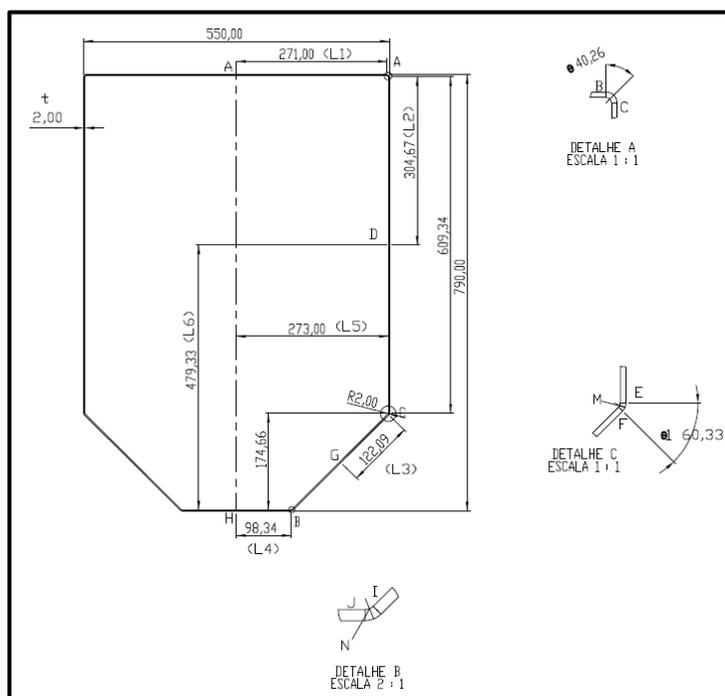
Figura 16 - Propriedades do aço AISI 304

304							
Composição química							
Aperam	C	Mn	Si	P	S	Cr	Ni
304	0,08	2,0	0,75	0,040	0,030	18,0 a 20,0	8,0 a 11,0
Propriedades mecânicas							
Aço	Valores	Limite de escoamento (MPa)	Limite de resistência (MPa)	Alongamento (%)	Dureza máxima (HRB)		
K03	Norma ASTM	205	515	35	90		
(304)	Típicos	340	700	62	90		

Fonte: APERAN (2019)

A Figura 17 representa a seção transversal do vaso analisado, contendo medidas utilizadas para o cálculo de tensões. Sua estrutura foi construída com chapa de 2mm de espessura, conforme representado por “t”.

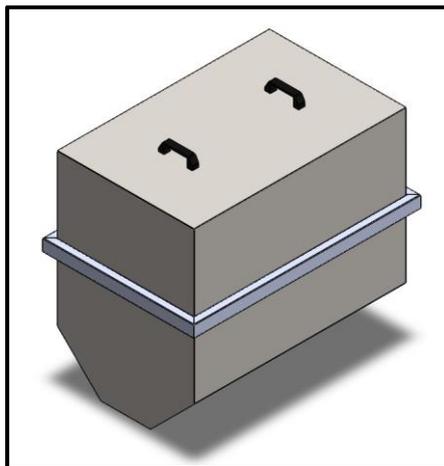
Figura 17 - Seção transversal do tanque analisado



Fonte: Autor (2021)

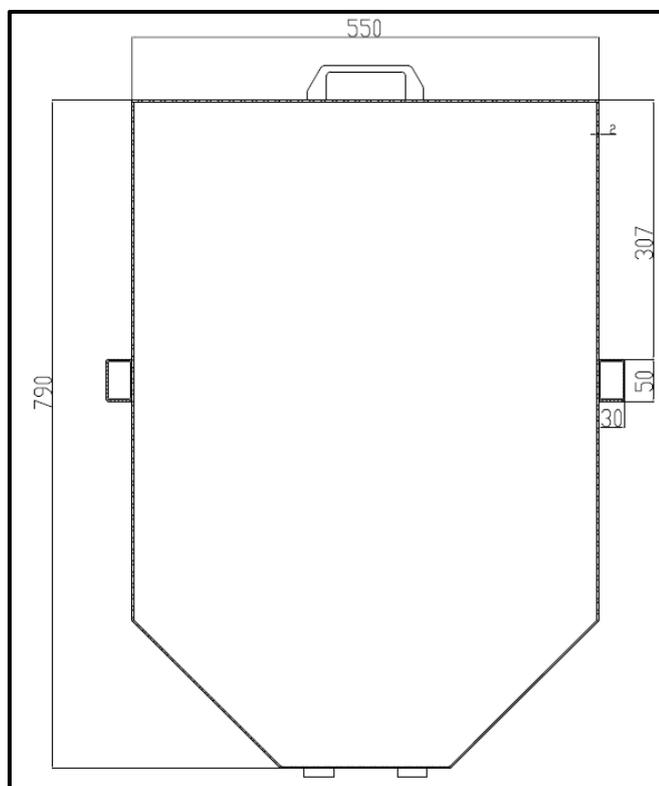
Com o intuito de fazer o reservatório resistir a maiores carregamentos internos, uma solução possível no momento, visto que o tanque já foi construído e montado na máquina, foi a solda de tubos de reforço externo, conforme mostrado na Figura 18 e Figura 19. Os tubos utilizados são retangulares e feitos do mesmo material do vaso, aço inoxidável AISI 304, possuindo dimensões de 50x30mm e parede de 1,5mm, facilmente encontrados no mercado nacional.

Figura 18 - Tanque reforçado



Fonte: Autor (2021)

Figura 19 - Seção transversal do tanque reforçado



Fonte: Autor (2021)

3.2 MÉTODOS

3.2.1 Análise teórica através da norma ASME

O apêndice 13 da norma ASME, seção VIII traz equações para o cálculo de tensões de vasos de pressão com seção transversal não circular. Contudo não existe, dentro da norma, um capítulo que trate de uma seção transversal exatamente igual a analisada neste trabalho. Portanto, inicialmente foi necessário interpretar o equacionamento trazido pela norma e adaptá-lo conforme a necessidade para que se chegasse ao equacionamento condizente à seção em questão. Tal equacionamento está apresentado no Apêndice A.

Utilizando o aplicativo *Excel*, foi desenvolvido uma planilha de cálculo para realizar o cálculo das tensões de membrana, flexão e totais atuantes na seção transversal do vaso, conforme a norma ASME, Seção VIII, apêndice 13. Essa planilha traz todo o equacionamento contido no Apêndice A e teve como objetivo facilitar a realização dos cálculos propostos pela norma, para que assim fosse possível verificar a possibilidade de pressurização interna do reservatório, o utilizando como um vaso de pressão.

3.2.2 Método de análise numérica

O método de análise numérica foi realizado através do *software Ansys®*, onde o tanque foi submetido a todos os esforços externos aos quais estaria sujeito na sua aplicação prática, como pressão hidrostática do líquido armazenado, força gravitacional e pressão interna. A simulação foi realizada com diferentes pressões internas a fim de identificar o limite máximo de forças ao qual o vaso poderia ser sujeito sem que as tensões atuantes excedessem o limite elástico, de 205 MPa, do material utilizado para sua construção.

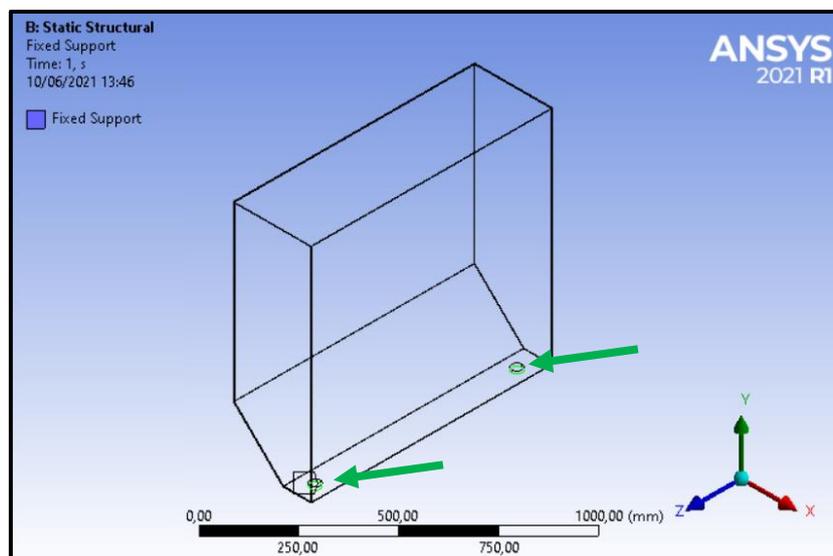
3.2.2.1 Pré-processamento

A geometria foi inicialmente modelada através de *software CAD SolidWorks®*, conforme a Figura 15, e depois adaptada através do *SpaceClaim* onde furações, arredondamentos e componentes como puxadores, que não possuíam influência significativa nos resultados finais, foram removidos a fim de

agilizar ao máximo o processamento da simulação e também para facilitar a discretização da geometria, gerando resultados mais condizentes com a realidade.

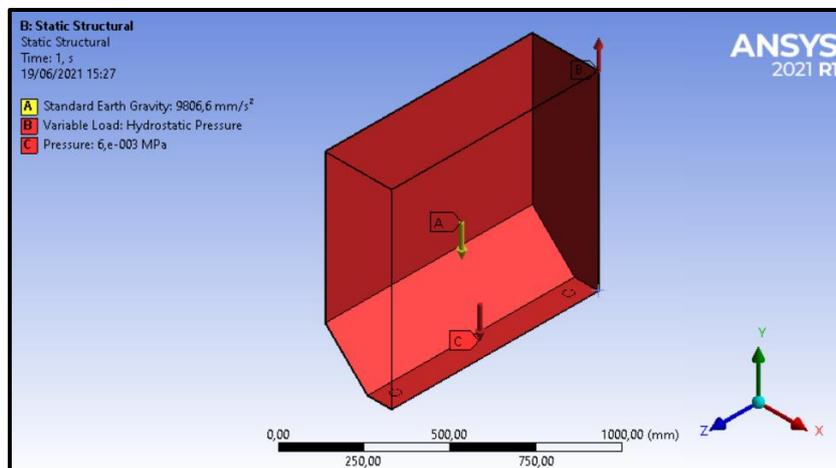
Ainda na etapa do pré-processamento foi realizada a definição das condições de contorno, onde foram indicadas as restrições de movimento e os carregamentos atuantes no tanque. Durante o funcionamento da máquina, o reservatório se mantém estático, portanto, todos os movimentos em X, Y e Z foram restritos. Os pés de apoio do tanque, pontos de fixação, estão indicados na Figura 20. A Figura 21 representa os carregamentos atuantes na estrutura a ser analisada, sendo estes pressão interna (C), pressão hidrostática (B) e força gravitacional (A).

Figura 20 - Pontos fixos do tanque para análise numérica



Fonte: Autor (2021)

Figura 21 - Carregamentos atuantes no tanque

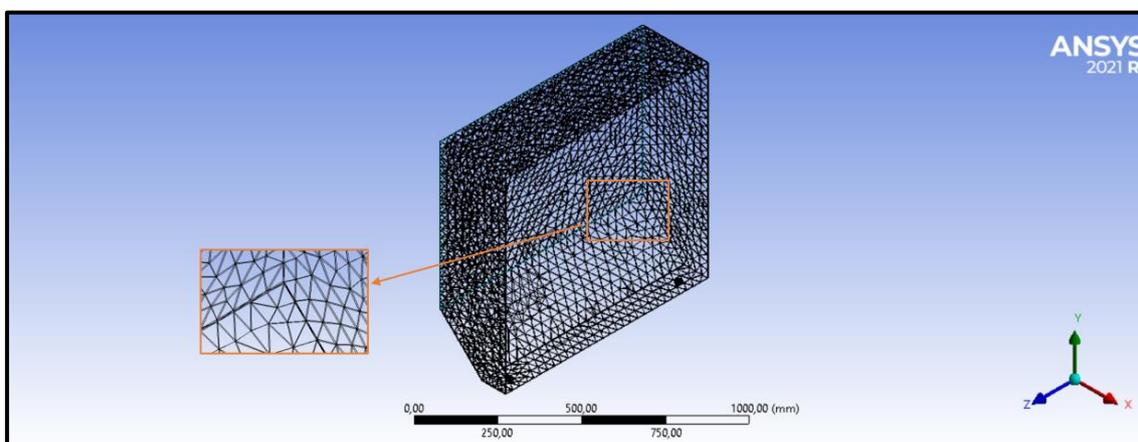


Fonte: Autor (2021)

O estudo foi realizado utilizando elementos do tipo sólido, mais precisamente tetraedros para a geração da malha, pois é o elemento que melhor representa o comportamento de chapas metálicas, conforme mostra Narasaiah (2008).

Buscando por uma análise mais próxima possível da realidade, a malha foi adaptada conforme a necessidade, sendo refinada nos principais pontos de acúmulo de tensão. Na Figura 22 está ilustrada a malha primária, que foi gerada de forma automática e com distribuição uniforme por todo o componente. Na Tabela 2 pode ser verificadas as características da malha gerada.

Figura 22 - Malha primária



Fonte: Autor (2021)

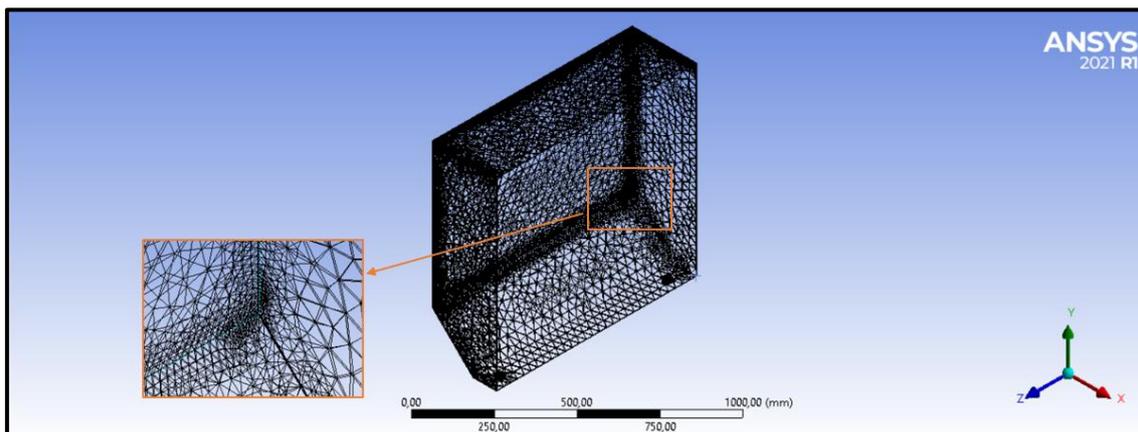
Tabela 2 - Características da malha inicial

Número de elementos	10756
Número de nós	23518
Configuração dos elementos	Tetraedros
Tamanho dos elementos (m)	0,03

Fonte: Autor (2021)

Foi realizada uma adaptação da malha, com o objetivo de verificar a convergência dos resultados. A malha foi refinada conforme os principais pontos de acúmulo de tensão. Na Figura 23 está ilustrando o trabalho realizado e suas características estão explícitas na Tabela 3.

Figura 23 - Malha refinada nas regiões de acumulo de tensões



Fonte: Autor (2021)

Tabela 3 - Características da malha final

Número de elementos	52484
Número de nós	91546
Configuração dos elementos	Tetraedros
Tamanho dos elementos (m)	0,03

Fonte: Autor (2021)

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

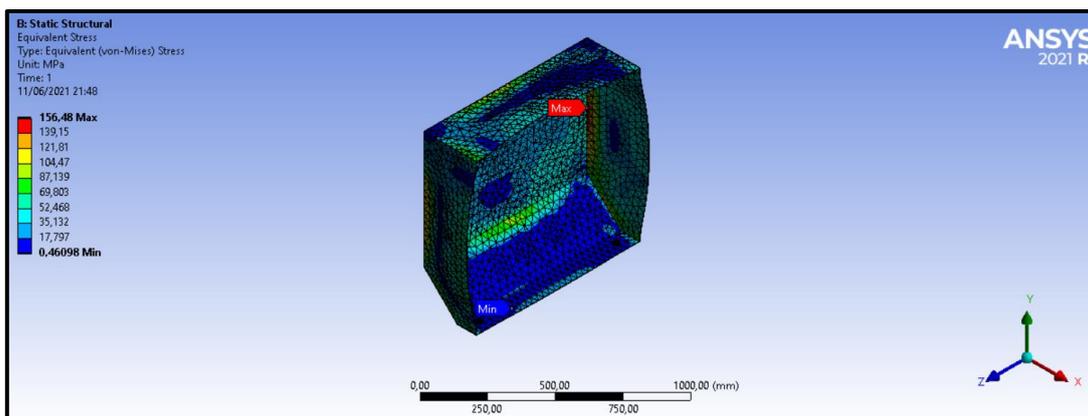
Neste capítulo serão apresentados os resultados referentes à análise do tanque em questão. Serão abordados os resultados conferidos pela norma, assim como os resultados obtidos pela análise numérica.

4.1 AVALIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA DOS RESULTADOS

4.1.1 Análise da convergência Numérica

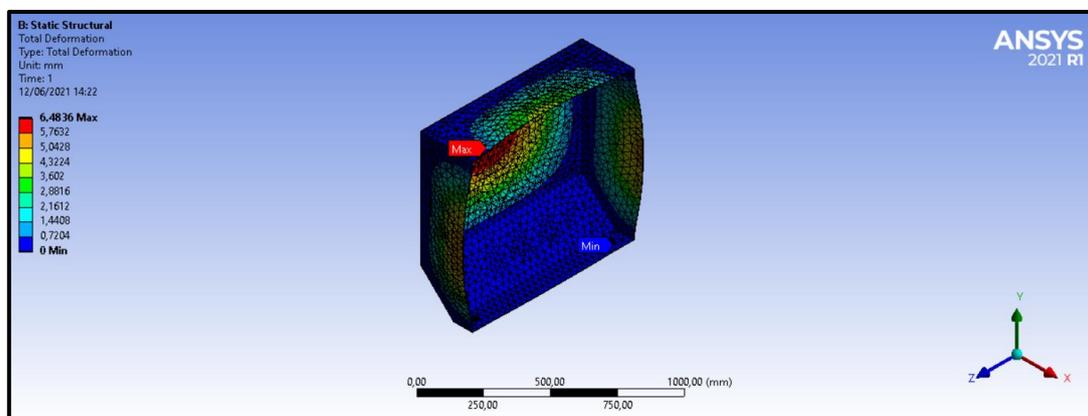
A Figura 24 mostra o resultado de tensões equivalentes de Von Mises nas paredes do vaso de pressão que suporta, além do peso próprio e da pressão hidrostática do fluido armazenado, uma pressão manométrica extra de 6 kPa. A Figura 25 apresenta os resultados de deslocamento sob as mesmas condições e ambas as análises foram realizadas com a malha primária.

Figura 24 - Resultado de tensões da análise numérica com a malha primária



Fonte: Autor (2021)

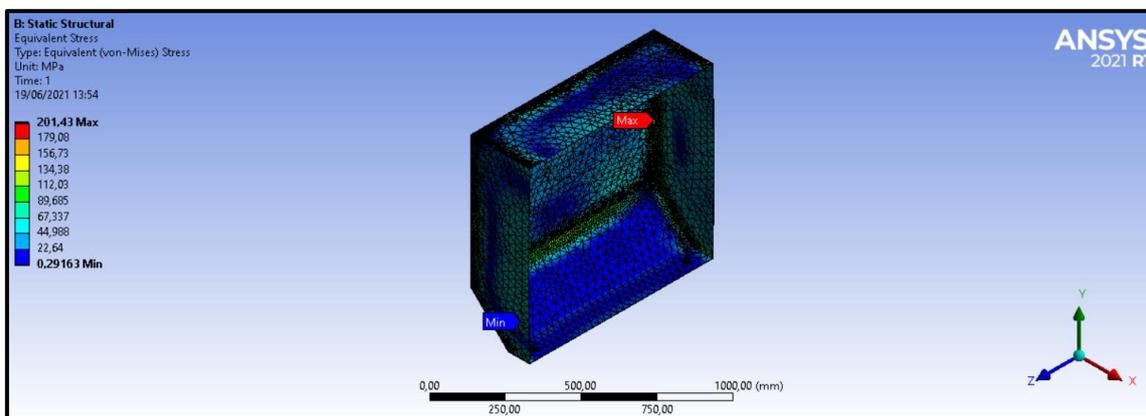
Figura 25 - Deslocamento total do vaso com a malha primária



Fonte: Autor (2021)

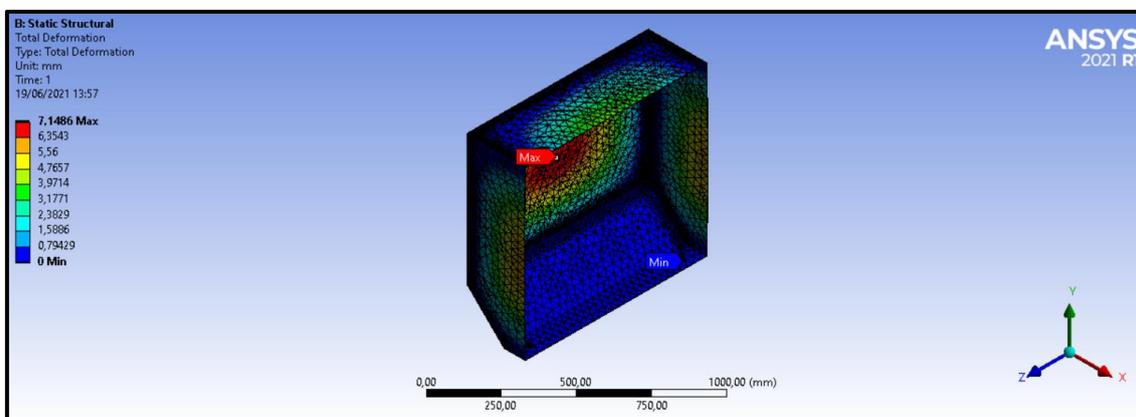
Após identificados os principais pontos de acúmulo de tensão, a malha foi refinada para que gerasse resultados o mais próximo possível da realidade. Na Figura 26 é possível visualizar que o valor do resultado de tensão máxima atuante, para uma mesma pressão interna de 6 KPa, difere, de forma significativa, do resultado obtido através do primeiro ensaio, feito com a malha primária. Pode ser notado que o local com o maior acúmulo de tensão é o mesmo em todas as análises.

Figura 26 - Resultado de tensões da análise numérica com refinamento 01 da malha



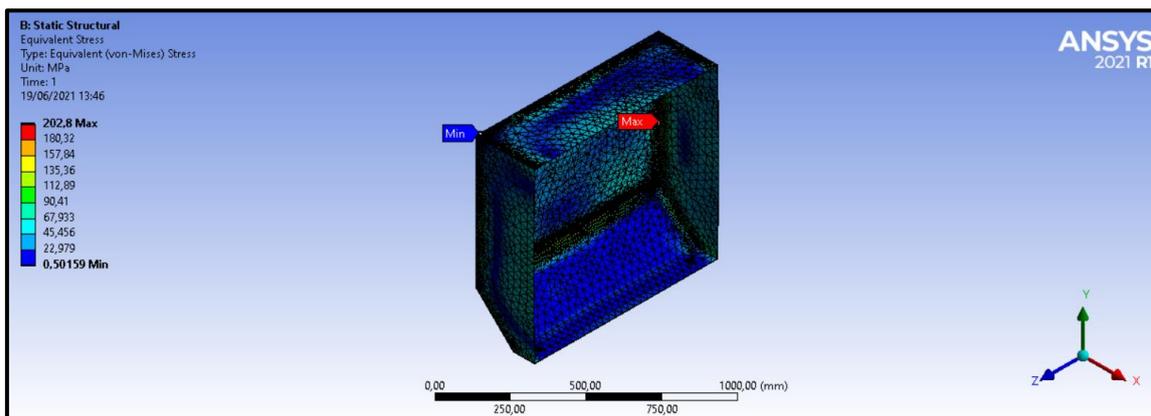
Fonte: Autor (2021)

Figura 27 - Deslocamento total do vaso com refinamento 01 da malha



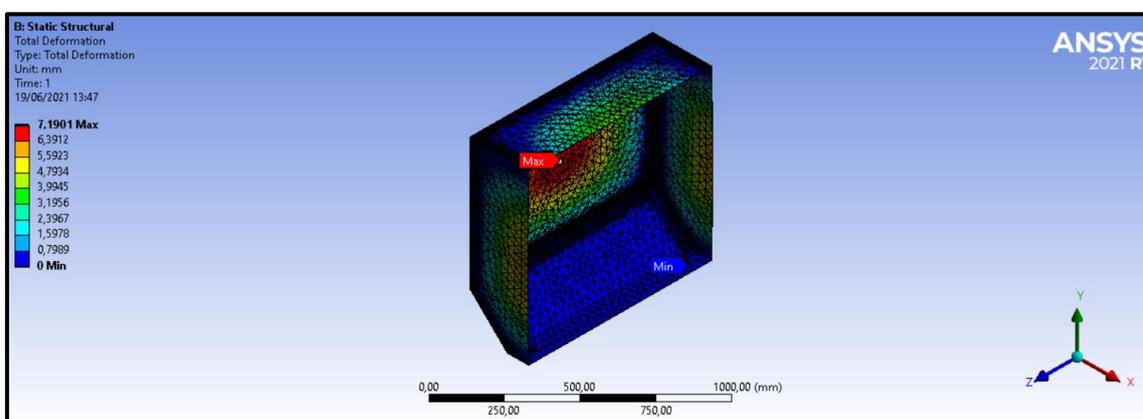
Fonte: Autor (2021)

Figura 28 – Resultado de tensões da análise numérica com refinamento 02 da malha



Fonte: Autor (2021)

Figura 29 - Deslocamento total do vaso com refinamento 02 da malha



Fonte: Autor (2021)

Na Tabela 4 estão explícitos os resultados das análises numéricas, gerados utilizando as três malhas, onde pode ser visualizado a convergência obtida entre o refinamento 01 e o refinamento 02. Do ponto de vista de convergência numérica de resultados, não há necessidade de mais refinamentos da malha, portanto o refinamento 01 foi utilizado para a obtenção dos resultados finais.

Tabela 4 – Resultados obtidos para as diferentes malhas

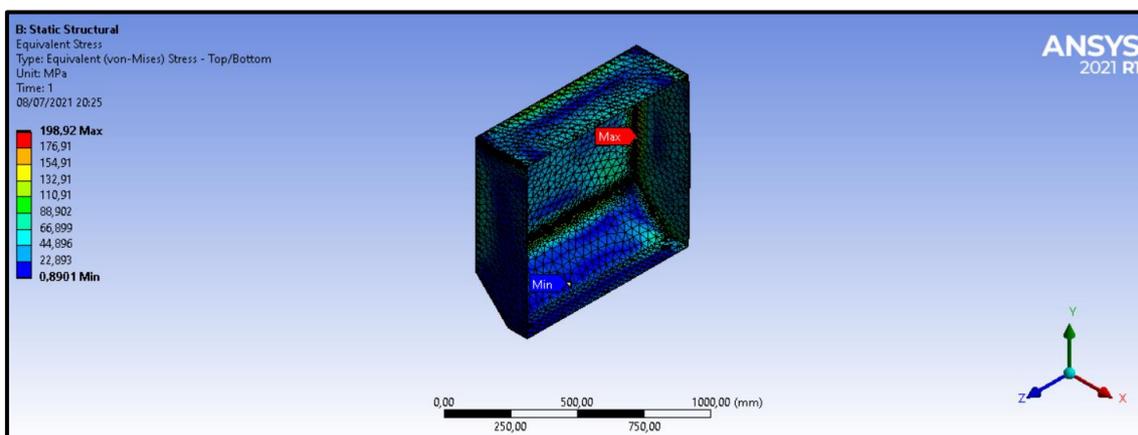
	Tensão (MPa)	Deslocamento (mm)
Malha Primária	156,5	6,48
Refinamento 1	201,4	7,15
Refinamento 2	202,8	7,19

Fonte: Autor (2021)

Neste tipo de análise, a utilização de elementos de placa e casca seria a mais indicada, pois com um menor número de elementos na malha, e menos tempo de processamento, pode se obter resultados condizentes com o

esperado. A simulação foi realizada novamente utilizando elementos de placa e casca. Os resultados finais de tensão apresentados pelo *software* tiveram uma diferença de 1,9% aos obtidos com elementos sólidos, conforme mostrado na Figura 30 e Tabela 5, portanto, foram mantidos os elementos sólidos na realização das análises.

Figura 30 - Tensão obtida com elementos de casca



Fonte: Autor (2021)

Tabela 5 - Resultados Elemento sólido x casca

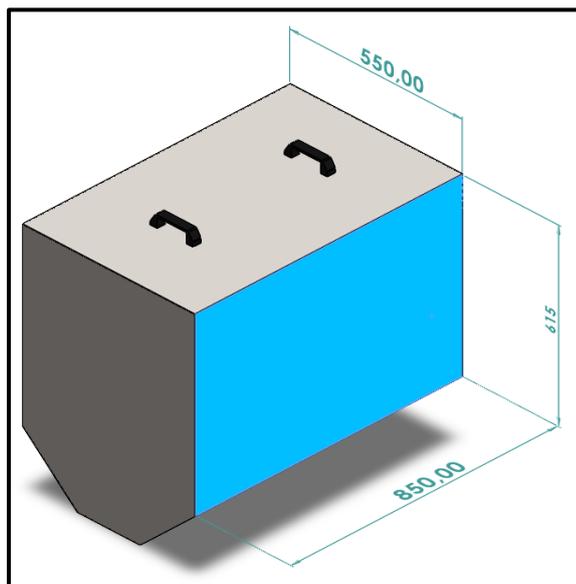
	Tensão (MPa)	Deslocamento (mm)
Elemento sólido	202,8	7,19
Elemento de casca	198,92	7,91

Fonte: Autor (2021)

4.1.2 Análise da convergência Analítica

A fim de validar os resultados obtidos pelo método de análise numérica, foi realizado o cálculo analítico das tensões atuantes e deflexão máxima no vaso através da teoria contida na literatura de Timoshenko (1959). A parede do vaso utilizada para a verificação pode ser visualizada na Figura 31. O equacionamento utilizado para realizar tais cálculos estão apresentados no item 2.1.1 deste trabalho. Algumas tabelas importantes, utilizadas para o desenvolvimento dos cálculos analíticos estão no apêndice-B.

Figura 31 - Parede analisada para validação da análise numérica



Fonte: Autor (2021)

A Tabela 6 mostra os valores de densidade do produto armazenado, pressão interna e espessura de chapa utilizados para os cálculos e para os dados de entrada na análise numérica.

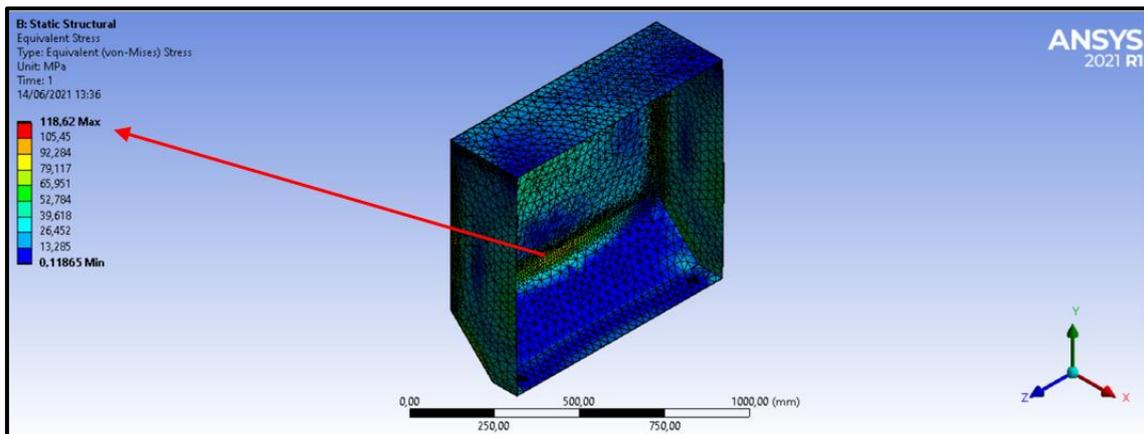
Tabela 6 - Dados de entrada para cálculo analítico

DADOS DE ENTRADA	
Densidade do produto (N/m ³)	8532
Pressão interna (Pa)	6000
Espessura de chapa (mm)	2
Altura da chapa (mm)	615
Largura da chapa (mm)	850

Fonte: Autor (2021)

Em um primeiro momento foram calculadas as tensões e o deslocamento total gerados pela pressão hidrostática atuante no vaso. A Figura 32 mostra os resultados das tensões obtidas através da análise por elementos finitos, já o deslocamento pode ser visualizado na Figura 33. A Tabela 7 mostra as soluções obtidas tanto pela análise numérica, quanto pelo cálculo analítico realizado pela teoria de Timoshenko (1959).

Figura 32 - Tensões equivalentes na placa com pressão hidrostática atuante (MEF)



Fonte: Autor (2021)

Figura 33 - Deslocamento total da placa com pressão hidrostática atuante (MEF)

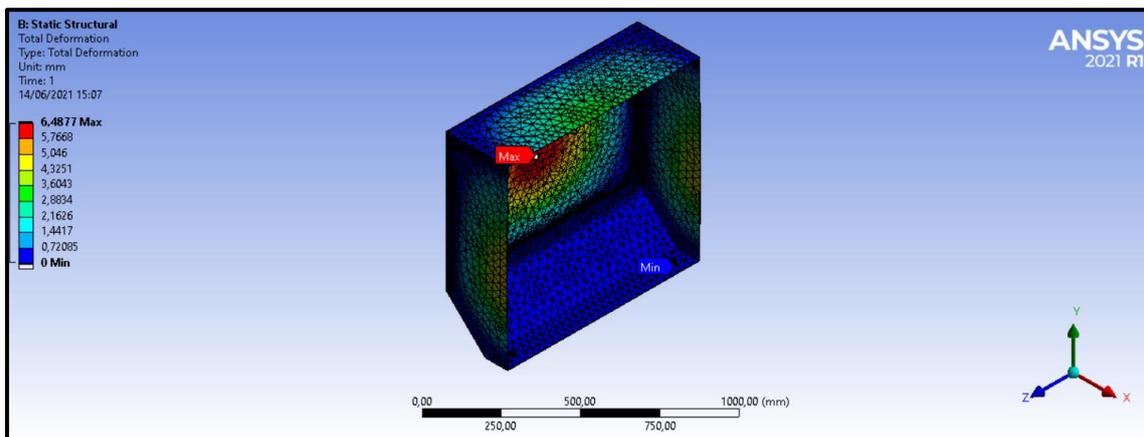


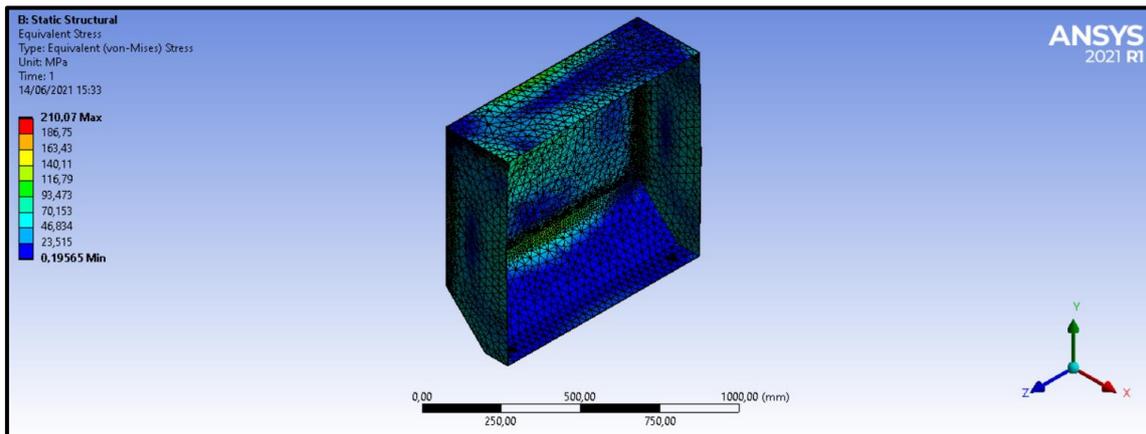
Tabela 7 - Resultados para pressão hidrostática

PRESSÃO HIDROSTÁTICA			
	MEF (MPa)	Analítico (MPa)	DIF. (%)
Tensões (MPa)	118,62	133,55	11,2
Deslocamento (mm)	6,5	5,5	-18,2

Fonte: Autor (2021)

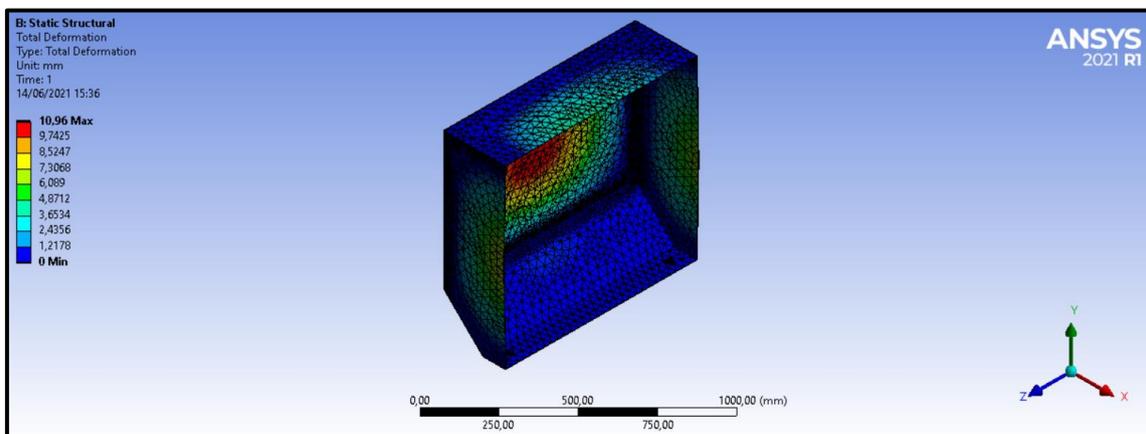
Após a verificação dos esforços causados pela pressão hidrostática, foi realizada a análise para a pressão interna atuante no vaso. As tensões resultantes são mostradas na Figura 34 e o deslocamento na Figura 35. A Tabela 8 contém os resultados obtidos do cálculo analítico e da análise numérica.

Figura 34 - Tensões equivalentes na placa com pressão interna atuante (MEF)



Fonte: Autor (2021)

Figura 35 - Deslocamento total da placa com pressão interna atuante (MEF)



Fonte: Autor (2021)

Tabela 8 - Resultados para pressão interna

PRESSÃO INTERNA			
	MEF (MPa)	Analítico (MPa)	DIF. (%)
Tensões (MPa)	210,07	252,67	16,8
Deslocamento (mm)	11	12,4	11,3

Fonte: Autor (2021)

4.1.3 Análise numérica do reservatório com cinta de reforço

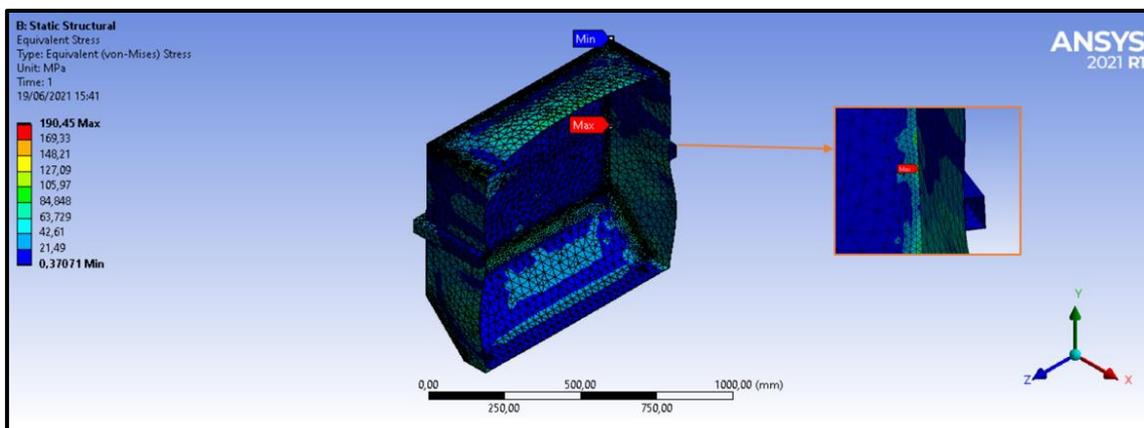
Assim como mostrado no item 4.2.1, foi realizada uma simulação inicial no vaso, com a malha primária. Após identificados os principais pontos de acúmulo de tensão, a malha foi refinada e adaptada, seguindo os mesmos passos mostrados no item 4.2.1, até que se obteve uma convergência dos resultados, para que a análise ficasse o mais condizente com a realidade.

A Figura 36 mostra os resultados gerados pela análise numérica, para uma pressão interna de 10 KPa utilizando a malha refinada, das tensões equivalentes atuantes no tanque reforçado. A região de maior deslocamento de chapa não é mais observada na parte lateral do componente, mas sim na tampa, conforme mostrado na Figura 37.

Ao comparar a análise numérica do reservatório reforçado com o original, é possível perceber que a região com maior acúmulo de tensões se desloca de uma das bordas do vaso, para a região onde se encontra a barra de reforço externo, conforme mostrado na Figura 36. Este mesmo resultado também pode ser verificado em um dos trabalhos correlatos mencionado no item 2.5 deste trabalho.

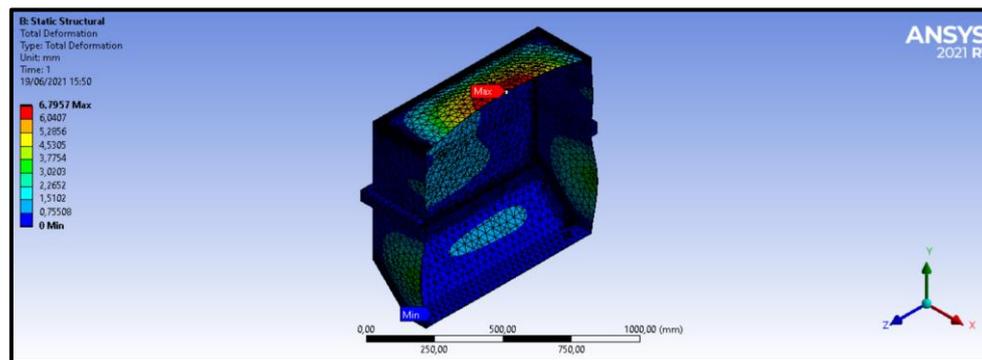
O deslocamento dos pontos de maior concentração de tensões para um local próximo às barras de reforço faz total sentido, pois a placa tende a expandir naturalmente ao ser submetida a alguma força externa. Ao adicionar uma barra que impeça essa expansão, é previsto que a maior parte das tensões se acumule em pontos próximos a esta barra.

Figura 36 - Resultado de tensões da análise numérica para o tanque reforçado com a malha final



Fonte: Autor (2021)

Figura 37 - Deslocamento total do vaso reforçado com a malha final



Fonte: Autor (2021)

Na Tabela 9 estão explícitos os resultados das análises numéricas obtidos para os dois modelos de tanque, sem reforço e com reforço externo. O tanque reforçado suporta uma pressão interna 67% maior do que a suportada pelo reservatório original. Ao verificar as tensões equivalentes atuantes e deformações em cada modelo, observa-se uma redução de 6% e 5,5% para o tanque reforçado.

A Tabela 9 também traz as tensões atuantes no vaso reforçado quando submetido à pressão máxima suportada pelo vaso original, sem reforço externo. Nesse caso, pode-se notar uma redução de quase 50% das tensões atuantes no vaso.

Tabela 9 - Comparação dos resultados para os diferentes modelos

TANQUE ORIGINAL		TANQUE REFORÇO EXTERNO		
Pressão interna (KPa)	6	Pressão interna (KPa)	6	10
Tensão (MPa)	202,8	Tensão (MPa)	111,02	190,45
Deslocamento total (mm)	7,19	Deslocamento total (mm)	5,05	6,79

Fonte: Autor (2021)

4.2 AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS CONFORME NORMA ASME

A Tabela 10 traz os dados de entrada utilizados para os cálculos de tensão. As medidas L1 até L6 podem ser verificadas na Figura 17 deste trabalho, a qual traz a seção transversal do tanque analisado.

Tabela 10 - Dados de entrada para cálculos de tensão conforme ASME

DADOS DE ENTRADA	
Pressão (P) N/mm ²	0,006
Espessura de chapa "t" (mm)	2
Raio dos cantos superiores "R" (mm)	2
L1 (mm)	271
L2 (mm)	304,67
L3 (mm)	122,09
L4 (mm)	98,34
L5 (mm)	273
L6 (mm)	479,33

Fonte: Autor (2021)

As Figuras 41, 42 e 43 apresentam as tensões de membrana, flexão e tensões totais, respectivamente, atuantes no vaso, calculadas conforme a norma ASME, divisão VIII, apêndice 13.

Visto que a norma permite que a tensão total atuante no vaso seja de 2/3 a tensão de escoamento do material utilizado para sua construção, nesse caso a tensão máxima permitida para o tanque seria de 136,67 MPa, conforme mostra a equação (10). A fim de atender a este requisito, a pressão máxima que pode atuar no vaso seria de 6 KPa, conforme mostrado na Tabela 10.

$$Tensão\ permitida = 205 * \frac{2}{3} = 136,67\ MPa \quad (10)$$

5 CONCLUSÃO

O tanque de armazenamento de produto possui um papel importante no funcionamento de uma máquina de envase. Sabendo que o tanque foi projetado para atuar suportando apenas a pressão hidrostática do produto, neste trabalho buscou-se analisar a carga máxima suportada pelo tanque antes de sua ruptura. Além disso, foi analisada a influência da adição de barras de reforço externas no tanque na sua resistência à pressão interna.

A análise de tensões foi realizada de duas formas. A primeira delas se deu conforme a norma ASME, divisão VIII, apêndice 13, que trata de vasos de pressão com seção transversal não circular. Neste caso, a tensão máxima a qual o vaso poderia ser submetido é de $2/3$ a tensão de escoamento do material utilizado para a construção do equipamento. A tensão máxima permitida pela norma foi atingida a uma pressão interna de 6 KPa, além da pressão atmosférica, mostrando que, segundo a norma, o reservatório não deve ser utilizado com pressão interna atuante, visto que a somente a pressão hidrostática já submete o equipamento a uma pressão maior do que 6 KPa.

Na segunda análise, feita pelo método de elementos finitos, o limite máximo de tensão adotado foi a própria tensão de escoamento do material. Considerado isso, o tanque foi submetido a uma pressão interna de até 6 KPa, além da pressão hidrostática, onde atingiu a tensão máxima. Já ao reforçar a parte externa do tanque com barras, conforme mostrado na Figura 18, a pressão interna máxima suportada pelo reservatório, sobe para 10 KPa, suportando uma pressão interna positiva 67% maior do que a verificada no tanque não reforçado.

6 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros as seguintes linhas de pesquisa são sugeridas:

- Utilização de materiais alternativos para a construção do tanque;
- Analisar diferentes geometrias que possam ser utilizadas a fim de aumentar a pressão interna suportada;
- Analisar a influência da espessura de chapa utilizada na pressão interna suportada;
- Verificar maneiras alternativas de escoar o produto para fora do reservatório, evitando que seja necessário submetê-lo a pressão interna;
- Realizar ensaios e medições práticas, a fim de comparar os resultados obtidos pelas análises numéricas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COOK, Robert D. **Finite element modeling for stress analysis**. 1st. ed. USA: John Wiley & Sons, Inc., 1994.

ALVES FILHO, Avelino. **Elementos finitos: A base da tecnologia CAE**. 6 ed. São Paulo: Érica, 2013.

LOGAN, Daryl L. **A first course in the finite element method**. 4th ed. Canada: Thomson Canada Limited, 2007.

NARASIAH, G. Lakshmi. **Finite element analysis**. 1st ed. Índia: BS Publications, 2008.

JUVINALL, Robert C., MARSHEK, Kurt M. **Fundamentos do projeto de componentes de máquinas**. Tradução: Fernando Ribeiro da Silva e Paulo Pedro Kenedi. 5ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

UGURAL, A. C., 1981. **Stresses in Plates and Shells**. 1ª ed. USA: McGraw-Hill.

SILVA TELLES, Pedro C., 1996. **Vasos de pressão**. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC.

RADEȘ, Mircea. **Finite element analysis**. 1st ed. Romênia: Bucureste: Printech, 2006.

STARCZEWSKI, M. **Non-Circular Pressure Vessels**. British Engine Technical Report – Volume XIV, 1981.

TIMOSHENKO. S., WOINOWSKY-KRIEGER. S., 1959. **Theory of Plates and Shells**. 2ª ed. New York: McGraw-Hill.

ASME. 2019 **Boiler and Pressure Vessel Code**, Section VIII, Division I, Appendix 13, New York, 2019.

HARVEY. JOHN. F., 1997. **Theory & Design of Pressure Vessels**. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc.

FALCÃO, C.; “**Fadiga e Concentração de Tensões**”. In: Vasos de Pressão e Trocadores de Calor, Revisão 2008 ed., chapter 14, 2008.

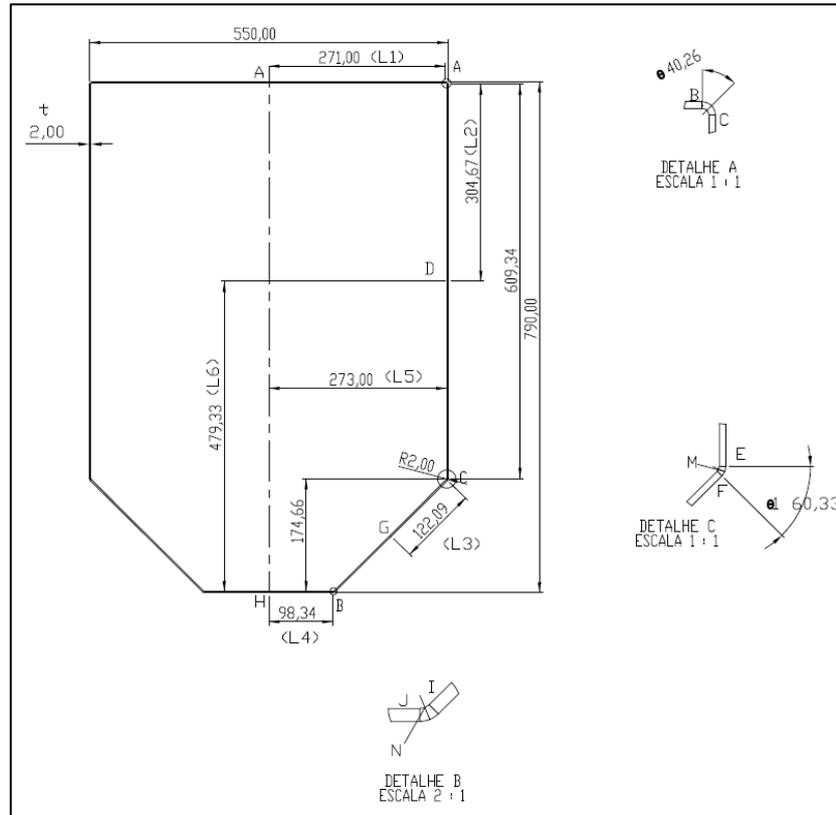
KUMAR, S.; GUPTA, S. S.; SINGH, A. K. An Experimental Design of Rectangular Pressure Vessel & Estimate Total Deformation and Equivalent Stresses using ANSYS. **International Research Journal of Engineering and Technology**, v. 06, p. 3723-3727, 2019.

BLACH, A. E.; HOA, V. S.; KWOK, C. K.; AHMED, A. K. W. Rectangular Pressure Vessels of Finite Length. **Journal of Pressure Vessel Technology**, v. 112, p. 50-56, 1990

APERAN. **Raio-X: Aços inoxidáveis 304 e 410**, 2019. Disponível em: <https://brasil.aperam.com/raio-x-acos-inoxidaveis-304-e-410/>. Acesso em 17 de junho de 2021.

APÊNDICE A – INTERPRETAÇÃO E ADAPTAÇÃO DAS EQUAÇÕES DA NORMA ASME, SEÇÃO VIII, DIVISÃO 1, APÊNDICE 13

Figura 38 - Seção transversal do tanque analisado



Fonte: Autor (2020)

Os termos abaixo descritos servem para simplificar as equações.

$$c = 1$$

$$M_D = PK_3$$

$$K_3 = -L_1^2(6\phi^2\alpha_3 - 3\pi\phi^2 + 6\phi^2 + \alpha_3^2 + 3\alpha_3^2 - 6\phi - 2 + 1,5\phi\alpha_3^2 + 6\phi\alpha_3) \cdot [3(2\alpha_3 + \pi\phi + 2)]^{-1}$$

$$\alpha_3 = \frac{L_2}{L_1}$$

$$\phi = \frac{R}{L_1}$$

$$M_r = M_D + P\{R[L_2\cos\theta - L_1(1-\text{sen}\theta)] + \frac{L_2^2}{2}\}$$

$$I = \frac{bt^3}{12}$$

$$M_A = M_D + \frac{P}{2}(L_2^2 + 2RL_2 - 2RL_1 - L_1^2)$$

PONTOS A, B, C E D TENSÕES DE MEMBRANA

$$Sm_A = Sm_B = \frac{P(R+L_2)}{t} \quad (22)$$

$$Sm_C = Sm_D = \frac{P(R+L_1)}{t} \quad (23)$$

$$Sm_{B-C} = \frac{P}{t}(\sqrt{L_2^2 + L_1^2} + R) \quad (24)$$

TENSÕES DE FLEXÃO

$$Sb_B = \frac{c}{2I_1} [2M_D + P(2RL_2 - 2RL_1 + L_2^2)] \quad (25)$$

$$Sb_A = \frac{c}{2I_1} [2M_D + P(L_2^2 + 2RL_2 - 2RL_1 - L_1^2)] \quad (26)$$

$$Sb_D = \frac{M_D \cdot c}{I_1} \quad (27)$$

$$Sb_C = \frac{c}{2I_1} (2M_D + PL_2^2) \quad (28)$$

$$Sb_{B-C} = \frac{M_D \cdot c}{I_1} = \frac{c}{2I_1} (2M_D + P\{2R[L_2 \cos\theta - L_1(1 - \sin\theta)] + L_2^2\}) \quad (29)$$

Sendo que Sb_{B-C} é máximo em $\theta = \tan^{-1}\left[\frac{L_1}{L_2}\right]$

TENSÃO TOTAL

$$ST_B = (22) + (25)$$

$$ST_A = (22) + (26)$$

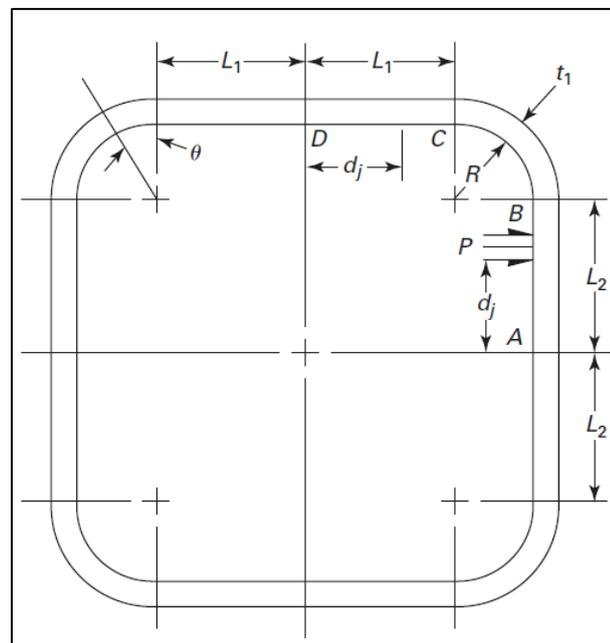
$$ST_C = (23) + (28)$$

$$ST_D = (23) + (27)$$

$$ST_{B-C} = (24) + (29)$$

Todas as equações descritas acima foram tiradas da página 464 (C) da norma ASME VIII, divisão 1, apêndice 13. As equações utilizadas se referem à seção representada pelo esboço *sketch* (3), mostrado na Figura 42 a seguir.

Figura 39 - Sketch (3) norma ASME VIII apêndice 13



Fonte: ASME VIII (2019)

PONTOS E, F, G, H, I E J

Os termos abaixo descritos servem para simplificar as equações.

$$C_M = L_2 + R \sin\theta_M$$

$$\theta_M = \tan^{-1}\left\{\frac{-L_2 S_1}{[2R^2 - RS_1 - L_5 t]}\right\}$$

$$S_1 = 2R + t$$

$$A_E = tp \dots A_E = t$$

$$E_M = R(1 - \cos\theta_M)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{L_6}{L_5}\right)$$

$$\beta_M = \tan^{-1}\left[\left(\frac{C_M}{L_5 - E\theta_1}\right)\right]$$

$$E\theta_1 = R(1 - \cos\theta_1)$$

$$O_{FI} = \sqrt{(L_5^2 + L_6^2)} - A_{FI}$$

$$A_{FI} = \left\{L_6 - \left[L_2 + R \tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right]\right\} \text{sen}\theta_1$$

$$C_N = L_6 - R - R \text{sen}\beta_N$$

$$\beta_N = \tan^{-1}\left[\left(\frac{L_6 - R}{L_2}\right)\right]$$

$$\theta_N = \tan^{-1}\left(\frac{C_N}{O_K}\right)$$

$$O_K = L_4 + R \cos\beta_N$$

$$W = \frac{P}{2}$$

$$C_1 = R^2(2\gamma^2 + 3\gamma\pi + 12)$$

$$C_3 = L_2 + R \text{sen}\theta_1$$

$$V_1 = t \text{sen}\theta_1$$

$$W_1 = t \cos\theta_1$$

$$G_{2Y} = L_3 \cos\theta_1$$

$$G_{2X} = L_3 \text{sen}\theta_1$$

$$C_{E1} = C_3 + N_1 - R$$

$$N_1 = L_6 - L_2$$

$$C_{E2} = E\theta_1 + M_1 - R$$

$$M_1 = L_5 - L_4$$

$$W_N = t \cos\beta_N$$

$$W_M = t \cos\theta_M$$

$$V_M = t \text{sen}\theta_M$$

$$F_N = R(1 - \text{sen}\beta_N)$$

$$V_N = t \text{sen}\beta_N$$

$$G_N = R \cos\beta_N$$

$$J_2 = \frac{t}{2} + M_1$$

TENSÃO DE MEMBRANA

$$Sm_D = Sm_E = PL_5/A_E \quad (30)$$

$$Sm_M = \left(\frac{P}{A_e}\right) \sqrt{C_M^2 + (L_5 - E_M)^2} \cdot \cos(\theta_M - \beta_M) \quad (31)$$

$$Sm_F = Sm_G = Sm_I = PpO_{FI}/A_E \quad (32)$$

$$Sm_N = \left(\frac{P}{A_e}\right) \sqrt{(C_N^2 + O_K^2)} \cdot \cos(\theta_N - \beta_N) \quad (33)$$

$$Sm_J = Sm_H = PpL_6/A_E \quad (34)$$

TENSÃO DE FLEXÃO

$$Sb_D = \frac{M_D \cdot c}{I_1} \quad (35)$$

$$Sb_E = \frac{c}{I_1} (M_D + WL_2^2 - 2L_5W) \quad (36)$$

$$Sb_F = \frac{c_1}{I_1} \{M_D + W[C_3^2 + C_3V_1 + E\theta_1^2 - E\theta_1W_1 - L_5(2E\theta_1 + t - W_1 + 2)]\} \quad (37)$$

$$Sb_G = \frac{c}{I_1} \{M_D + W[(C_3 + G_{2Y})^2 + (C_3 + G_{2Y})V_1 + (E\theta_1 + G_{2X})^2 - (E\theta_1 + G_{2X})W_1 - 2L_5(\frac{t}{2}(1 - \cos\theta_1) + E\theta_1 + G_{2X})]\} \quad (38)$$

$$Sb_I = \frac{c}{I_1} \{M_D + W[CE_1^2 + CE_1V_1 + CE_2^2 - CE_2W_1 - 2L_5(\frac{t}{2}(1 - \cos\theta_1) + CE_2)]\} \quad (39)$$

$$Sb_J = \frac{c}{I_1} [M_D + W(L_6^2 + L_6t + M_1^2 - 2L_5J_2)] \quad (40)$$

$$Sb_H = \frac{c}{I_1} \{M_D + W[L_6^2 + L_6t + 2L_6 - L_5^2 - 2L_5(\frac{t}{2})]\} \quad (41)$$

$$Sb_N = \frac{c}{I_1} \{M_D + W[(L_6 - F_N)^2 + V_N(L_6 - F_N + (M_1 - G_N)^2 - W_N(M_1 - G_N) - L_5(2 + t + 2M_1 - 2G_N - W_N))]\} \quad (42)$$

$$Sb_M = \frac{c}{I_1} \{M_D + W[C_M^2 + C_MV_M + E_M^2 - E_MW_M - L_5(2E_M + t - W_M + 2)] \quad (43)$$

TENSÃO TOTAL

$$ST_D = (30) + (35)$$

$$ST_E = (30) + (36)$$

$$ST_F = (32) + (37)$$

$$ST_G = (32) + (38)$$

$$ST_I = (32) + (39)$$

$$ST_J = (34) + (40)$$

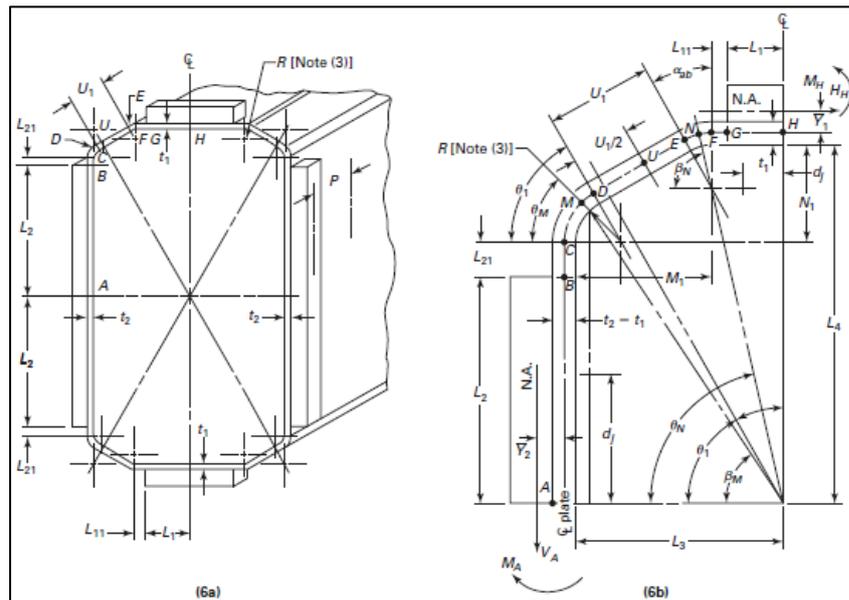
$$ST_H = (34) + (41)$$

$$ST_M = (31) + (43)$$

$$ST_N = (33) + (42)$$

Todas as equações descritas acima foram retiradas da página 468 da norma ASME VIII, divisão 1, apêndice 13. As equações utilizadas se referem à seção representada pelo esboço *sketch* (6), mostrado na Figura 43 a seguir.

Figura 40 - Sketch (6) da norma ASME VIII apêndice 13



Fonte: ASME VIII (2019)

APÊNDICE B – RESULTADOS DE TENSÕES CALCULADOS ATRAVÉS DA NORMA ASME

Figura 41 – Tensões de membrana atuantes na seção transversal do tanque conforme norma ASME

TENSÕES DE MEMBRANA (MPa)	
PONTOS A e B	
Sm(A-B)	0,92
PONTOS C - D - E	
Sm(C-D-E)	0,82
CANTO B - C	
Sm(B-C)	1,23
PONTO M	
Sm(M)	1,12
PONTOS F - G - I	
Sm(F-G-I)	1,20
PONTOS J - H	
Sm(J-H)	1,44
PONTO N	
Sm(N)	1,36

Fonte: Autor (2021)

Figura 42 - Tensões de flexão atuantes na seção transversal do tanque conforme norma ASME

TENSÕES DE FLEXÃO (MPa)	
PONTO A	
Sb(A)	24,64
PONTO B	
Sb(B)	57,69
PONTO C	
Sb(C)	57,63
PONTO D	
Sb(D)	15,86
CANTO B-C	
Sb(B-C)	57,88
PONTO E	
Sb(E)	57,39
PONTO F	
Sb(F)	57,73
PONTO G	
Sb(G)	55,38
PONTO I	
Sb(I)	90,21
PONTO J	
Sb(J)	133,17
PONTO H	
Sb(H)	86,33
PONTO N	
Sb(N)	69,69
PONTO M	
Sb(M)	57,65

Fonte: Autor (2021)

Figura 43 - Tensões totais atuantes na seção transversal do tanque conforme norma ASME

TENSÕES TOTAIS (MPa)	
ST(A)	25,56
ST(B)	58,61
ST(C)	58,45
ST(D)	16,68
ST(B-C)	59,11
ST(E)	58,21
ST(F)	58,93
ST(G)	56,58
ST(I)	91,42
ST(J)	134,60
ST(H)	87,77
ST(M)	58,77
ST(N)	71,05

Fonte: Autor (2021)

APÊNDICE C – TABELAS UTILIZADAS PARA REALIZAÇÃO DOS CÁLCULOS ANALÍTICOS PARA VALIDAÇÃO DA ANÁLISE NUMÉRICA

TABLE 35. DEFLECTIONS AND BENDING MOMENTS IN A UNIFORMLY LOADED RECTANGULAR PLATE WITH BUILT-IN EDGES (FIG. 91)
 $\nu = 0.3$

b/a	$(w)_{x=0,y=0}$	$(M_x)_{x=a/2,y=0}$	$(M_y)_{x=0,y=b/2}$	$(M_x)_{x=0,y=0}$	$(M_y)_{x=0,y=0}$
1.0	$0.00126qa^4/D$	$-0.0513qa^2$	$-0.0513qa^2$	$0.0231qa^2$	$0.0231qa^2$
1.1	$0.00150qa^4/D$	$-0.0581qa^2$	$-0.0538qa^2$	$0.0264qa^2$	$0.0231qa^2$
1.2	$0.00172qa^4/D$	$-0.0639qa^2$	$-0.0554qa^2$	$0.0299qa^2$	$0.0228qa^2$
1.3	$0.00191qa^4/D$	$-0.0687qa^2$	$-0.0563qa^2$	$0.0327qa^2$	$0.0222qa^2$
1.4	$0.00207qa^4/D$	$-0.0726qa^2$	$-0.0568qa^2$	$0.0349qa^2$	$0.0212qa^2$
1.5	$0.00220qa^4/D$	$-0.0757qa^2$	$-0.0570qa^2$	$0.0368qa^2$	$0.0203qa^2$
1.6	$0.00230qa^4/D$	$-0.0780qa^2$	$-0.0571qa^2$	$0.0381qa^2$	$0.0193qa^2$
1.7	$0.00238qa^4/D$	$-0.0799qa^2$	$-0.0571qa^2$	$0.0392qa^2$	$0.0182qa^2$
1.8	$0.00245qa^4/D$	$-0.0812qa^2$	$-0.0571qa^2$	$0.0401qa^2$	$0.0174qa^2$
1.9	$0.00249qa^4/D$	$-0.0822qa^2$	$-0.0571qa^2$	$0.0407qa^2$	$0.0165qa^2$
2.0	$0.00254qa^4/D$	$-0.0829qa^2$	$-0.0571qa^2$	$0.0412qa^2$	$0.0158qa^2$
∞	$0.00260qa^4/D$	$-0.0833qa^2$	$-0.0571qa^2$	$0.0417qa^2$	$0.0125qa^2$

Fonte: Timoshenko (1959)

TABLE 36. DEFLECTIONS AND BENDING MOMENTS IN RECTANGULAR PLATES WITH BUILT-IN EDGES AND HYDROSTATIC LOAD (FIG. 92)
 $\nu = 0.3$

$\frac{b}{a}$	$x = 0, y = 0$			$x = a/2, y = 0$	$x = -a/2, y = 0$	$x = 0, y = \pm b/2$
	$w = \alpha \frac{qa^4}{D}$	$M_x = \beta_1 qa^2$	$M_y = \beta_2 qa^2$	$M_x = \gamma_1 qa^2$	$M_x = \gamma_2 qa^2$	$M_y = \delta qa^2$
	α	β_1	β_2	γ_1	γ_2	δ
0.5	0.000080	0.00198	0.00515	-0.0115	-0.0028	-0.0104
$\frac{2}{3}$	0.000217	0.00451	0.00817	-0.0187	-0.0066	-0.0168
1.0	0.00063	0.0115	0.0115	-0.0334	-0.0179	-0.0257
1.5	0.00110	0.0184	0.0102	-0.0462	-0.0295	-0.0285
∞	0.00130	0.0208	0.0063	-0.0500	-0.0333	

Fonte: Timoshenko (1959)